Высшая математика

Г.И.Архипов В.А.Садовничий
В.Н.Чубариков

Лекции по математическому анализу

Высшая школа

Г.И.Архипов В.А.Садовничий
В.Н.Чубариков

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов университетов
и педагогических вузов

Москва
«Высшая школа» 1999

УДК 517
ББК 22.161
А87

Федеральная целевая
программа книгоиздания России

Р е ц е н з е н т:
академик РАН С.М. Никольский (МИАН им. В.А. Стеклова)

Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.
А87 Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк. 1999. — 695 с.

ISBN 5-06-003596-4

Книга является учебником по курсу математического анализа и посвящена дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных. В ее основу положены лекции, прочитанные авторами на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

В учебнике предложен новый подход к изложению ряда основных понятий и теорем анализа, а также и к самому содержанию курса.

Для студентов университетов, педагогических вузов и вузов с углубленным изучением математики.

ISBN 5-06-003596-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

В России исторически сложилось так, что представление об образовании включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного богатства человека.

Формулируя задачи образования, академик А. Н. Крылов говорил: "Школа не может дать вполне законченного знания; главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе *научится учиться*, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой."

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей.

Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает.

Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации избранные учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Книга Г. И. Архипова, В. А. Садовничего, В. Н. Чубарикова "Лекции по математическому анализу" является учебником по курсу математического анализа и посвящена дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных. В ее основу положены лекции, прочитанные авторами на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. В учебнике предложен новый подход к изложению ряда основных понятий и теорем анализа, а также и к самому содержанию курса. Она доступна широкому кругу читателей, а первая ее часть может быть использована при изучении ряда тем по алгебре и началам математического анализа в математических школах.

Предполагается также издать учебники И. М. Виноградова "Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)", И. И. Привалова "Введение в теорию функций комплексного переменного", В. А. Садовничего

"Теория операторов", С. Б. Гашкова, В. Н. Чубарикова "Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений" и др.

Надеюсь, что данные книги положат начало новой серии базовых учебников по высшей математике для вузов с повышенным уровнем математической подготовки.

Кроме практической ценности эта серия призвана подвести некоторые итоги работы российских ученых и педагогов-математиков по созданию базовых учебников по математике на рубеже второго и третьего тысячелетий. Серия не ограничивается указанными книгами. В дальнейшем предполагается продолжить отбор и издание как современных, так и классических учебников, которые отвечают изложенной выше концепции, не потеряли своей новизны и актуальности и пользуются заслуженной популярностью и авторитетом у студентов и педагогов.

Академик
Российской академии наук
В. А. Садовничий

ЧАСТЬ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Изложение предмета математического анализа ставит задачу определения содержания курса в объеме, допускающем усвоение аудиторией основных его элементов. Многое здесь зависит от формы, в которой преподносится материал курса, поскольку слово, идущее от ощущений к представлениям, от представлений к понятиям, от понятий к суждениям, от суждений к умозаключениям будет гораздо интереснее, доступнее и удобнее для восприятия, чем изложение, опирающееся на сухие суждения и отвлеченные умозаключения.

В основу данной части книги положены лекции первого из четырех семестров основного курса математического анализа, читаемого авторами в течение последних лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Ее содержание охватывает дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Следует обратить внимание на существенное различие между стилем изложения в учебнике и конспекте лекций. Дело в том, что в учебнике, как правило, доказательство утверждений подготавливается предварительными разъяснениями и примерами, в то время как конспект, в основном, включает в себя формулировки и доказательства. В связи с этим при подготовке курса лекций среди прочих решается и задача выделения необходимого минимума сопутствующего материала, обеспечивающего усвоение основного содержания. Мы стремились соединить доступность изложения, свойственную учебнику, с краткостью конспекта. С математического анализа как учебной дисциплины начинается процесс обучения высшей математике в вузе. Обилие и сложность новых понятий при этом часто подавляют творческое восприятие содержания курса. Для того чтобы правильно сориентировать читателя, мы сознательно допускаем определенную категоричность суждений, имея в виду, что в процессе обучения он сам разберется во всем многообразии связей между различными аспектами предмета.

Преподавание математического анализа в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова подчинено особым требованиям, обусловленным необходимостью подготовки высококвалифицированных специалистов, способных в будущем не только получать новые научные результаты, но и в значительной степени определять мировое развитие математики. В силу этого курс математического анализа, как основа всего математического образования, должен характеризоваться широтой охвата материала, строгостью и полнотой доказательств. Он должен учитывать современные тенденции развития математики и в то же время отличаться определенным консерватизмом, продолжая традиции преподавания, которые обеспечивают преемственность в сохранении передовых позиций отечественной математической школы. Курс анализа также призван подготовить учащихся к восприятию более глубоких математических понятий.

Авторы стремились прежде всего облегчить процесс усвоения знаний за счет доступного изложения и упрощения доказательств. Здесь следует заметить, что краткость доказательства не всегда говорит о его простоте. Иногда более короткое доказательство бывает малодоступно и, по существу, затрудняет усвоение материала. В то же время, мы исходим из того, что доказательство утверждений и примеры должны отличаться живостью, интересом, убедительностью и особенно краткостью. Для более краткой записи рассуждений и утверждений часто используют символику кванторов. Однако она затрудняет непосредственное восприятие материала и ограничивает возможность следить за логикой рассуждений. Мы стараемся не злоупотреблять этой символикой, чтобы упростить сопоставление отвлеченных понятий со сходными явлениями из внешнего, доступного нашим чувствам, мира, сделать понятия более наглядными.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Первые лекции по каждому из предметов, с которых начинается преподавание высшей математики на первом курсе университета (как правило, это математический анализ, алгебра и аналитическая геометрия), бывают посвящены изложению основ теории множеств. Подобный параллелизм создает у части студентов неверное впечатление о предмете математики в целом и затрудняет восприятие материала. К тому же положение усугубляется непривычной абстрактностью этих новых понятий. К сожалению, выделение их в рамки одного предмета представляется нецелесообразным, поскольку в каждой дисциплине факты из теории множеств приводятся в расчете на излагаемый материал. Обычно в той или иной форме на эту особенность обращается внимание.

Мы выражаем глубокую благодарность Ф. М. Малышеву и А. М. Полосуеву за многочисленные полезные замечания по содержанию первой части книги.

Глава I
ВВЕДЕНИЕ

Лекция 1

§ 1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Мы приступаем к изучению курса математического анализа. Под термином "математический анализ" подразумевается прежде всего дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем в XVII в., хотя некоторые основные понятия анализа сформировались гораздо раньше. Сейчас его в значительной степени рассматривают как устоявшуюся учебную дисциплину. Однако из сказанного не следует делать вывод, что в математическом анализе не осталось тем для научных исследований и глубоких открытий. Дело в том, что составные части математического анализа настолько разрослись, что давно превратились в отдельные математические дисциплины, такие, как теория функций действительного переменного (ТФДП), теория функций комплексного переменного (ТФКП), теория вероятностей, дифференциальные уравнения, математическая статистика, уравнения в частных производных, уравнения математической физики, вычислительная математика и т.д. В широком смысле математический анализ включает в себя все эти области, т. е. почти всю математику.

В узком же смысле, как учебная дисциплина, математический анализ представляет собой составную и, пожалуй, бо́льшую долю той части математического знания, которая сейчас является общей для всех современных математических дисциплин. И потому понятна та совершенно исключительная роль, которую играет математический анализ в математическом образовании. Он, по существу, является фундаментом математических знаний.

Не будет преувеличением сказать, что стержневое понятие всего курса анализа — это понятие предела во всевозможных его проявлениях. В общих чертах вы с ним уже знакомы из школьной математики. Тем не менее получить совершенно ясное и отчетливое представление о пределе — самая большая трудность при изучении всего курса анализа и самый важный его момент. Так как понятие предела является начальным понятием анализа, то к его изучению мы приступим очень скоро.

Каждый должен и может овладеть этим понятием. Тот, кто этого не сделает, освоить курс не сможет, так как вся оставшаяся часть курса анализа будет представлять собой использование понятия предела в различных ситуациях. Для тех, кто овладеет этим понятием, в дальнейшем при изучении основного курса потребуется в большей степени усердие, чем способности.

Понятие предела является главным, но, разумеется, не единственным понятием анализа. Оно само опирается на понятия множества, отображения и функции. Наше изучение мы и начнем с этих понятий.

Определение 1. Множество — *это совокупность объектов любой природы.*

Посмотрим на это определение внимательно. На первый взгляд, оно никуда не годится, поскольку вводимое понятие, т.е. "множество", определяется через четыре (!) других понятия, никак нами не определенных. Однако это не совсем так. Дело в том, что назначение определений — это вовсе не наведение логической строгости как таковой. Устанавливать логическую строгость требуется только там, где *нестрого* введенные понятия приводят к недоразумениям.

А как решить, что ведет к недоразумениям, а что нет? У современной математики есть только такие средства: логический анализ, практика и интуиция.

Имеется два типа определений: 1) логически строгое сведение определяемого объекта к уже введенным понятиям; 2) описательное определение с помощью слов разговорного языка.

Определение *множества* есть определение второго типа. В математике предпочитается, конечно, первый тип определений, но, увы, начальные понятия, к которым и относится понятие множества, приходится вводить описательно. Это плохо по многим причинам, и прежде всего потому, что приводит к противоречиям (есть так называемые парадоксы теории множеств). Однако иного подхода не найдено и приходится доверяться интуиции. Здравый смысл подсказывает, что по-другому и вообще нельзя сделать ([19]. С. 352–403).

Определение 2. *Объекты, образующие в своей совокупности данное множество, называются его* **элементами** *или* **точками**.

Для обозначения различных множеств мы чаще всего будем использовать заглавные (прописные) буквы латинского алфавита, а для обозначения элементов этих множеств — малые (строчные) буквы.

Определение 3. *Два множества X и Y называются* **равными**, *если они состоят из одних и тех же элементов.*

Это записывают так:

$$X = Y \quad \text{или} \quad Y = X.$$

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут:

$$a \in A \quad (\text{или} \quad A \ni a).$$

Если a не принадлежит A, то этот факт записывают в виде:

$$a \notin A \quad (\text{или} \quad a \bar{\in} A).$$

Определение 4. *Если все элементы множества B принадлежат множеству A, то B называется* **подмножеством** *множества A и пишут:*

$$B \subset A \quad (\text{или} \quad A \supset B).$$

Очевидно, что если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.

