Но так как $\Sigma_n(g(x_0)) \to \alpha$ при $n \to \infty$, то тогда и $\Sigma_n(h(x_0)) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что требование принадлежности функции $g(x)$ классу $W_{2\pi}$ можно значительно ослабить. Действительно, анализ доказательства леммы Римана и теоремы 1 показывает, что для их справедливости, по существу, достаточно, чтобы коэффициенты Эйлера – Фурье разности $r(x) = g(x) - h(x)$, а также функции $\varphi(x) = r(x)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ стремились к нулю с возрастанием их номера к бесконечности. Для этого, вообще говоря, достаточно интегрируемости по Риману модулей этих функций на отрезке $[0, 2\pi]$ как несобственных интегралов второго рода. Доказательство последнего утверждения не слишком сложно, но поскольку в принципе оно мало отличается от уже разобранных случаев, то проводить его мы не будем.

Метод, использованный в лемме 1, позволяет доказать еще одну лемму, которая потребуется при выводе признаков поточечной сходимости рядов Фурье.

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in W_{2\pi}$. Положим*

$$\alpha_n = \int_a^b f(y)\cos ny\,dy,\ \beta_n = \int_a^b f(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny\,dy,\ \gamma_n = \int_a^b f(y)D_n y\,dy.$$

Тогда если $0 \le a \le b \le 2\pi$, то $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, если же выполнено более строгое условие $0 < a \le b < 2\pi$, то $\beta_n \to 0$ и $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Величину α_n можно рассматривать как коэффициент Фурье функции $g(x) \in W_{2\pi}$, которая совпадает с $f(x)$ на интервале (a, b) и обращается в нуль для точек x отрезка $[0, 2\pi]$, не принадлежащих отрезку $[a, b]$, т.е. для точек множества $E = [0, 2\pi]\backslash[a, b]$. Отсюда по свойству коэффициентов Фурье имеем $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Подобным образом величину β_n можно рассматривать в качестве коэффициентов Фурье b_n другой функции $h(x) \in W_{2\pi}$, которая на интервале (a, b) совпадает с функцией $f(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$, а для точек множества E обращается в нуль. Поэтому $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. А так как $\gamma_n = \frac{1}{2\pi}(\alpha_n + \beta_n)$, то и $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 2 доказана.

§ 6. ПРИЗНАКИ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Снова будем рассматривать функцию $g(x)$ из класса $W_{2\pi}$. Используя интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье, найдем выражение для разности r_n между значением функции $g(x)$ в точке $x = x_0$ и значением ее частичной суммы Σ_n в этой точке. Имеем

$$r_n = \Sigma_n - g(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} (g(x_0+y) - g(x_0)) D_n(y) dy = \int_{-\pi}^{0} \cdots + \int_{0}^{\pi} \cdots =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{g(x_0+y) + g(x_0-y) - 2g(x_0)}{2} D_n(y) dy = 2\int_0^{\pi} \varphi(y) D_n(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y) \frac{\sin{(n+1/2)\,y}}{\sin y/2} dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y) \left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right) dy,$$

где

$$\varphi(y) = \varphi_{x_0}(y) = \frac{g(x_0+y) + g(x_0-y) - 2g(x_0)}{2}.$$

Здесь величина $\varphi(y)$ как функция от y принадлежит пространству $W_{2\pi}$, $\varphi(0) = 0$ и функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y = 0$.

Т е о р е м а 1 (признак Дини). *Пусть при некотором $\delta > 0$ существует следующий несобственный интеграл второго рода:*

$$B_\delta = \int_0^{\delta} \frac{|\varphi(y)|}{y} dy.$$

Тогда ряд Фурье Σ функции $g(x)$ в точке $x = x_0$ сходится к значению $g(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу произвольности δ можно считать, что $\delta < \pi$.

Поскольку интеграл

$$B_\delta = \int_0^{\delta} \frac{|\varphi(y)|}{y} dy$$

сходится, при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $h = h(\varepsilon) > 0$ с условием

$$B_h = \int_0^{h} \frac{|\varphi(y)|}{y} dy < \varepsilon.$$

Далее из интегрального представления для разности $r_n = \Sigma_n - g(x_0)$ имеем равенство $r_n = r_{n1} + r_{n2} + r_{n3}$, где

$$r_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(y) \left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right) dy, \; r_{n1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{h} \varphi(y) \operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy,$$

$$r_{n2} = \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \varphi(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy, \; r_{n3} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(y)\cos ny dy.$$

По лемме 2 §5 имеем $r_{n2} \to 0$ и $r_{n3} \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. при всех достаточно больших n получим $r_{n2} < \varepsilon$ и $r_{n3} < \varepsilon$. Относительно величины r_{n1} заметим, что если $0 < y < h < \pi$, то

$$|\varphi(y)|\frac{\cos y/2}{\sin y/2} \le \frac{|\varphi(y)|}{\sin y/2} \le \frac{\pi|\varphi(y)|}{y},$$

поскольку на указанном выше промежутке справедливо неравенство

$$\sin\frac{y}{2} > \frac{y}{\pi}.$$

Отсюда следует, что

$$|r_{n1}| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^h f_1(y)\sin ny dy\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^h |f_1(y)|dy \le \int_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \varepsilon.$$

Поэтому при всех $n > n_0(\varepsilon)$ имеем оценку $|r_n| \le 3\varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ это означает, что $r_n \to 0$, т.е. в точке $x = x_0$ ряд Фурье Σ сходится к значению $g(x_0)$.

Теорема 1 доказана.

Определение 1. *Будем говорить, что* **функция** $g(x)$ **удовлетворяет условию Липшица с параметром** α, *где* $0 < \alpha \le 1$, *если в некоторой* δ*-окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство*

$$|g(x) - g(x_0)| < L|x - x_0|^{\alpha},$$

где $L > 0$ *— некоторая постоянная.*

В случае когда это условие выполнено во всех точках отрезка $[x_0, x_1]$, говорят, что функция $g(x)$ принадлежит "классу Липшица α". Число L называется *константой Липшица.* При $\alpha = 1$ просто говорят, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2. *Если в точке* x_0 *для функции* $g(x)$ *выполнено условие Липшица с параметром* α, *то ее ряд Фурье в данной точке сходится к значению* $g(x_0)$.

Доказательство. Покажем, что в данном случае к функции $g(x)$ можно применить признак Дини. Действительно, при $|y| < \delta$ имеем

$$|\varphi(y)| \le \frac{|g(x_0 + y) - g(x_0)| + |g(x_0 - y) - g(x_0)|}{2} \le L|y|^{\alpha},$$

откуда следует, что

$$B_\delta = \int\limits_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y} dy \le L \int\limits_0^\delta y^{\alpha-1} dy = \frac{Ly^\alpha}{\alpha} < +\infty.$$

Это значит, что условия признака Дини выполнены и ряд Фурье функции $g(x)$ сходится к значению $g(x_0)$. Теорема 2 доказана.

Докажем еще два признака сходимости рядов Фурье.

Теорема 3 (Признак Дирихле). *Если 2π-периодическая и строго регулярная функция $g(x)$ является кусочно-монотонной на отрезке $[0, 2\pi]$, то ее ряд Фурье сходится всюду к значению $g(x)$.*

Замечание. Кусочная монотонность функции $g(x)$ означает, что весь отрезок $[0, 2\pi]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых $g(x)$ монотонна. В частности, кусочно-монотонная ограниченная функция будет функцией ограниченной вариации.

Доказательство теоремы 3 является простым следствием еще одного признака, заключенного в следующей теореме.

Теорема 4 (Признак Жордана). *Пусть функция $g(x) \in W_{2\pi}$ и $0 < \delta < \pi$. Пусть, далее, в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда ряд Фурье этой функции сходится в точке x_0 к значению $g(x_0)$.*

Доказательство. Поскольку $\varphi(y)$ — функция ограниченной вариации, она может быть представлена в виде $\varphi(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$, где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ — неубывающие неотрицательные функции. Можно считать, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ и функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны в точке $y = 0$, так как этими свойствами обладает функция $\varphi(y)$. Действительно, монотонные функции имеют в каждой точке односторонние пределы. Тогда правосторонние пределы в точке $y = 0$ для обеих функций совпадают. Вычитая из каждой функций это общее предельное значение, получим две новые функции, которые будут удовлетворять всем указанным выше условиям, если только их значения в нуле взять равными нулю.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует значение $h = h(\varepsilon) > 0$ такое, что $0 < \varphi_1(h) < \varepsilon$ и $0 < \varphi_2(h) < \varepsilon$. Можно считать, что $h < \delta$.

Для остатка ряда Фурье функции $g(x)$ в точке x_0 справедливо представление

$$r_n = 2 \int\limits_0^\pi \varphi(y) D_n y dy = r_{n,1} + r_{n,2},$$

где

$$r_{n,1} = 2 \int\limits_0^h \varphi(y) D_n y dy, \quad r_{n,2} = 2 \int\limits_h^\pi \varphi(y) D_n y dy.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(y) = \varphi_1(y)$, т.е. $\varphi(y)$ — неубывающая неотрицательная функция. По лемме 2 §5 величина $r_{n,2} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому достаточно показать, что $r_{n,1} < c\varepsilon$, где $c > 0$ — некоторая постоянная. Заметим, что $\varphi(h) < \varepsilon$. Применяя к интегралу $r_{n,1}$ вторую теорему о среднем, получим

$$r_{n,1} = 2\varphi(h) \int\limits_{\xi}^{h} D_n(y)\, dy = 4\pi\varphi(h) \int\limits_{\xi/2\pi}^{h/2\pi} T_n(x)\, dx,$$

где функция $T_n(x)$ определена в §1.

Далее, $0 < \frac{\delta}{2\pi} \le \frac{h}{2\pi} \le \frac{1}{2}$, поскольку $h \le \pi$. Поэтому, применяя к последнему интегралу оценку леммы 2 §1, будем иметь

$$r_{n,1} \le 2\varphi(h) \cdot 4 < 8\varepsilon.$$

Тем самым теорема 4 доказана.

Замечание. Использование леммы 2 §1 в доказательстве теоремы 4 связано с тем, что величина $\xi = \xi_n$ в зависимости от n может изменяться, и поэтому прямое применение леммы 2 §5 невозможно.

