Сначала убедимся, что $I_* = I^*$. Из леммы 6 для любого разбиения $T \in A_P$ имеем

$$0 \le I_* - I^* \le \Omega(T),$$

и, следовательно, $h = I_* - I^* \to 0$ при $\Delta_T \to 0$.

В силу того, что h — постоянное число, то $h = 0$ и $I_* = I^* = I$. Осталось доказать, что $\sigma(V) \to I$ при $\Delta_V \to 0$. Возьмем произвольное положительное число ε_1. Из условия существования предела $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \Omega(T)$ найдется число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для всех разбиений T, $\Delta_T < \delta_1$, выполняется неравенство $\Omega(T) < \varepsilon_1$. Но тогда для любой разметки V этого разбиения будем иметь

$$s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V)), \quad s(T(V)) \le I_* = I = I^* \le S(T(V)),$$

$$S(T(V)) - s(T(V)) = \Omega(T) < \varepsilon,$$

т.е. обе точки $\sigma(V)$ и I лежат на отрезке $[s(T(V)), S(T(V))]$, длина которого не превосходит ε_1. Это значит, что расстояние между этими точками тоже не превосходит ε_1, поэтому для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta_1$ имеем $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Достаточность доказана.

Итак, условие 1 теоремы 1 эквивалентно условию интегрируемости функции по Риману.

Докажем теперь эквивалентность условий 1, 2 и 3. Для этого убедимся в справедливости цепочки утверждений:

$$1) \underset{\text{а)}}{\Longrightarrow} 2) \underset{\text{б)}}{\Longrightarrow} 3) \underset{\text{в)}}{\Longrightarrow} 1).$$

а) Нам надо доказать, что если $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$, то $I_* = I^*$. Но этот факт уже установлен при доказательстве достаточности условия 1.

б) Сначала докажем, что

$$\inf_T \Omega(T) = h = I^* - I_*.$$

Число $h = I^* - I_*$ — нижняя грань $\Omega(T)$, поскольку из леммы 6 имеем

$$\Omega(T) \ge I^* - I_* = h.$$

Докажем, что h — точная нижняя грань множества $\{\Omega(T)\}$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения сумм Дарбу будем иметь, что существуют разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$. Получим

$$S(T_3) \le S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T_3) \ge s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega(T) < I^* - I_* + \varepsilon = h + \varepsilon,$$

т.е. $h = \inf\limits_T \Omega(T)$.

Таким образом, из доказанного и условия 2 имеем

$$\inf_T \Omega(T) = I^* - I_* = 0.$$

Тем самым утверждение б) доказано.

в) Нам надо доказать, что если $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, то $\lim\limits_{\Delta_T} \Omega(T) = 0$.

Имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T_1 такое, что $\Omega(T_1) < \varepsilon/2$. Разбиению T_1 соответствует пара разбиений $(T_1(x), T_1(y))$ по осям Ox и Oy. Количество точек разбиений $T_1(x), T_1(y)$ обозначим через q.

Далее, поскольку $g(x,y)$ ограничена на P, существует $M > 0$ такое, что $|g(x,y)| < M$ для всех $(x,y) \in P$. Обозначим через d длину наибольшей стороны прямоугольника P. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4qdM}$.

Возьмем теперь любое разбиение $T = (T(x), T(y))$ с условием $\Delta_T < \delta$. Тогда для разбиения $T_2 = T \cup T_1$ имеем

$$\Omega(T_2) \le \Omega(T_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

поскольку T_2 есть измельчение разбиения T_1, т.е. $T_2 \supset T_1$.