Обычно удобнее рассматривать все множества, участвующие в каком-либо рассуждении, как подмножества некоторого фиксированного множества E, которое мы будем называть **универсальным.** Таким образом,

$$A \subset E \text{ для любого множества } A.$$

Для того чтобы с определенностью говорить о каком-либо множестве A (являющемся, как мы договорились, подмножеством E), мы должны иметь четкий критерий, правило, условие, свойство, которое дает возможность установить, какие именно элементы входят в A. Если обозначить это условие через α, то тот факт, что условие α порождает множество A, будем записывать следующим образом:

$$A = \{a \in E | \alpha\}.$$

Читается это так: множество A совпадает с множеством тех элементов (из множества E), которые удовлетворяют условию α.

Может оказаться, что для некоторого свойства α во всем множестве E вообще нет элементов, ему удовлетворяющих. Для единообразия считают, что и в этом случае запись

$$A = \{a \in E | \alpha\}$$

определяет особое множество, называемое **пустым множеством**. Пустое множество не содержит ни одного элемента. Оно обозначается символом $\varnothing$. В наших обозначениях можно записать, например, так:

$$\varnothing = \{a \in E | a \neq a\}.$$

Здесь α — это свойство, что $a \neq a$.

Для краткости вместо некоторых часто употребляемых выражений общепринято использовать особые математические значки, называемые **кванторами**:

$\exists$ — "существует";

$\exists!$ — "существует строго один элемент" или "существует единственный элемент";

$\forall$ — "для всякого", "для всех";

$\Rightarrow$ — "справедливо", "следует", "имеет место".

В качестве примера в этих обозначениях запишем следующее утверждение:

$$\forall A \subset E \Rightarrow \varnothing \subset A.$$

Здесь утверждается, что пустое множество является подмножеством любого множества из E. Это утверждение следует из наших определений, так как оно означает, что если элемент принадлежит $\varnothing$, то он принадлежит A, что действительно так, поскольку в пустом множестве $\varnothing$ вообще нет ни одного элемента и для доказательства справедливости этого утверждения его не надо проверять ни для одного элемента.

Определение 5. *Множество C называется* **объединением** (*или* **суммой**) *множеств A и B, если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из указанных множеств.*

Объединение C множеств A и B обозначается так:

$$C = A \cup B.$$

Свойства: $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Определение 6. **Пересечением** *множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и A, и B, т.е. элементов, общих для этих множеств.*

Свойства: $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Заметим, что доказать равенство двух множеств — это значит доказать, что всякий элемент x, принадлежащий правой части равенства, принадлежит и левой, и наоборот.

Для произвольной совокупности множеств A_α, где α пробегает все элементы некоторого множества I, пишут

$$C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} A_\alpha,$$

если C есть объединение всех множеств $A\alpha$, $\alpha \in I$.

Аналогично, $C = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$, если C — пересечение всех множеств A_α.

Определение 7. Разностью $C = A \setminus B$ *двух множеств* A *и* B *называется множество, состоящее из всех элементов* A*, не принадлежащих* B.

Множество $A' = E \setminus A$ называется **дополнением** A или **дополнением до** E **множества** A. Если множество индексов I — есть просто множество натуральных чисел, т.е. натуральный ряд $1, 2, 3, \ldots$, то его обозначают $I = \mathbb{N}$, а вместо $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ и $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ пишут $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 8. Симметрической разностью $C = A \triangle B$ *двух множеств* A *и* B *назовем множество*

$$C = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Свойства операций над множествами

$1^0.A \subset A.$

$2^0.A \subset B,\ B \subset A \ \Rightarrow\ A = B.$

$3^0.A \subset B,\ B \subset C \ \Rightarrow\ A \subset C.$

$4^0.\varnothing \subset A\ \forall A.$

$5^0.\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup\limits_{\alpha}(A_\alpha \cap B).$

$6^0.\left(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap\limits_{\alpha}(A_\alpha \cup B).$

$7^0.A \subset B \ \Rightarrow\ A \cup B = B,\ A \cap B = A.$

$8^0.A \cup A' = E,\ A \cap A' = \varnothing.$

$9^0.\varnothing' = E, E' = \varnothing.$

$10^0.\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)' = \bigcap\limits_{\alpha} A'_\alpha.$

$11^0.\left(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha\right)' = \bigcup\limits_{\alpha} A'_\alpha.$

$12^0.A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

Все эти свойства доказываются весьма просто. Покажем для примера, каким образом доказывается последнее свойство. Нам надо доказать, что если

$$C_1 = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{и} \quad C_2 = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

то $C_1 = C_2$. Это значит, что надо доказать утверждения:

1) $\forall a \in C_1 \ \Rightarrow\ a \in C_2$, откуда имеем $C_1 \subset C_2$;

2) $\forall a \in C_2 \ \Rightarrow\ a \in C_1$, т.е. $C_2 \subset C_1$.

Мы ограничимся только доказательством утверждения 1, т. е. что $C_1 \subset C_2$. Пусть $a \in C_1$. Тогда $a \in A \cup B$, но $a \notin A \cap B$. Но если $a \in A \cup B$, то или $a \in A$, или $a \in B$. Рассмотрим первый случай, т.е. $a \in A$. В этом случае $a \notin B$, так как иначе было бы $a \in A \cap B$, что неверно. Тогда $a \in A \setminus B$, откуда $a \in C_2 = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, что и требовалось доказать. В первом случае справедливость соотношения

$C_1 \subset C_2$ мы доказали. Второй случай разбирается точно так же, только A и B меняются местами. Поэтому всегда имеем $C_1 \subset C_2$.

Следующим после множества и тоже важнейшим понятием математики является понятие отображения, а также эквивалентное ему понятие функции. Но сначала мы дадим определение декартова произведения множеств.

Определение 9. Декартовым произведением *$C = A \times B$ множеств A и B называют множество всех возможных пар (x, y), где первый элемент x каждой пары принадлежит A, а второй ее элемент y принадлежит B.*

Определение 10. *Подмножество F декартова произведения двух множеств $A \times B$ называется* **отображением** *множества A в множество B, если выполнено следующее условие:*

$$\forall x \in A \quad \exists! \text{ пара } (x, y) \in F.$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда подмножество $F = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ множества $A \times B$ является отображением, а подмножество $\Phi = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ не является отображением.

Понятия "отображение" и "функция" — синонимы. Они несколько отличаются только буквенной символикой и сферами употребления. Мы будем гораздо чаще употреблять термин "функция". Тот факт, что F является отображением A в B, записывают так:

$$F : A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{F} B.$$

Определение 11. *Пусть отображение $F : A \to B$ определяется следующим образом: $\forall x \in A$ $\exists!$ $y \in B$, такое, что $(x, y) \in F$. Тогда элемент $y \in B$ называется* **образом x при отображении** *F и это записывается так:*

$$y = F(x).$$

Элемент x называется **прообразом** (одним из возможных) **элемента** y.

Множество $F(A)$ всех элементов $F(x)$ $\forall x \in A$ называется **образом множества** A при отображении F, т. е.

$$F(A) = \{y \in B | y = F(x), \ x \in A\}.$$

Для множества $C = F(A)$ само множество A при отображении F называется **(полным) прообразом** множества C.

Как уже говорилось, термины "отображение" и "функция" — синонимы, но при употреблении слова "функция" вся терминология обычно меняется. Множество A называется **областью определения**, а множество $F(A) \subset B$ — **множеством** (или **областью**) **значений**. Каждый элемент $x \in A$ называется **значением аргумента** (или просто аргументом), а элемент $y = F(x)$ — **значением функции в точке** x.

Для того чтобы конкретно задать какое-либо отображение, т. е. функцию, надо, вообще говоря, определить способ (правило), как из всего декартова произведения $A \times B$ выбрать множество F с нужными свойствами. Указание этого способа, по существу, и задает функцию. Поэтому для функции очень часто дается следующее определение:

Определение 12. Функцией F *называется правило, по которому каждому элементу* $x \in A$ *ставится в соответствие строго один элемент* y *множества* B. *При этом пишут* $y = F(x)$.

Недостатком этого определения является то обстоятельство, что функцией оказывается правило, а не множество, как в предыдущем случае, что неестественно, так как из школьного курса математики известно, что функции можно складывать, умножать и выполнять с ними другие арифметические операции.

Считается, что употребление термина "отображение" больше свойственно геометрическому стилю изложения, а термина "функция" — аналитическому стилю.

Некоторые типы отображений. Обратная функция. Взаимно однозначное соответствие

1. Отображение F называется **сюръективным**, или **отображением "на"** (т.е. отображением A на B), **накрытием**, если $F(A) = B$.

2. Отображение F называется **инъективным**, или **вложением**, если у каждой точки $y = F(x)$ существует строго один прообраз, т.е. из условия $y = F(x_1) = F(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

3. Отображение F называется **биективным**, или **взаимно однозначным**, если оно является накрытием и вложением одновременно. В этом случае отображению $F : A \to B$ можно поставить в соответствие обратное отображение $F^{-1} : B \to A$ по правилу: вместо пар (x, y) в декартовом произведении $A \times B$ надо рассмотреть соответствующие пары (y, x) из $B \times A$, поменяв x и y местами. Очевидно, что F^{-1} — это также отображение. Кроме того,
$F^{-1}(F(x)) = x \ \forall x \in A$ и $F(F^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$.

Биективное отображение называется еще **взаимно однозначным соответствием** или **биективным соответствием**.

Лекция 2

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА. СЧЕТНЫЕ И НЕСЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА. МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА

Понятие взаимно однозначного соответствия играет большую роль при перенесении представления о "количестве" элементов множества с конечных множеств на бесконечные. Это необходимо, поскольку мы постоянно имеем дело с бесконечными множествами. Вот некоторые из них.

$\mathbb{N}$ — множество всех чисел натурального ряда;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел (положительные, отрицательные целые числа и нуль);

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел на прямой;

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — множество точек на координатной плоскости.

О количестве точек множества можно говорить только для конечных множеств, а для бесконечных — нельзя. В этом случае говорят о мощности множества. Таким образом, *мощность множества* — это понятие, которое обобщает понятие "количество элементов" на случай бесконечных множеств. Если же множество конечно, то термины "мощность множества" и "количество элементов множества" — синонимы.

Определение 1. *Множества A и B называются* **эквивалентными** *или* **равномощными**, *если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Это обозначается так: $A \sim B$.*

Свойства: 1) $A \sim A$; 2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$; 3) $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Другими словами, можно биективно отобразить одно множество на другое. Если A и B эквивалентны, то говорят еще, что они имеют одинаковую мощность.

Приведем важный пример эквивалентности бесконечных множеств.