Лекция 27

§ 7. ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Приведем несколько утверждений относительно поведения коэффициентов Фурье для некоторых классов функций.

1. Пусть $g(x) \in W$ — четная функция. Тогда из формул Эйлера – Фурье имеем, что все коэффициенты Фурье $b_n = 0$, т.е. ряд Фурье функции $g(x)$ представляет собой тригонометрический ряд по косинусам.

Пусть теперь $g(x) \in W$ — нечетная функция. Тогда $a_n = 0$ для всех натуральных чисел n, т.е. $g(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам.

Пример. На интервале $(0, \pi)$ имеет место равенство

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Данное равенство является простым следствием разложения функции Бернулли $\rho_0(x)$ в ряд Фурье.

Если на интервале $(0, \pi)$ задана функция $g(x) \in W$, причем $g(0) = \lim\limits_{x \to 0+} g(x)$, $g(\pi) = \lim\limits_{x \to \pi-} g(x)$, то мы можем распространить ее на всю вещественную ось, как 2π-периодическую и четную или нечетную функцию. В случае четной функции ей соответствует ряд Фурье по косинусам, а в случае нечетной — ряд Фурье по синусам.

2. Пусть $g(x) \in W$. Тогда ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю при возрастании их номеров к бесконечности. Действительно, из неравенства Бесселя имеем, что ряд $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ сходится. Поэтому из необходимого признака сходимости ряда получим

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Это свойство коэффициентов Фурье мы уже неоднократно использовали.

Замечание. Если a_n и b_n таковы, что ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

сходится, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

есть ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ из класса L_2 – функций, интегрируемых в квадрате (теорема Ф. Рисса – Фишера). В этом случае говорят, что ряд Фурье **сходится в среднем квадратичном.** Более точно это означает, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \to 0.$$

Покажем, как теорема Ф. Рисса – Фишера сведется к свойству полноты класса функций L_2. Пусть

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

обозначает n-ю частичную сумму тригонометрического ряда. Тогда в силу сходимости ряда $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} (s_n(x) - s_m(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)^2 dx =$$

$$= \pi \sum_{k=m+1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \to 0$$

при $n > m, \quad m \to \infty$.

Следовательно, в силу полноты класса функций L_2 последовательность частичных сумм $\{s_n(x)\}$ ряда Фурье сходится в среднем квадратичном к некоторой функции из этого класса.

* **3.** Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|f(x+h) - f(x)| \leq L|h|^\alpha,$$

где $L > 0$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные. Тогда справедливы неравенства

$$|a_n| \leq \frac{L\pi^\alpha}{n^\alpha}, \quad |b_n| \leq \frac{L\pi^\alpha}{n^\alpha}.$$

Из определения коэффициентов Фурье и периодичности $f(x)$ и $\cos nx$ имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/n}^{2\pi - \pi/n} f\left(\frac{\pi}{n} + y\right) \cos ny dy =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi}{n}+y\right)\cos ny dy.$$

Отсюда получим

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x) - f\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\right)\cos nx dx.$$

Следовательно,

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\right| dx \le \frac{L\pi^\alpha}{n^\alpha}.$$

Аналогично доказывается оценка и для b_n.

4. Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на периоде. Тогда имеем

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из определения функции ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$ получим, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и не убывают. Применим вторую теорему о среднем для оценки следующего интеграла. При некотором $\xi, 0 < \xi < \pi$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos nx dx = f_1(2\pi)\int_\xi^{2\pi}\cos nx dx = -f_1(2\pi)\frac{\sin n\xi}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

5. Ряд Фурье для $2l$-периодической функции $g(x) \in W$ при $l \ne \pi$.

Рассмотрим функцию $h(y) = g(ly/\pi)$, которая имеет период 2π. Поскольку $h(y) \in W$,

$$h(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos ky + b_k \sin ky).$$

Если теперь выразим y через x : $y = x\pi/l$, то получим

$$g(x) = h(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kx\pi}{l} + b_k \sin\frac{kx\pi}{l}\right),$$

при этом

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(y)\cos ky dy = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{kx\pi}{l}dx.$$

Аналогично имеем

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{kx\pi}{l}dx.$$

Другими словами, вся построенная нами теория рядов Фурье для функций, имеющих период 2π, с помощью линейной замены переменной переносится на случай $2l$-периодических функций.

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ КОТАНГЕНСА НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСА В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Развитый нами аппарат теории разложения функции в тригонометрический ряд Фурье позволяет, наконец, достаточно просто вывести формулу, представляющую синус в виде бесконечного произведения. Для этого сначала докажем не менее известную формулу разложения котангенса на простейшие дроби.

На отрезке $[-\pi, \pi]$ рассмотрим функцию $g(x) = \cos\alpha x$, где $\alpha \leq 1/2$ — некоторое фиксированное число. Продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом 2π. Тогда функция $g(x)$ будет четной и непрерывной на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. Поскольку $g(x)$ является непрерывной и кусочно-гладкой функцией на I, ее ряд Фурье равномерно сходится на I к $g(x)$. Поэтому для всех $x \in I$ имеем разложение

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{kx\pi}{l} + b_k\sin\frac{kx\pi}{l}\right),$$

где a_k и b_k — коэффициенты Эйлера – Фурье.

Далее, в силу четности функции $g(x)$ все b_k равны нулю, а для коэффициентов a_k при $\alpha \neq 0$ имеют место равенства

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x dx = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos kx dx = (-1)^k\frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}.$$

Таким образом,

$$g(x) = \cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2}\cos kx\right).$$

Отсюда при $x = \pi$ получим

$$\pi\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi} = \pi \operatorname{ctg}\alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\alpha - k}.$$

Последняя формула и дает классическое разложение котангенса на простейшие дроби. Отсюда легко получить представление синуса в виде бесконечного произведения. Для этого заметим, что ряд справа сходится равномерно относительно параметра α при $0 < |\alpha| \le \frac{1}{2}$, поскольку имеет мажоранту вида $\sum 2/k^2$. Более того, поэтому он является производной своей первообразной.

С другой стороны, имеем

$$\left(\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right)'_\alpha = \pi\operatorname{ctg}\pi\alpha - \frac{1}{\alpha},$$

$$\ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right)' = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} = \frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k}.$$

Следовательно, в силу непрерывности функции $\ln x$ при некотором $c \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha} = c + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) =$$

$$= c + \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) = c + \ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

Это значит, что при всех α с условием $0 < |\alpha| \le \frac{1}{2}$ имеет место формула

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha} = c_1\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right),$$

где $c_1 = e^c$.

Заметим, что бесконечное произведение в правой части данного равенства сходится равномерно по α при $|\alpha| \le \frac{1}{2}$. Поэтому, переходя к пределу при $\alpha \to 0$, находим c_1:

$$\pi = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha} = c_1\lim_{\alpha\to 0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) = c_1.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

Таким образом, формула представления синуса в виде бесконечного произведения доказана.

§ 9. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА И РЯДЫ БЕССЕЛЯ

Пусть планета M движется по эллипсу, в фокусе которого находится неподвижная планета F. Полуоси эллипса соответственно равны a и b, $a > b$. Пусть T — время полного оборота планеты M вокруг планеты F, а t — текущее время, отсчитываемое от положения планеты в точке A, находящейся на большой полуоси. Обозначим через S_{AFM} площадь сектора эллипса AFM. По закону Кеплера имеем

$$\frac{S_{AFM}}{\pi ab} = \frac{t}{T}, \quad \text{т.е.} \quad S_{AFM} = \frac{\pi abt}{T}.$$

Рассмотрим окружность с центром в точке O, находящейся в центре эллипса, и радиусом, равным $OA = a$, и обозначим через M_1 точку на окружности, являющуюся образом точки M при проекции на большую ось эллипса параллельно малой его оси. Положим также

$$\varepsilon = \frac{OF}{OA}, \quad u = \angle AOM_1.$$

Из геометрических соображений найдем площадь сектора эллипса AFM. Поскольку эллипс получается аффинным преобразованием из окружности сжатием по оси Oy в $\frac{b}{a}$ раз, то имеем

$$S_{AFM} = \frac{b}{a} S_{AFM_1}.$$

Далее находим

$$S_{AFM_1} = S_{AOM_1} - S_{FOM_1} = \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2\varepsilon\sin u.$$

Следовательно,

$$S_{AFM} = \frac{ab}{2}(u - \varepsilon\sin u).$$

Мы приходим к уравнению Кеплера

$$u - \varepsilon\sin u = 2\pi\frac{t}{T} = \zeta = \angle AOM.$$

Величина ζ называется **средней аномалией планеты**, u — **эксцентрической аномалией.** Если величина ζ увеличивается на 2π, то и величина u увеличивается на 2π. Поэтому $\cos nu, \sin nu$ являются 2π-периодическими функциями от ζ, т.е.

$$\cos(nu(\zeta + 2\pi)) = \cos(nu(\zeta)).$$

Ранее было доказано, что $u(\zeta)$ — гладкая функция. Следовательно, ряды Фурье функций $\cos nu(\zeta)$ и $\sin nu(\zeta)$ по признаку Липшица сходятся. В силу нечетности функции $u(\zeta)$ будем иметь

$$\cos nu = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\zeta + a_2 \cos 2\zeta + \ldots,$$

$$\sin nu = b_1 \sin\zeta + b_2 \sin 2\zeta + \ldots,$$

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nu \cos\nu\zeta d\zeta, \quad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nu \sin\nu\zeta d\zeta.$$

Теперь вычислим коэффициенты Фурье этих функций. Имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nu d\zeta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nu(1 - \varepsilon\cos u)du.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\zeta = u - \varepsilon\sin u, \quad d\zeta = (1 - \varepsilon\cos u)du.$$

Таким образом,

$$a_0 = \begin{cases} -\varepsilon, & \text{если} \quad n = 1, \\ 0, & \text{если} \quad n > 1. \end{cases}$$

При $\nu \geq 1$ получим

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nu \cos\nu\zeta d\zeta =$$

$$= \frac{2}{\pi\nu}\cos nu \sin\nu\zeta\Big|_{\zeta=0}^{\pi} - \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^\pi \sin nu \sin\nu\zeta du =$$

$$= \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^\pi (\cos(nu - \nu\zeta) - \cos(nu + \nu\zeta))du =$$

$$= \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^\pi \cos((n-\nu)u + \nu\varepsilon\sin u)du - \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^\pi \cos((n+\nu)u - \nu\varepsilon\sin u)du =$$

$$= \frac{2n}{\nu}\left(J_{\nu-n}(\nu\varepsilon) - J_{\nu+n}(\nu\varepsilon)\right),$$

где

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - k\varphi)d\varphi.$$

Аналогично находятся коэффициенты b_ν. Имеем

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nu \sin \nu\zeta d\zeta = \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^\pi \cos nu \cos \nu\zeta du =$$

$$= \frac{2n}{\nu}\left(J_{\nu-n}(\nu\varepsilon) + J_{\nu+n}(\nu\varepsilon)\right).$$

Следовательно,

$$\cos u = -\frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(J_{\nu-1}(\nu\varepsilon) - J_{\nu+1}(\nu\varepsilon)\right)\frac{\cos\nu\zeta}{\nu},$$

$$\sin u = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(J_{\nu-1}(\nu\varepsilon) + J_{\nu+1}(\nu\varepsilon)\right)\frac{\sin\nu\zeta}{\nu}.$$

Значение угла $u, 0 \le u < 2\pi$, однозначно определяется по его синусу и косинусу. Поэтому указанные разложения этих функций решают задачу об определении движения двух планет. Они были найдены В. Бесселем. Эти ряды сходятся при всех значениях ζ и любом значении эксцентриситета эллипса ε. До Бесселя задача двух тел решалась Лапласом с помощью разложения в степенные ряды по малому параметру ε, сходимость которых была доказана при $\varepsilon < 0,66274\ldots$.

