Т е о р е м а 3 (условие интегрируемости несобственных интегралов по параметру). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = (a,+\infty), Y = [b,c]$ и пусть интеграл $g(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ существует и равномерно сходится на Y. Тогда функция $g(y)$ будет интегрируема на Y, а функция $h(x) = \int_b^c f(x,y)dy$ будет интегрируема на $X = [a,+\infty)$, причем*

$$\int\limits_b^c g(y)dy = \int\limits_a^\infty h(x)dx,$$

т.е. равны повторные интегралы

$$\int\limits_b^c dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^c f(x,y)dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную монотонную последовательность $t_n \in X$ с условием $t_n \to +\infty$. Тогда функциональная последовательность $g_n(y)$, где $g_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx$, равномерно сходится к функции $g(y)$ на множестве Y. Каждая из функций $g_n(x)$ непрерывна на Y, потому при фиксированном n по теореме об интегрировании собственных интегралов по параметру (теорема 3 §4) имеем

$$\int\limits_b^c dy \int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx = \int\limits_b^c g_n(y)dy = \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_b^c f(x,y)dy. \qquad (*)$$

По теореме 1 §6 гл. XVI возможен переход к пределу при $n \to \infty$ под знаком интеграла и существует число A такое, что

$$A = \lim_{n\to\infty} \int\limits_b^c g_n(y)dy = \int\limits_b^c \lim_{n\to\infty} g_n(y)dy = \int\limits_b^c g(y)dy = \int\limits_b^c dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx.$$

Переходя в равенстве (*) к пределу при $n \to \infty$, получим, что предел его правой части существует и равен A,

$$A = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_b^c f(x,y)dy.$$

Но поскольку последовательность t_n — произвольная, последний предел равен интегралу

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^c f(x,y)dy.$$

15*

Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Теперь докажем теорему о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

Т е о р е м а 4 (правило Лейбница). *Пусть:*

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = (a, +\infty)$, $Y = [c,d]$;

2) частная производная $f_y'(x,y)$ существует и непрерывна на P;

3) интеграл $g(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится при всех $y \in Y$;

4) интеграл $\int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx$ равномерно сходится на Y.

Тогда функция $g(y)$ дифференцируема на Y и имеет место равенство

$$g'(y) = \int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ при всех $n \geq a$ существует непрерывная на Y функция $g_n(y)$ вида

$$g_n(y) = \int\limits_a^n f(x,y)dx.$$

Применяя правило Лейбница для собственных интегралов, получим

$$g_n'(y) = \int\limits_a^n f_y'(x,y)dx.$$

Заметим, что для функциональной последовательности $g_n(y)$ при $n \to \infty$ имеют место соотношения

$$g_n(y) \to g(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx \quad \text{и} \quad g_n'(y) \underset{Y}{\overset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Следовательно, по правилу дифференцирования функциональной последовательности имеем

$$\left(\lim_{n\to\infty} g_n(y)\right)' = \lim_{n\to\infty} g_n'(y), \quad \text{т.е.} \quad g'(y) = \int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Теорема 4 доказана.

Докажем еще две теоремы о несобственных повторных интегралах, которые потребуются нам в дальнейшем.

Теорема 5. *Пусть $f(x,y)$ задана и непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = [a, +\infty)$, $Y = [b, +\infty)$ и $f(x,y) \geq 0$ на P. Пусть при всех $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится к функции $g(y)$, непрерывной на Y, и при всех $x \in X$ интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dy$ сходится к функции $h(x)$, непрерывной на X.*

Тогда если сходится интеграл $J_1 = \int\limits_b^\infty g(y)dy$, то сходится и интеграл $J_2 = \int\limits_a^\infty h(x)dx$, и наоборот, причем $J_1 = J_2$, т.е.

$$\int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^\infty f(x,y)dy.$$

Доказательство. Будем считать, что существует J_1, так как второй случай рассматривается аналогично. Рассмотрим произвольную монотонную числовую последовательность t_m, подчиненную требованиям $t_m \geq a$ и $t_m \to +\infty$, и натуральные числа $n \geq b$. Символом $J_{m,n}$ обозначим повторный интеграл вида

$$J_{m,n} = \int\limits_a^{t_m} dx \int\limits_b^n f(x,y)\, dy.$$

Положим еще

$$g_m(y) = \int\limits_a^{t_m} f(x,y)\, dx \quad \text{и} \quad h_n(x) = \int\limits_b^n f(x,y)\, dy.$$

По теореме об интегрируемости собственного параметрического интеграла имеем

$$J_{m,n} = \int\limits_b^n dy \int\limits_a^{t_m} f(x,y)\, dx = \int\limits_b^n g_m(y)\, dy.$$

Далее, так как $f(x,y) \geq 0$, то $0 \leq g_m(y) \leq g(y)$. Поэтому справедливо неравенство

$$J_{m,n} \leq \int\limits_b^n g(y)\, dy \leq \int\limits_b^\infty g(y)\, dy = J_1.$$

С другой стороны,

$$J_{m,n} = \int\limits_a^{t_m} dx \int\limits_b^n f(x, y)\, dy = \int\limits_a^{t_m} h_n(x)\, dx.$$

При этом $h_n(x) \geq 0$ и при каждом фиксированном x эта последовательность является неубывающей; кроме того, она составлена из непрерывных функций и ее предел, т.е. функция $h(x)$, также непрерывен. Следовательно, по теореме Дини при $n \to \infty$ имеем

$$h_n(x) \underset{[a,t_m]}{\rightrightarrows} h(x).$$

Но тогда при $n \to \infty$ выполнены равенства

$$J(m) = \lim_{n\to\infty} J_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_m} h_n(x)\, dx = \int\limits_a^{t_m} \left(\lim_{n\to\infty} h_n(x)\right)\, dx = \int\limits_a^{t_m} h(x)\, dx.$$

Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $J_{m,n} \leq J_1$, получим соотношение

$$J(m) = \int\limits_a^{t_m} h(x)\, dx \leq J_1.$$

Но так как $h(x) \geq 0$, то с ростом m последовательность $J(m)$ монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, по теореме Вейерштрасса величина $J(m)$ имеет предел l, причем $l \leq J_1$. Ввиду произвольности выбора последовательности t_m отсюда вытекает, что l одновременно является пределом величины

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t h(x)\, dx = \int\limits_a^\infty h(x)\, dx = J_2.$$

Таким образом, J_2 существует и $J_2 = l \leq J_1$. Но тогда, меняя в проведенных выше рассуждениях величины J_1 и J_2 местами, одновременно получим неравенство $J_1 \leq J_2$. Следовательно, $J_1 = J_2$.

Теорема 5 доказана полностью.

Приведем еще некоторое обобщение предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 5, кроме условия $f(x,y) \geq 0$; но функция $F(x,y) \geq |f(x,y)|$ удовлетворяет всем ее условиям.*

Тогда утверждение теоремы 5 имеет место не только для функции $F(x,y)$, но и для функции $f(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функции

$$\varphi_1(x,y) = \frac{F(x,y)+f(x,y)}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x,y) = \frac{F(x,y)-f(x,y)}{2}$$

удовлетворяют условиям теоремы 5, но тогда $\varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y) = f(x,y)$ тоже ей удовлетворяет.

Теорема 6 доказана.

Заметим, что, вообще говоря, условия теорем 5 и 6 являются избыточными. Далее будет доказано значительно более общее утверждение, а для наших ближайших целей этих теорем вполне достаточно.

В заключение приведем пример, указанный Коши, в котором при перемене порядка интегрирования получаются различные значения повторных интегралов. Это связано с тем, что подынтегральная функция

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

имеет разрыв в точке $(0,0)$, в частности, при подходе к этой точке по прямым $y = kx$. При $|k| > 1$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = +\infty$, а при $|k| < 1$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = -\infty$.

Но для двух повторных интегралов от этой функции справедливы равенства

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что данный пример относится к несобственным интегралам второго рода, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Лекция 20

§ 8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Здесь мы сформулируем основные понятия элементарной теории несобственных параметрических интегралов второго рода и приведем формулировки некоторых утверждений, соответствующих доказанным нами теоремам об интегралах первого рода.

Рассмотрим множество $P = X \times Y$, где $X = (a, b]$, $Y \subset \mathbb{R}$. Пусть функция $f(x, y)$ задана на P и не ограничена как функция от x хотя бы при одном фиксированном $y \in Y$. Далее, пусть при любых $y \in Y$ и $\delta > 0, \delta \in (0, b-a)$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a+\delta, b]$ как функция от x.

Определение 1. *Введенное выше формальное выражение вида* $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ *называется* **несобственным параметрическим интегралом второго рода** *с одной особой точкой* $x = a$.

Определение 2. *Если при любом фиксированном значении* $y \in Y$ *этот интеграл сходится, то множество* Y *называется* **областью сходимости интеграла** *и его значения* $g(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ *порождают функцию, определенную на множестве* Y.

Подобные определения имеют место и в случае, когда особая точка находится на правом конце промежутка интегрирования $X = [a, b]$, т.е. в точке b. В случае когда особая точка $x = x_0$ лежит внутри отрезка X, его можно разбить на две части этой точкой x_0 и рассматривать каждую часть отрезка отдельно.

Аналогичные рассуждения позволяют рассматривать несобственные интегралы с переменной особой точкой $x_0 = x_0(y)$, но здесь мы входить в детали не будем.

Пример. Интеграл $J = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}}$ сходится на $Y = [0, 1]$ и его можно вычислить.