Утверждение 1. *Множество $\mathbb{N}$ (натуральных чисел) и множество $\mathbb{Q}$ (рациональных чисел, т.е. всех дробей $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$) эквивалентны.*

Здесь символом (m, n) обозначен наибольший общий делитель чисел m и n.

Доказательство. Достаточно показать, как присвоить собственный номер каждому рациональному числу. Для этого представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби:

$$r = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}, \ (p,q) = 1.$$

Такое представление единственно. Высотой рационального числа $r = p/q$ назовем величину $|p| + q = h$. Эта высота сама является натуральным числом, т.е. принимает значения 1,2,3, ... и т.д. При фиксированном $h > 1$ существует не более $2h$ различных несократимых дробей, так как тогда знаменатель q может принимать значения $1, 2, \ldots, h-1$ (число которых равно $h-1$), а для данного q числитель p числа r может принимать не более двух значений: $\pm(h-q)$ (точнее, либо два, если дробь p/q получается несократимой, либо ноль, если она — сократима, так как тогда она имеет другое значение q в представлении в виде несократимой дроби). Таким образом, с данной высотой h число рациональных чисел не более $2(h-1) < 2h$.

Будем нумеровать дроби в порядке возрастания h; при фиксированном h в порядке возрастания q, а при фиксированных h и q — в порядке возрастания p. Тогда получим

$$
\begin{array}{lll}
r_1 = \dfrac{0}{1} = 0 & & (h=1), \\[2mm]
r_2 = \dfrac{-1}{1} = -1, & r_3 = \dfrac{1}{1} = 1 & (h=2), \\[2mm]
\left.\begin{array}{l} r_4 = \dfrac{-2}{1} = -2, \\[2mm] r_6 = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} r_5 = \dfrac{2}{1} = 2, \\[2mm] r_7 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} & (h=3), \\[2mm]
\left.\begin{array}{l} r_8 = \dfrac{-3}{1} = -3, \\[2mm] r_{10} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}, \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} r_9 = \dfrac{3}{1} = 3, \\[2mm] r_{11} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} & (h=4)
\end{array}
$$

и т.д. Ясно, что каждое рациональное число когда-нибудь получит свой порядковый номер. При этом все номера $1, 2, 3, \ldots$ будут использованы и разные рациональные числа получат разные номера. Тем самым построено взаимно однозначное соответствие множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$. Утверждение 1 доказано полностью.

Определение 2. *Всякое множество, эквивалентное (равномощное) множеству натуральных чисел, называется* **счетным** *множеством.*

Таким будет, как мы показали, множество рациональных чисел.

Утверждение 2. *Всякое непустое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Доказательство. Занумеруем элементы счетного множества и перенумеруем затем элементы подмножества в порядке возрастания этих номеров. Если мы исчерпаем все подмножество на конечном шаге, то оно конечно, иначе — счетно.

Утверждение 3. *Сумма конечного или счетного числа счетных множеств счетна.*

Доказательство. Проведем нумерацию элементов суммы множеств по следующей схеме:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
A_1 := (& a_{11}, & & a_{12}, & \rightarrow & a_{13}, & & \ldots), \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
A_2 := (& a_{21}, & & a_{22}, & & a_{23}, & & \ldots), \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
A_3 := (& a_{31}, & & a_{32}, & & a_{33}, & & \ldots), \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

и т.д. (при этом пропускаем уже встречавшиеся элементы). За $2r^2$ шагов будут заведомо занумерованы все элементы $a_{k,l}$, $k + l \leq r$. Доказательство закончено.

Обратим внимание, что бесконечные множества, рассмотренные в утверждениях 1 – 3, оказались равномощными, точнее, счетными. Но не все бесконечные множества равномощны. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Совокупность $Z = \Omega(X)$ всех подмножеств любого множества X сама образует множество, не эквивалентное X.*

Эта теорема (точнее, ее модификация: $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$) была доказана Г. Кантором (1845–1918) в 1874 г.

Доказательство будем вести от противного. Пусть $Z \sim X$. Значит, имеется биективное соответствие $X \xrightarrow{F} Z$. Тогда, если $a \in X$, то ему однозначно соответствует $A \in Z$, т.е. $F(a) = A$, $F^{-1}(A) = a$. Теперь всякую точку $a \in X$ назовем *правильной,* если она принадлежит своему образу, т.е., если $a \in F(a)$. В противном случае эту точку a мы будем называть *особой* точкой. Назовем *дефектом* множество $D \subset X$, состоящее из всех особых точек $a \in X$. Тогда ясно, что D является элементом множества Z. В силу наличия взаимно однозначного соответствия F между X и Z найдется такая точка $d \in X$, что $F(d) = D$. При этом сама точка d обязана быть либо правильной, либо особой. Но первое не имеет места, поскольку тогда бы по определению правильной точки она принадлежала бы $D = F(d)$, что невозможно, так как ко множеству D по построению отнесены только особые точки. Но второй случай приводит к противоречию, так как тогда по определению особой точки $d \notin F(d) = D$, а, с другой стороны, тогда точка d как особая точка должна войти в дефект D по его построению.

Таким образом, предположение о существовании биекции между Z и X во всех случаях ведет к противоречию, т.е. $Z \not\sim X$. Доказательство закончено.

Следует отметить, что как результат, так и доказательство теоремы 1 справедливы и в том частном случае, когда X есть пустое множество $\varnothing$. Тогда мощность множества X равна 0, а множество $Z = \Omega(X)$ состоит ровно из одного элемента, т.е. самого X и поэтому его мощность равна $1 = 2^0$. Заметим еще, что для конечного множества X, состоящего из k элементов, мощность множества $Z = \Omega(X)$ равна в точности 2^k.

Определение 3. *Бесконечное множество называется* **несчетным**, *если оно не эквивалентно* $\mathbb{N}$.

По теореме 1 несчетным множеством, например, является множество подмножеств $\mathbb{N}$, а значит, множество последовательностей, составленных из 0 и 1 (k-й член последовательности равен 1 или 0, в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит число k подмножеству).

Прием, с помощью которого мы доказали теорему 1, называется *канторов диагональный процесс*. Впервые он был применен Г. Кантором в 1874 г. при доказательстве несчетности точек на отрезке. Этот процесс называется диагональным, потому что если в теореме 1 в качестве X взять натуральный ряд $\mathbb{N}$, то получится, что множество подмножеств, т.е. совокупность последовательностей, составленных из нулей и единиц, не эквивалентно X. Доказательству теоремы 1 в этом случае можно придать такой вид.

Предположим, что $\mathbb{N} \sim Z = \Omega(\mathbb{N})$. Тогда имеем взаимно однозначное соответствие

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow H_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, \ldots), \\ 2 &\leftrightarrow H_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, \ldots) \end{aligned}$$

и т.д. (здесь символами $H_1, H_2, \ldots$ обозначены некоторые различные последовательности из нулей и единиц).

Возьмем последовательность, составленную из "диагональных" элементов: $(h_{11}, h_{22}, h_{33}, \ldots)$, и поменяем все разряды на противоположные, т.е. единицы заменим на нули, а нули — на единицы. Получим

$$H = (\bar{h}_{11}, \bar{h}_{22}, \bar{h}_{33}, \ldots).$$

Этот элемент не совпадает ни с одним из H_m, т.е. он не занумерован. Имеет место противоречие.

Определение 4. *Мощность множеств, эквивалентных множеству всех последовательностей, составленных из нулей и единиц, называется мощностью* **континуума**.

Утверждение 4. *Множество I точек отрезка $[0,1]$ имеет мощность континуума.*

Доказательство. В двоичной записи каждая точка единичного отрезка $[0,1]$ может быть записана в виде

$$0,h_1h_2h_3,\ldots,\quad h_k = \left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ k=1,2,3,\ldots$$

Такая запись единственна, за исключением чисел вида $n/2^k, k,n \in \mathbb{N}$. А числам такого вида соответствуют в точности две записи (у одной, начиная с некоторого номера, все цифры равны 0, а у другой — все единицы). Для всех точек, за исключением точек вида $n/2^k$, установим соответствие так:

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \leftrightarrow 0, x_1, x_2, \ldots .$$

А так как множество точек вида $n/2^k$ счетно, то счетным множеством является также множество последовательностей, им соответствующих. Следовательно, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие и тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[0,1]$ и множеством последовательностей, составленных из нулей и единиц, т.е. множество точек отрезка имеет мощность континуума.

Лекция 3

§ 3. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

В этом семестре и далее мы преимущественно будем иметь дело с числовыми функциями, областью определения и множеством значений которых являются числовая ось, отрезки, интервалы, промежутки на этой оси или какие-нибудь другие ее подмножества. При этом потребуется более глубокое представление о вещественных числах, чем то, с которым имеет дело школьная программа по математике. Подчеркнем, однако, что мы будем целиком на нее опираться и уточним только то, что действительно требует большей ясности.

В отношении рациональных чисел мы ничего уточнять не будем. Рациональные числа — это обыкновенные дроби. Вещественные числа, которые рациональными не являются, как известно, называются иррациональными.

Следует отметить, что вещественные числа — как рациональные, так и иррациональные — в природе не существуют. Они — абстракция и придуманы для практических нужд, о чем говорит здравый смысл. Можно сказать, что они породили саму математику, а в дальнейшем она предъявила к числам свои требования. И оказалось, в частности, что одни только рациональные числа этим требованиям не отвечают.

Самое простое и естественное назначение чисел в математике — измерение длин отрезков. Это означает, что длина каждого отрезка должна измеряться вещественным числом. С другой стороны, заметим, например, что *диагональ единичного квадрата на координатной плоскости не может измеряться рациональным числом* α.

Действительно, если это число рациональное, то $\alpha = \frac{m}{n}$, $(m,n) = 1$, и по теореме Пифагора имеем

$$\alpha^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Следовательно, $m^2 = 2n^2$. Рассмотрим возможные случаи: 1) m нечетно; 2) m четно.

1. Если m нечетно, то $m = 2k+1$, $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ нечетно и потому равенство $m^2 = 2n^2$ невозможно.

2. Если m четно, то $m = 2k$, $m^2 = 4k^2$ и $2k^2 = n^2$. Но тогда, рассуждая аналогично, получим, что n тоже четно. А это значит, что оба числа m и n делятся на 2, откуда $(m,n) \geq 2$, что противоречит условию. Значит, α — не рациональное число, что и требовалось доказать.

Задача измерения длины отрезка (относительно заранее заданного "эталонного" единичного отрезка) решается полностью с помощью бесконечных десятичных дробей. Их-то мы и будем называть вещественными (действительными) числами.

Итак, **вещественное число** — *это бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком "плюс" или "минус".*

Замечания. 1. Знак "плюс" в записи можно опустить.