Заметим, что функции $J_k(x)$ называются **функциями Бесселя.**

Лекция 28

§ 10. ЯДРО ФЕЙЕРА И АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА

Наряду с тригонометрическими многочленами Фурье, которыми, согласно определению, являются частичные суммы ряда Фурье, большую роль в теории тригонометрических рядов играют многочлены Фейера. В качестве примера использования свойств этих многочленов докажем теорему Вейерштрасса о равномерном приближении функции, непрерывной на отрезке, последовательностью тригонометрических и алгебраических многочленов.

Определение 1. Тригонометрическим многочленом Фейера *порядка n для функции $g(x)$ называется функция $P_n(x)$ вида*

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} g_m(x),$$

где $g_m(x)$ — многочлен Фурье порядка n для функции $g(x)$, т.е. частичная сумма ряда Фурье вида

$$g_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

причем числа a_k и b_k при всех $k = 0, 1, \ldots, m$ являются коэффициентами Эйлера - Фурье функции $g(x)$.

Из определения, очевидно, имеем

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Используя интегральное представление для $g_m(x)$, приходим к равенству

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+y)D_m(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(x+y)F_n(y)dy,$$

где

$$F_n(y) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(m+1/2)y}{\sin y/2}.$$

Определение 2. *Функция $F_n(y)$, определенная последним равенством, называется* **ядром Фейера** *порядка n.*

Установим некоторые свойства функции $F_n(x)$.

Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 1. *При $n \geq 1$ справедливо равенство*

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что $F_n(x) \geq 0$ при всех x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Суммируя по m, с помощью известных тригонометрических формул получим

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(m+1/2)x}{\sin x/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n(\sin x/2)^2}\sum_{m=0}^{n-1}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n(\sin x/2)^2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\cos mx - \cos(m+1)x}{2} =$$

$$= \frac{1-\cos nx}{2\pi n\cdot 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2.$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *При $n \geq 1$ имеем*

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = 2\int_0^{\pi} F_n(x)dx = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при всех m справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x)dx = 1,$$

то $J_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{m=0}^{n-1} 1 = 1$. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Для любой функции $g(x) \in W_{2\pi}$ справедлива формула*

$$P_n(x) - g(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (g(x+y) - g(x))F_n(y)dy.$$

Это утверждение прямо следует из леммы 2 и из формулы интегрального представления для $P_n(x)$.

Т е о р е м а 1 (теорема Фейера). *Если функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $I = [-\pi, \pi]$ и $g(-\pi) = g(\pi)$, то последовательность ее многочленов Фейера $P_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на I.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $g(x)$, как 2π-периодическую, продолжим на всю вещественную ось. Она будет непрерывна на $\mathbb{R}$, следовательно, и равномерно непрерывна на I. Это значит, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y с условием $|y| < \delta$ и всех $x \in I$ выполнено неравенство

$$|g(x+y) - g(x)| < \varepsilon/2.$$

Кроме того, ввиду ограниченности $g(x)$ на отрезке I при некотором $C > 0$ и всех x и $y \in I$ имеем $|g(x+y) - g(x)| < C$.

Но тогда справедливы оценки

$$|g(x) - P_n(x)| \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(y)|g(x+y) - g(x)|dy \le$$

$$\le \int\limits_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\frac{\varepsilon}{2}dy + 2\int\limits_{\delta}^{\pi} F_n(y)Cdy \le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy + \frac{C}{\pi n}\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{(\sin ny/2)^2}{(\sin y/2)^2}dy \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{n}\frac{1}{(\sin\delta/2)^2} < \varepsilon,$$

если только $n > n_0(\varepsilon) = \frac{C\varepsilon}{2(\sin\delta/2)^2}$.

Но это и означает, что $P_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} g(x)$. В силу 2π-периодичности $P_n(x)$ и $g(x)$ отсюда при $n \to \infty$ также имеем

$$P_n(x) \underset{R}{\rightrightarrows} g(x).$$

Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы немедленно вытекает справедливость следующей аппроксимационной теоремы Вейерштрасса для алгебраических многочленов.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $I_0 = [0, \pi]$. Тогда существует последовательность алгебраических многочленов $Q_n(x)$, равномерно сходящаяся к $g(x)$ на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим четным образом функцию $g(x)$ на отрезке $[-\pi, 0]$ и затем периодически продолжим ее на всю числовую ось $\mathbb{R}$ с периодом 2π. Тогда функция $g(x)$ будет удовлетворять условиям теоремы 1. Поэтому при $\varepsilon \doteq \frac{1}{n}$ найдется номер m, для которого многочлен Фейера $P_m(x)$ приближает $g(x)$ с точностью до $\varepsilon/2$. Но сам многочлен $P_m(x)$ можно разложить в ряд Тейлора, который сходится равномерно на $I_0 = [0, \pi]$ к $g(x)$. Теперь в качестве $Q_n(x)$ возьмем многочлен Тейлора, приближающий $P_m(x)$ с точностью до $\varepsilon/2$. Тогда всюду на I_0 многочлен $Q_n(x)$ будет приближать $g(x)$ с точностью до ε.

Обратим внимание на то обстоятельство, что степень многочлена $Q_n(x)$ вовсе не обязательно будет равна номеру n, но этого нам и не требуется.

Итак, при всех $x \in I_0$ имеет место неравенство

$$|g(x) - Q_n(x)| \le \varepsilon = \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что $Q_n(x) \underset{I_0}{\rightrightarrows} g(x)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

§ 11. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Используя свойства ядра Фейера, вычислим значение интеграла Дирихле. Очевидно, имеем

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = -\int_0^\infty \sin^2 x\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Далее, делая замену переменной интегрирования $x = Ny, N > 0$, получим

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{N}\int_0^\infty \left(\frac{\sin Nx}{x}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{N}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin Nx}{x}\right)^2 dx + \frac{\theta}{N}\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{N}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2 dx + \frac{1}{N}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 Nx\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx + \frac{\theta}{N}\int\limits_{\pi/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2},$$

где $|\theta| \leq 1$.

Поскольку справедливы следующие формулы для ядра Фейера:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2 = 2\pi F_N(2x), \quad \int\limits_0^{\pi} F_N(x)dx = \frac{1}{2},$$

из предыдущего равенства имеем

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1}{N}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}dx + \frac{2\theta}{\pi N}, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Функция $\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$ интегрируема по Риману на $[0, \frac{\pi}{2}]$, следовательно,

$$I = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Устремляя N к плюс бесконечности, получим, что $I = \pi/2$.

Докажем еще две формулы, дающие представления для функций $\pi/\sin\pi x$ и $\pi\operatorname{ctg}\pi x$ в виде простейших дробей. Для второй из этих функций такое разложение было получено ранее с помощью разложения функции $\sin\alpha x$ в ряд Фурье. Здесь мы используем интегральное представление некоторой тригонометрической суммы и свойством коэффициентов Фурье строго регулярной функции стремиться к нулю с возрастанием их номера к бесконечности.

Имеют место следующие две формулы:

1) $\pi/\sin\pi x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k}(-1)^n/(x-n)$,

2) $\pi\operatorname{ctg}\pi x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k}1/(x-n)$.

Докажем формулу 1. Для этого рассмотрим функцию

$$g_k(x) = \sum_{n=-k}^{k}\frac{(-1)^n\sin\pi x}{x-n}.$$

Имеем

$$g_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin \pi(x-n)}{x-n} = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t(x-n)} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t x} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-\pi i t n} \right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t x} \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \cos \pi t x \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt.$$

Так как имеет место соотношение

$$\int_{-1}^{1} e^{\pi i t n} dt = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

то

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-\pi i t n} \right) dt = 2.$$

Отсюда получим

$$\pi - g_k(x) = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1 - \cos \pi t x) \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \sin^2 \frac{\pi t x}{2} \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin(\pi t/2)} dt =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sin^2 \frac{\pi t x}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2} \sin(\pi k t) + \cos(\pi k t) \right) dt =$$

$$= 2\pi b_k (\sin^2 \frac{\pi t x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2}) + 2\pi a_k (\sin^2 \frac{\pi t x}{2}).$$

Следовательно, при $k \to \infty$ имеем

$$\pi - g_k(x) \to 0,$$

т.е. при $x \notin \mathbb{Z}$ получим

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{(-1)^n}{x-n},$$

или, в другой форме записи,

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2x}{n^2 - x^2}.$$

Формула 1 доказана.