Действительно, имеем

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \int\limits_0^y \frac{dx}{\sqrt{y-x}} + \int\limits_y^1 \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2\sqrt{y} + 2\sqrt{1-y}.$$

Определение 3. *Несобственный интеграл второго рода*

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

называется **равномерно сходящимся по y на множестве** Y, *если для функции*

$$g(\delta, y) = \int\limits_{a+\delta}^b f(x,y)dx \quad \delta \to 0+$$

выполнено условие

$$g(\delta, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(0,y) = g(y).$$

Исходя из общей формулировки критерия Коши можно сформулировать его для равномерной сходимости несобственного параметрического интеграла второго рода. Но мы ограничимся формулировкой одной сводной теоремы, содержащей утверждения, важные для практических применений.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = (a,b], Y = [c,d]$. Пусть a — особая точка несобственного параметрического интеграла*

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то функция $g(y)$ непрерывна при всех $y \in Y$.*

2. *В этом случае имеем*

$$\int\limits_c^d g(y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

3. *Если интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится, частная производная $f'_y(x,y)$ существует и непрерывна на P, а интеграл $\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то существует $g'(y)$, причем*

$$g'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Если особая точка x_0 является внутренней точкой отрезка $X = [a, b]$, то, как было отмечено выше, необходимо отрезок X разбить этой точкой на две части и рассматривать каждый из двух получившихся интегралов отдельно. Тот же подход можно применить и в случае, когда бесконечный промежуток интегрирования $X = [a, +\infty)$ содержит конечное число особых точек $x_1, \dots, x_n$. Тогда этот промежуток можно разбить на $2n$ промежутков точками $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n}$ таким образом, чтобы на каждом отрезке вида $[t_s, t_{s+1}]$, где $s = 1, \dots, 2n-1$, лежала бы ровно одна особая точка, а на промежутке $[t_{2n}, +\infty)$ особых точек не было. В результате получим $2n-1$ несобственных интегралов второго рода и еще один — первого.

На этом мы закончим изложение теории несобственных параметрических интегралов и займемся ее приложениями.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Начнем с вычисления интеграла Дирихле $D(\alpha)$, называемого еще разрывным множителем Дирихле. По определению имеем

$$D(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Заметим прежде всего, что точка $x = 0$ не является особой, так как подынтегральная функция ограничена. Очевидно, что $D(0) = 0$. Далее, если $\alpha > 0$, то интеграл сходится по признаку Дирихле, поскольку

$$\left| \int_0^t \sin \alpha x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha} \right| < \frac{2}{\alpha}.$$

В этом случае возможна линейная замена переменной интегрирования вида $\alpha x = t$, и тогда имеем

$$D(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d(\alpha x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = D(1) = D.$$

Если же $\alpha < 0$, то $\alpha = -|\alpha|, \sin \alpha x = -\sin |\alpha| x$, откуда

$$D(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\int_0^\infty \frac{\sin |\alpha| x}{x} dx = -D.$$

Таким образом, имеем

$$D(\alpha) = \begin{cases} D & \text{при} \quad \alpha > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha = 0, \\ -D & \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Теперь перейдем к вычислению значения D.

Теорема 1. *Справедливо равенство* $D = \pi/2$.

Доказательство. Рассмотрим параметрический интеграл $g(y)$, где $y \in Y = [0, N]$, $N \in \mathbb{R}$ и

$$g(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-yx} \sin x}{x} dx.$$

Подынтегральная функция $f(x, y) = e^{-yx} \sin x / x$ будет непрерывна всюду на $P = X \times Y$, где $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, N]$, если положить $f(0, y) = 1$.

Убедимся, что интеграл $g(y)$ сходится равномерно на Y. Для этого воспользуемся признаком Абеля. Положим $\alpha(x, y) = \sin x / x$, $\beta(x, y) = e^{-xy}$. Тогда функция $\beta(x, y)$ монотонна и $0 < \beta(x, y) \le 1$, а интеграл $\int_0^\infty \alpha(x, y) dx$ сходится равномерно на Y, поскольку $\alpha(x, y)$ не зависит от y.

Заметим, что равномерную сходимость $g(y)$ можно было бы установить и непосредственно из определения с помощью интегрирования по частям.

Возьмем теперь на отрезке Y произвольную точку $y_0 \neq 0$ и окружим ее некоторым отрезком $Y_\delta = [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, целиком принадлежащим множеству Y. На этом отрезке интеграл

$$\int_0^\infty f'_y(x, y) dx = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x dx$$

сходится равномерно. Это следует из признака Вейерштрасса, поскольку $|e^{-xy} \sin x| < e^{-x(y_0 - \delta)}$, а интеграл $\int_0^\infty e^{-x(y_0-\delta)} dx$ сходится. Кроме того, подынтегральная функция $e^{-xy} \sin x$ непрерывна на $P_\delta = X \times Y_\delta$. Поэтому по правилу Лейбница для несобственных интегралов имеем

$$g'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x dx.$$

Последний интеграл можно вычислить путем интегрирования по частям. При этом получим

$$g'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Итак, мы показали, что функция $g(y)$ непрерывна на $Y = [0, N]$, а ее производная $g'(y)$ существует при всех $y \neq 0$ и равна $-1/(1+y^2)$. Отсюда по формуле Ньютона – Лейбница при всех $y \in (0, N]$ вытекает равенство

$$g(y) = g(N) - \int_N^y \frac{dt}{1+t^2} = g(N) + \operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} y.$$

Пользуясь непрерывностью функции $g(y)$ в точке $y = 0$, мы получим

$$g(0) = \lim_{y\to 0+} g(y) = \lim_{y\to 0+} (g(N) + \operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} y) =$$

$$= g(N) + \operatorname{arctg} N.$$

Теперь, устремляя N к $+\infty$, приходим к соотношениям $\operatorname{arctg} N \to \pi/2$,

$$|g(N)| \le \int_0^\infty e^{-Nx}\frac{|\sin x|}{x}dx \le \int_0^\infty e^{-Nx}dx = \frac{1}{N} \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$D = g(0) = \lim_{N\to\infty} (g(N) + \operatorname{arctg} N) = \pi/2.$$

Теорема 1 доказана.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

С л е д с т в и е. *При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$D(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} \alpha.$$

§ 10. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Гамма-функция Эйлера, которая была определена ранее, и бета-функция, определение которой мы дадим ниже, называются соответственно интегралами Эйлера второго и первого рода. Начнем с дальнейшего изучения свойств гамма-функции.

Теорема 1 (формула Эйлера - Гаусса). *При $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ имеет место равенство*

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}_m(s),$$

где

$$\mathrm{P}_m(s) = \frac{(m-1)!m^s}{s(s+1)\ldots(s+m-1)}.$$

Доказательство. Применяя формулу Эйлера, получим выражение для $\Gamma(s)$:

$$\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\cdot\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}(1+1)^s\ldots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^s\left(1+\frac{s}{1}\right)^{-1}\ldots\left(1+\frac{s}{m-1}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\Pi_m(s).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. (формула Гаусса). *При $s > 0$ в обозначениях теоремы 1 справедливо равенство*

$$\mathrm{P}_{m+1}(s) = \left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt.$$

Доказательство. С помощью замены переменной и интегрирования по частям получаем

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt = (m+1)^s\int_0^1(1-x)^m x^{s-1}dx =$$

$$= (m+1)^s \frac{m}{s} \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^s dx = \cdots =$$

$$= (m+1)^s \frac{m!}{s(s+1)\ldots(s+m-1)} \int_0^1 x^{s+m-1} dx =$$

$$= (m+1)^s \frac{m!}{s(s+1)\ldots(s+m)} = \mathrm{P}_{m+1}(s).$$

Теорема 2 доказана.

Имеет место следующее представление гамма-функции в виде несобственного интеграла.

Теорема 3 (интегральное представление для гамма-функции Эйлера). *При $s > 0$ справедливо равенство*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $s \geq 1$ рассматриваемый параметрический интеграл является несобственным интегралом первого рода, а при $0 < s < 1$ он имеет особую точку $x = 0$. Но в обоих случаях он сходится, поскольку в окрестности нуля подынтегральное выражение мажорируется функцией x^{s-1}, а на бесконечности — функцией $e^{-x/2}$.

Рассмотрим разность $R_m(s)$, где

$$R_m(s) = \int_0^m x^{s-1} e^{-x} dx - \mathrm{P}_{m+1}(s) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^s =$$

$$= \int_0^m x^{s-1} \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m\right) dx.$$

В силу выпуклости графика функции $g(y) = e^y - 1 - y$ при всех y имеем $1 + y \leq e^y$, поэтому неравенства

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n}, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$$

и

$$1 - \frac{x}{n} \leq e^{-x/n}, \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

справедливы при всех вещественных x и натуральных n.

Кроме того, заметим, что из неравенства Бернулли при $0 < y \le 1$ следует, что $(1-y)^m > 1 - my$, т.е. $1-(1-y)^m < my$.

Отсюда при $0 \le x \le m$ и $y = \frac{x^2}{m^2}$ получаем оценки

$$0 \le e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}\left(1 - e^x\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\right) \le$$

$$\le e^{-x}\left(1 - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m\right) \le e^{-x}\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m\right) =$$

$$= e^{-x}(1-(1-y)^m) < e^{-x}my = \frac{e^{-x}x^2}{m}.$$

Но тогда величина $R_m(s)$ оценивается так:

$$0 \le R_m(s) < \int_0^m \frac{x^{s+1}e^{-x}}{m}dx < \frac{1}{m}\int_0^\infty x^{s+1}e^{-x}dx.$$

Здесь $s+1 > 1$, и поэтому последний интеграл сходится, откуда $0 \le R_m(s) < \frac{A_s}{m}$, где A_s — некоторая величина, зависящая только от параметра s. Следовательно, $R_m(s) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда окончательно имеем

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^m x^{s-1}e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(R_m(s) + \mathrm{P}_{m+1}(s)\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\right) = 0 + \Gamma(s)\cdot 1 = \Gamma(s).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Идея изложенного доказательства теоремы 3 высказана Шлемильхом (1879).

Замечание 2. С помощью интегрирования по частям из теоремы 3 выводится следующая формула Коши, справедливая при всех значениях s вида $-(m+1) < s < -m$, где $m \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}(e^{-x} - \varphi_m(x))dx,$$

где $\varphi_m(x) = \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{(-x)^n}{n!}$.

Здесь условия, наложенные на s, обеспечивают сходимость несобственного интеграла, имеющего две особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$.

Действительно, в окрестности особой точки $x = 0$ подынтегральная функция эквивалентна величине

$$x^{s+m}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!},$$

а в окрестности точки $x = +\infty$ является величиной порядка $O(x^{s+m-1})$. Отсюда по признаку сравнения следует сходимость интеграла.