2. Десятично-рациональные числа, т.е. числа вида $h/10^k$ имеют при этом два представления, которые нами отождествляются, и мы можем считать, что нет десятичных дробей, имеющих цифру 9 на всех местах, начиная с некоторого.

3. Мы отождествляем вещественные числа и точки вещественной числовой оси, служащей изображением множества вещественных чисел.

4. Множество всех вещественных чисел обозначается буквой $\mathbb{R}$.

Основные свойства вещественных чисел.

1^0. $\forall a, b$ имеем: или $a = b$, $b = a$, или $a > b$, $b < a$, или $a < b$, $b > a$.

2^0. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$. Если $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

3^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ число $c \in \mathbb{R}$, такое, что $a + b = c$.

4^0. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ имеем $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем $a + b = b + a$.

6^0. $\exists!$ число $0 \in \mathbb{R}$ такое, что $a + 0 = 0 + a = a$.

7^0. $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $(-a) \in \mathbb{R}$ такое, что $a + (-a) = 0$.

8^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $c \in \mathbb{R}$ такое, что $ab = c$.

9^0. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ имеем $(ab)c = a(bc)$.

10^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем $ab = ba$.

11^0. $\exists!$ число $1 \neq 0$ такое, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

12^0. $\forall a \neq 0$ $\exists!$ a^{-1} такое, что $aa^{-1} = 1$.

13^0. $(a + b)c = ac + bc$.

14^0. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

15^0. Если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$.

Указанные свойства вещественных чисел призваны отражать количественные характеристики простейших математических объектов, таких, например, как длины отрезков, площади прямоугольников и объемы прямоугольных параллелепипедов, а также изменения этих величин при различных преобразованиях.

Запись числа в виде бесконечной дроби, которую мы отождествили с самим числом, можно было бы рассматривать как одно из подобных свойств. С другой стороны, свойствам $1^0 - 15^0$ обязаны отвечать рекуррентные процедуры определения последовательности десятичных знаков для результатов арифметических операций над двумя вещественными числами, заданными бесконечными десятичными дробями. Эти процедуры могут быть заданы на основе правила сравнения величин бесконечных десятичных дробей, которое будет рассмотрено далее при доказательстве полноты множества вещественных чисел.

Априорность свойств вещественных чисел, т.е. тот факт, что они рассматриваются в качестве исходных для построения дальнейшей теории, наводят на мысль считать их аксиомами, которые определяют (вместе с двумя другими свойствами) само множество вещественных чисел. Однако подобный подход нас не вполне устраивает, поскольку понятие натурального числа неявно присутствует в законах логики, на которые мы опираемся в своих рассуждениях ([19], с. 372-378).

Подчеркнем однако исключительную плодотворность аксиоматического метода для обоснования исходных принципов в других областях математики. Прекрасным примером этого является идущая от Евклида аксиоматика элементарной геометрии.

Есть еще несколько важных свойств вещественных чисел. К ним прежде всего относится **аксиома Архимеда** (287–212 гг. до н.э.), он сформулировал ее для отрезков:

16^0. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ $\exists\ n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha n \geq 1$.

Доказательство. Если $\alpha \geq 1$, то можно взять $n = 1$ и доказывать больше нечего. Если же $0 < \alpha < 1$, то

$$\alpha = 0,0\ldots\bar{\alpha}_k\bar{\alpha}_{k+1}\ldots\ , \quad \bar{\alpha}_1 = \cdots = \bar{\alpha}_{k-1} = 0, \quad \bar{\alpha}_k \neq 0.$$

Тогда имеем

$$10^k\alpha = \bar{\alpha}_k,\bar{\alpha}_{k+1}\cdots \geq \bar{\alpha}_k \geq 1,$$

т.е. свойство 16^0 имеет место при $n = 10^k$, что и требовалось доказать.

Свойство 17^0 сформулируем и докажем позже.

Рассмотрим теперь только неотрицательные числа. Договоримся, что для десятично-рациональных чисел рассматривается только запись, заканчивающаяся нулями. Число, стоящее перед запятой в десятичной записи числа x, будет целым, и оно называется *целой частью* x или *антье от* x. Пишется так: $[x]$. Число, стоящее после запятой, называется дробной частью x. Пишется так: $\{x\}$. Очевидно, $[x]+\{x\} = x$. Имеем, что $[x]$ есть наибольшее целое, не превосходящее x. Это свойство берется в качестве определения значения символа $[x]$ при отрицательных x.

Примеры: $[1,5] = 1$; $[0,3] = 0$; $[-0,7] = -1$; $[-3,5] = -4$.

Далее, при $x < 0$ символу $\{x\}$ дробной части числа x мы приписываем значение: $\{x\} = x - [x]$. Таким образом, при всех x значение символа $\{x\}$ удовлетворяет условию $0 \leq \{x\} < 1$.

Определим **модуль**, или **абсолютную величину**, числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

($|x|$ выражает расстояние от нуля до точки x на вещественной оси). Имеет место следующее неравенство (*неравенство треугольника*):

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Докажем это неравенство. Имеем:

1) если $ab \geq 0$, то $|a + b| = |a| + |b|$;

2) если $ab < 0$, то $|a + b| < |a| + |b|$.

Множество M точек x, удовлетворяющих неравенствам:

$a < x < b$, называется **интервалом** (пишут: $M = (a, b)$);

$a < x \leq b$ или $a \leq x < b$ — **полуинтервалом** ($M = (a, b]$ или $M = [a, b)$);

$a \leq x \leq b$ — **отрезком или сегментом** ($M = [a, b]$);

каждое из них называется **промежутком**.

Множество L точек x, определяемое соответствующим условием, называется:

$x < a$ или $x > a$ — **открытый луч** (обозначения: $L = (-\infty, a)$ или $L = (a, +\infty)$);

$x \leq a$ или $x \geq a$ — **замкнутый луч** (обозначения: $L = (-\infty, a]$ или $L = [a, +\infty)$);

a — вершина луча.

Здесь символ $+\infty$ читается **плюс бесконечность**, а символ $-\infty$ — **минус бесконечность**.

Лекция 4

§ 4. ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1. *Непустое множество A на вещественной оси $\mathbb{R}$ называется* **ограниченным сверху**, *если существует число $b \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $a \in A$ выполнено неравенство $a \le b$. Другими словами,*

$$\forall a \in A \;\Rightarrow\; a \le b.$$

Число b называется **верхней гранью** множества A. У ограниченного сверху множества существует бесконечно много верхних граней, например $b+1$, $b+2,5$ и т.д.

Аналогично определяем **нижнюю грань** d непустого множества A:

$$\forall a \in A \;\Rightarrow\; d \le a.$$

Непустое множество A называется **ограниченным**, если существует $b \ge 0$, такое, что для всех $a \in A$ имеем $|a| \le b$.

Множество B всех верхних граней b непустого ограниченного сверху множества A является ограниченным снизу. Действительно, каждая верхняя грань $b \in B$ удовлетворяет неравенству $a \le b$ при любом фиксированном a из множества A. Это и означает, что a есть нижняя грань для B.

Сформулируем теперь **свойство полноты** множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ (свойство, упомянутое в лекции 3.)

17^0. *Для всякого непустого ограниченного сверху множества A множество B его верхних граней b содержит минимальный элемент b', т.е. существует единственный элемент $b' \in B$ такой, что:*

1) b' — верхняя грань множества A, т.е. для всех $a \in A$ имеем $b' \ge a$;

2) b' — наименьший элемент множества B, т.е. для всех $b \in B$ справедливо неравенство $b' \le b$.

Элемент b' называется **точной верхней гранью или супремумом** множества A. Обозначение: $b' = \sup A$.

Прежде чем доказывать это свойство, следует сказать, что точно так же обстоит дело и с множеством нижних граней D ограниченного снизу множества A, а именно: существует единственный элемент $d' \in D$ такой, что:

1) $\forall a \in A \;\Rightarrow\; d' \le a$;

2) $\forall d \in D \;\Rightarrow\; d' \ge d$; $d' = \inf A$ (читается: *точная нижняя грань*, или *инфимум*).

Доказательство свойства 17^0. Мы построим число b' конструктивно. Можно считать $0 \in A$, и тогда для всех $b \in B$ имеем $b \geq 0$. Действительно, возьмем какое-нибудь $a_1 \in A$. Заметим, что для любой верхней грани $b \in B$ выполнено неравенство $b \geq a_1$, откуда

$$b - a_1 \geq 0.$$

Теперь вместо множества A рассмотрим множество A' чисел вида $a - a_1$. Если нам удастся доказать, что существует число $b'_1 = \sup A'$, то тогда очевидно, что будет существовать и число $b' = \sup A$, причем

$$b' = b'_1 + a_1.$$

Договоримся десятично-рациональные числа записывать только с нулями на бесконечности. Заметим, что справедливо следующее **правило сравнения чисел между собой**. Если $a > b$, то выполнено одно из двух условий:

1) $[a] > [b]$;

2) $[a] = [b]$, $\{a\} > \{b\}$, причем, если $\{a\} = 0,\bar{a}_1\bar{a}_2\ldots\bar{a}_k\ldots$ и $\{b\} = 0,\bar{b}_1\bar{b}_2\ldots\bar{b}_k\ldots$, то найдется номер k такой, что

$$\bar{a}_1 = \bar{b}_1, \ldots, \bar{a}_{k-1} = \bar{b}_{k-1}, \quad \text{но} \quad \bar{a}_k > \bar{b}_k.$$

В множестве A возьмем подмножество A_0, состоящее из всех $a \in A$ с условием $a \geq 0$, т.е.

$$A_0 = \{a \in A \mid a \geq 0\}.$$

Для каждого из чисел $a \in A_0$ рассмотрим его целую часть $[a] = n_0(a)$.

Так как $0 \leq [a] \leq a \leq b$, то функция $[a]$ при $a \in A_0$ принимает лишь *конечное* число значений. Наибольшее из этих значений обозначим через x_0. Рассмотрим множество $A_1 \subset A_0$, состоящее только из тех чисел $a \in A_0$, для которых $[a] = x_0$. Заметим попутно, что для всех $a \notin A_1$ имеем неравенство $a < x_0$.