Перейдем к оценке сверху величины $\Omega(T)$. Имеем

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + \alpha(T, T_1).$$

Здесь $\alpha(T, T_1) = \alpha(T, T_2) \ge 0$, поскольку $T_2 \supset T_1$. Кроме того,

$$\alpha(T, T_1) = \sum_{(k,l)}\sum (\omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l - \omega'_{k,l}\Delta x'_k \Delta y'_l - \dots - \omega^{(r)}_{k,l}\Delta x^{(r)}_k \Delta y^{(r)}_l) \le$$

$$\le \sum_{(k,l)}\sum \omega_{kl}\Delta x_k \Delta y_l,$$

причем символ $\sum\limits_{(k,l)}\sum$ обозначает, что суммирование ведется по тем парам (k,l), для которых прямоугольник $P_{k,l}$ разбиения T разлагается на меньшие прямоугольники с индексами $', \dots, ^{(r)}$ посредством разбиения T_1 (или T_2). Другими словами, пара (k,l) такова, что внутри отрезков $\Delta_k^{(x)}$ или $\Delta_l^{(y)}$ лежит по крайней мере одна точка разбиения $T_1(x)$ или разбиения $T_1(y)$.

Достаточно оценить сверху величину $\alpha(T,T_1)$. Будем считать, что символ $\sum\limits_{(k)}\sum\limits_{l}$ означает, что суммирование ведется по тем парам (k,l), для которых внутри отрезка $\Delta_k^{(x)}$ находится по крайней мере одна точка разбиения $T_1(x)$, а переменная l принимает все возможные значения, определяемые разбиением T. Аналогично определяется символ $\sum\limits_{(l)}\sum\limits_{k}$. При проведении оценки воспользуемся следующими неравенствами

$$\omega_{k,l} \le 2M, \quad \Delta x_k < \delta, \quad \Delta y_l < \delta, \quad \sum_k \Delta x_k < d, \quad \sum_l \Delta y_l < d.$$

Тогда будем иметь

$$\alpha(T,T_1) \le \sum_{(k,l)}\sum \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \le$$

$$\le \sum_{(k)}\sum_{l} \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{k}\sum_{(l)} \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \le$$

$$2M\delta\left(\sum_{(k)}\left(\sum_l \Delta y_l\right) + \sum_{(l)}\left(\sum_k \Delta x_k\right)\right) \le$$

$$\le 2M\delta d\left(\sum_{(k)} 1 + \sum_{(l)} 1\right) \le 2M\delta d q \le \frac{\epsilon}{2},$$

Следовательно,

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + \alpha(T,T_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Утверждение в) доказано, и тем самым теорема 1 доказана полностью.

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим последовательность разбиений T_n прямоугольника P, отвечающую разбиениям каждого из отрезков $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, на n равных частей, т.е. разбиение T_n будет состоять из n^2 равных между собой прямоугольников. Соответствующие разбиению T_n верхнюю и нижнюю суммы Дарбу обозначим через S_n и s_n, а омега-сумму — через Ω_n.

Т е о р е м а 1. *Для интегрируемости ограниченной функции на прямоугольнике необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения следует из теоремы 1 предыдущего параграфа, поскольку из условия $\lim\limits_{\Delta_T\to 0} \Omega(T) = 0$ получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$.

Достаточность. Для любого разбиения T имеем

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Следовательно,

$$s_n \le I_* \le I^* \le S_n.$$

Отсюда получим, что

$$\Omega_n = S_n - s_n \ge I^* - I_* \ge 0.$$

Но так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$, то $I^* = I_* = I$. В силу условия 2 теоремы 1 предыдущего параграфа отсюда следует интегрируемость рассматриваемой функции по Риману. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема служит дополнением и уточнением теоремы 1 предыдущего параграфа.

Т е о р е м а 2. *Для интегрируемости ограниченной функции на прямоугольнике необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:*

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$;

5) $\inf\limits_{n} \Omega_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем 1 этого и предыдущего параграфа имеем цепочку заключений:

$$5) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 5).$$

Теорема 2 доказана.

Утверждения этого параграфа представляют интерес для вычислительных целей. Из них следует, что достаточно рассмотреть лишь одну последовательность разбиений T_n.