Заметим, в частности, что при $x = \frac{1}{2}$ получаем следующее выражение для числа π:

$$\pi = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}.$$

Докажем теперь формулу 2. Для этого рассмотрим функцию

$$f_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin 2\pi x}{x - n}.$$

Найдем интегральное представление суммы $f_k(x)$. Имеем

$$f_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin 2\pi x}{x-n} = \sum_{n=-k}^{k} \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t(x-n)} dt =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-2\pi i t n} \right) dt = \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x} \frac{e^{-2\pi i t k} - e^{2\pi i t (k+1)}}{1 - e^{2\pi i t}} dt =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x} \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt = 2\pi \int_{0}^{1} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1/2} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt + 2\pi \int_{1/2}^{1} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1/2} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt +$$

$$+ 2\pi \int_{-1/2}^{0} \cos 2\pi x(u+1) \frac{\sin \pi u(2k+1)}{\sin \pi u} du.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i t n} \right) dt = 1.$$

Аналогично выводу формулы 1 получим, что функция

$$f_k(x) - \pi(1 + cos 2\pi x)$$

выражается в виде линейной комбинации коэффициентов Фурье

$$b_k(\sin^2 \pi t x \operatorname{ctg} \pi t),$$

$$b_k(\sin \pi x u \sin \pi x(u+2) \operatorname{ctg} \pi u), b_k(\sin \pi x u \sin \pi x(u-2) \operatorname{ctg} \pi u)$$

и коэффициентов a_k от тех же функций, но не содержащих множителей $\operatorname{ctg} \pi t$ и $\operatorname{ctg} \pi u$. Эти коэффициенты стремятся к нулю с возрастанием их номеров к бесконечности.

Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f_k(x)}{\sin 2\pi x} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{x-n} = \frac{\pi(1 + \cos 2\pi x)}{\sin 2\pi x} = \pi \operatorname{ctg} \pi x.$$

Формула 2 доказана.

Лекция 29

§ 12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Пусть $f(x)$ является периодической функцией с периодом $2\pi l$ и разлагается в сходящийся ряд Фурье. Тогда имеем

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ikx}{l}},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-\frac{ikt}{l}} dt.$$

Обозначим через y_k величину k/l, и пусть

$$g_l(y_k) = \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-iy_k t} dt.$$

Тогда функция $f(x)$ представляется в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_l(y_k) e^{iy_k t} \frac{1}{l}.$$

Последняя сумма представляет собой формальную бесконечную интегральную сумму Римана с шагом $\Delta_k = 1/l$ для интеграла

$$F_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_l(y) e^{ixy} dy,$$

где

$$g_l(y) = \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-iyt} dt.$$

Если в интеграле $F_l(x)$ формально перейти к пределу при $l \to \infty$, то получится повторный несобственный интеграл вида

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) dy$$

Определение 1. *Функция* $F(x)$ *называется* **интегралом Фурье** *или* **интегральной формулой Фурье.**

Если строго регулярная функция $|f(x)|$ интегрируема по Риману (в несобственном смысле) на всей числовой оси, то интеграл $g_l(y)$ сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса и можно доказать возможность предельного перехода при $l \to +\infty$. Исходя из этого дадим следующее определение.

Определение 2. *Функция*

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt$$

называется **преобразованием Фурье** *функции* $f(x)$, *причем интеграл* $g(y)$ *понимается в смысле главного значения по Коши. Функцию же* $F(x)$ *называют* **обратным преобразованием Фурье** *функции* $g(x)$.

Заметим, что, как правило, имеет место равенство $F(x) = f(x)$.

Кроме того, следует сказать, что часто вместо "весовых" коэффициентов 1 и $1/(2\pi)$ в функциях прямого и обратного преобразований Фурье берут коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$. Ясно, что от этого вид интеграла Фурье не меняется.

Для примера найдем преобразование Фурье функции $(l > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2l), & \text{если} \quad -l < x < l, \\ 1/(4l), & \text{если} \quad x = -l, x = l, \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеем

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt = \int_{-l}^{l} e^{-iyt}\,dt = \frac{\sin ly}{ly}.$$

Для обратного преобразования Фурье отсюда получим

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ly}{ly} e^{iyx}\,dy = f(x).$$

В частности, при $x = 0$ имеем

$$f(0) = \frac{1}{2l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ly}{ly}\,dy.$$

	$f(x)$, область ее определения	$g(x)$
1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < +\infty$, нормальное распределение	$e^{-y^2/2}$
2	$\begin{cases} 1/a, & \text{если} \quad x \in [0,a], \\ 0, & \text{если} \quad 0 \notin [0,a], \end{cases}$ равномерное распределение	$\frac{e^{iay}-1}{iay}$
3	$\begin{cases} 1/(2a), & \text{если} \quad x \in [-a,a], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [-a,a], \end{cases}$ равномерное распределение	$\frac{\sin ay}{ay}$
4	$\begin{cases} \frac{1}{a}\left(1-\frac{\lvert x\rvert}{a}\right), & \text{если} \quad x \in [-a,a], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [-a,a], \end{cases}$ треугольное распределение	$2\frac{1-\cos ay}{a^2y^2}$
5	$\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos ax}{ax^2}$, $-\infty < x < +\infty$	$\begin{cases} 1-\frac{\lvert y\rvert}{a}, & \text{если} \quad y \in [-a,a], \\ 0, & \text{если} \quad y \notin [-a,a] \end{cases}$
6	$\frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}$, $x > 0, t > 0$, гамма-плотность	$\frac{1}{(1-iy)^t}$
7	$\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$, $-\infty < x < +\infty$, двустороннее показательное распределение	$\frac{1}{1+y^2}$
8	$\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, распределение Коши	$e^{-t\lvert y\rvert}$
9	$e^{-x}\cdot\frac{t}{x}J_t(x)$, $x > 0$, $t > 0$, бесселева плотность	$\left(1-iy-\sqrt{(1-iy)^2-1}\right)^t$
10	$\frac{1}{\pi \operatorname{ch} x}$, $-\infty < x < +\infty$, гиперболический косинус	$\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi y/2)}$

Приведем таблицу часто встречающихся прямых и обратных преобразований Фурье [31].

В правом столбце таблицы указаны плотности $f(x)$ распределения вероятностей, т.е. функции $f(x)$ с условиями $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Преобразование Фурье от функции распределения вероятностей называется характеристической функцией. Класс характеристических функций среди всех преобразований Фурье выделяется тем, что различным распределениям вероятностей соответствуют различные характеристические функции (теорема единственности), а также тем, что последовательность распределений вероятностей $\{F_n\}$ сходится к распределению вероятностей F тогда и только тогда, когда последовательность соответствующих характеристических функций сходится к непрерывной предельной функции (теорема непрерывности). Эти важные теоремы теории вероятностей мы здесь доказывать не будем, так как они выходят за рамки нашего курса.

Перейдем теперь к формулировке и выводу достаточных условий представимости функции в виде интеграла Фурье. Эти условия аналогичны соответствующим условиям Дини и Дирихле – Жордана для рядов Фурье. При их доказательстве мы будем опираться на свойство непрерывности преобразования Фурье $g(y)$ и его стремление к нулю при $y \to \infty$.

Обозначим через $L' = L'(-\infty, +\infty)$ класс функций, абсолютно интегрируемых по Риману на $(-\infty, +\infty)$ и являющихся строго регулярными на любом конечном отрезке.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in L'$. Тогда ее преобразование Фурье $g(y)$ является непрерывной функцией на всей числовой оси $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Интеграл $g(y)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, так как функция $|f(x)|$ является мажорантой для его подынтегральной функции $e^{iyx}f(x)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда функция $\varphi(x, y) = e^{iyx}f(x)$ является непрерывной для всех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. По теореме о непрерывности равномерно сходящегося несобственного интеграла функция $g(y)$ в этом случае будет непрерывной.

В общем случае для строго регулярной функции $f(x)$ можно указать непрерывную функцию $h(x)$, отличающуюся от $f(x)$ только в некоторых малых δ_n-окрестностях точек $x = x_n$ разрыва функции $f(x)$, причем $h(x)$ представляет собой линейную функцию с условием

$$\int\limits_{|x-x_n|<\delta_n} |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим

$$g_1(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{iyx}dx.$$

По доказанному выше $g_1(y)$ является непрерывной для всех $y \in \mathbb{R}$. Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что для любого h с условием $|h| < \delta$ справедливо неравенство

$$|\Delta g_1| = |g_1(y + h) - g_1(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим сверху модуль величины $\Delta g = g(y+h) - g(y)$. Имеем

$$|\Delta g| \leq |\Delta g_1| + 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, $g(y)$ непрерывна для всех $y \in \mathbb{R}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (лемма Римана). *Пусть $f(x) \in L'[a,b]$. Тогда при $y \to \infty$ имеем*

$$g(y) = \int_a^b f(x)e^{iyx}dx \to 0.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной интегрирования $x = t + \frac{\pi}{y}$. Получим

$$g(y) = -\int_{a-\pi/y}^{b-\pi/y} f\left(t+\frac{\pi}{y}\right)e^{iyt}dt.$$

Следовательно,

$$g(y) = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)e^{iyx}dx - \int_{a-\pi/y}^{b-\pi/y} f\left(x+\frac{\pi}{y}\right)e^{iyx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^{b-\pi/y}\left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{y}\right)\right)e^{iyx}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{b-\pi/y}^{b} f(x)e^{iyx}dx - \frac{1}{2}\int_{a-\pi/y}^{a} f(x)e^{iyx}dx = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку $f(x)$ — строго регулярная функция, отрезок $[a,b]$ можно разбить на промежутки непрерывности функции $f(x)$. И если на каждом промежутке непрерывности утверждение леммы будет доказано, то в силу того, что их число конечно, это утверждение останется справедливым и для всего отрезка $[a,b]$. Поэтому можно считать, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

В силу непрерывности $f(x)$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что для всех y с условием $|y| > C$ выполняется неравенство

$$\left|f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{y}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Так как непрерывная функция на отрезке ограничена на нем, то существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, $|A_2| + |A_3| < \pi M/|y|$.