На множестве A_1 определим функцию $n_1(a)$, равную числовому значению первого десятичного знака после запятой у числа a. Всего она принимает не более 10 значений. Наибольшее из них обозначим через x_1. Образуем множество A_2, состоящее из чисел, принадлежащих A_1, у которых $n_1(a) = x_1$. Обозначим через $s_1(a)$ число, получаемое из a заменой всех, начиная со второго, десятичных знаков числа a нулями, т.е. если $a = n_0,\bar{n}_1\ldots$, то $s_1(a) = n_0,\bar{n}_1$. Тогда для любого $a \in A_2$ имеем $s_1(a) = x_0,\bar{x}_1$, но при всех $a \notin A_2$ выполнено неравенство $a < x_0,\bar{x}_1$. Для всех $a \in A_2$ определим функцию $n_2(a)$, равную значению ее 2-го десятичного знака. Наибольшее его значение выразим через x_2. Образуем множество $A_3 \subset A_2$ такое, что $\forall a \in A_3$

$n_2(a) = x_2$. Тогда для $s_2(a)$, т.е. для числа, полученного заменой всех, начиная с третьего, десятичных знаков числа a нулями, справедливы соотношения $s_2(a) = x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad \forall a \in A_3; \quad a < x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad \forall a \notin A_3$. Продолжая этот процесс далее, на k-м шаге, будем иметь

$$s_k(a) = x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k \quad \forall a \in A_{k+1};$$
$$a < x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k \quad \forall a \notin A_{k+1}.$$

Таким образом, мы получили последовательность знаков, которые определяют число b', имеющее десятичную запись вида $b' = x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots$.

Докажем, теперь что b' является точной верхней гранью множества A, т.е. что $b' = \sup A$. Для этого надо проверить следующие условия:

1) b' — верхняя грань, т.е. для всех $a \in A$ имеем $a \leq b'$;

2) b' — наименьшая из всех верхних граней, т.е. если $b < b'$, то существует $a \in A$ такое, что $a > b$.

Докажем условие 1). Допустим противное. Это значит, что существует $a \in A$, такое, что $a > b'$. Тогда из правила сравнения чисел имеем, что существует номер k такой, что

$$s_k(a) > x_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k = s_k(b').$$

А это противоречит построению числа b'.

Теперь докажем условие 2). Если $b < b'$, то по правилу сравнения вещественных чисел существует номер $k \in \mathbb{N}$ такой, что

$$b_0, \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_k = s_k(b) < s_k(b') = x_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k.$$

Но по построению найдется элемент $a \in A_{k+1}$ такой, что $s_k(a) = s_k(b')$.

Отсюда имеем $s_k(b) < s_k(a)$, $b < a$. Тем самым свойство 17^0 доказано полностью.

Заметим, что число $b' = \sup A$ может принадлежать A, а может и не принадлежать.

В качестве примера рассмотрим множество A рациональных чисел a с условием $a \leq 0$ или $a^2 < 2$ и множество $B = \mathbb{Q} \setminus A$, составленное из положительных рациональных чисел b с условием $b^2 > 2$.

В силу того, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум, имеем: 1) $A \cup B = \mathbb{Q}$; 2)$A \cap B = \varnothing$; 3) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$; 4) для любых чисел $a \in A$ и любых чисел $b \in B$ справедливо неравенство $a < b$.

Определение 2. *Любое разбиение рациональных чисел на два множества со свойствами 1) – 4) называется* **сечением (дедекиндовым сечением)**.

Ясно, что множество B "ограничивает сверху" множество A, т.е. при любом фиксированном $b \in B$ выполняется условие 4), и множество B исчерпывает все множество верхних граней множества A.

Покажем, что множество B не имеет наименьшего элемента, а множество A, являющееся множеством всех нижних граней для множества B, не имеет наибольшего элемента. Это означает, что множество Q рациональных чисел не является "полным", т.е. для него не выполнено свойство 17^0.

Действительно, предположим противное, т.е. существует минимальное число b_0 в множестве B. Рассмотрим число $b_0 - k$, $k \in \mathbb{Q}$ такое, что $0 < k < \frac{b_0^2-2}{2b_0}$. Тогда имеем

$$(b_0 - k)^2 = b_0^2 + k(k - 2b_0) > b_0^2 - k \cdot 2b_0 > b_0^2 - \frac{b_0^2 - 2}{2b_0} \cdot 2b_0 = 2.$$

Следовательно, $b_0 - k \in B$, что противоречит минимальности числа b_0.

Допустим теперь, что a_0 — максимальное число множества A. Рассмотрим неотрицательное число $h < 1$ с условием $h < \frac{2-a_0^2}{2a_0+1}$. Тогда имеем

$$(a_0 + h)^2 = a_0^2 + h(2a_0 + h) < a_0^2 + h(2a_0 + 1) < a_0^2 + (2 - a_0^2) = 2.$$

Таким образом, число $a_0 + h \in A$, что противоречит предположению о максимальности числа a_0 в множестве A.

Понятие сечений в множестве рациональных чисел было введено Ю. В. Р. Дедекиндом (1831 - 1916) для построения теории вещественных чисел. Хотя в нашем курсе эта же задача решается с помощью бесконечных десятичных дробей, следует отметить, что дедекиндовы сечения оказываются полезными и в других вопросах. В частности, на них фактически опирается строгое определение степенной и показательной функций при произвольных значениях показателя степени и аргумента.

Определение 3. *Функции $s_k(a)$ будем называть* **округлением** *числа a до k-го знака после запятой.*

Свойство точной верхней грани. *Если $b = \sup A$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ a \in A \quad \text{такое, что } a > b - \varepsilon.$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $a \in A$ выполняется неравенство $b - a \geq \varepsilon$. Но тогда $b' = b - \varepsilon$ является верхней гранью множества A, которая меньше, чем b, а это невозможно, поскольку b есть наименьшая из верхних граней, что и требовалось доказать.

Докажем еще одно свойство вещественных чисел.

Лемма 1. *Для любых вещественных $x, y \in \mathbb{R}$ с условием $x < y$ существует рациональное число $m/n \in \mathbb{Q}$ такое, что $x < \frac{m}{n} < y$.*

Доказательство. В силу аксиомы Архимеда (свойство 16^0) для положительного вещественного числа $y - x$ существует натуральное число n такое, что справедливо неравенство $n(y - x) > 2$. Отсюда следует, что интервал $(nx,\ ny)$ имеет длину, превосходящую 2. Следовательно, на этом интервале найдется целое число m такое, что $nx < m < ny$ (например, $m = [ny] - 1$). Согласно свойству 15^0 из последнего неравенства получим искомое неравенство.

Лемма 1 доказана.

Замечание. Так же просто показывается, что между любыми числами $x < y$ найдется иррациональное число. Действительно, в силу леммы 1 между числами $x/\sqrt{2}$ и $y/\sqrt{2}$ лежит некоторое рациональное число m/n. Но тогда иррациональное число $m\sqrt{2}/n$ находится на интервале (x, y).

§ 5. ЛЕММЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ МНОЖЕСТВ, О СИСТЕМЕ ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЯГИВАЮЩИХСЯ ОТРЕЗКОВ

Лемма 1 (об отделимости множеств). *Пусть A и B — непустые множества на вещественной прямой, т.е. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. Пусть также для любых $a \in A$ и для любых $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$.*

Тогда существует число x такое, что для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ справедливо неравенство $a \leq x \leq b$.

Доказательство. Из определения множества B следует, что каждая его точка является верхней гранью множества A. Положим $x = \sup A$. Тогда, поскольку x — это верхняя грань, для всех $a \in A$ имеем неравенство $a \leq x$, и так как x — точная верхняя грань A, то $x \leq b$ для любого $b \in B$, т.е. для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ имеем $a \leq x \leq b$. Лемма 1 доказана.

Определение 1. Системой вложенных отрезков *называется множество M, элементами которого являются отрезки, причем для любых $\Delta_1, \Delta_2 \in M$ выполнено одно из условий: $\Delta_1 \subset \Delta_2$ или $\Delta_2 \subset \Delta_1$, т.е. все точки одного отрезка принадлежат другому отрезку.*

Лемма 2 (о системе вложенных отрезков). *Пусть M — система вложенных отрезков. Тогда существует число x такое, что для любого отрезка $\Delta \in M$ имеем, что $x \in \Delta$. Это значит, что все отрезки Δ из множества M имеют общую точку x.*

Доказательство. Пусть A — множество левых концов отрезков, принадлежащих M, B — множество их правых концов. Тогда для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ имеем $a \leq b$. Действительно, пусть a — левый конец отрезка $[a, b'] \in M$ и b — правый конец другого отрезка $[a', b] \in M$.

Возможны два случая: 1) $[a', b] \subset [a, b']$; 2) $[a', b] \supset [a, b']$.

В случае 1) имеем $a \leq a' < b \leq b'$, а в случае 2) имеем $a' \leq a < b' \leq b$.

Тогда в силу леммы об отделимости существует число x такое, что для любого отрезка $[a, b] \in M$ справедливо неравенство $a \leq x \leq b$. Лемма 2 доказана.

Замечание. С помощью леммы 2 (о системе вложенных отрезков) можно доказать несчетность множества точек отрезка. (*Указание.* Предполагаем, что все точки пересчитаны. Отрезок делим на три части. Тогда точка с номером один не принадлежит одному из этих отрезков. Делим его на три части. Точка с номером два не принадлежит одному из получившихся отрезков деления и т.д. По лемме 2 существует точка x, принадлежащая сразу всем отрезкам, но эта точка не занумерована.)

Определение 2. *Система M вложенных отрезков называется* **последовательностью вложенных отрезков,** *если все эти отрезки занумерованы, причем любой отрезок с бóльшим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером.*

Определение 3. *Последовательность вложенных отрезков называется* **стягивающейся**, *если среди отрезков, в нее входящих, имеются отрезки сколь угодно малой длины. Другими словами, каково бы ни было положительное число ε, в последовательности стягивающихся отрезков содержится и такой отрезок, длина которого меньше ε.*

Лемма 3. *Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом только одну.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из леммы 2.

Докажем его вторую часть. Если бы все отрезки содержали одновременно две различные точки a и b (где $a < b$), то тогда длина каждого отрезка из M была бы больше, чем $b - a > 0$, но это не так, поскольку по определению в M есть отрезки и меньшей длины. Теперь лемма 3 доказана полностью.

Глава II
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Лекция 5

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. БИНОМ НЬЮТОНА И НЕРАВЕНСТВО БЕРНУЛЛИ

Для обоснования метода математической индукции мы будем использовать следующее свойство натуральных чисел: *в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел существует наименьшее число.*

Убедимся в том, что данное свойство действительно имеет место. Для этого возьмем какой-нибудь его элемент (это можно сделать, так как данное подмножество не пусто). Если окажется, что выбранный элемент минимален, то свойство доказано. В противном случае натуральных чисел, меньших данного числа, конечно. Рассматривая их последовательно, мы найдем требуемый минимальный элемент.