В силу теоремы 2 для любой последовательности $\{V_n\}$ разметок, соответствующих последовательности неразмеченных разбиений T_n, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(V_n) = I$, причем ошибка при замене I на $\sigma(V_n)$ не превосходит Ω_n, т.е.

$$|\sigma(V_n) - I| \le \Omega_n.$$

На самом деле справедливо более общее утверждение: для любого размеченного разбиения V и для $T = T(V)$ имеем

$$|\sigma(V) - I| \leq \Omega(T(V)).$$

Действительно, справедливы неравенства

$$s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V)), \quad s(T(V)) \leq I \leq S(T(V)).$$

Это означает, что отрезку $[s(T(V)), S(T(V))]$, длина которого равна $S(T(V)) - s(T(V)) = \Omega(T(V))$, принадлежат оба числа $\sigma(V)$ и I, откуда имеем

$$|\sigma(V) - I| \leq \Omega(T(V)),$$

что и утверждалось выше.

Лекция 3

§ 5. ИЗМЕРИМОСТЬ ПО ЖОРДАНУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ

Напомним определения, связанные с понятием измеримости по Жордану трехмерной фигуры.

Определение 1. *Фигура P называется* **простейшей,** *если она является объединением конечного числа параллелепипедов, стороны которых параллельны осям координат. Такие параллелепипеды назовем стандартными.*

Обозначим через $\Pi = \Pi_3$ множество всех простейших фигур в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Очевидно, что мера (или объем) Жордана простой фигуры — это сумма объемов открытых непересекающихся стандартных параллелепипедов, на которые эту фигуру можно разбить.

Определение 2. Верхней мерой Жордана $\mu^*(F)$ *ограниченной фигуры F называется величина*

$$\inf_{P\in\Pi, F\subset P} \mu(P),$$

т.е. точная нижняя грань объемов всех простых фигур, содержащих F.

Аналогично, **нижней мерой Жордана** $\mu_*(F)$ *фигуры F называется величина*

$$\mu_*(F) = \sup_{P\in\Pi, P\subset F} \mu(P).$$

Если $\mu_*(F) = \mu^*(F)$, то фигура F называется **измеримой по Жордану** *и ее мера (объем) Жордана равна $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$.*

Заметим, что объем любой ограниченной части плоскости всегда равен нулю.

Напомним критерий измеримости фигуры F по Жордану. Обозначим через ∂F границу фигуры F, то есть множество точек в $\mathbf{R}^3$, не являющихся ни внутренними, ни внешними для фигуры F.

Теорема 1. *Для измеримости фигуры F по Жордану необходимо и достаточно, чтобы мера ее границы $\mu(\partial F)$ была равна нулю.*

Доказательство этого критерия мы проводить не будем, поскольку оно ничем не отличается от его доказательства в двумерном случае. Отметим только следующие четыре свойства величины $\mu(F)$.

1^0. Если F и G измеримы, то фигуры $F \cup G$ и $F \cap G$ измеримы.

2^0. Если F и G не пересекаются, то $\mu(F \cup G) = \mu(F) + \mu(G)$ (свойство аддитивности).

3^0. Если $F \subset G$, то $\mu(F) \leq \mu(G)$ (свойство монотонности).

4^0. Сдвиги и повороты фигуры F не изменяют значения меры этой фигуры (свойство инвариантности).

Т е о р е м а 2. *Для интегрируемости ограниченной функции $g(x, y)$ на прямоугольнике P необходимо и достаточно, чтобы цилиндрическая криволинейная фигура F, отвечающая поверхности $z = g(x, y)$, была измерима по Жордану.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (Необходимость). Пусть функция $g(x, y)$ интегрируема на P. Нам надо доказать, что фигура F измерима. Граница ∂F этой фигуры состоит из шести поверхностей:

$$\partial F = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_6,$$

где $H_1, \ldots, H_5$ — часть границы фигуры F, состоящая из частей плоскостей, параллельных координатным плоскостям, и H_6 — поверхность

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in P.$$

Заметим, что $\mu(\partial H_1) = \cdots = \mu(\partial H_5) = 0$, так как всякий прямоугольник или его часть имеют нулевой объем.