Отсюда получим, что при $|y| > \max(C, 2\pi M/\varepsilon)$ имеет место неравенство $|g(y)| < \varepsilon$. А это и означает стремление к нулю функции $g(y)$ при $y \to 0$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть функция* $f(x) \in L'(-\infty, +\infty)$. *Тогда ее преобразование Фурье* $g(y)$ *стремится к нулю при* $y \to \infty$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ имеем, что существует число $A > 0$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|dx + \int_{\infty}^{A} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу леммы Римана существует $Y > 0$, такое, что при $|y| > Y$

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)e^{iyx}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|g(y)| < \varepsilon$ при $|y| > Y$, т.е. $g(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $|f(x)|$ *является интегрируемой на* $(-\infty, +\infty)$ *и на любом конечном отрезке функция* $f(x)$ *строго регулярна. Пусть также при некотором* $\delta > 0$ *существует несобственный интеграл второго рода*

$$B_\delta = \int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy, \quad \varphi(y) = \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y)}{2} - f(x_0).$$

Тогда интеграл Фурье функции $f(x)$ *сходится в точке* x_0 *к значению* $f(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(y)e^{-iyx}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{-iyx}dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt}f(t)dt.$$

В последнем интеграле поменяем порядок интегрирования. Это возможно сделать, так как подынтегральная функция является непрерывной и несобственный интеграл равномерно сходится на всем множестве значений параметров. Получим

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-A}^{A} e^{-iy(t-x)}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{iA(t-x)} - e^{-iA(t-x)}}{i(t-x)}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u+x)\frac{\sin Au}{u}du = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(f(u+x)+f(x-u))\frac{\sin Au}{u}du.$$

Докажем, что $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0) = f(x_0)$.

Для этого сначала вспомним, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin Au}{u}du = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$f_A(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du.$$

В силу сходимости интеграла B_δ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$ такое, что

$$\int_0^{h}\frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из леммы Римана следует, что существует $Y > 0$ такое, что для всех $A > Y$ справедливо неравенство

$$\left|\int_h^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u}\sin Au du\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда имеем, что $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0) = f(x_0)$.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f(x) \in L'(-\infty, \infty)$ *и пусть также в некоторой* δ*-окрестности точки* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет ограниченную вариацию,* $\delta > 0$. *Тогда ее интеграл Фурье сходится в этой точке к значению* $f(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства предыдущей теоремы получим, что

$$f_A(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du.$$

Поскольку последний интеграл сходится, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B > 0$ такое, что

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_B^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу условия теоремы функция $\varphi(x)$ будет иметь ограниченную вариацию на интервале $(-\delta, \delta)$ и, кроме того, $\varphi(y) \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, ее можно представить в виде разности положительных неубывающих ограниченных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, причем каждая из них стремится к нулю при $y \to 0$.

Нам достаточно доказать, что интеграл

$$R = \frac{2}{\pi}\int_0^B \varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du$$

стремится к нулю при $A \to \infty$.

Сначала из условия $\lim\limits_{u\to 0}\varphi_1(u) = 0$ имеем, что существует число $h > 0$ такое, что при всех $|u| \le h$ справедливо неравенство $\varphi_1(u) < \epsilon/8$. Представим R в виде $R = R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 — интегралы от той же подынтегральной функции, что и интеграл R, но переменные интегрирования у них изменяются в других пределах: у R_1 они изменяются от 0 до h, а у R_2 — от h до B.

По второй теореме о среднем при некотором k, $0 < k < h$, имеем

$$|R_1| = \left|\frac{2}{\pi}\varphi_1(h)\int_k^h \frac{\sin Au}{u}du\right| = \left|\frac{2}{\pi}\varphi_1(h)\int_{Ak}^{Ah} \frac{\sin u}{u}du\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\varphi_1(h)\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = \varphi_1(h) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Далее, при фиксированных k и B в силу интегрируемости функции $\frac{\varphi_1(u)}{u}$ из леммы Римана следует, что $R_2 \to 0$ при $A \to \infty$. Поэтому существует число A_0 такое, что при $A > A_0$

$$|R_2| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_h^B \varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du\right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Таким образом, получим

$$|f_A(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du\right| < \varepsilon,$$

следовательно, $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0) = f(x_0)$.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Пусть $f(x) \in L'$. Тогда из теоремы 1, в частности, следует, что если, кроме того, функция $f(x)$ является кусочно-гладкой в некоторой δ-окрестности точки x_0, то выполняется условие Дини, поэтому интеграл B_δ существует, а следовательно, интеграл Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$. Из теоремы 2 следует сходимость интеграла Фурье в точке x_0 к $f(x_0)$, если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 является не только абсолютно интегрируемой, но и кусочно-монотонной.

Л е м м а 4. *Пусть* $(1+|x|^k)f(x) \in L'(-\infty,+\infty)$. *Тогда преобразование Фурье* k *раз дифференцируемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку имеют место неравенства

$$|f(x)(ix)^n e^{ixy}| \le (1+|x|^n)|f(x)|, \quad n = 1,\ldots,k,$$

в силу признака Вейерштрасса интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(ix)^n e^{ixy}dx$$

равномерно сходятся на всей числовой оси соответственно к функциям $g^{(n)}(y), n = 1,\ldots,k$.

Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *Пусть функции $f(x),\dots,f^{(k)}\in L'(-\infty,+\infty)$ и пусть при $x\to\infty$ справедливы соотношения $f(x)\to 0,\dots,f^{(k-1)}(x)\to 0$. Тогда имеем $|g(y)|=o\left(|y|^{-k}\right)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по частям, при любом $A>0$ будем иметь

$$\int\limits_{-A}^{A} f^{(k)}(x)e^{ixy}dx=\left(f^{(k-1)}(x)e^{ixy}\right)\Big|_{-A}^{A}+$$

$$+\left(f^{(k-2)}(x)(-iy)e^{ixy}\right)\Big|_{-A}^{A}+\dots+(-iy)^k\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{ixy}dx.$$

Устремим $A\to\infty$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{ixy}dx=(-iy)^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx=(-iy)^k g(y).$$

По лемме Римана имеем

$$\lim_{y\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{ixy}dx=0,$$

поэтому $|g(y)|=o\left(|y|^{-k}\right)$.

Лемма 5 доказана.

Т е о р е м а 3 (равенство Паншереля). *Пусть*

$$f(x),f'(x),f''(x),\varphi(x)\in L'(-\infty,+\infty)$$

и при $x\to\infty$ имеем $f(x)\to 0, f'(x)\to 0$. Пусть $g(y)$ и $\psi(y)$ — преобразования Фурье соответственно $f(x)$ и $\varphi(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)\overline{\psi(y)}dy,$$

где черта над функцией $\psi(y)$ обозначает операцию комплексного сопряжения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A>0$ — любое число. Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}\varphi(x)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy\right)dx=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ixy} dx} \right) g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy.$$

Перемена порядка интегрирования в последнем несобственном интеграле обосновывается тем, что при некотором $c > 0$ имеют место неравенства

$$|g(y)| \leq c(1 + |y|^2)^{-1}, \quad |F(x, y)| \leq \frac{c}{1 + |y|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx$$

и, следовательно, несобственный интеграл сходится равномерно на отрезке $[-A, A]$. Более того, в силу признака Вейерштрасса имеет место и равномерная сходимость по параметру A при его изменении на всей числовой оси. Поэтому возможно перейти к пределу под знаком несобственного интеграла, и мы получим равенство, утверждаемое в теореме.

Теорема 3 доказана.

Наконец, в качестве приложения теории интегралов Фурье докажем важную формулу Котельникова.

Назовем функцию $f(x)$ **сигналом**, а ее преобразование Фурье $g(y)$ **спектром сигнала.** Возникает задача восстановления сигнала по его спектру, т.е. функции по ее преобразованию Фурье. Часто известен спектр на конечном промежутке, т.е. финитный спектр, и мы желаем восстановить сигнал, отвечающий этому спектру, по некоторому дискретному множеству значений сигнала. На этот вопрос и дает ответ *формула Котельникова.*

Пусть существуют следующие интегралы:

$$g(y) \doteq \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx,$$

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} g(y) e^{-ixy} dy.$$

Разложим функцию $g(y)$, определенную на $[-a, a]$ и периодически продолженную на всю числовую ось с периодом $2a$, в ряд Фурье. Имеем

$$g(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{iyn\frac{\pi}{a}},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} g(y) e^{-iyn\frac{\pi}{a}} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f_a\left(n\frac{\pi}{a}\right).$$

Следовательно, получим

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f_a\left(n\frac{\pi}{a}\right) e^{iyn\frac{\pi}{a}} \right) e^{-ixy} dy =$$

$$= \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right) \int\limits_{-a}^{a} e^{-iy(x-n\frac{\pi}{a})} dy =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.$$

Если ряд Фурье функции $g(y)$ при $|y| \leq a$ сходится равномерно, то его можно почленно проинтегрировать. Поэтому мы получим

$$f_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.$$

Эта формула называется *формулой Котельникова.*

Лекция 30

§ 13. МЕТОД ЛАПЛАСА И МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Лаплас разработал метод для изучения асимптотического поведения при $n \to \infty$ интегралов вида

$$J(n) = \int_a^b f(x)\varphi^n(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ положительна при всех $x \in [a, b]$.

Суть его метода состоит в следующем. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — гладкие функции и $\varphi(x)$ имеет только один строгий максимум в точке $x = c$. Тогда при $n \to \infty$ этот интеграл с большой точностью можно заменить на интеграл от этой же подынтегральной функции в некоторой достаточно малой окрестности точки $x = c$. Но в ней можно воспользоваться разложениями Тейлора функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и затем последний интеграл достаточно точно вычислить.

Здесь мы дадим изложение метода Лапласа в несколько нетрадиционной форме.