Метод математической индукции состоит в следующем: для справедливости любого утверждения, высказанного для всех натуральных чисел $n \geq 1$, достаточно:

1) доказать это утверждение для $n = 1$;

2) предположить его справедливость при $n = k$ и $k \geq 1$;

3) доказать, что оно верно при $n = k + 1$.

Действительно, отсюда следует, что высказанное утверждение верно для всех натуральных n. Допустим противное. Тогда множество тех n, для которых утверждение неверно, содержит наименьший элемент m. Число $m \neq 1$, поскольку утверждение верно для $n = 1$. Число m не может быть больше 1, так как утверждение в этом случае было бы верно для $m - 1$ и в силу п. 3 оно было бы справедливо и для m, что противоречит выбору числа m.

Замечание. Методом математической индукции можно доказывать утверждения, справедливые и при $n \geq m$, где $m \geq 1$. В ходе доказательства надо заменить *первый шаг*: доказать утверждение при $n = m$, а все остальное оставить, как и прежде, при необходимости пользуясь тем, что $n \geq m$.

Перейдем к рассмотрению формулы бинома Ньютона. Сначала определим величину

$$n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

($n!$ читается: эн-факториал). В частности, имеем

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{и т.д.}$$

Т е о р е м а 1. *Имеет место равенство (формула бинома Ньютона)*

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n.$$

(Коротко эту формулу можно записать так:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

где $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.)

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом математической индукции.

1. При $n = 1$ формула верна: $1 + x = 1 + x$, поскольку

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

2. Пусть формула бинома Ньютона справедлива при $n = t$, $t \geq 1$.

3. Докажем, что она верна при $n = t + 1$. Сначала докажем вспомогательное утверждение о биномиальном коэффициенте: при $0 \leq k \leq n - 1$ имеем

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Действительно,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \binom{n+1}{k+1}.$$

Далее имеем

$$(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) =$$

$$= \binom{t}{0} + \binom{t}{1}x + \cdots + \binom{t}{t}x^t + \binom{t}{0}x + \cdots + \binom{t}{t-1}x^t + \binom{t}{t}x^{t+1} =$$

$$= \binom{t+1}{0} + \binom{t+1}{1}x + \cdots + \binom{t+1}{t}x^t + \binom{t+1}{t}x^{t+1}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Подобным образом доказывается и формула для *полинома Ньютона* от s неизвестных вида

$$(x+y+\dots+z)^n = \sum_{k_1+\dots+k_s=n} \frac{n!}{k_1!\dots k_s!} x^{k_1} y^{k_2} \dots z^{k_s},$$

где $k_1, \dots, k_s$ — целые положительные числа.

При изложении теории предела последовательности нам потребуется приводимое далее неравенство Бернулли.

Теорема 2. *При $x > -1$, $x \neq 0$ и при целом $n \geq 2$ справедливо неравенство (неравенство Бернулли)*

$$(1+x)^n > 1 + xn.$$

Доказательство (по индукции). Сначала убедимся, что при $n = 2$ оно верно. Действительно,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Предположим, что для номера $n = k$ оказалось, что утверждение справедливо:

$$(1+x)^k > 1 + kx,$$

где $k \geq 2$. Докажем его при $n = k + 1$. Имеем

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) =$$
$$= 1 + (k+1)x + x^2 > 1 + (k+1)x.$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что метод математической индукции допускает многочисленные, иногда неожиданные, модификации. В качестве примера приведем доказательство одной теоремы из книги известного норвежского математика Т. Нагелля [34].

Под методом *мультипликативной индукции* мы будем понимать доказательство, которое проводится по следующей схеме.

1. Опытным или каким-либо другим путем выдвигается гипотеза о том, что для каждого номера $n (> 1)$ выполнено свойство E.

2. Проверяется, что свойством E обладают все простые числа p.

3. Предполагается, что некоторое натуральное число m обладает свойством E.

4. Исходя из предположения индукции доказывается, что числа вида mp тоже обладают этим свойством.

5. Отсюда по теореме об однозначности разложения на простые сомножители натуральных чисел, больших единицы, вытекает, что свойством E обладают все натуральные числа, и тем самым установлена справедливость гипотезы из пункта 1 ([34], с. 16).

Докажем этим методом свойство мультипликативности *функции Мёбиуса,* определяемой на множестве натуральных чисел следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } \quad n = 1, \\ 0 & , \text{ если } \quad p^2 \quad \text{делит} \quad n, \\ (-1)^r & , \text{ если } \quad n = p_1 \dots p_r,\ p_k \neq p_l, k \neq l, 1 \leq k, l \leq r. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $f(n)$ натурального аргумента является *мультипликативной,* если для любых взаимно простых чисел m и n справедливо равенство $f(mn) = f(m)f(n)$.

Достаточно доказать утверждение о мультипликативности функции Мёбиуса только для чисел m и n, не делящихся на квадрат простого числа, т.е. *бесквадратных* чисел. Зафиксируем произвольное m. Покажем, что утверждение имеет место для $n = p$, где p — произвольное простое число. Действительно, поскольку $(m,n) = 1$, то $\mu(mp) = (-1)^{r+1}$, если $m = p_1 \dots p_r$ и $p_1, \dots, p_r$ — различные простые числа. Следовательно,

$$\mu(mp) = \mu(m)\mu(p).$$

Пусть утверждение верно для $n = k$. Докажем его для $n = kp$, где p — произвольное простое число. Так как n — бесквадратное число, то $(k,p) = 1$. По условию $(m,n) = 1$, поэтому $(mk,p) = 1$. Тогда по доказанному утверждению для простых чисел и по предположению индукции имеем цепочку равенств

$$\mu(mn) = \mu(mkp) = \mu(mk)\mu(p) =$$

$$= \mu(m)\mu(k)\mu(p) = \mu(m)\mu(kp) = \mu(m)\mu(n).$$

Тем самым мультипликативность функции Мёбиуса доказана.

Заметим, кстати, что функция Мёбиуса возникает во многих областях математики, играя важную роль при изучении ее дискретных объектов.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 1. *Функция, определенная на множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *и принимающая числовые значения, называется* **числовой последовательностью** *или просто последовательностью.*

Обозначения: $x_1, x_2, x_3 \ldots$, или, коротко, $\{x_n\}$, или, если это не вносит путаницы, просто x_n.

Примеры. 1. Последовательность δ_n длин вложенных отрезков (см. определение 2 §5) $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n \subset \mathbb{R}$, $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

2. $x_n = c$ при всех натуральных n (постоянная последовательность).

Определение 2. *Если* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *— две числовые последовательности, то* $\{x_n + y_n\}$ *называется* **суммой** *двух числовых последовательностей,* $\{x_n - y_n\}$ *—* **разностью** *двух числовых последовательностей,* $\{x_n y_n\}$ *—* **произведением** *двух числовых последовательностей, при* $y_n \neq 0$ *последовательность* $\{x_n/y_n\}$ *называется* **частным** *двух числовых последовательностей.*

Замечание. Обычно мы подразумеваем, что запись a/b сама по себе предполагает выполнение условия $b \neq 0$.

Последовательности бывают:

1) ограниченными сверху, если найдется a такое, что для всех членов последовательности выполняется $x_n \leq a$;

2) ограниченными снизу, если существует b такое, что $x_n \geq b$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

3) ограниченными, если существует c такое, что для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ имеем $|x_n| \leq c$.

Определение 3. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* **бесконечно большой**, *если для любого* $c > 0$ *множество тех членов последовательности, которые удовлетворяют неравенству* $|x_n| \leq c$, *конечно.*

Другими словами, это значит, что для всякого $c > 0$ существует номер $n_0 = n_0(c)$, такой, что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами, большими чем n_0, удовлетворяют неравенству $|x_n| > c$.

Коротко это определение записывается так:

$$\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 = n_0(c) \text{такое, что}\ \forall\ n > n_0\ \text{имеем}\ |x_n| > c.$$

Пример. Последовательности $\{y_n = n\}$, $\{z_n = -n\}$ — бесконечно большие последовательности.

Определение 4. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* **бесконечно малой**, *если для всякого* $\varepsilon > 0$ *множество членов последовательности* $\{x_n\}$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|x_n| \geq \varepsilon,$$

конечно.

Коротко это определение записывается так:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \text{такое, что}\ \forall\ n > n_0 \ \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$$

Примеры. 1. Длины отрезков из последовательности стягивающихся отрезков (см. определение 3 §5) образуют бесконечно малую последовательность.

2. $x_n = 1/n$ — бесконечно малая последовательность.

Чтобы это доказать, надо для всякого $\varepsilon > 0$ найти хотя бы одно натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\forall\ n > n_0 \ \text{имеем}\ |x_n| < \varepsilon.$$

В качестве такого $n_0 = n_0(\varepsilon)$ возьмем число $[1/\varepsilon] + 1$. Тогда для каждого n с условием

$$n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

имеем $\frac{1}{n} < \varepsilon$, что и требуется.

И вообще, если надо доказать, что $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то, по существу, надо *найти хотя бы одно* $n_0(\varepsilon)$ с нужными свойствами, т.е. такое, что если $n > n_0(\varepsilon)$, то выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, или хотя бы каким-либо образом *доказать его существование.*

Теорема 1. *Бесконечно малая последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда, например, неравенству $|x_n| \geq 1$ удовлетворяет лишь конечное множество ее членов. Сумму модулей таких членов обозначим через c_0. При этом считаем, что $c_0 = 0$, если таких членов вообще нет. Очевидно, тогда для каждого члена x_n имеем неравенство

$$|x_k| < c = c_0 + 1.$$

Следовательно, бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, и наоборот, если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ — бесконечно большая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением только прямого утверждения. В этом случае при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|1/x_k| \geq \varepsilon$ равносильно неравенству $|x_n| \leq c = 1/\varepsilon$, которому, в свою очередь, удовлетворяет лишь конечное множество членов, поскольку $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Это значит, что $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *1. Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\{|x_n|\}$ — бесконечно малая последовательность, и наоборот.*

2. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из определения бесконечно малая последовательность. Докажем второе утверждение.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $n_1(\varepsilon/2)$ и $n_2(\varepsilon/2)$ такие, что

$$\forall n > n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \forall n > n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, полагая $n_0 = \max(n_1(\varepsilon/2), n_2(\varepsilon/2))$, имеем

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\{x_n \pm y_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Т е о р е м а 4. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_k\}$ — бесконечно малая последовательность, а последовательность $\{y_k\}$ ограничена. Тогда при некотором $c > 0$ имеем $|y_n| < c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, так как $\{x_k\}$ — бесконечно малая последовательность, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1(\varepsilon_1)$ с условием, что $|x_n| < \varepsilon_1 = \varepsilon/c$ для всех $n > n_1(\varepsilon_1)$. Поэтому, полагая $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon/c)$, будем иметь

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n \cdot y_n| \le |x_n| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Другими словами, $\{x_n y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Теорема 4 доказана.