Из критерия интегрируемости по Риману функции $g(x, y)$ имеем, что $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T такое, что справедливо неравенство $\Omega(T) < \varepsilon$. Для этого разбиения T рассмотрим простую фигуру D, которая есть объединение замкнутых параллелепипедов (брусов) $D_{k,l}$, соответствующих разбиению T прямоугольника P. Каждый брус $D_{k,l}$ состоит из точек (x, y, z) таких, что для всех $(x, y) \in P_{k,l}$ имеем $m_{k,l} \leq z \leq M_{k,l}$ (напомним, что $m_{k,l} = \inf\limits_{(x,y) \in P_{k,l}} g(x, y), M_{k,l} = \sup\limits_{(x,y) \in P_{k,l}} g(x, y)$).

Тогда, очевидно, фигура D содержит все точки поверхности H_6. Далее, имеем $\mu(D) = \Omega(T) < \varepsilon$. Поскольку $H_6 \subset D$, получим, что $\mu^*(H_6) < \epsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это значит, что $\mu(H_6) = 0$.

Отсюда следует, что $\mu(\partial F) = 0$, и тогда согласно критерию измеримости фигура F измерима по Жордану. Необходимость доказана.

Достаточность. Мы имеем, что F измерима. Из критерия измеримости получим, что $\mu(\partial F) = 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует фигура $D \in \Pi$ такая, что $H_6 \subset D$ и $\mu(D) < \varepsilon$. Фигура D есть объединение нескольких замкнутых брусов D_r, $\quad r = 1, \ldots, t$.

Можно считать, что проекция фигуры D на плоскость $z = 0$ совпадает с P. Если это не так, то можно вместо D взять ее пересечение с бесконечным цилиндром, состоящим из точек (x, y, z) с условием $(x, y) \in P$.

Проекции всех брусов D_r, $r = 1, \ldots, t$, на плоскость $z = 0$ дают разбиение прямоугольника P на прямоугольники Q_r.

Продолжая стороны каждого прямоугольника Q_r до пересечения со сторонами прямоугольника P, получим некоторое разбиение T прямоугольника P на прямоугольники $P_{k,l}$.

Заметим, что для любой точки $(x, y) \in P_{k,l}$ имеем $(x, y, m_{k,l}) \in D$ и $(x, y, M_{k,l}) \in D$, где $m_{k,l} = \inf\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x, y), M_{k,l} = \sup\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x, y)$ Это утверждение имеет место, поскольку $H_6 \subset D$.

Обозначим через $D_{k,l}$ брус с условием

$$(x, y) \in P_{k,l}, \quad m_{k,l} \leq z \leq M_{k,l}.$$

Пусть D_0 — объединение всех таких брусов $D_{k,l}$. Тогда получим, что $D_0 \subset D$ и $\mu(D_0) \leq \mu(D) < \varepsilon$. Отсюда имеем, что $\mu(D_0) = \Omega(T) < \varepsilon$. Следовательно, $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, т.е. $g(x, y)$ интегрируема на P. Теорема 1 доказана.

§ 6. ПОНЯТИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА РИМАНА ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ, ИЗМЕРИМОЙ ПО ЖОРДАНУ

Для дальнейшего нам потребуется ввести понятие предела еще по одной базе множеств.

Рассмотрим функцию $g(x, y)$, определенную на ограниченной области D, измеримой по Жордану.

Определение 1. Разбиением τ *области* D *будем называть конечный набор измеримых по Жордану множеств* $D_1, \ldots, D_t$ *с условиями:*

1) $D_1 \cup \cdots \cup D_t = D$;

2) при всех $m, n \leq t$, $m \neq n$, *имеем* $\mu(D_m \cap D_n) = 0$.

Совокупность всех разбиений τ обозначим через A_D.

Определение 2. Диаметром $d = d(D)$ **множества** D *называется величина* $\sup\limits_{a,b\in D} \rho(a, b)$.

Диаметром Δ_τ **разбиения** τ *области* D *будем называть величину* $\Delta_\tau = \max\limits_{n\leq t} d(D_n)$.