Далее нам потребуется представление функции $\sin \pi s$ в виде бесконечного произведения. Приведем его в качестве следующей леммы, которая будет доказана при изучении рядов Фурье.

Л е м м а 1 (лемма Эйлера). *При всех вещественных нецелых s имеет место формула*

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Т е о р е м а 4 (формула дополнения Эйлера). *При всех нецелых s справедливо равенство*

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

В частности, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы Эйлера и леммы 1 имеем

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = -s\Gamma(-s)\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\pi s\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^2/n^2)} = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Второе утверждение теоремы прямо следует из первого.

Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (формула удвоения Лежандра). *Справедливо равенство*

$$\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим произведение $F_m(s)$, где

$$F_m(s) = \frac{2^{2s-1}\mathrm{P}_m(s)\mathrm{P}_m(s+1/2)}{\mathrm{P}_{2m}(2s)\mathrm{P}_m(1/2)}.$$

Выпишем явное выражение для $F_m(s)$. Имеем

$$F_m(s) =$$

$$= \frac{2^{2s-1}(m-1)!m^s(m-1)!m^{s+1/2}\cdot 2s\dots(2s+2m-1)\cdot\frac{1}{2}\dots(m-\frac{1}{2})}{(2m-1)!(2m)^{2s-1}(m-1)!m^{1/2}s\dots(s+m-1)(s+\frac{1}{2})\dots(s+m-\frac{1}{2})},$$

что равно 1. Устремляя m к $+\infty$, приходим к равенству

$$\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)\Gamma(1/2)} = 1.$$

Тем самым теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь интеграл Эйлера первого рода, т.е. бета-функцию Эйлера.

Определение 1. *При* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$ **бета-функция Эйлера** $B(\alpha,\beta)$ *задается равенством*

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Т е о р е м а 6. *При* $\alpha > 1$ *и* $\beta > 1$ *справедлива формула*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интеграле, определяющем функцию $B(\alpha,\beta)$, выполним замену переменной вида $x = \frac{y}{1+y}$. Тогда имеем

$$dx = \frac{dy}{(1+y)^2},\quad x^{\alpha-1} = \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}},\quad (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{(1+y)^{\beta-1}},$$

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}.$$

Отсюда следует, что

$$H = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\beta)dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}.$$

Далее, если $y > 0$, то

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx =$$

$$= (1+y)^{\alpha+\beta} \int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} e^{-x(y+1)} dx.$$

Поэтому

$$H = \int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}(1+y)^{\alpha+\beta}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \left(\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} e^{-x(y+1)} dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty (xy)^{\alpha-1} x^\beta e^{-x(y+1)} dx \right) dy.$$

В последнем интеграле получим

$$H = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty (xy)^{\alpha-1} e^{-xy} x dy \right) x^{\beta-1} e^{-x} \, dx =$$

$$= \Gamma(\alpha) \int\limits_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Остается только обосновать перестановку порядка интегрирования. Подынтегральная функция $f(x,y) = y^{\alpha-1} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x(y+1)}$ всюду положительна и непрерывна. Кроме того, каждая из функций, т.е. интегралов

$$g(y) = \int\limits_0^\infty f(x,y) \, dx = \frac{y^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}}, \; h(x) = \int\limits_0^\infty f(x,y) \, dy = \Gamma(\alpha) x^{\beta-1} e^{-x},$$

непрерывна и неотрицательна на $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, а несобственные интегралы $\int\limits_0^\infty g(y) \, dy$ и $\int\limits_0^\infty h(x) \, dx$ сходятся. Следовательно, порядок интегрирования действительно можно изменить.

Теорема 6 доказана.

Замечание. Поскольку гамма-функция $\Gamma(s)$ определена при всех $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, то формула теоремы 6 позволяет распространить определение функции $B(\alpha, \beta)$ на все множество вещественных значений (α, β), за исключением точек (α, β), где либо величина α, либо величина β равна $0, -1, -2, \ldots$.

§ 11. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Изучение эйлеровских интегралов завершим доказательством важной для приложений формулы Стирлинга, дающей приближенное значение для гамма-функции или для функции $n!$.

Теорема 1 (формула Стирлинга). *При $s \geq 2$ имеет место равенство*

$$\ln \Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + R,$$

где $c_0 = \ln\sqrt{2\pi}$, а для величины остатка R выполняются неравенства

$$0 > R \geq -1/(8s+4).$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(s) = \Gamma(s).$$

Далее имеем

$$\ln \mathrm{P}_n(s) = s\ln n - \ln s + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln k - \ln\left(k+s\right)\right).$$

Применяя формулу суммирования Эйлера, получим

$$\ln \mathrm{P}_n(s) = A - B,$$

где

$$A = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \left(\ln x - \ln\left(x+s\right)\right)dx + s\ln n - \ln s,\ B = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \rho(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+s}\right)dx.$$

Сначала рассмотрим величину A. Имеем

$$\int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln x dx - \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln\left(x+s\right)dx = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln x dx - \int\limits_{s+0,5}^{n+s-0,5} \ln x dx =$$

$$= \int\limits_{0,5}^{s+0,5} \ln x dx - \int\limits_{n-0,5}^{n+s-0,5} \ln x dx = A_1 - A_2.$$

Интегрируя, находим

$$A_1 = (x \ln x - x)\Big|_{0,5}^{s+0,5} = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(s + \frac{1}{2}\right) - s + \frac{\ln 2}{2}.$$

Далее будем считать, что $n > 2s$. Тогда, применяя формулу $\ln(1 + x/n) = O(x/n)$, получим

$$s \ln n - A_2 = \int\limits_{n-0,5}^{n+s-0,5} (\ln n - \ln x) dx = - \int\limits_{-0,5}^{s-0,5} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-0,5}^{s-0,5} O\left(\frac{x}{n}\right) dx = O\left(\frac{s^2}{n}\right).$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$A = \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln \left(s + \frac{1}{2}\right) - s - \ln s + c_1 + O\left(\frac{s^2}{n}\right),$$

где c_1 — постоянная.

Рассмотрим теперь величину B. Заметим, что неравенство

$$-\frac{1}{8} \leq \int\limits_{0,5}^{t} \rho(x)\, dx \leq 0$$

справедливо при всех $t \geq 0,5$. Поэтому по признаку Дирихле интеграл $\int\limits_{0,5}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\, dx$ сходится. Следовательно,

$$B_1 = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(x)}{x}\, dx = c_2 + o(1).$$

Для оценки величины

$$B_2 = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(x)}{x+s}\, dx$$

применим вторую теорему о среднем. Тогда получим

$$B_2 = \frac{1}{s+0,5}\int\limits_{0,5}^{t} \rho(x)\,dx,$$

откуда имеем $-\frac{1}{8s+4} \le B_2 \le 0$. Но по определению имеем $B = B_1 - B_2$. Следовательно, из равенства $\ln P_n(s) = A - B$ вытекает соотношение

$$\ln \mathrm{P}_n(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + B_2 + O\left(\frac{s^2}{n}\right).$$

Здесь c_0 — некоторая абсолютная постоянная.

Устремляя n к бесконечности, мы приходим к равенству

$$\ln\Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 - \frac{\theta}{8s+4},$$

где $\theta = \theta(s)$ — некоторая функция с условием $0 \le \theta \le 1$. Осталось вычислить значение константы c_0. Для этого применим формулу Лежандра. Тогда при $s \to \infty$ будем иметь

$$(2s-1)\ln 2 + \ln\Gamma(s) + \ln\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \ln\Gamma(2s) + \ln\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 +$$

$$+(s+1)\ln(s+1) - (s+1) - \ln\left(s+\frac{1}{2}\right) + c_0 + O\left(\frac{1}{s}\right) + (2s-1)\ln 2 =$$

$$= \left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(2s+\frac{1}{2}\right) - \left(2s+\frac{1}{2}\right) - \ln(2s) + c_0 + \ln\sqrt{\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Далее воспользуемся соотношением

$$\ln(s+a) = \ln s + \frac{a}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Получим

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln s + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) + c_0 - \ln s +$$

$$+(s+1)\ln s + 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) - (s+1) + c_0 - \ln s + (2s-1)\ln 2 =$$

$$= \left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln 2 + \left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln s + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) -$$

$$- \left(2s+\frac{1}{2}\right) - \ln 2 - \ln s + c_0 + \sqrt{\pi}.$$

Приводя подобные члены, приходим к равенству

$$c_0 = \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

откуда имеем $c_0 = \ln\sqrt{2\pi}$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что если снова воспользоваться соотношением

$$\ln(s+a) = \ln s + \frac{a}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

то из теоремы 1 можно получить еще один вариант формулы Стирлинга вида

$$\ln\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

В частности, при $s = n+1$ отсюда имеем

$$\ln\Gamma(n+1) = \ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + 1 - (n+1) + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= n\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, справедлива асимптотическая формула

$$n! = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{O(1/n)} = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

которая тоже называется формулой Стирлинга.

Более тщательные вычисления позволяют получить оценку вида $0 > R \geq -1/(24s+12)$ для остатка R в асимптотической формуле теоремы 1. Этот результат был установлен Гауссом. Он же доказал, что величину $e^{O(1/n)}$ в асимптотической формуле для $n!$ можно заменить на e^{θ_n}, где $0 < \theta_n \leq 1/(12n)$.

Разумеется, теория эйлеровских интегралов далеко не исчерпывается доказанными здесь утверждениями, однако рамки нашего курса требуют ограничиться рассмотренными вопросами.

Глава XVIII
РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Лекция 23

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДРОБНОЙ ДОЛИ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ. ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ПУАССОНА. СУММЫ ГАУССА

Эта глава в основном посвящена изучению тригонометрических рядов Фурье. Важность рассматриваемой темы обусловлена той большой ролью, которую играют ее приложения не только в математике, но и в механике, физике и других научных дисциплинах. Во многом это обусловлено тем, что тригонометрические ряды Фурье соединяют в себе особенности как тригонометрических рядов, так и общих рядов Фурье. Заметим, кстати, что при знакомстве с очередным утверждением полезно отмечать для себя, какую из двух указанных сторон теории оно по преимуществу отражает.