Т е о р е м а 1. *Пусть A, λ_2, λ_3 — некоторые положительные постоянные, $F(x)$ — вещественная функция, непрерывная со своими производными до третьего порядка на отрезке $[a, b]$, и при всех $x \in [a, b]$ справедливы неравенства*

$$0 < \lambda_2 \leq -F''(x) \leq A\lambda_2, \quad |F'''(x)| \leq A\lambda_3.$$

Пусть также существует точка c, $a \leq c \leq b$, такая, что $F'(c) = 0$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b e^{F(x)}dx = \sqrt{2\pi}\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + R,$$

$$R \leq Be^{F(c)}\lambda_2^{-4/5}\lambda_3^{1/5} +$$

$$+B\left(\min\left(\frac{e^{F(a)}}{|F'(a)|}, e^{F(c)}\lambda_2^{-1/2}\right) + \min\left(\frac{e^{F(b)}}{|F'(b)|}, e^{F(c)}\lambda_2^{-1/2}\right)\right),$$

где B — некоторая абсолютная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что функция $F'(x)$ является монотонной и, следовательно, обращается в нуль не более чем в одной точке. Это и есть точка $x = c$. Положим $\delta = (\lambda_2\lambda_3)^{-1/5}$. Пусть сначала для точки c выполняется условие $a + \delta \le c \le b - \delta$. Тогда имеем

$$\int_a^b e^{F(x)}dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b = I_1 + I_2 + I_3.$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются одинаково. По второй теореме о среднем имеем

$$|I_1| = \left|\int_a^{c-\delta} \frac{F'(x)e^{F(x)}}{F'(x)}dx\right| \le \frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_a^{c-\delta} de^{F(x)}\right| \le e^{F(c-\delta)}\frac{1}{|F'(c-\delta)|},$$

$$|I_1| = \left|\int_{c+\delta}^b \frac{F'(x)e^{F(x)}}{F'(x)}dx\right| \le e^{F(c+\delta)}\frac{1}{|F'(c+\delta)|}.$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$|F'(c+\delta)| = \left|\int_c^{c+\delta} F''(x)dx\right| = \int_c^{c+\delta} |F''(x)|dx \ge \delta\lambda_2,$$

$$|F'(c-\delta)| \ge \delta\lambda_2.$$

Следовательно,

$$|I_1| \le e^{F(c)}\frac{1}{\delta\lambda_2}, \quad |I_3| \le e^{F(c)}\frac{1}{\delta\lambda_2}.$$

Воспользуемся разложением Тейлора функции $F(x)$ на $(c-\delta, c+\delta)$. При некотором $\xi \in (c-\delta, c+\delta)$ получим

$$I_2 = \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{F(x)}dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{F(c+y)}dy = \int_{-\delta}^{\delta} e^{F(c)+\frac{F''(c)}{2}y^2+\frac{F'''(\xi)}{6}y^3}dy =$$

$$= e^{F(c)}\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{F''(c)}{2}y^2}dy + e^{F(c)}\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{F''(c)}{2}y^2}\left(e^{\frac{F'''(\xi)}{6}y^3} - 1\right)dy =$$

$$= \frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy - 2\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}}\int_{\delta|F''(c)|^{1/2}}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy +$$

$$+B_1 e^{F(c)} \int\limits_0^\delta e^{\frac{F''(c)}{2}y^2} \lambda_3 y^3 dy =$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + B_2 e^{F(c)} \left(\frac{1}{\lambda_2 \delta} + \lambda_3 \delta^4\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + B e^{F(c)} \lambda_2^{-4/5} \lambda_3^{1/5},$$

где B, B_1, B_2 — некоторые абсолютные постоянные.

Если $a \le c \le a+\delta$, то интеграл I_1 оценивается так:

$$|I_1| \le \left|\int\limits_{c-\delta}^{a} e^{F(x)} dx\right| = \left|\int\limits_{c-\delta}^{a} \frac{F'(x) e^{F(x)}}{F'(x)} dx\right| \le \frac{1}{|F'(a)|} e^{F(a)}.$$

Аналогично, если $b-\delta \le c \le b$, то

$$|I_3| \le \frac{1}{|F'(b)|} e^{F(b)}.$$

Отметим, что всегда имеет место оценка

$$\left|\int\limits_a^b e^{F(x)} dx\right| = \left|\int\limits_a^b e^{\frac{F''(\xi)(x-c)^2}{2}} dx\right| \le$$

$$\le e^{F(c)} \int\limits_a^b e^{-\frac{\lambda_2 (x-c)^2}{2}} dx \le e^{F(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_2}}.$$

Поэтому

$$|I_1| \le \min\left(e^{F(a)}|F'(a)|^{-1}, \sqrt{2\pi} e^{F(c)} \lambda_2^{-1/2}\right),$$

$$|I_3| \le \min\left(e^{F(b)}|F'(b)|^{-1}, \sqrt{2\pi} e^{F(c)} \lambda_2^{-1/2}\right).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Пример. Найти асимптотическую формулу при $\lambda \to +\infty$ для

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt.$$

Приводя подынтегральное выражение к виду, данному в условии теоремы 1, получим

$$F(t) = \lambda \ln t - t, \quad F'(t) = \frac{\lambda}{t} - 1, \quad F''(t) = -\frac{\lambda}{t^2}, \quad F'''(t) = \frac{2\lambda}{t^3}.$$

В точке $t = \lambda$ функция $F(t)$ имеет максимум. Представим интеграл для $\Gamma(\lambda+1)$ в виде суммы трех интегралов:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{\lambda/2} + \int\limits_{\lambda/2}^{2\lambda} + \int\limits_{2\lambda}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Интегралы на промежутках $(0, \lambda/2), (2\lambda, +\infty)$ оценим исходя из второй теоремы о среднем. Получим

$$I_1 = \int\limits_0^{\lambda/2} t^\lambda e^{-t} dt \le \frac{e^{F(\lambda/2)}}{F'(\lambda/2)} \le \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\lambda e^{-\lambda/2} = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^\lambda,$$

$$I_3 \le \frac{e^{F(2\lambda)}}{|F'(2\lambda)|} \le 2(2\lambda)^\lambda e^{-2\lambda} = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(\frac{2}{e}\right)^\lambda.$$

На промежутке $[\lambda/2, 2\lambda]$ применим теорему 1. Будем иметь

$$16\lambda_2 = \frac{4}{\lambda} \ge -F''(t) \ge \frac{1}{4\lambda} = \lambda_2, \quad F'''(t) = \frac{2\lambda}{t^3} \le \frac{16}{\lambda^2} = 16\lambda_3,$$

$$\int\limits_{\lambda/2}^{2\lambda} t^\lambda e^{-t} dt = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda + B\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \lambda^{4/5}\lambda^{-2/5}.$$

Таким образом, при $\lambda \to +\infty$ получим

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda + B\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \lambda^{2/5},$$

т.е. при $\lambda \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(1 + B\lambda^{-1/10}\right).$$

Мы видим, что доказательство теоремы 1 основано на принципе локализации, т.е. на получении асимптотики интеграла в окрестности особой точки. Аналогичное применение принципа локализации к интегралам от тригонометрических функций называется **методом стационарной фазы.**

Приведем формулировку этого метода в виде теоремы. Следует отметить, что доказательство ее в основных чертах повторяет доказательство теоремы 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть A, λ_2, λ_3 — некоторые положительные постоянные, $F(x)$ — вещественная функция, непрерывная со своими производными до третьего порядка на отрезке $[a,b]$, и при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства*

$$0 < \lambda_2 \le F''(x) \le A\lambda_2, \quad |F'''(x)| \le A\lambda_3.$$

Пусть также существует точка c, $a \le c \le b$, такая, что $F'(c) = 0$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i\pi/4+iF(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + R,$$

$$R \le B\left(\lambda_2^{-4/5}\lambda_3^{1/5} + \min\left(\frac{1}{|F'(a)|}, \lambda_2^{-1/2}\right) + \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \lambda_2^{-1/2}\right)\right),$$

где B — некоторая абсолютная постоянная.

Заметим, что если при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства $0 < \lambda_2 \le -F''(x) \le A\lambda_2$, то из теоремы 2 следует формула для функции $G(x) = -F(x)$, т.е. мы получаем соответствующую формулу для интеграла вида $\int_a^b e^{-iF(x)}dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $F'(x)$ обращается в нуль только в точке $x = c$, поскольку $F'(x)$ является монотонной функцией ввиду положительности $F''(x)$ на отрезке $[a,b]$. Положим $\delta = (\lambda_2\lambda_3)^{-1/5}$. Пусть сначала для точки c выполняется условие $a + \delta \le c \le b - \delta$. Тогда имеем

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим сверху интегралы $|I_1|$ и $|I_2|$. По второй теореме о среднем имеем

$$|I_1| \le \left|\int_a^{c-\delta} \frac{F'(x)\cos F(x)}{F'(x)}dx\right| + \left|\int_a^{c-\delta} \frac{F'(x)\sin F(x)}{F'(x)}dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_{\xi_1}^{c-\delta} F'(x)\cos F(x)dx\right| + \frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_{\xi_2}^{c-\delta} F'(x)\sin F(x)dx\right| \le$$

$$\leq \frac{4}{|F'(c-\delta)|} = \frac{4}{|\int\limits_{c-\delta}^{c} F''(x)dx|} \leq \frac{4}{\delta\lambda_2}.$$

Точно та же самая оценка имеет место и для величины $|I_3|$.

По формуле Тейлора при некотором $\xi \in (c-\delta, c+\delta)$ получим

$$I_2 = \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} e^{iF(x)}dx = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{iF(c+y)}dy = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{i(F(c)+\frac{F''(c)}{2}y^2+\frac{F'''(\xi)}{6}y^3)}dy \Rightarrow$$

$$= e^{F(c)}\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{iF''(c)}{2}y^2}dy + e^{F(c)}\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{iF''(c)}{2}y^2}\left(e^{\frac{iF'''(\xi)}{6}y^3}-1\right)dy =$$

$$= \frac{e^{iF(c)}}{(F''(c))^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2/2}dy - 2\theta\frac{1}{(F''(c))^{1/2}}\int\limits_{\delta(F''(c))^{1/2}}^{+\infty} e^{iy^2/2}dy +$$

$$+B_1\int\limits_{0}^{\delta}\lambda_3 y^3 dy = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+F(c))}}{(F''(c))^{1/2}} + B_2\left(\frac{1}{\lambda_2\delta}+\lambda_3\delta^4\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+F(c))}}{(F''(c))^{1/2}} + B\lambda_2^{-4/5}\lambda_3^{1/5},$$

где B, B_1, B_2, θ, $0<\theta<1$, — некоторые абсолютные постоянные.