Точки $a_1, \ldots, a_t$, $a_s \in D_s, 1 \leq s \leq t$, *будем называть* **разметкой** *данного разбиения* τ *и обозначать символом* $\beta = \beta_D$, *а разбиение* β *будем называть* **размеченным разбиением.**

Множество всех размеченных разбиений множества D обозначим через A'_D.

Определение 3. Интегральной суммой *размеченного разбиения β будем называть величину*

$$\sigma(\beta) = \sum_{n=1}^{t} g(a_n)\mu(D_n), \quad a_n = (x_n, y_n).$$

Определение 4. *Число I называется* **обобщенным двойным интегралом Римана** *функции $g(x, y)$ по ограниченной области D, измеримой по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого разбиения $\beta = \beta_D$ с условием $\Delta_\beta < \delta$ имеем*

$$|\sigma(\beta) - I| < \varepsilon.$$

Обобщенный двойной интеграл можно рассматривать как предел по базе. Ее мы будем Обозначим эту базу символом $\Delta_\beta \to 0$; она будет состоять из окончаний $b'_\delta \subset A'_D$, определяемых условием

$$b'_\delta = \{\beta = \beta_D | \Delta_\beta < \delta\}.$$

Очевидно, что функция $\sigma(\beta) = \sum\limits_{n=1}^{t} g(a_n)\mu(D_n)$ определена на множестве A'_D, а ее предел по базе $\Delta_\beta \to 0$ и есть обобщенный двойной интеграл по области D.

Пусть $m_n = \inf\limits_{a \in D_n} g(a), M_n = \sup\limits_{a \in D_n} g(a), \omega_n = M_n - m_n$. Тогда определим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу соответственно следующими выражениями:

$$S(\tau) = \sum_{n=1}^{t} M_n\mu(D_n), s(\tau) = \sum_{n=1}^{t} m_n\mu(D_n),$$

и омега-сумму — выражением $\Omega(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{t} \omega_n\mu(D_n)$.

Дадим еще одно определение кратного интеграла от ограниченной функции $g(x, y)$ по ограниченной, измеримой по Жордану, области D.

Пусть для некоторого прямоугольника P имеем $D \subset P$. Доопределим функцию $g(x, y)$ на весь прямоугольник P, полагая

$$g_0(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Определение 5. *Если $g_0(x,y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике P, то двойной интеграл J от $g_0(x,y)$ по P называется* **двойным интегралом Римана по множеству** D *от функции $g(x,y)$, то есть по определению имеем*

$$\iint\limits_D g(x,y)dxdy = J = \iint\limits_P g_0(x,y)dxdy.$$

На первый взгляд может показаться, что понятие обобщенного интеграла I расширяет класс интегрируемых функций по сравнению с понятием интеграла J, но на самом деле это не так.

Теорема 1. *Для существования обобщенного двойного интеграла I необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл J, причем тогда $I = J$.*

Доказательство. Сначала заметим, что теорию Дарбу и критерии интегрируемости можно перенести на случай обобщенного двойного интеграла.

1. Пусть существует интеграл J по прямоугольнику P. Тогда в силу критерия интегрируемости ($\inf\limits_T \Omega(T) = 0$) имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T такое, что $\Omega(T) < \varepsilon$, причем T состоит из прямоугольников $P_{k,l}$. Возьмем в качестве $D_{k,l} = D \cap P_{k,l}$. Тогда получим разбиение τ множества D. Колебание функции $g(x,y)$ на множестве $D_{k,l}$ не превосходит ее колебания на $P_{k,l}$, поэтому имеем $\Omega(\tau) \le \Omega(T) < \varepsilon$, т.е. согласно критерию интегрируемости существует обобщенный интеграл I.

Аналогично можно получить неравенство $S(\tau) \le S(T)$, поэтому $I^* \le S(T), I^* \le J^*, I = I^* \le J^* = J, I \le J$. Из подобного неравенства для нижних сумм Дарбу имеем $s(\tau) \ge s(T)$, $I = I_* \ge J_* = J$. Из этих неравенств следует, что $I = J$. Необходимость доказана.