Обширность темы не позволяет сколько-нибудь полно охватить в программе курса лекций по математическому анализу даже классические ее аспекты, так что ограничимся наиболее простыми теоремами, отражающими общую ситуацию. В конце главы коснемся также и некоторых вопросов элементарной теории интеграла Фурье.

Сначала дадим основные определения.

Определение 1. *Функция $P_n(x)$ вида*

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется **тригонометрическим многочленом степени** *n или порядка n.*

Поясним, почему при определении одночлена “нулевой степени” $a_0/2$ коэффициент a_0 берется с числовым множителем $1/2$.

Дело в том, что указанная запись позволяет единообразно представить коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ в следующем виде:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n(x)\sin kx dx,$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Определение 2. *Функциональный ряд вида*

$$\sum f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется **тригонометрическим рядом,** *точнее,* **формальным тригонометрическим рядом.**

Замечание. В определениях 1 и 2 аргумент x может принимать любые числовые значения. Поэтому вместо независимой переменной x можно рассматривать любую функцию $x = \varphi(t)$. Полученный таким образом формальный функциональный ряд будем также называть **тригонометрическим рядом.**

Определение 3. *Если существует функция $g(x)$ такая, что все коэффициенты a_k и b_k тригонометрического ряда $\sum f_n(x)$ могут быть выражены по формулам Эйлера – Фурье вида*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то этот ряд называется **тригонометрическим рядом Фурье** *функции $g(x)$. При этом интегралы во всех формулах могут быть и несобственными.*

При изучении тригонометрических рядов возникают, в основном, те же вопросы, что и в случае любых функциональных рядов. Например, для конкретного ряда можно ставить задачу определения области сходимости и функциональных свойств его суммы. Можно также рассматривать вопросы о представлении данной функции в виде тригонометрического ряда, о единственности такого представления, о специальных признаках сходимости ряда в точке и на некотором множестве, о правилах почленного интегрирования и дифференцирования ряда и т.д.

С другой стороны, будут доказаны неравенство Бесселя, равенство Парсеваля и другие утверждения, отражающие свойства общих рядов Фурье. Здесь следует сказать, что коэффициенты ряда Фурье конкретной функции несут в себе полезную информацию о ней даже и тогда, когда ряд расходится. В этом случае существуют различные способы ее извлечения. В частности, большую роль играют здесь методы суммирования расходящихся рядов, о которых упоминалось ранее.

Но сначала разберем один пример, важный для дальнейших приложений. Рассмотрим тригонометрический ряд $f(x)$ вида

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi kx}{\pi k}.$$

Его n-ю частичную сумму обозначим через $s_n(x)$. Определим функции $\rho(x)$ и $\rho_0(x)$, полагая $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ и

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } x \text{ --- нецелое число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ --- целое число.} \end{cases}$$

Функция $\rho_0(x)$ называется **функцией Бернулли.**

Т е о р е м а 1. *При натуральном n справедливы формулы*

$$\rho(x) = s_n(x) + \sigma_n(x), \quad \rho_0(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

причем

$$|\sigma_n(x)| \le R_n(x), \quad |r_n(x)| \le R_n(x), \quad \text{где } R_n(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Доказательство теоремы 1 будет проведено несколько позже, поскольку оно опирается на две следующие леммы.

Введем еще одно обозначение. Положим

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \cos 2\pi kx = 1 + 2\cos 2\pi x + \cdots + 2\cos 2\pi nx.$$

Л е м м а 1. *Имеют место соотношения:*
а) $s_n'(x) = T_n(x) - 1$; б) $|T_n(x)| \le 2n + 1$; в) $\int\limits_0^1 T_n(x)dx = 1$;
г) $T_n(x) = \frac{\sin \pi x(2n+1)}{\sin \pi x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения а) — в) очевидны. Рассмотрим утверждение г). Имеем

$$2\cos \alpha x \sin \beta x = \sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x,$$

откуда следует, что

$$T_n(x) = \frac{1}{2\sin \pi x} \sum_{k=-n}^{n} 2\cos 2\pi kx \sin \pi x =$$

$$= \frac{1}{2\sin \pi x} \sum_{k=-n}^{n} (\sin \pi(2k+1)x - \sin \pi(2k-1)x) =$$

$$= \frac{\sin \pi(2n+1)x - \sin \pi(-2n-1)x}{2\sin \pi x} = \frac{\sin \pi(2n+1)x}{\sin \pi x}.$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *При $0 < \delta \le 1/2$ справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_{\delta}^{1/2} T_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta} T_n(x)dx\right| \le \frac{4}{\sqrt{1+(2n+1)^2\sin^2\pi\delta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $T_n(x)$ — функция периодическая с периодом 1 и четная, поэтому

$$\int\limits_{\delta}^{1/2} T_n(x)dx = \int\limits_{-1/2}^{-\delta} T_n(x)dx = \int\limits_{1/2}^{1-\delta} T_n(x)dx = A.$$

Положим $a = \pi(2n+1)$. Тогда имеем

$$A = \int\limits_{1/2}^{1-\delta} \frac{\sin ax}{\sin\pi x}dx = -\frac{1}{a}\int\limits_{1/2}^{1-\delta} \frac{d\cos ax}{\sin\pi x} =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\Bigg|_{1/2}^{1-\delta} - \int\limits_{1/2}^{1-\delta}\cos ax\, d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right).$$

Заметим, что на участке интегрирования функция $\sin\pi x$ монотонно убывает, а функция $\varphi(x) = 1/\sin\pi x$ монотонно возрастает, поэтому $\varphi'(x) > 0$. Кроме того, $|\cos ax| \le 1$, и при $x = 1/2$ имеем $\cos ax = \cos\frac{\pi}{2}(2n+1) = 0$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta}\cos ax\, d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right| = \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta}\cos ax\varphi'(x)dx\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta}\varphi'(x)dx\right| = \frac{1}{\sin\pi\delta} - 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\left|\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\Big|_{1/2}^{1-\delta}\right| \le \frac{1}{\sin\pi\delta}$, имеем

$$|A| \le \frac{2}{a\sin\pi\delta}.$$

Далее, так как функция $y = \sin x/x$ убывает на промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$ и $\pi\delta < \pi/2$, то имеем

$$\frac{\sin\pi\delta}{\pi\delta} \ge \frac{\sin\pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{\pi\delta}{\sin\pi\delta} \le \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin\pi\delta} \le \frac{1}{2\delta}.$$

Следовательно,

$$|A| \le \frac{2}{a\cdot 2\delta} = \frac{1}{a\delta} = \frac{1}{\pi(2n+1)\delta}.$$

Если теперь $\frac{1}{\pi(2n+1)} \le \delta \le \frac{1}{2}$, то $|A| \le 1$, а если $0 < \delta < \frac{1}{\pi(2n+1)}$, то в силу оценки $|T_n(x)| \le 2n+1$ имеем

$$|A| = \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta} T_n(x)dx\right| = \left|\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\delta} T_n(x)dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} + \delta(2n+1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < 1.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|A| < \min\left(1, \frac{2}{a\sin\pi\delta}\right) \le 2\min\left(1, \frac{1}{a\sin\pi\delta}\right) \le \frac{4}{\sqrt{1+a^2\sin^2\pi\delta}},$$

так как при любых $x > 0$ и $y > 0$ имеет место очевидное неравенство

$$\min\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) < \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Значения функций $\rho(x)$ и $\rho_0(x)$ отличаются только в точках вида $x = z$, где z — целое число. Проверим сначала справедливость утверждения теоремы для этих точек. Действительно, тогда имеем:

$$\sigma_n(z) = \sigma_n(0) = \rho(0) - s_n(0) = \frac{1}{2} < 4 = R_n(0),$$

$$r_n(z) = r_n(0) = \rho_0(0) - s_n(0) = 0 < 4 = R_n(0).$$

Если же x нецелое, то $\sigma_n(x) = r_n(x)$ и достаточно ограничиться рассмотрением одной только функции $\sigma_n(x)$. Поскольку обе функции $|\sigma_n(x)|$ и $R_n(x)$ четные и периодические с периодом 1, можно считать, что $0 < x < 1/2$. В этом случае имеем

$$\int\limits_0^x T_n(y)dy = \int\limits_0^x \left(1 + 2\sum_{k=1}^n \cos 2\pi ky\right) dy =$$

$$= x + \sum_{k=1}^n \int\limits_0^x \frac{d\sin 2\pi ky}{\pi k} = x + s_n(x).$$

Но так как $0 < x < 1/2$, то $\{x\} = x$ и $\rho(x) = 1/2 - \{x\} = 1/2 - x$, $x = 1/2 - \rho(x)$. Следовательно,

$$\int_0^x T_n(y)dy = \frac{1}{2} - \rho(x) + s_n(x) = \frac{1}{2} - \sigma_n(x),$$

откуда

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} - \int_0^x T_n(y)dy = \frac{1}{2} - \int_0^{1/2} T_n(y)dy + \int_x^{1/2} T_n(y)dy = \int_x^{1/2} T_n(y)dy.$$

Теперь для оценки $\sigma_n(x)$ применим лемму 2. Получим

$$|\sigma_n(x)| = \left|\int_x^{1/2} T_n(y)dy\right| \leq \frac{4}{\sqrt{1+(2n+1)^2\sin^2\pi x}} <$$

$$< \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi x}} = R_n(x).$$

Теорема 1 доказана.

В качестве простого следствия теоремы 1 докажем еще одну теорему.