Следствие 1. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Согласно теореме 1 одну из двух бесконечно малая последовательность мы можем рассматривать как ограниченную последовательность. Тогда их произведение будет бесконечно малой последовательностью в силу предыдущей теоремы. Следствие доказано.

Следствие 2. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство получается очевидным последовательным применением предыдущего утверждения. Следствие доказано.

Теорема 5. *Если $\{x_n\}$ — постоянная и бесконечно малая последовательность, то $x_n = 0$.*

Действительно, если $x_n = c \ne 0$, то в $|c|/2$-окрестности нуля нет ни одной точки нашей последовательности, и это значит, что $\{x_n\}$ не является бесконечно малой последовательностью. Теорема 5 доказана.

Примеры. 1. $\{q^n\}$ — бесконечно малая последовательность при $|q| < 1$.

Действительно, если $0 < q < 1$, то $q = \dfrac{1}{1+h}$, где $h > 0$. В силу неравенства Бернулли

$$(1+h)^n > 1 + nh \text{ при } n \ge 2.$$

Отсюда имеем

$$q^n \le \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$. Нам надо выбрать $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы для каждого $n > n_0$ выполнялось неравенство $q^n < \varepsilon$. Для этого достаточно, чтобы было справедливо такое неравенство:

$$\frac{1}{nh} < \varepsilon \Leftrightarrow nh > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{h\varepsilon}.$$

Положим

$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{h\varepsilon}\right] + 1.$$

Покажем, что для всех $n > n_0$ имеем $q^n < \varepsilon$. Это следует из цепочки неравенств

$$q^n < \frac{1}{nh+1} < \frac{1}{n_0 h} < \frac{1}{1/h\varepsilon \cdot h} = \varepsilon,$$

следовательно, $\{q^n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

2. nq^n — бесконечно малая последовательность при $|q| < 1$.

Рассмотрим случай $0 < q < 1$. Тогда $q = \dfrac{1}{1+h}$, где $h > 0$. Из формулы бинома Ньютона имеем

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \text{ при } n \geq 2.$$

Отсюда получим

$$nq^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2} < \varepsilon, \quad n-1 > \frac{2}{\varepsilon h^2}, \quad n > \frac{2}{\varepsilon h^2} + 1.$$

Положим

$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon h^2}\right] + 2.$$

Тогда для всех $n > n_0$ будем иметь $nq^n < \varepsilon$.

Лекция 6

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* **сходящейся**, *если существует число* $l \in \mathbb{R}$ *такое, что последовательность* $\alpha_n = a_n - l$ *является бесконечно малой последовательностью.*

В этом случае говорят, что $\{a_n\}$ сходится или что $\{a_n\}$ имеет предел и этот предел равен l. Записывают это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ или } a_n \to l \text{ при } n \to \infty.$$

Это определение на "ε-языке" можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n_0(\varepsilon), \text{ такое, что } \forall n > n_0 \text{ имеем } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Будем говорить также, что последовательность $\{a_n\}$ расходится к "плюс бесконечности", если для любого $c > 0$ лишь для конечного числа членов ее выполняется неравенство

$$a_n < c.$$

Обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ или } a_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится к "минус бесконечности", если для любого $b < 0$ лишь для конечного числа членов её выполняется неравенство

$$a_n > b.$$

Обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ или } a_n \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

И, наконец, последовательность $\{a_n\}$ расходится к "бесконечности", если для любого $c > 0$ лишь для конечного числа членов ее выполняется неравенство

$$|a_n| < c.$$

Обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ или } a_n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Утверждение 1. *Если $\{a_n\}$ сходится, то она имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существуют числа $l_1 \neq l_2$ такие, что последовательности $\alpha_n = a_n - l_1$ и $\beta_n = a_n - l_2$ обе являются бесконечно малыми последовательностями. Отсюда $\alpha_n + l_1 = a_n = \beta_n + l_2$, поэтому $l_1 - l_2 = \beta_n - \alpha_n$ есть бесконечно малая последовательность. Но тогда по теореме 5 § 2 имеем $l_1 - l_2 = 0$, т.е. $l_1 = l_2$.

Утверждение 2. *Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Действительно, при $l = 0$ имеем $a_n - 0 = a_n$ есть бесконечно малая последовательность, т.е. предел $\{a_n\}$ при $n \to \infty$ равен 0.

Утверждение 3. *Если $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Если $\{a_n\}$ сходится, то найдется число l такое, что $\alpha_n = a_n - l$ — бесконечно малая последовательность. Значит, существует $c > 0$ такое, что при всех натуральных n имеем $|\alpha_n| < c$. Но $a_n = l + \alpha_n$, откуда

$$|a_n| = |l + \alpha_n| \leq |l| + |\alpha_n| \leq |l| + c = c_1,$$

т.е. $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ и $a_n \neq 0$, $l \neq 0$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $n > n_0$ имеем $|a_n| > |l|/2$ (или, что то же самое, $1/|a_n| < 2/|l|$).*

Это означает, что последовательность $\{1/a_n\}$, составленная из обратных величин, ограничена.

Доказательство. В силу условия имеем, что $\alpha_n = a_n - l$ — бесконечно малая последовательность. Тогда вне $|l|/2$-окрестности нуля лежит только конечное число членов последовательности $\{\alpha_n\}$. Пусть n_0 — самое большое значение номера таких членов; тогда при всех $n > n_0$ имеем $|\alpha_n| < |l|/2$. Отсюда при этих n получим $(l = a_n - \alpha_n)$

$$|l| = |a_n - \alpha_n| \leq |a_n| + |-\alpha_n| = |a_n| + |\alpha_n|.$$

Следовательно,

$$|a_n| \geq |l| - |\alpha_n| > |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5. *Если* $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$ *при* $n \to \infty$, *то* $c_n = a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2$ *при* $n \to \infty$. *Другими словами, для сходящихся последовательностей предел их суммы равен сумме их пределов.*

Доказательство. Из условия имеем $\alpha_n = a_n - l_1$, $\beta_n = b_n - l_2$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$c_n - (l_1 \pm l_2) = (a_n \pm b_n) - (l_1 \pm l_2) = \alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n \text{ —}$$

бесконечно малая последовательность. Значит, из определения предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l_1 \pm l_2,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 6. *Если* $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$ *при* $n \to \infty$, *то* $c_n = a_n b_n \to l_1 l_2$ *при* $n \to \infty$ *(предел произведения равен произведению пределов).*

Доказательство. Имеем $a_n = l_1 + \alpha_n$, $b_n = l_2 + \beta_n$, $c_n = a_n b_n = l_1 l_2 + \alpha_n l_2 + \beta_n l_1 + \alpha_n \beta_n = l_1 l_2 + \gamma_n$. Но γ_n — бесконечно малая последовательность, так как она есть сумма трех последовательностей, каждая из которых есть бесконечно малая последовательность. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l_1 l_2.$$

Доказательство закончено.

Утверждение 7. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_2 \neq 0$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$, *т.е. если предел знаменателя не равен нулю, то предел отношения равен отношению пределов.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ и

$$\gamma_n = c_n - \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_n l_2 - b_n l_1}{b_n l_2}, \; a_n = l_1 + \alpha_n = a_n - l_1, \; \beta_n = b_n - l_2.$$

Из условия вытекает, что α_n, β_n есть бесконечно малая последовательность . Нам достаточно доказать, что тоже является бесконечно малая последовательность. Для этого запишем γ_n в виде

$$\gamma_n = \frac{(l_1 + \alpha_n)l_2 - (l_2 + \beta_n)l_1}{b_n l_2} = \frac{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{b_n}.$$

Теперь заметим, что последовательность $\dfrac{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1}{l_2}$ является бесконечно малой в силу утверждений 5 и 6, а последовательность $1/b_n$ ограничена в силу утверждения 4. Но тогда по теореме 4 §2 последовательность γ_n является бесконечно малой. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l_1/l_2$, что и требовалось доказать.

Пример. *Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.* Пусть $s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$. Тогда

$$qs_n = aq + \cdots + aq^{n-1} + aq^n, \quad s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Так как при $|q| < 1$ имеем $\{q^n\}$ — бесконечно малая последовательность, то

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Доказательство закончено.

Заметим, что величину s можно представить в виде

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

где $s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$ называется **n-й частичной суммой ряда**, а величина $r_n = s - s_n$ — **остатком ряда.**

§ 4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ

Утверждение 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$; *тогда, если для всякого n имеет место неравенство $a_n > c$ (или $a_n \geq c$), то $l \geq c$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия имеем, что $\alpha_n = a_n - l$ — бесконечно малая последовательность, причем $\alpha_n = a_n - l \geq c - l$. Если допустить, что $c - l > 0$, то тогда при $\varepsilon = \dfrac{c-l}{2}$ получим, что ε-окрестность нуля вообще не содержит ни одной точки последовательности $\{\alpha_n\}$. Это противоречит тому, что $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Значит, $c - l \leq 0$, $l \geq c$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$; *тогда, если $a_n < c$ (или $a_n \leq c$) при всех $n \in \mathbb{N}$, то $l \leq c$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $b_n = -a_n$, то $b_n \to -l$ при $n \to \infty$, $b_n > -c$ (или $b_n \geq -c$). Тогда из утверждения 1 имеем, что $-l \geq -c$, т.е. $l \leq c$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$. *Тогда:*

1) для $a_n < b_n$ имеем $l_1 \leq l_2$;

2) для $a_n \leq b_n$ имеем $l_1 \leq l_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $c_n = b_n - a_n$. По условию $c_n > 0$ (или $c_n \geq 0$) при всех n и $c_n \to \delta = l_2 - l_1$ при $n \to \infty$.

Согласно утверждению 1 в обоих случаях имеем $\delta \geq 0$, т.е. $l_2 \geq l_1$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. *Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и при всех натуральных n имеем $|\beta_n| \le \alpha_n$, то β_n — тоже бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Из условия следует, что любая ε-окрестность нуля вместе с точкой α_n содержит и точку β_n, так что вне этой ε-окрестности могут находиться β_n только с такими номерами, для которых $|\alpha_n| \ge \varepsilon$. Но так как $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то их число конечно, и поэтому $\{\beta_n\}$ — тоже бесконечно малая последовательность. Доказательство закончено.