2. Пусть существует обобщенный интеграл I по ограниченному измеримому множеству D. Надо доказать, что существует интеграл J от функции $g_0(x,y)$ по прямоугольнику P, содержащему D. Из критерия интегрируемости имеем, что существует разбиение $\tau = \{D_1, \ldots, D_t\}$ такое, что $\Omega(\tau) < \varepsilon$. Для каждого $r = 1, \ldots, t$ множество D_r измеримо, поэтому $\mu(\partial D_r) = 0$. Следовательно, найдется простейшая фигура F, состоящая из прямоугольников $P_{k,l}$, и, такая, что суммарная площадь всех $P_{k,l}$, содержащих хотя бы одну точку границы $\partial D_r, r = 1, \ldots, t$, не превосходит ε, т.е. $\mu(F) < \varepsilon$.

Продолжим прямолинейные отрезки границы F до пересечения со сторонами прямоугольника P. Получим разбиение T этого прямоугольника. Вклад ω_1 в омега-сумму $\Omega(T)$ тех прямоугольников, которые принадлежат $P \setminus F$, не превосходит $\Omega(\tau) < \varepsilon$. Вклад же ω_2 в $\Omega(T)$, тех прямоугольников, которые принадлежат F, не превосходит

$$\omega_2 \leq 2M\mu(F) < 2M\varepsilon.$$

Следовательно, имеем $\Omega(T) = \omega_1 + \omega_2 < (2M + 1)\varepsilon$. Отсюда в силу критерия интегрируемости функции по прямоугольнику следует, что существует интеграл J.

Рассуждая аналогично для верхних сумм Дарбу получим неравенство

$$S(T) - 2M\varepsilon \leq S(\tau).$$

Следовательно, $J \leq I + 2M\varepsilon$. В силу произвольности выбора положительного числа ϵ отсюда будем иметь $J \leq I$. Из оценок для нижних сумм Дарбу получим противоположное неравенство $J \geq I$. Таким образом, $I = J$. Теорема 1 доказана полностью.

Из эквивалентности определений интеграла Римана видно, что можно было бы ограничиться при построении теории квадратами $K \supset D$ и разбиениями их на n^2 равных квадратов, и при этом класс интегрируемых функций был тем же самым, что и при определении обобщенного интеграла. Но при таком построении теории есть одно неудобство, связанное с тем, что в пересечении двух квадратов не обязательно получится квадрат, поэтому мы и ограничились рассмотрением прямоугольников.

Лекция 4

§ 7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Приведем свойства двойного интеграла, а в случае существенного отличия их от свойств однократного интеграла дадим их доказательства.

Пусть $D, D_1, D_2, \dots$ — измеримые по Жордану множества, и функции $g(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ — интегрируемы по Риману на рассматриваемых множествах.

Тогда имеют место следующие свойства.

1^0. Справедливы равенства:

а) $\iint\limits_D (g_1(x,y)+g_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D g_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D g_2(x,y)dxdy$,

б) $\iint\limits_D cg(x,y)dxdy = c\iint\limits_D g(x,y)dxdy \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (свойство линейности).

2^0. Пусть функции g_1 и g_2 интегрируемы на D, тогда $g_1 g_2$ интегрируема на D.

3^0. Пусть на D справедливо неравенство $g_1(x,y) \le g_2(x,y)$. Тогда

а) $\iint\limits_D g_1(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g_2(x,y)dxdy$ (свойство монотонности),

б) Пусть также $|g(x,y)|$ интегрируема на D. Тогда

$$|\iint\limits_D g(x,y)dxdy| \le \iint\limits_D |g(x,y)|dxdy,$$

в) Пусть $f(x,y) \ge 0, \quad m = \inf\limits_D g(x,y), \quad M = \sup\limits_D g(x,y)$. Тогда существует число $c, \quad m \le c \le M$ такое, что

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{(теорема о среднем)}.$$

4^0. $\iint\limits_D 1\cdot dxdy = \mu(D)$.