Т е о р е м а 2. *При $n \to \infty$ имеем:*

а) $s_n(x) \to \rho_0(x)$;

б) если $\delta > 0$ и $I = [\delta, 1-\delta]$, то $s_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} \rho(x)$ и $s_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} \rho_0(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение а) эквивалентно тому, что последовательность $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это действительно так, поскольку $r_0(0) = 0$ при всех n, а если x — нецелое число, то $|\sigma_n(x)| \leq R_n(x) \to 0$. Что касается утверждения *б)*, то оно следует из признака Вейерштрасса, поскольку величина $|s_n(x)|$ мажорируется на I бесконечно малой числовой последовательностью $R_n(\delta) = \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi\delta}}$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (формула суммирования Пуассона). *Пусть $a \leq b$ — полуцелые числа, т.е. числа вида $z + 1/2$, где z — целое число. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, непрерывную на $X = [a, b]$, $|f'(x)| \leq M$. Тогда при любом натуральном N справедлива формула*

$$S = \sum_{a<n\leq b} f(n) = \sum_{n=-N}^{N} \int_a^b f(x)\cos 2\pi nx dx + R_N,$$

где
$$|R_N| \le \frac{8M(b-a)\ln N}{N}.$$

В частности, при $N \to \infty$ имеем

$$S = \sum_{a<n\le b} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \int_a^b f(x)\cos 2\pi nx dx.$$

Здесь символ $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ *означает, что сумма ряда берется в смысле главного значения по Коши.*

Доказательство. К сумме S мы применим формулу суммирования Эйлера. Получим

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \rho(x)f'(x)dx.$$

По теореме 1 имеем

$$\rho(x) = s_N(x) + \sigma_N(x).$$

Следовательно,

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b s_N(x)f'(x)dx + R_N,$$

где $R_N = -\int\limits_a^b \sigma_N(x)f'(x)dx$. Интегрируя по частям и учитывая, что $s_N(a) = s_N(b) = 0$, получим

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b s_N(x)f'(x)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - f(x)s_N(x)\Big|_a^b + \int_a^b s'_N(x)f(x)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)\left(\sum_{k=-N}^{N}\cos 2\pi kx - 1\right)dx =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \int_a^b f(x) \cos 2\pi kx dx.$$

Осталось оценить остаток R_N. Применяя теорему 1 и учитывая, что $|f'(x)| \le M$, получим оценку

$$|R_N| \le \left| \int_a^b \sigma_N(x) f'(x) dx \right| \le 4M \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле периодична с периодом 1 и четна, поэтому имеем

$$|R_N| \le 8M(b-a) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}} \le 8M(b-a) \left(\int_0^{1/N} dx + \int_{1/N}^{1/2} \frac{dx}{2Nx} \right) =$$

$$= 8M(b-a) \left(\frac{1}{N} + \frac{\ln N/2}{2N} \right) < \frac{8M(b-a) \ln N}{N}.$$

Теорема 3 доказана.

Изящное приложение формулы суммирования Пуассона дал Дирихле. Он нашел точное значение сумм Гаусса вида

$$\sum_{n=1}^{N} \cos \frac{2\pi n^2}{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} \sin \frac{2\pi n^2}{N}.$$

Упомянем еще об одном красивом применении формулы Пуассона, данном в 1903 г. Г. Ф. Вороным, к задаче о нахождении асимптотического выражения для количества целых точек под гиперболой (эта задача носит название "проблема делителей Дирихле"). Остановимся на вычислении значений сумм Гаусса. Отметим, что Гаусс в своих "Арифметических исследованиях" предложил несколько разных способов их вычисления, но мы будем основываться на методе Дирихле.

Т е о р е м а 4. *При натуральном N справедлива следующая формула:*

$$G(N) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^2/N} = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} \sqrt{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала напомним формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

где φ — действительное число. Записывая формулу суммирования Пуассона в комплексной форме, мы при $k \to \infty$ получим

$$G(N) = \sum_{m=-2k}^{2k} I(m) + R,$$

где

$$I(m) = \int_{0,5}^{N+0,5} e^{2\pi i\left(\frac{x^2}{N}+mx\right)}\,dx,\; R = O\left(\frac{N\ln k}{k}\right).$$

Преобразуем интеграл $I(m)$. Имеем

$$I(m) = \int_{0,5}^{N+0,5} e^{2\pi i\left((x+0,5mN)^2/N-m^2N/4\right)}dx =$$

$$= e^{-2\pi i\frac{m^2N}{4}} \int_{0,5mN+0,5}^{N(0,5m+1)+0,5} e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy.$$

Суммируя величины $I(m)$ отдельно по четным числам m $(m = 2l)$ и отдельно по нечетным числам m $(m = 2l-1)$, получим

$$G(N) = \sum_{l=-k}^{k} \int_{Nl+0,5}^{N(l+1)+0,5} e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy + \sum_{l=-k}^{k} e^{-\frac{\pi i N}{2}} \int_{N(l-0,5)+0,5}^{N(l+0,5)+0,5} e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy + R =$$

$$= \int_{-Nk+0,5}^{N(k+1)+0,5} e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy + i^{-N} \int_{-N(k-0,5)+0,5}^{N(k+0,5)+0,5} e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy + R =$$

$$= \sqrt{N}\left(1+i^{-N}\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2}dz + O\left(N^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}\right) + R,$$

так как при $|\alpha| \le \sqrt{N}$ имеет место неравенство

$$\left|\int_{k\sqrt{N}+\alpha}^{+\infty} e^{2\pi i z^2}dz\right| \le k^{-1/2}N^{-1/4}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последней формуле для $G(N)$, получим

$$G(N) = \sqrt{N}\left(1 + i^{-N}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2} dz.$$

В частности, при $N = 1$ имеем

$$G(1) = \left(1 + i^{-1}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2} dz.$$

Следовательно,

$$G(N) = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} \sqrt{N}.$$

Теорема 4 доказана.

Далее нам потребуется выражение характеристической функции $\varphi(x) = \varphi_I(x)$ промежутка $I = [a, b]$, где $0 \le a \le b < 1$, через функцию $\rho_0(x)$.

Определение 4. *Функция* $\varphi(x) = \varphi_I(x)$, *заданная на отрезке* $[0, 1]$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a < x < b, \\ 1/2, & \text{если} \quad x = a \quad \text{или} \quad x = b, \\ 0, & \text{если} \quad x < a \quad \text{или} \quad x > b, \end{cases}$$

называется **характеристической функцией промежутка** I.

Лемма 3. *При* $x \in [0, 1]$ *справедливо равенство*

$$\varphi_I(x) = (b - a) + \rho_0(x - a) - \rho_0(x - b).$$

Доказательство. Обозначим через $f(x)$ правую часть доказываемого равенства. Очевидно, при всех $x \ne a$ или b имеем

$$f'(x) = \rho_0'(x - a) - \rho_0'(x - b) = -1 + 1 = 0.$$

Следовательно, $f'(x)$ — кусочно-постоянная функция, как и функция $\varphi_I(x)$. При этом точки их разрыва совпадают. Кроме того,

$$f(a) = b - a + \rho_0(0) - \rho_0(a - b) = b - a + \rho_0(b - a) = b - a + \frac{1}{2} - (b - a) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично проверяется равенство $f(b) = \frac{1}{2}$. Имеем также

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = b - a + \rho_0\left(\frac{b-a}{2}\right) - \rho_0\left(\frac{a-b}{2}\right) = b - a + 2\rho_0\left(\frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= b - a + 1 - 2\frac{b-a}{2} = 1 = \varphi_I\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

В точке $x = a$ обе функции имеют скачок, равный $+1$, а в точке b этот скачок равен -1. Это значит, что обе функции совпадают во всех точках отрезка $[0, 1]$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 и теоремы 1 непосредственно вытекает справедливость следующей леммы.

Л е м м а 4. *При всех $n \geq 1$ имеет место формула*

$$\varphi_I(x) = (b-a) + s_n(x-a) - s_n(x-b) + E_n(x),$$

где

$$|E_n(x)| \leq \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi(x-a)}} + \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi(x-b)}}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для любой кусочно-постоянной функции, периодической с периодом единица и равной полусумме своих предельных значений слева и справа в точках разрыва.

Лекция 24

§ 2. НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ. ЗАМКНУТОСТЬ И ПОЛНОТА ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Начнем рассмотрение со следующего определения, предложенного Лебегом.

Определение 1. *Точка x_0 называется* **регулярной точкой** *функции $f(x)$, если существуют ее левый и правый пределы при x, стремящемся к x_0, а ее значение $f(x_0)$ в этой точке равно их полусумме. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ регулярна в точке $x = x_0$.*

Очевидно, что каждая точка непрерывности данной функции является ее регулярной точкой.

Определение 2. *Функция $f(x)$, регулярная в каждой точке промежутка I, называется* **регулярной на этом промежутке.**

Определение 3. *Периодическая функция, имеющая конечное число точек разрыва на каждом отрезке вещественной прямой и регулярная в этих точках, называется* **строго регулярной функцией.**

Определение 4. *Если периодическую функцию $g(x)$ можно представить в виде*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt + g(a),$$

где $f(t)$ — строго регулярная функция, то функция $g(x)$ называется **строго кусочно-гладкой функцией.**

Эти определения мы будем использовать при изучении тригонометрических рядов Фурье.

Множество $W = W_l$ всех строго регулярных функций, имеющих один и тот же период $l > 0$, образует линейное пространство. Справедливость этого утверждения легко проверяется.

Для каждой пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из этого множества W зададим функционал $T(f,g)$ по формуле

$$T(f,g) = \varkappa \int_0^l f(x)g(x)dx.$$

Здесь $\varkappa > 0$ — произвольное фиксированное число, которое назовем **весовым коэффициентом.**

Перечислим ряд свойств, которыми обладает функционал $T(f,g)$.

1^0. Симметричность, т.е. $T(f,g) = T(g,f)$.

2^0. Билинейность, т.е. при любых α и $\beta \in \mathbb{R}$ и $f,g,h \in W$

$$T(f, \alpha g + \beta h) = \alpha T(f,g) + \beta T(f,h).$$

3^0. Положительная определенность, т.е.:

а) $T(f,f) \geq 0$ при всех $f \in W$;

б) $T(f,f) > 0$, если только $f(x)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке.

Последнее неравенство следует из того, что если $f(x_0) = y_0 \neq 0$, то либо левый предел l_1, либо правый предел l_2 этой функции в точке x_0 отличен от нуля, и тогда при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ для всех точек левой или правой δ-полуокрестности точки x_0 справедливо неравенство $|f(x)| \geq \varepsilon$. Следовательно,

$$T(f,f) = \varkappa \int_0^l f^2(x)dx > \varkappa\delta\varepsilon^2 > 0,$$

что и означает справедливость утверждения 3б).