Если $a \leq c \leq a+\delta$, то интеграл I_1 оценивается по второй теореме о среднем. Имеем

$$\left|\int\limits_{c-\delta}^{a}\frac{F'(x)\cos F(x)}{F'(x)}dx\right| \leq \frac{2}{|F'(a)|}e^{F(a)}.$$

Аналогично, если $b-\delta \leq c \leq b$, то

$$|I_3| \leq \frac{4}{|F'(b)|}.$$

Но так как всегда имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{a}^{b} e^{iF(x)}dx\right| \leq 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_2}},$$

то

$$|I_1| \leq \min\left(4|F'(a)|^{-1}, 8\lambda_2^{-1/2}\right),$$

$$|I_3| \le \min\left(4|F'(a)|^{-1}, 8\lambda_2^{-1/2}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать, что

$$\left|\int_a^b e^{iF(x)}dx\right| \le 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_2}}.$$

Положим $\delta = 2\lambda_2^{-1/2}$. Будем считать, что $b - a \ge 4\delta$, так как в противном случае тривиальная оценка интеграла, имеющая вид $b-a$, является достаточной. Представим интеграл в виде

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Если $a \le c < c+\delta$ или $b - \delta < c \le b$, то мы будем рассматривать только сумму двух интегралов:

$$\int_a^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} \quad \text{или} \quad \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{b}$$

Так как для $x \in (a, c-\delta)$ или $x \in (c+\delta, b)$ имеем

$$|F'(x)| = \left|\int_c^x F''(t)dt\right| \ge \lambda_2|x-c| \ge \lambda_2\delta,$$

то

$$|I_1| \le \frac{4}{\lambda_2\delta}, \quad |I_3| \le \frac{4}{\lambda_2\delta}.$$

Кроме того, тривиально получим $|I_2| \le 2\delta$. Следовательно,

$$\left|\int_a^b e^{iF(x)}dx\right| \le \frac{8}{\lambda_2\delta} + 2\delta \le 8\lambda_2^{-1/2}.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Пример. Найдем асимптотику функции Бесселя

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - k\varphi)d\varphi \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{iF(\varphi)}\,d\varphi, \quad F(\varphi) = k\varphi - x\sin\varphi.$$

Имеем

$$F'(\varphi) = k - x\cos\varphi, \quad F''(\varphi) = x\sin\varphi, \quad F'''(x) = x\cos\varphi.$$

Определим точку φ_0 из условия $F'(\varphi_0) = 0$, т.е. $\cos\varphi_0 = k/x$. Тогда

$$F''(\varphi_0) = \sqrt{x^2 - k^2}.$$

Поскольку $x \to +\infty$, при достаточно больших значениях x имеем $\pi/4 < \varphi_0 < 3\pi/4$. Поэтому

$$\int\limits_0^{\pi} e^{iF(\varphi)}d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi}.$$

Оценивая первый и третий интегралы из второй теоремы о среднем, получим

$$\left|\int\limits_0^{\pi/4} e^{iF(\varphi)}d\varphi\right| \le \frac{4}{|F'(\pi/4)|} = \frac{4}{|x\sqrt{2}/2 - k|} \le \frac{B}{x}, \quad \left|\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} e^{iF(\varphi)}d\varphi\right| \le \frac{B}{x},$$

где B — некоторая положительная постоянная. Для точек φ промежутка $[\pi/4, 3\pi/4]$ имеем

$$x \ge |F''(\varphi)| = |x\sin\varphi| \ge x\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad |F'''(\varphi)| \le x.$$

Следовательно, из теоремы 2 найдем

$$\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} e^{iF(\varphi)}\,d\varphi = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\pi/4 + F(\varphi_0))}}{(F''(\varphi_0))^{1/2}} + Bx^{-3/5},$$

т.е.

$$J_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(\pi/4 + k\arccos(k/x) - \sqrt{x^2-k^2}\right)}{(x^2-k^2)^{1/4}} + Bx^{-3/5}$$

или

$$J_k(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\pi/4 + \pi k/2 - x)}{\sqrt{x}}.$$

В заключение заметим, что соединение методов Лапласа и стационарной фазы в теории функций комплексного переменного приводит к **методу перевала.** Важный вклад в разработку его внесли О. Коши (Cauchy O. *Mémoire sur divers points d'analyse* //Qeuvres completes. Paris. 1889 - 1911. Т. II.), Риман Б. (*О разложении отношения двух гипергеометричеких рядов в бесконечную непрерывную дробь* //Сочинения. М., 1948. С. 187 - 194), П. А. Некрасов (*Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел* //Мат. сб. 1886. Т. 12. С.645 - 724) и П. Дебай (Debye P.*Naherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veräderliche Werte des Index* //Math. Ann. 1909. Bd. 67, S. 535 - 558). Современное изложение метода перевала можно найти в монографиях (Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., 1966; Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1957; Брейн Н. Г. де. Асимптотические методы анализа. М., 1961; Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. М., 1970). История вопроса обсуждается в статье С. С. Петровой и А. Д. Соловьева (*Об истории создания метода перевала.* Историко-математические исследования. 1994. Вып. 35).

ЧАСТЬ IV

КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Заключительные главы курса математического анализа касаются разделов математики, общих как для математического анализа, так и для специальных дисциплин, таких, как теория функций действительного и комплексного переменного, дифференциальная геометрия, функциональный анализ. Это обстоятельство объективно способствует увеличению объема материала, включаемого в вузовские учебники по математическому анализу.

С другой стороны, мы стремились построить данный учебник строго на основе курса лекций, сохраняя разделение материала на фактически прочитанные лекции. Опыт показывает, что это удобно и полезно как для студентов, так и для преподавателей, поскольку каждая лекция является своеобразной мерой усвоения новых знаний. Поэтому единственным резервом для включения в курс новых элементов мы видим совершенствование его изложения.

Эта часть курса, в основном, посвящена теории кратного интеграла Римана, а также криволинейным и поверхностным интегралам в пространстве произвольного числа измерений. Важно отметить, что, на наш взгляд, современная теория интегрирования на поверхностях опирается на понятие интеграла Римана, что предполагает систематическое его изучение в курсе анализа. Здесь мы доказываем классические теоремы Грина, Стокса и Гаусса – Остроградского с их стандартной интерпретацией в виде формул векторного анализа. Чтобы показать возможности предложенного подхода к построению теории поверхностных интегралов, мы даем доказательство формулы Стокса для кусочно-гладкой ориентированной поверхности произвольной размерности в многомерном пространстве. Попутно строится элементарная теория дифференциальных форм и теория объема многомерной поверхности.

Следует отметить, что ряд важных теорем рассмотрен в курсе в "модельной" ситуации, т.е. в частном случае, принципиально сохраняющем все наиболее трудные аспекты общего случая, но позволяющем несколько упростить изложение. К их числу относятся, в частности, формула замены переменных в кратном интеграле и некоторые формулы и теоремы о криволинейных и поверхностных интегралах.

Глава XIX
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 1

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА КАК ПРЕДЕЛ ПО БАЗЕ

Двойной интеграл — это интеграл от функции двух переменных, взятый по обеим переменным *одновременно.* Данная фраза не является определением, она только указывает на то, как мы намерены вводить обобщение понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных.

Для того чтобы получить такое обобщение, вспомним, как выглядит определение интеграла в одномерном случае, то есть в случае функции $y = f(x)$ от одной переменной x, определенной на отрезке $I = [a, b]$ и интегрируемой на нем по Риману. Одно из эквивалентных определений данного понятия можно сформулировать так.

Определение 1. *Интегралом* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *от ограниченной функции* $f(x)$ *называется число, равное* **алгебраической сумме** *площадей криволинейных трапеций, образованных кривой* $y = f(x)$ *при* $x \in [a, b]$. *При этом в данную сумму входят площади криволинейных трапеций, расположенных над осью абсцисс со знаком "+", а под ней — со знаком "−".*

Если мы обобщим понятие криволинейной трапеции на случай, скажем, функции двух переменных $z = g(x, y)$, заданной на прямоугольнике $P = I_1 \times I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, то и получим одно из возможных определений двойного интеграла от функции $g(x, y)$ по прямоугольнику P. Этот интеграл обозначается символом

$$\iint\limits_P g(x, y)dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} g(x, y)dxdy.$$

Допустим сначала, что $g(x, y) \geq 0$ для всех $(x, y) \in P$. Вместо криволинейной трапеции рассмотрим пространственную фигуру H, заключенную между поверхностью $z = g(x, y)$ и плоскостью $z = 0$ при $(x, y) \in P$. Другими словами, фигура H состоит изо всех тех точек (x, y, z), для которых $x \in I_1$, $y \in I_2$, а третья координата z удовлетворяет условию $0 \leq z \leq g(x, y)$.

Определение 2. *Фигуру H будем называть* **цилиндрической криволинейной фигурой**, *порожденной поверхностью $z = g(x, y)$.*

Если окажется, что эта фигура измерима каким-либо способом (по Жордану, по Лебегу или еще как-нибудь), то ее меру $\mu(H)$ можно взять в качестве искомого определения значения двойного интеграла

$$I = \iint\limits_P g(x, y) dx dy = \mu(H).$$

Заметим, что если μ есть мера Жордана, то данное выше определение двойного интеграла будет эквивалентным определению двойного интеграла Римана, которое будет сейчас дано. Можно было бы таким же образом разобрать общий случай, когда функция $g(x, y)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, но мы это сделаем в дальнейшем при доказательстве критерия измеримости по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры.

Перейдем теперь к построению теории двойного интеграла Римана по прямоугольнику P. Сначала определим понятие цилиндрической фигуры в общем случае.

Определение 3. *Фигура $H \subset \mathbb{R}^3$ называется* **цилиндрической криволинейной фигурой**, *порожденной поверхностью $z = g(x, y)$, заданной на P, если H состоит изо всех таких точек (x, y, z), для которых $(x, y) \in P$, а координата z заключена между числами 0 и $g(x, y)$, то есть при $g(x, y) \geq 0$ имеем $0 \leq z \leq g(x, y)$, а при $g(x, y) < 0$ имеем $g(x, y) \leq z \leq 0$.*

Разобьем прямоугольник P на меньшие прямоугольники с помощью прямых, параллельных осям Ox и Oy и проходящих через точки $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1$ разбиения T_x на оси Ox и $a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b_2$ разбиения T_y на оси Oy.

Прямоугольник $P_{k,l} \subset P$, точки (x, y) которого удовлетворяют условиям

$$x \in \Delta_k^{(x)} = [x_{k-1}, x_k], \quad y \in \Delta_l^{(y)} = [y_{l-1}, y_l],$$

где $\Delta_k^{(x)}$ есть k-й отрезок разбиения T_x и $\Delta_l^{(y)}$ — l-й отрезок разбиения T_y, будем называть элементом разбиения T прямоугольника P с индексом (k, l), а множество всех прямоугольников $P_{k,l}$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$ — разбиением T прямоугольника P.

В каждом прямоугольнике $P_{k,l}$ возьмем точку $A_{k,l}$ с координатами $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})$. Множество прямоугольников $P_{k,l}$ и точек $A_{k,l}$ будем называть размеченным разбиением прямоугольника P и будем обозначать его через V.