Это утверждение следует из эквивалентности определения меры Жордана и определения обобщенного двойного интеграла.

5^0. Если $\mu(D)=0$, то $\iint\limits_D g(x,y)dxdy = 0$ для любой ограниченной на D функции $g(x,y)$.

Доказательство. Так как $g(x,y)$ ограничена на множестве D, то найдется число $M>0$ такое, что для всех точек

$(x, y) \in D$ выполняется неравенство $|g(x, y)| \leq M$. Из свойств $3^0, 1^0$ и 4^0 имеем

$$\left|\iint\limits_D g(x, y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |g(x, y)|dxdy \leq M \iint\limits_D dxdy = M\mu(D) = 0.$$

6^0. Пусть области D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек. Тогда имеем

$$\iint\limits_{D_1} g(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} g(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} g(x, y)dxdy$$

(свойство аддитивности интеграла как функционала от области интегрирования).

Доказательство. Пусть стандартный прямоугольник P содержит D_1 и D_2. Тогда по определению имеем

$$\iint\limits_{D_1} g(x, y)d\mu = \iint\limits_P g_1(x, y)dxdy, \quad \iint\limits_{D_2} g(x, y)d\mu = \iint\limits_P g_2(x, y)dxdy,$$

где

$$g_1(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D_1, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in P \setminus D_1; \end{cases}$$

$$g_2(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D_2, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in P \setminus D_2. \end{cases}$$

Отсюда и из свойства линейности интеграла получим

$$\iint\limits_{D_1} g(x, y)d\mu + \iint\limits_{D_2} g(x, y)d\mu =$$

$$= \iint\limits_P g_1(x, y)dxdy + \iint\limits_P g_2(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_P (g_1(x, y) + g_2(x, y))dxdy = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} gd\mu.$$

Свойство 6^0 доказано.

7^0. Если значения функций $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ отличаются только на множестве D_1, причем $\mu(D_1) = 0$, $D_1 \subset D$, то

$$\iint\limits_D g_1(x, y)dxdy = \iint\limits_D g_2(x, y)dxdy.$$

Действительно, имеем

$$\iint\limits_D g_1(x,y)d\mu = \iint\limits_{D_1\cup(D\setminus D_1)} g_1(x,y)d\mu =$$

$$= \iint\limits_{D_1} g_1(x,y)d\mu + \iint\limits_{D\setminus D_1} g_1(x,y)d\mu = 0 + \iint\limits_{D\setminus D_1} g_2(x,y)d\mu =$$

$$= \iint\limits_{D_1} g_2(x,y)d\mu + \iint\limits_{D\setminus D_1} g_2(x,y)d\mu = \iint\limits_D g_2(x,y)d\mu.$$

Свойство 7^0 доказано.

§ 8. ПЕРЕХОД ОТ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Сформулируем теорему о равенстве двойного и повторного интегралов.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $g(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $P = I_1 \times I_2$, $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2]$. Пусть также для любого фиксированного значения $x \in I_1$ функция $f(y) = f_x(y) = g(x,y)$ от одной переменной y является интегрируемой по y на отрезке I_2 и $h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f(y)dy$. Тогда имеет место формула*

$$A = \iint\limits_P g(x,y)dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} h(x)dx =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f_x(y)dy \right) dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} g(x,y)dy,$$

т.е. двойной интеграл равен повторному интегралу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого разбиения $T = T_P$ прямоугольника P имеем неравенства $m_{k,l} \le g(x,y) \le M_{k,l}$, где $(x,y) \in P_{k,l}$ и величины $m_{k,l}$ и $M_{k,l}$, $k = 1,\dots,m$, $l = 1,\dots,n$ имеют обычный смысл.