Другими словами, билинейный функционал $T = T_{l,\varkappa}$, заданный на декартовом произведении $H = W \times W$, можно рассматривать как скалярное произведение, определенное на пространстве W. Поэтому вместо символа $T(f,g)$ можно писать просто (f,g).

Определение 5. *Функциональная последовательность $f_n(x) \in W$ называется* **ортогональной системой функций**, *если при всех $m \neq n$ имеем $(f_n, f_m) = 0$, т.е. f_m и f_n ортогональны между собой.*

Если при этом для всех $n \in \mathbf{N}$ выполнено условие $\sqrt{(f_n, f_n)} = 1$, то эта последовательность называется ортонормированной системой функций

Напомним, что величина $\sqrt{(f,f)} = ||f||$ называется нормой функции $f(x)$ относительно введенного нами скалярного произведения. Заметим, что одновременно это число является нормой функции $f(x)$ в пространстве L_2 всех функций, заданных на отрезке $[0,l]$, квадрат которых интегрируем по Лебегу на этом отрезке. Известно, что функциональное пространство L_2 удовлетворяет аксиомам гильбертова пространства. Однако ввиду того, что понятие интегрируемости по Лебегу осталось за пределами нашего курса, этого вопроса далее мы касаться не будем.

Итак, ортонормированная система функций — это такая функциональная последовательность $f_n(x) \in W$, все члены которой взаимно ортогональны и норма каждого члена равна единице.

Определение 6. *Число $c_n = c_n(g) = (f_n, g)$ называется* **коэффициентом Фурье** *функции $g(x) \in W$ по ортонормированной системе функций $F = \{f_n\}$. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ называется* **рядом Фурье функции $g(x)$ по ортонормированной системе функций F.**

Введенное понятие и есть общее определение ряда Фурье по ортонормированной системе функций.

Конечно, коэффициенты Фурье c_n можно вычислить и для функций $g(x)$, не обязательно входящих в W. Например, для интегрируемых на $I = [0, l]$ в собственном или даже в несобственном смысле, если только все интегралы $\int\limits_0^l f_n(x)g(x)dx$ существуют. И в этом случае ряд $\sum c_n f_n(x)$ можно было бы назвать рядом Фурье функции $g(x)$ по системе F. Однако такой подход будет вполне оправданным лишь в том случае, когда функция $g(x)$ принадлежит области определения введенного нами ранее скалярного произведения. В частности, это означает, что для этой функции существует ее скалярный квадрат $(g, g) = \varkappa \int\limits_0^l g^2(x)dx$. Именно это условие мы положим в основу определения общего понятия ряда Фурье по ортонормированной системе функций F.

Определение 7. *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условию*

$$(g, g) = \varkappa \int\limits_0^l g^2(x)dx < +\infty.$$

Тогда функциональный ряд $\sum c_n f_n(x)$, где $f_n(x) \in F$ и $c_n = (g, f_n)$, называется **"стандартным" рядом Фурье по ортонормированной системе $F = \{f_n\}$.** *В случае, когда скалярный квадрат (g, g) расходится, но все коэффициенты $c_n = (g, f_n)$ существуют, соответствующий ряд $\sum c_n f_n(x)$ будем называть* **"нестандартным" рядом Фурье по системе функций F.**

Важным примером ортонормированной системы на отрезке $[0, 2\pi]$ относительно скалярного произведения с весовым коэффициентом $\varkappa = 1$ является система функций

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}.$$

Если же положить $\varkappa = 1/\pi$, то ортонормированной системой будет система функций

$$F_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \right\}.$$

Во втором случае ряд Фурье можно записать в следующем виде:

$$\sum f_n(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

По существу, мы получаем определенный ранее тригонометрический ряд Фурье. Легко убедиться, что и рассмотренный выше тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}$ является рядом Фурье функции $\rho_0(x)$ по ортонормированной системе функций

$$F_3 = \{1, \sqrt{2}\cos 2\pi x, \sqrt{2}\sin 2\pi x, \ldots, \sqrt{2}\cos 2\pi nx, \sqrt{2}\sin 2\pi nx, \ldots\}$$

на отрезке $[0,1]$ со значением $\varkappa = 1$.

Аналогично, на отрезке $[0, l]$ при $\varkappa = 1$ ортонормированной является система функций F_4 :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi x}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi nx}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi nx}{l}, \ldots\right\}.$$

Ряд Фурье по системе функций F_4 будем называть тригонометрическим рядом Фурье по отрезку $[0, l]$.

Для коэффициентов Фурье c_n функции $g(x)$ справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1 (неравенство Бесселя). *Для любой ортонормированной системы $F = \{f_n\}$ и любой функции $g(x)$ с условием $(g, g) < +\infty$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 \le (g, g), \quad \text{где} \quad c_k = (g, f_k), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$g_m = g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x).$$

Положим $h = h_m(x) = g(x) - g_m(x)$. Тогда получим

$$(g_m, f_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k (f_k, f_n) = \begin{cases} c_n & \text{при} \quad n \le m, \\ 0 & \text{при} \quad n > m; \end{cases}$$

$$(h_m, f_n) = c_n - (g_m, f_n) = \begin{cases} c_n & \text{при} \quad n > m, \\ 0 & \text{при} \quad n \le m. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$(g_m, g_m) = \left(\sum_{k=1}^{m} c_k f_k, \sum_{n=1}^{m} c_n f_n\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} c_k c_n (f_k, f_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

Следовательно,

$$(g_m, h) = (h, g_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k (g_m, f_k) = 0.$$

Поэтому

$$(g, g) = (g_m + h, g_m + h) = (g_m, g_m) + 2(g_m, h) + (h, h) =$$

$$= (g_m, g_m) + (h, h) \geq (g_m, g_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

Теорема 1 доказана.

Заметим, что попутно мы доказали равенство

$$(g, g) = \sum_{k=1}^{m} c_k^2 + (h, h).$$

Определение 8. *Функцию $g_m(x)$ теоремы 1 будем называть* **m-м многочленом Фурье по ортонормированной системе** *F.*

Из теоремы 1 непосредственно следует справедливость двух утверждений, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1:*

а) справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq ||g||^2 = (g, g);$$

б) $c_n = c_n(g) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Определение 9. *1. Ортонормированная система $F = \{f_n\}$ называется* **замкнутой,** *если*

$$||g||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Это равенство называется **равенством Парсеваля.**

2. Ортонормированная система $F = \{f_n\}$ называется **полной** *в линейном пространстве V, если для любой функции $g \in V$ с условием $(g, f_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(g, g) = 0$.*

Утверждение 1. *Всякая замкнутая ортонормированная система функций является полной.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. будем считать, что $(g,g) > 0$, но $c_k = c_k(g) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу замкнутости ортонормированной системы функций имеем

$$0 < (g,g) = \sum c_k^2(g) = 0,$$

что невозможно. Утверждение доказано.

Теорема 3 (свойство экстремальности коэффициентов Фурье). *При любых вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ справедливо неравенство*

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right\| \leq \left\| g - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k \right\|,$$

где $c_1, \ldots, c_m$ — коэффициенты Фурье по системе функций $F = \{f_k\}$.

Доказательство. Снова воспользуемся равенством $(h_m, f_k) = (g - g_m, f_k) = 0$, справедливым при всех $k \leq m$. Получим

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k \right\|^2 =$$

$$= \left\| (g - g_m) + \sum_{k=1}^{m} (c_k - \alpha_k) f_k \right\|^2 = \left\| g - g_m \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{m} (c_k - \alpha_k) f_k \right\|^2 =$$

$$= \left\| g - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{m} (c_k - \alpha_k)^2 \geq \left\| g - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k \right\|^2.$$

Теорема 3 доказана.

§ 3. ЗАМКНУТОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Нашей целью является доказательство равенства Парсеваля для ортогональной тригонометрической системы функций

$$F_0 = \{f_k(x)\} = \left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\}.$$

Теорема 1 (теорема Ляпунова). *Тригонометрическая система F_0 замкнута в пространстве $W_{2\pi}$. Другими словами, для любой строго регулярной и 2π-периодической функции $g(x)$ имеет место равенство Парсеваля вида*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются через $g(x)$ по формулам Эйлера – Фурье.

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что если первую функцию $f_1(x) = \frac{1}{2}$ в системе F_0 заменить на $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то система F_0 преобразуется в систему F_2, ортонормированную относительно весового коэффициента $\varkappa = \frac{1}{\pi}$. Точнее, получим систему функций $F_2 = \{h_k(x)\}$, причем если $k = 1$, то $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, если же $k = 2n$, то $h_k(x) = h_{2n}(x) = \cos nx$; а если $k = 2n+1$, то $h_k(x) = h_{2n+1}(x) = \sin nx$. Коэффициенты Фурье c_k функции $g(x)$ по системе F_2 при $k = 1, 2, \ldots$ связаны с величинами a_k и b_k следующими равенствами:

$$a_0 = c_1\sqrt{2}, \quad a_k = c_{2k}, \quad b_k = c_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

поэтому равенство Парсеваля можно записать в виде

$$(g, g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

что согласуется с определением замкнутости ортонормированной системы, данным нами ранее.

Доказательство теоремы 1 опирается на две следующие леммы.