Утверждение 5. *Пусть $a_n \le c_n \le b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l$. Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty} c_n$ существует и равен l.*

Доказательство. Из условия следует, что $0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$. Но справедливо соотношение $(b_n - a_n) \to 0$, т.е. $b_n - \alpha_n$ — бесконечно малая последовательность . Но тогда по утверждению 4 $(c_n - a_n)$ — тоже бесконечно малая последовательность, т.е. $(c_n - a_n) \to 0$. Следовательно, $c_n = (c_n - a_n) + a_n \to 0 + l = l$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Если $a > 1$, то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Действительно, $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$. Тогда

$$a = (1+\alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n, \quad 0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}.$$

По утверждению 5 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Действительно, положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$. Тогда

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \quad 0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

По утверждению 5 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Действительно, пусть $b_n = a_n - a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, и достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = 0.$$

Так как $\{b_n\}$ — бесконечно малая последовательность , то существует $c > 0$ такое, что при всех n имеем

$$|b_n| < c \quad \text{при всех } n.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ справедливо неравенство $|b_n| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\left|\frac{b_1 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n}{n}\right| \le \frac{cn_0}{n} + \frac{(n - n_0)\varepsilon}{n} < 2\varepsilon,$$

если только $cn_0/n < \varepsilon$, $n > cn_0/\varepsilon$, т.е. $n > \max\Big(n_0, cn_0/\varepsilon\Big)$. Отсюда уже легко следует требуемый результат. Доказательство закончено.

Теорема 1 (теорема Штольца). *Пусть: 1) $y_{n+1} > y_n > 0$, 2) $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 3) существует $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$. Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n \ge N$ имеем $|\alpha_n| < \varepsilon/2$.

Полагая значение номера равным последовательно $N, \ldots, n$, получим следующую систему равенств:

$$x_{n+1} - ly_{n+1} = x_n - ly_n + \alpha_n(y_{n+1} - y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{N+1} - ly_{N+1} = x_N - ly_N + \alpha_N(y_{N+1} - y_N).$$

Сложим эти равенства:

$$x_{n+1} - ly_{n+1} = x_N - ly_N + \alpha_n(y_{n+1} - y_n) + \cdots + \alpha_N(y_{N+1} - y_N).$$

Заметим, что все разности вида $y_{k+1} - y_k$, $k = 1, \ldots, N$ в этом равенстве положительны. Поэтому выполняя очевидные арифметические преобразования и переходя к неравенствам, получим

$$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \le |x_N - ly_N| + |\alpha_n||y_{n+1} - y_n| + \cdots + |\alpha_N||y_{N+1} - y_N|,$$

$$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \le |x_N - ly_N| + |\varepsilon/2|(y_{n+1} - y_n) + \cdots + |\varepsilon/2|(y_{N+1} - y_N),$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < \frac{|x_N - ly_N|}{y_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$, такое, что для всех $n > n_1$ справедлива оценка

$$\frac{|x_N - ly_N|}{y_{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $n_0 = \max(n_1, N)$. Тогда для любого $n > n_1$ будем иметь

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем $x_n/y_n \to l$. Теорема 1 доказана.

§ 5. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА. ЧИСЛО "e" И ПОСТОЯННАЯ ЭЙЛЕРА

Определение 1. *Последовательность называется*

невозрастающей, *если $x_{n+1} \le x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow$);*

неубывающей, *если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех натуральных n (обозначение: $x_n \uparrow$);*

убывающей, *если $x_{n+1} < x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow\downarrow$);*

возрастающей, *если $x_{n+1} > x_n$ (обозначение: $x_n \uparrow\uparrow$).*

Теорема 1 (теорема Вейерштрасса). *Пусть $\{a_n\}$ — неубывающая и ограниченная сверху последовательность. Тогда $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.*

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ ограничена сверху, то существует $\sup\{a_n\}$. Пусть $l = \sup\{a_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Другими словами, требуется доказать, что

$$\alpha_n = a_n - l$$

есть бесконечно малая последовательность, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при для всех $n > n_0$ имеем $|\alpha_n| < \varepsilon$. Но $\sup\{\alpha_n\} = 0$. Это значит, что:

1) $\alpha_n \le 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется число k такое, что $-\varepsilon < \alpha_k \le 0$.

Но a_k не убывает, поэтому при всех $n > k$ имеем

$$-\varepsilon < \alpha_k \le \alpha_n \le 0, \quad |\alpha_n| \le |\alpha_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можно взять указанное выше число k.

Теорема 2. *Невозрастающая, ограниченная снизу последовательность имеет предел, равный $\inf\{a_n\}$.*

Доказательство. Вместо $\{a_n\}$ рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, $b_n = -a_n$. Тогда $\inf\{a_n\} = -\sup\{b_n\}$ и теорема 2 следует из теоремы 1.

Пример. *Итерационная формула Герона.*

Пусть

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

где a — фиксированное положительное число, x_1 — любое положительное число. Докажем, что $\{x_n\}$ — убывающая последовательность при $n \geq 2$, ограниченная снизу величиной $\sqrt{a}$, и что $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Действительно, имеем:

1) $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0$;

2) $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0$.

Из предыдущих формул получим $x_2 > \cdots > x_n > \sqrt{a}$.

Далее, в силу теоремы Вейерштрасса для монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geq \sqrt{a} > 0$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right),$$

т. е.

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right); \quad x = \sqrt{a}.$$

При вычислении квадратного корня из положительного числа по итерационной формуле Герона число верных десятичных знаков быстро растет. Важно отметить, что если в процессе вычислений допущена ошибка, то в дальнейшем она будет автоматически исправлена (саморегулирующийся итерационный процесс).

Дадим другое доказательство того, что $x_n \to \sqrt{a}$ при $n \to \infty$. Из равенства

$$x_{n+1} \pm \sqrt{a} = \frac{(x_n \pm \sqrt{a})^2}{2x_n}$$

имеем

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\right)^2.$$

Положим

$$\frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}} = q.$$

При $x_1 > 0$ имеем $|q| < 1$. Далее получим

$$\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = q^{2^{n-1}},$$

откуда

$$x_n = \sqrt{a}\,\frac{1 + q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^{n-1}}},$$

$$\Delta_n = x_n - \sqrt{a} = \frac{2q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^{n-1}}}\sqrt{a}.$$

Заметим, что величина Δ_n определяет скорость сходимости данного итерационного процесса.

Далее так как $q^{2^{n-1}}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Число e.

Теорема 3. *Последовательность*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

имеет предел.

Доказательство. Сначала заметим, что при $k \geq 1$

$$k! = k(k-1)\ldots 2\cdot 1 \geq 2^{k-1}.$$

По формуле бинома Ньютона получим

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n^2}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^n}\binom{n}{n} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \sigma;$$

$$\sigma = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n}.$$

Но тогда

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Кроме того, в выражении σ при $k \geq 2$ с ростом n возрастает k-й член суммы и число членов всякий раз увеличивается на единицу, т.е. a_n не убывает и $\{a_n\}$ ограничена.

По теореме Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ сходится. Теорема 3 доказана.

Следуя Эйлеру, предел этой последовательности обозначают через e. Известно, что

$$e = 2{,}7\,1828\,1828\,4590\,45\ldots$$

Постоянную e называют *неперовым числом* или *числом Д. Непера* (1550-1617). Логарифм числа a по основанию e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается символом $\ln a$.

Рассмотрим далее последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Имеем

$$b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Последовательность $\{b_n\}$ убывает. Действительно, из неравенства Бернулли при $n \geq 1$ имеем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{n+2}{n(n+1)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{(n+1)^3 + n(n+1)}{n(n+2)^2} > 1.$$

Следовательно, $b_n > e$. Так как $b_n > e > a_n$, то

$$0 < r_n = e - a_n < b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

Величина r_n характеризует скорость сходимости последовательности $\{a_n\}$.

Поскольку число e играет важную роль в анализе, дадим для него другое выражение.

Т е о р е м а 4. *Пусть*

$$c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем, что последовательность $\{c_n\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной. Действительно,

$$c_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Следовательно, существует предел $\lim_{n\to\infty} c_n = e_1$. Далее, так как

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sigma < c_n,$$

то $e \le e_1$.

Тогда при фиксированном $s \le n$ имеем

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \ge d_s(n) = 2 + \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Отсюда

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty} d_s(n) = c_s,$$

т.е. e — верхняя грань для $\{c_s\}$. Но так как

$$\lim_{s\to\infty} c_s = \sup_s\{c_s\} = e_1,$$

то $e \ge e_1$. Следовательно, $e = e_1$. Теорема 4 доказана.

Заметим еще, что если $e = c_n + r_n$, то

$$0 < r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - 1/(n+2)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Т е о р е м а 5. *Число e — иррациональное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда $e = p/q$, $(p,q) = 1$, и с учетом сделанного выше замечания имеем

$$0 < e - c_q < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Домножая обе части неравенства на $q!$, получим, что $A = q!(e - c_q)$ есть целое число и в то же время $0 < A < 1/q$, что невозможно. Доказательство закончено.

Дадим определение еще одной известной константы, играющей важную роль в математическом анализе.

Т е о р е м а 6. *Пусть*

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Тогда существует предел $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность $\{\gamma_n\}$ монотонно убывает. Действительно,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

так как

$$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{поскольку} \quad e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n,$$

что было уже доказано выше.

Далее покажем, что последовательность $\{\gamma_n\}$ ограничена снизу числом 0. Из доказательства теоремы 3 имеем

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1, \quad \text{т.е.} \quad \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$

$$= \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет предел, что и требовалось доказать.

Данный предел называется **постоянной Л. Эйлера** и обычно обозначается буквой γ или буквой C. Для этой константы Эйлер вычислил 15 десятичных знаков после запятой, а именно:

$$\gamma = 0{,}5\,7721\,5664\,9015\,32\ldots$$

Отметим, что с арифметической природой постоянной Эйлера связан ряд старых математических проблем. В частности, до сих пор неизвестно, является ли константа γ алгебраическим или трансцендентным числом. Попытки выразить эту константу через известные величины, например, через π, e или логарифмы алгебраических чисел, пока тоже не имели успеха. Поясним, что число называется **алгебраическим,** если оно является корнем алгебраического многочлена с целыми коэффициентами. Заметим также, что если у этого многочлена коэффициент при старшей степени неизвестной равен единице, то данное число называется **целым алгебраическим числом.** Очевидно, что к алгебраическим числам относятся все рациональные числа. Если же число не является алгебраическим, то оно называется **трансцендентным.**

В качестве еще одного приложения теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности приведем пример последовательности, задаваемой с помощью простой формулы и принимающей только значения простых чисел.