Очевидно, что каждому размеченному разбиению V однозначно соответствует неразмеченное разбиение T прямоугольника P, получаемое из V отбрасыванием точек "разметки" $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})$. Другими словами, T является функцией от V, $T = T(V)$.

Отметим, что площадь элемента разбиения T, т.е. площадь прямоугольника $P_{k,l}$, равна $\Delta x_k \Delta y_l = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1})$.

Определение 4. *Сумма*

$$\sigma(V) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})\Delta x_k \Delta y_l$$

называется **интегральной суммой Римана** *функции $g(x,y)$, соответствующей (отвечающей) размеченному разбиению V стандартного прямоугольника P.*

Длину $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_l^2}$ диагонали прямоугольника $P_{k,l}$ будем называть его **диаметром.**

Определение 5. Диаметром разбиения *(размеченного V и неразмеченного T) прямоугольника P будем называть максимальное значение диаметров элементов разбиения $\{P_{k,l}\}$. Обозначать его будем символом Δ_V и, соответственно, Δ_T.*

Определение 6. *Число I называется (двойным)* **интегралом Римана** *от ограниченной функции $g(x,y)$ по прямоугольнику P, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V прямоугольника P с условием $\Delta_T < \delta$ справедливо неравенство*

$$|\sigma(V) - I| < \varepsilon.$$

Здесь $\sigma(V)$ — интегральная сумма для функции $g(x,y)$, которая соответствует размеченному разбиению V. Поэтому последнее неравенство можно записать еще и так:

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} g(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})\Delta x_k \Delta y_l - I\right| < \epsilon.$$

В этом случае будем говорить, что $g(x,y)$ является **интегрируемой по Риману** на прямоугольнике P.

Далее рассмотрим следующие вопросы:

1) убедимся, что интеграл I есть предел по некоторой базе;

2) определим верхние и нижние суммы Дарбу и докажем критерий Римана интегрируемости функции от двух переменных;

3) установим свойства двойного интеграла, аналогичные свойствам однократного интеграла.

Начнем с определения базы множеств B и B'. Множество всех неразмеченных разбиений прямоугольника обозначим через A_P, а размеченных — через A'_P. В качестве окончаний b'_δ базы B' возьмем множество $\{V|\Delta_V < \delta\}$, т.е. множество разбиений, состоящее из тех $V \in A'_P$, для которых диаметр Δ_V меньше, чем $\delta > 0$.

Так как $\sigma(V)$ определена всюду на A'_P, то, очевидно, тогда определение двойного интеграла, данное выше, эквивалентно определению предела $\lim\limits_{B'}\sigma(V)$ по базе B'. Проверка справедливости этого утверждения состоит в том, что надо формально выписать определение предела по базе и сравнить его с данным выше определением. Далее базу B' будем обозначать символом $\Delta_V \to 0$.

Совершенно аналогично определяем базу $\Delta_T \to 0$ для всех неразмеченных разбиений A_P.

Итак, двойной интеграл есть предел по некоторой базе. А потому уже можно говорить о *единственности* двойного интеграла, применять теорему о переходе к пределу в неравенствах и так далее, получая отсюда различные утверждения о двойном интеграле типа его линейности, монотонности и другие. Позднее мы некоторые такие естественные свойства приведем.

Отметим, что неразмеченное разбиение T прямоугольника P можно определить и как пару (T_x, T_y), состоящую из неразмеченного разбиения $T_x : a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1$ отрезка $[a_1, b_1]$ на оси Ox и неразмеченного разбиения $T_y : a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b_2$ отрезка $[a_2, b_2]$ на оси Oy. Это разбиение T получается проведением $m+1$ вертикальных прямых $x = x_k$, $k = 0, \ldots, m$ и $n+1$ горизонтальных прямых $y = y_l$, $l = 0, \ldots, n$. Снова заметим, что если у размеченного разбиения V отбросить разметку точками $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l}) \in P_{k,l}$, то, очевидно, возникает неразмеченное разбиение, которое будем обозначать символом $T = T(V)$.

Определение 7. *Множество всех размеченных разбиений $\{V\}$, которым отвечает одно и то же неразмеченное разбиение T_0, будем называть* **множеством разметок** T_0 *и обозначать символом $A'_P(T_0)$. Если $V \in A'_P(T_0)$, то будем говорить, что V является* **разметкой** T_0 *или, что то же самое, $T(V) = T_0$.*

§ 2. СУММЫ ДАРБУ И ИХ СВОЙСТВА

Переходим теперь к построению *теории Дарбу* для двойного интеграла Римана по прямоугольнику.

Обозначим для некоторого неразмеченного разбиения T прямоугольника P через $M_{k,l}$ и $m_{k,l}$ величины

$$M_{k,l} = \sup_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y), m_{k,l} = \inf_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y).$$

Тогда **верхней суммой Дарбу** функции $g(x,y)$, соответствующей (отвечающей) разбиению T, называется сумма $S(T)$, где

$$S(T)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}M_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l,$$

а сумма

$$s(T)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}m_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l$$

называется **нижней суммой Дарбу.**

Омега-суммой $\Omega(T)$, отвечающей разбиению T, назовем величину

$$\Omega(T)=S(T)-s(T)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\omega_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l,$$

где $\omega_{k,l}=M_{k,l}-m_{k,l}$.

Определение 1. *Число* $I^*=\inf\limits_{T\in A_P}S(T)$ *называется* **верхним интегралом Дарбу** *от функции* $g(x,y)$ *по прямоугольнику* P, *а число* $I_*=\sup\limits_{T\in A_P}s(T)$ — **нижним интегралом Дарбу** *от функции* $g(x,y)$.

Нам потребуются следующие свойства сумм Дарбу.

Л е м м а 1. *Для любого размеченного разбиения* $V\in A'_P$ *имеем*

$$s(T(V))\le\sigma(V)\le S(T(V)).$$

Л е м м а 2. *Зафиксируем некоторое разбиение* $T_0\in A_P$. *Будем иметь следующие соотношения*

$$s(T_0)=\inf_{V\in A'_P(T_0)}\sigma(V),S(T_0)=\sup_{V\in A'_P(T_0)}\sigma(V).$$

Л е м м а 3. *Для любых неразмеченных разбиений* T_1 *и* T_2 *имеем*

$$s(T_1)\le S(T_2).$$

Л е м м а 4. *Для ограниченной на прямоугольнике* P *функции верхний* I^* *и нижний* I_* *интегралы Дарбу существуют, причем для любого разбиения* $T\in A_P$ *справедливы неравенства*

$$s(T)\le I_*\le I^*\le S(T).$$

Л е м м а 5. *Размеченное разбиение V принадлежит окончанию $b'_\delta \in B'$ тогда и только тогда, когда $T(V) \in b_\delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о лемм аналогично доказательству соответствующих утверждений в одномерном случае и не представляет большого труда. Стоит лишь сказать о лемме 3, поскольку там участвуют два разных разбиения. Здесь, как и в одномерном случае, введем понятие **измельчения разбиения.**

Определение 2. *Неразмеченное разбиение T_2 называется* **измельчением разбиения** T_1, *если разбиение T_2 получается из T_1 добавлением конечного числа новых точек разбиения на оси Ox и по оси Oy. Говорят еще, что T_2* **следует за** T_1 *и пишут $T_2 \supset T_1$ или $T_1 \subset T_2$.*

В частности, любое неразмеченное разбиение T есть измельчение самого себя. Далее, очевидно, что при измельчении разбиения T нижняя сумма Дарбу $s(T)$ не может уменьшиться, а верхняя сумма Дарбу $S(T)$ не может увеличиться. Поэтому для доказательства утверждения леммы 3 надо на каждой оси Ox и Oy взять разбиение T_3, объединяющее разбиения T_1 и T_2. Тогда получим

$$s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2).$$

Отсюда имеем $s(T_1) \leq S(T_2)$, что и доказывает утверждение леммы 3.

Отметим также, что утверждение леммы 4 по существу вытекает из леммы 3. Действительно, если образуем числовое множество M_1, состоящее изо всех значений величин $s(T)$, и множество M_2 значений величин $S(T)$, то утверждение леммы 3 означает, что любой элемент $a \in M_2$ есть верхняя грань множества M_1, а потому наименьшая верхняя грань множества M_1, т.е. I_* не превосходит этого элемента $a \in M_1$. Отсюда для любого числа $a \in M_1$ имеем $I_* \leq a$. Это значит, что I_* является нижней гранью множества M_2. Но величина I^*, по своему определению, есть точная нижняя грань множества M_2, и потому для любого разбиения $T \in A_P$ имеем

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Лемма 4 доказана.

Л е м м а 6. *Для любого разбиения T имеем $\Omega(T) \geq I^* - I_*$.*

Действительно, из леммы 4 получим

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \geq I^* - s(T) \geq I^* - I_*.$$

Лекция 2

§ 3. КРИТЕРИЙ РИМАНА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Т е о р е м а 1 (критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике). *Для того чтобы ограниченная функция $g(x, y)$ была интегрируема на $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий:*

1) $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$,

2) $I^* = I_*$,

3) $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала эквивалентность условия интегрируемости функции условию 1.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Это значит, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta_1$ имеем $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$, т.е.

$$I - \varepsilon_1 < \sigma(V) < I + \varepsilon_1. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольное неразмеченное разбиение T с условием $\Delta_T < \delta_1$. Для него получим

$$s(T) = \inf_{V \in A_P(T)} \sigma(V), \quad S(T) = \sup_{V \in A_P(T)} \sigma(V).$$

Тогда из (1) вытекает, что

$$I - \varepsilon_1 \leq s(T) \leq I + \varepsilon_1, \quad I - \varepsilon_1 \leq S(T) \leq I + \varepsilon_1.$$

Следовательно, значения $s(T)$ и $S(T)$ лежат на одном отрезке $[I - \varepsilon_1, I + \varepsilon_1]$ длины $2\varepsilon_1$, т.е. имеет место неравенство

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \leq 2\varepsilon_1.$$

Если мы возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$, $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1)$, то получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом разбиении T с условием $\Delta_T < \delta$ имеем $\Omega(T) < \varepsilon$, т.е. справедливо соотношение $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Надо доказать, что из условия $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$ следует существование предела $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$.