Лемма 1. *Для каждой строго регулярной функции $g(x)$, периодической с периодом 2π, и любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $P_m(x)$, удовлетворяющий условию*

$$\|g(x) - P_m(x)\| < \varepsilon.$$

В терминологии гильбертовых пространств это означает, что тригонометрические многочлены $\{P_m(x)\}$ являются всюду плотным множеством в линейном пространстве $W = W_{2\pi}$ по норме гильбертова пространства L_2.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим далее функцию $g_1(x) = g(2\pi x)$. Она имеет период $l = 1$ и тоже является строго регулярной. Точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ этой функции разбивают отрезок $I = [0, 1]$ на интервалы $I_1, \ldots, I_n$. На каждом из них функция $g_1(x)$ является непрерывной и имеет левый и правый пределы. Следовательно, на каждом интервале I_k функция $g_1(x)$ равномерно непрерывна. Это значит, что при любом $\varepsilon_1 > 0$ интервал I_k можно разбить на конечное количество непересекающихся промежутков так, чтобы колебание функции $g_1(x)$ на каждом из последних не превышало ε_1. Теперь рассмотрим функцию $g_2(x)$, которая является непрерывной на любом из указанных промежутков и равна на нем значению функции $g_1(x)$ в его центре. Будем также считать, что в смежных точках этих промежутков $g_1(x)$ равна полусумме своих пределов слева и справа. Тогда очевидно, что $g_1(x)$ является кусочно-постоянной и строго регулярной функцией, причем при всех вещественных x справедливо неравенство

$$|g_1(x) - g_2(x)| \le \varepsilon_1.$$

Отсюда имеем

$$\|g_1(x) - g_2(x)\| = \sqrt{\int_0^1 (g_1(x) - g_2(x))^2 dx} \le \sqrt{\int_0^1 \varepsilon_1^2 dx} = \varepsilon_1.$$

Пусть теперь $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$ — все возможные точки разрыва функции $g_2(x)$ на промежутке $[0, 1)$. При $n = 1, \ldots, k$ определим функции $\varphi_n(x)$, периодические с периодом 1 и задаваемые на отрезке $[0, 1]$ условиями

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t_{n-1} < x < t_n, \\ 1/2 & \text{при} \quad x = t_{n-1}, \quad x = t_n, \\ 0 & \text{в остальных} \quad \text{случаях.} \end{cases}$$

Тогда, очевидно, при некоторых постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ имеет место равенство

$$g_2(x) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \varphi_n(x).$$

Но ранее было установлено, что

$$\varphi_n(x) = t_n - t_{n-1} + \rho_0(x - t_{n-1}) - \rho_0(x - t_n).$$

Поэтому при некоторых $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ имеем

$$g_2(x) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{k} \beta_n \rho_0(x - t_n).$$

Кроме того, раньше было доказано, что

$$|\rho_0(x - t_n) - s_m(x - t_n)| \le R_m(x - t_n),$$

где $m \ge 4$ и

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin 2\pi k x}{\pi k}, \quad R_m(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|g_2(x) - Q_m(x)| \le \sum_{n=1}^{k} |\beta_n| R_m(x - t_n),$$

где $Q_m(x) = \beta_0 + \sum\limits_{n=1}^{k} \beta_n s_m(x - t_n)$.

Применяя неравенство Коши, отсюда получим

$$|g_2(x) - Q_m(x)|^2 \le \left(\sum_{n=1}^{k} |\beta_n| R_m(x - t_n) \right)^2 \le \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \sum_{n=1}^{k} R_m^2(x - t_n).$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[0, 1]$, в силу периодичности функции $R_m(x)$ находим

$$\|g_2(x) - Q_m(x)\|^2 = \int_0^1 (g_2(x) - Q_m(x))^2 dx \le \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \sum_{n=1}^{k} \int_0^1 R_m^2(x - t_n) dx =$$

$$= 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 \pi x}} \le 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \frac{1}{m} \int_0^{1/2} \frac{m dx}{1 + m^2 x^2} \le$$

$$\le 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \le \frac{A}{m},$$

где A — некоторая величина, не зависящая от m.

Далее, используя неравенство треугольника, получим

$$\left(\int_0^1 (g_2(x) - Q_m(x))^2 dx\right)^{1/2} = ||g_2(x) - Q_m(x)|| = \delta_m \leq$$

$$\leq ||g_1(x) - g_2(x)|| + ||g_2(x) - Q_m(x)|| \leq \varepsilon_1 + \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2}$$

Но тогда, производя замену переменной интегрирования вида $x = t/(2\pi)$ и полагая $P_m(t) = Q_m(t/(2\pi))$, имеем

$$\delta_m^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(g_1\left(\frac{t}{2\pi}\right) - Q_m\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(g(t) - P_m(t))^2\, dt\right) = \frac{1}{2}||g(t) - P_m(t)||^2.$$

Следовательно,

$$||g(t) - P_m(t)|| \leq \sqrt{2}\left(\varepsilon_1 + \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2}\right).$$

Очевидно, что функция $P_m(t)$ является тригонометрическим многочленом порядка m. Кроме того, при $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$ и $m > 8A/\varepsilon^2$ имеем неравенство

$$\sqrt{2}\left(\varepsilon_1 + \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2}\right) \leq \varepsilon,$$

откуда окончательно получаем $||g(t) - P_m(t)|| \leq \varepsilon$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 для m-го многочлена Фурье $g_n(x)$ функции $g(x)$ справедливо соотношение*

$$||h_m|| = ||g(x) - g_m(x)|| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Ввиду свойства экстремальности коэффициентов Фурье для любого тригонометрического многочлена $p_n(x)$ порядка n имеет место неравенство

$$||g(x) - g_n(x)|| \leq ||g(x) - p_n(x)||.$$

В силу того же свойства при всех натуральных k имеем

$$\|g(x) - g_{k+1}(x)\| \leq \|g(x) - g_k(x)\|,$$

поскольку при $n = k + 1$ многочлен Фурье $g_k(x)$ можно рассматривать в качестве тригонометрического многочлена $p_n(x)$.

Теперь при произвольном $\varepsilon > 0$ рассмотрим многочлен $P_m(x)$ из леммы 1. Тогда, полагая $n_0(\varepsilon) = m$, мы при всех $n > m = n_0(\varepsilon)$ получим неравенство

$$\|g(x) - g_n(x)\| \leq \|g(x) - g_{n-1}(x)\| \leq \|g(x) - g_m(x)\| \leq \|g(x) - P_m(x)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что при $n \to \infty$ имеем $\|h_n\| \to 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Как было показано ранее, достаточно доказать, что

$$(g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

где $c_k = (g, f_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) f_k(x) dx$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а при $k \geq 1$ имеем $f_{2k} = \cos kx$, $f_{2k+1}(x) = \sin kx$.

Кроме того, при доказательстве леммы 1 мы установили, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(g, g) - (g_n, g_n) = (g - g_n, g - g_n) = (h_n, h_n).$$

По лемме 2 имеем $(h_n, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу в последнем равенстве, получим

$$(g, g) = \lim_{n \to \infty} (g_n, g_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Тем самым теорема 1 доказана.

В заключение заметим, что для того, чтобы любая полная ортонормированная система функций в линейном пространстве V со скалярным произведением была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы пространство V было полным относительно нормы, определяемой этим скалярным произведением. Другими словами, V должно быть гильбертовым пространством. Доказательство последнего утверждения не слишком сложно, но оно выходит за пределы нашего курса.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Мы уже говорили о том, что не всякий тригонометрический ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

обязан быть рядом Фурье некоторой функции даже в том случае, если он сходится при всех вещественных значениях x. В качестве примера можно указать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln en}.$$

По признаку Дирихле он сходится во всех точках x вещественной оси, но можно доказать, что он не является рядом Фурье какой-либо функции.

С другой стороны, теорема Рисса – Фишера утверждает, что если сходится числовой ряд $S = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, то существует функция $g(x)$, коэффициентами Фурье которой являются числа a_n и b_n. Кроме того, тогда по теореме Карлесона сумма ее ряда Фурье существует "почти всюду" и равна $g(x)$. Не касаясь здесь этих весьма сложных вопросов, остановимся на доказательстве следующих утверждений.

Теорема 1. *Если коэффициенты $c_n(f)$ и $c_n(g)$ рядов Фурье строго регулярных функций $f(x) \in W_{2\pi}$ и $g(x) \in W_{2\pi}$ совпадают, то $f(x) = g(x)$ при всех вещественных значениях x.*

Доказательство. Коэффициенты Фурье $c_k(h)$ разности этих функций, $h(x) = f(x) - g(x) \in W_{2\pi}$, удовлетворяют соотношению $c_k(h) = c_k(f) - c_k(g) = 0$. Поэтому в силу равенства Парсеваля справедливо равенство

$$(h, h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(h) = 0,$$

а отсюда следует, что $h(x) = 0$ или $f(x) = g(x)$ при всех x.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если тригонометрический ряд*

$$\sum c_k f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится равномерно на отрезке $I = [0, 2\pi]$, то его сумма $g(x)$ является непрерывной функцией на I и данный ряд является ее рядом Фурье и он допускает почленное интегрирование.

Доказательство. Все функции $\sin nx$ и $\cos nx$ непрерывны на I, и в силу равномерной сходимости ряда $\sum c_k f_k(x)$ его сумма $g(x)$ является непрерывной функцией. Отсюда вытекает, что равенство

$$f_k(x)g(x) = f_k(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

можно проинтегрировать по отрезку I и при этом в силу равномерной сходимости ряда на I в правой части равенства возможно почленное интегрирование. В результате приходим к равенствам

$$c_k(g) = (f_k, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f_k, f_n) = c_k,$$

поскольку $(f_k, f_n) = 0$ при $k \neq n$ и $(f_k, f_k) = 1$.

Таким образом, установлено, что числа c_k одновременно являются коэффициентами Фурье функции $g(x)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Тригонометрический ряд Фурье $\sum c_n f_n(x)$ строго кусочно-гладкой 2π-периодической функции $g(x)$ сходится к ней равномерно на отрезке $I = [0, 2\pi]$.*

Доказательство. Сначала покажем, что тригонометрический ряд

$$\sum c_k f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится равномерно на I. Для этого достаточно показать, что числовой ряд $\sum(|a_k| + |b_k|)$ сходится и тем самым является мажорантой для $\sum c_k f_k(x)$.

Прежде всего заметим, что функция $h = h(x) = g'(x) \in W_{2\pi}$, поэтому $(h, h) < +\infty$, и для функции $h(x)$ справедливо равенство Парсеваля, т.е.

$$(h, h) = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\cos kx dx,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\sin kx dx.$$

Далее, поскольку $g'(x)$ — строго регулярная функция, то при всех $k \in \mathbb{N}$ в этих интегралах допустимо интегрирование по частям. С его помощью получим

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\cos kx dx = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx = -kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\sin kx dx = \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx = ka_k,$$

т.е. $a_k = \beta_k/k, \quad b_k = -\alpha_k/k$.

Но тогда имеем

$$|a_k| = \frac{|\beta_k|}{k} \leq \beta_k^2 + \frac{1}{k^2}, \quad |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} \leq \alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq$$

$$\leq (g,g) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} + 1 = (g,g) + 3 < +\infty.$$

Итак, мы доказали, что ряд $\sum c_k f_k(x)$ сходится равномерно на I к некоторой сумме $\varphi(x)$. Но по теореме 1 функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывной и совпадать с $g(x)$. Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Т е о р е м а 4. *Если 2π-периодическая функция $g(x)$ дифференцируема n раз, где $n \geq 1$, и ее n-я производная является строго кусочно-гладкой функцией, то:*

1) ряд $\sum k^n(|a_k| + |b_k|)$ сходится;

2) ряд Фурье функции $g(x)$ можно почленно дифференцировать n раз. Здесь числа a_k и b_k являются коэффициентами Эйлера – Фурье для функции $g(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании предыдущей теоремы заключаем, что функция $\varphi_n(x) = g^{(n)}(x)$ равна сумме своего ряда Фурье, который равномерно сходится на отрезке $I = [0, 2\pi]$. Кроме того, если α_k и β_k — ее коэффициенты Эйлера – Фурье, то ряд $\sum(|\alpha_k|+|\beta_k|)$ сходится. Отсюда путем последовательного интегрирования по частям, как и при доказательстве теоремы 3, приходим к равенствам

$$|\alpha_k| = k^n|a_k|, \quad |\beta_k| = k^n|b_k|, \quad \text{если} \quad n \quad \text{четно},$$

$$|\alpha_k| = k^n|b_k|, \quad |\beta_k| = k^n|a_k|, \quad \text{если} \quad n \quad \text{нечетно}.$$

Тем самым утверждение 1 доказано. Справедливость же утверждения 2 следует теперь из общей теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, так как тогда каждый из числовых рядов $\sum k^m(|a_k|+|b_k|)$ сходится при любом $m = 1, \ldots, n-1$ и является мажорантой для последовательных производных суммы тригонометрического ряда Фурье, т.е. функций $\varphi_m(x) = f^{(m)}(x)$ на отрезке $I = [0, 2\pi]$. Теорема 4 доказана.

Заметим, что вместе с теоремами 3 и 4 попутно доказана следующая теорема.

Теорема 5. *1. Если сходится числовой ряд* $\sum |a_n| + |b_n|$, *то тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ *к некоторой непрерывной функции* $g(x)$, *являясь ее рядом Фурье.*

2. Если при этом сходится ряд $\sum n^k(|a_n|+|b_n|)$, *где* $k \geq 1$, *то ряд Фурье функции* $g(x)$ *можно почленно дифференцировать* k *раз.*

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ СУММЫ РЯДА ФУРЬЕ. ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ РИМАНА

Одной из важных задач теории тригонометрических рядов Фурье является нахождение условий, обеспечивающих сходимость данного ряда в фиксированной точке к значению породившей его функции. Возникающая здесь ситуация достаточно сложна. Оказывается, что ряд Фурье функции, непрерывной в данной точке, может в ней расходиться. В то же время пример функции $\rho_0(x)$ показывает, что разрывность функции, вообще говоря, не препятствует сходимости ее ряда Фурье к ней самой во всех точках вещественной оси. Далее мы рассмотрим простейшие признаки поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Но для этого потребуется вывести интегральное представление для их частичных сумм.

Введем следующее обозначение. Будем писать

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

если все числа a_k и b_k выражаются через $g(x)$ по формулам Эйлера – Фурье. Другими словами, тригонометрический ряд в правой части последнего соотношения является рядом Фурье функции $g(x)$. Если он сходится в точке x_0 к значению $g(x_0)$, то можно записать равенство

$$g(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0.$$

Преобразуем ряд Фурье функции $g(x)$ с помощью формулы Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

где i — мнимая единица, $i^2 = -1$. Для простоты можно эту формулу рассматривать как определение функции e^x при мнимых значениях аргумента. Легко доказать, что тогда основное функциональное свойство экспоненты в этом случае сохраняется на всей комплексной плоскости, т.е. если $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, и мы считаем, что $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$, то

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

где z_1 и z_2 — комплексные числа. Далее, ввиду того что

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2},$$

имеет место равенство

$$\Sigma_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx},$$

где $d_0 = \frac{1}{2}a_0$ и $d_k = \frac{1}{2}(a_{|k|} - \frac{ik}{|k|}b_{|k|}) = \frac{1}{2}(a_{|k|} - ib_{|k|}\operatorname{sign} k)$ при $k \neq 0$.

Заметим, что для величин d_k при целом k выполнены соотношения

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)(\cos kx - i\sin kx)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx - \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx\right) = \frac{1}{2}(a_{|k|} - ib_{|k|}\operatorname{sign} k).$$

Введем теперь для комплекснозначных 2π-периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ скалярное произведение (f,g) по формуле

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Как обычно, черта над знаком функции означает операцию комплексного сопряжения. Тогда имеем

$$(f,g) = \overline{(g,f)}, \quad e^{ix} = \overline{e^{-ix}},$$

откуда следует, что

$$d_k = \left(g(x), e^{ikx}\right) \quad \text{и} \quad \left(e^{ikx}, e^{ikx}\right) = 1.$$

Таким образом, совокупность функций $\{e^{ikx}\}$, где k принимает все целые значения, образует ортонормированную систему функций относительно введенного выше скалярного произведения. Заметим еще, что весовой коэффициент $\varkappa$ равен здесь $\frac{1}{2\pi}$.

Эту комплексную форму записи ряда Фурье мы используем при выводе удобной для применения формулы для частичной суммы Σ_n ряда Фурье функции $g(x)$. Имеем

$$\Sigma_n = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt = \int_0^{2\pi} g(t)D_n(x-t)dt,$$

где функция $D_n(y)$ определяется равенством

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}.$$

Определение 1. *Функция* $D_n(y)$ *называется* **ядром Дирихле** *порядка* n.

Установим связь между введенной ранее функцией $T_n(y)$ и ядром Дирихле $D_n(y)$. Имеем

$$T_n(y) = \frac{\sin \pi(2n+1)y}{\sin \pi y} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2\pi k y = \sum_{k=-n}^{n} \cos 2\pi k y =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} (\cos 2\pi k y + i \sin 2\pi k y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi k y} = 2\pi D_n(2\pi y).$$

Полагая $y = \frac{x}{2\pi}$, отсюда получим равенство

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} T_n\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}.$$

Очевидно, что функция $D_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1^0. $\int\limits_0^{2\pi} D_n(x)dx = 1$;

2^0. $D_n(x) = D_n(-x)$;

3^0. $D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin nx + \cos nx\right)$.

Поскольку функции $g(x)$ и $D_n(x)$ являются 2π-периодическими, с помощью замены переменной вида $t = x + y$ частичная сумма Σ_n преобразуется к следующему выражению:

$$\Sigma_n = \Sigma_n(g(x)) = \int\limits_0^{2\pi} g(t) D_n(x-t)dt = \int\limits_0^{2\pi} g(t) D_n(t-x)dt =$$

$$= \int\limits_x^{x+2\pi} g(x+y) D_n(y)dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y) D_n(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)\frac{\sin(n+1/2)y}{\sin y/2}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)\cos ny dy.$$

Определение 2. *Эту цепочку равенств назовем* **интегральным представлением частичной суммы** Σ_n *ряда Фурье.*

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1 (лемма Римана). *Пусть $g(x) \in W_{2\pi}$ и при некотором $\delta > 0$ имеем равенство $g(x) = 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда ряд Фурье функции $g(x)$ в точке $x = x_0$ сходится к нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ определены равенствами $f_1(y) = \frac{1}{2}g(x_0 + y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$ и $f_2(y) = \frac{1}{2}g(x_0 + y)$. Тогда $f_1(y)$ и $f_2(y) \in W_{2\pi}$, поскольку функция $\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$ непрерывна вне любой δ-окрестности каждой точки вида $x = 2\pi k$, где k — произвольное целое число, а внутри этой окрестности функция $f_1(y)$ равна нулю. Поэтому при $x = x_0$ имеем

$$\Sigma_n = \Sigma_n(g(x_0)) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x_0 + y) D_n(y) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} g(x_0 + y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} g(x_0 + y)\cos ny dy =$$

$$= b_n(f_1) + a_n(f_2),$$

где $b_n(f_1)$ и $a_n(f_2)$ являются коэффициентами Эйлера – Фурье функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ соответственно. Поскольку для этих функций справедливо равенство Парсеваля, $b_n(f_1) \to 0$ и $a_n(f_2) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда и следует, что $\Sigma_n \to 0$. Лемма доказана.

Из леммы Римана вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 1 (принцип локализации Римана). *Поведение ряда Фурье в точке $x = x_0$ полностью определяется значениями функции $g(x) \in W_{2\pi}$ в произвольно выбранной δ-окрестности этой точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам, по существу, надо доказать, что если функцию $g(x)$ изменить произвольным образом вне любой фиксированной δ-окрестности точки x_0, то сходимость ряда Фурье не нарушится и его сумма в этой точке не изменится. Другими словами, если частичная сумма $\Sigma_n(g(x_0))$ ряда Фурье функции $g(x) \in W_{2\pi}$ в точке $x = x_0$ сходится к числу α и функция $h(x) \in W_{2\pi}$ совпадает с $g(x)$ внутри некоторой δ-окрестности точки x_0, то и $\Sigma_n(h(x_0)) \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Для доказательства рассмотрим разность

$$r(x) = g(x) - h(x) \in W_{2\pi}.$$

Функция $r(x)$ в точке $x = x_0$ удовлетворяет условию леммы Римана, поскольку $r(x) = 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$\Sigma_n(r(x_0)) = \Sigma_n(g(x_0)) - \Sigma_n(h(x_0)) \to 0.$$