При фиксированном $x = \xi_k$ это неравенство можно проинтегрировать по y в пределах от y_{l-1} до y_l. Получим

$$m_{k,l}\Delta y_l \le \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi_k, y)dy \le M_{k,l}\Delta y_l.$$

Просуммируем это неравенство по l. Будем иметь

$$\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta y_l \le \int_{a_2}^{b_2} g(\xi_k, y)dy = h(\xi_k) \le \sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta y_l.$$

Умножим последнее неравенство на Δx_k и просуммируем его по k. Получим

$$s(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \le \sum_{k=1}^{m} h(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(V(x)) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l = S(T),$$

где $V(x)$ — разметка разбиения T отрезка I_1.

Кроме того, имеем

$$s(T) \le A \le S(T).$$

Так как $g(x,y)$ интегрируема на P, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta$ имеем $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Разбиение $T = (T(x), T(y))$ образовано парой разбиений — одно $T(x)$ по оси Ox, другое $T(y)$ по оси Oy. В качестве разбиения $T(x)$ можно взять любое разбиение с условием $\Delta_{T(x)} < \delta$. Возьмем любую разметку разбиения $T(x)$. Получим размеченное разбиение $V = V(x)$ отрезка I_1.

Далее, в силу того, что оба числа A и $\sigma(V)$ лежат на одном отрезке длины ε, имеем $|\sigma(V) - A| < \varepsilon$. Заметим, что это неравенство справедливо для любого размеченного разбиения с условием $\Delta_V < \delta$. Следовательно, имеет место равенство

$$A = \lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = \int_{a_1}^{b_1} h(x)dx.$$

Теорема 1 доказана.

Заметим, что случай интегрирования по любому измеримому множеству D мало чем отличается от рассмотренного. Пусть прямоугольник P содержит D. Тогда по определению имеем

$$A = \iint_D g(x,y)dxdy = \iint_P g_0(x,y)dxdy,$$

где g_0 совпадает с функцией g на множестве D и $g_0 = 0$ вне D.

Обозначим через $E(x)$ множество точек y, для которых $(x, y) \in D$. Пусть $E(x)$ состоит из конечного числа отрезков

$$[\varphi_1(x), \psi_1(x)], \ldots, [\varphi_t(x), \psi_t(x)].$$

Тогда если $h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} g_0 dy$, то, как мы видели,

$$A = \int\limits_{a_1}^{b_1} h(x) dx,$$

где

$$h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} g_0(x, y) dy = \sum_{r=1}^{t} \int\limits_{\varphi_r(x)}^{\psi_r(x)} g(x, y) dy.$$

Следовательно, имеет место формула

$$A = \sum_{r=1}^{t} \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{\varphi_r(x)}^{\psi_r(x)} g(x, y) dy.$$

Эта формула обобщает утверждение теоремы 1.

§ 9. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА ИЗМЕРИМОМ МНОЖЕСТВЕ

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция $g(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике P. Тогда $g(x, y)$ интегрируема на нем.*

Доказательство. Прямоугольник P — компакт. Поэтому функция $g(x, y)$ равномерно непрерывна на нем. Другими словами, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta_1$ имеем $\omega_{k,l} = M_{k,l} - m_{k,l} < \varepsilon_1$.

Следовательно,

$$\Omega(T) \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \omega_{k,l} \mu(P_{k,l}) \leq \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \mu(P_{k,l}) = \varepsilon_1 \mu(P).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = \varepsilon / \mu(P)$. Тогда для любого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta_1(\varepsilon / \mu(P))$ получим, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$, т.е. функция $g(x, y)$ интегрируема на P.

Т е о р е м а 2. *Пусть $g(x, y)$ ограничена и непрерывна на измеримом множестве D. Тогда $g(x, y)$ интегрируема на D.*

Докажем более общую теорему, из которой следует теорема 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть $g(x, y)$ ограничена на замкнутом измеримом множестве D и непрерывна во всех точках множества D, за исключением множества D_1, причем $\mu(D_1) = 0$. Тогда функция $g(x, y)$ интегрируема на D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon_1 > 0$. Так как множество D измеримо, то существует замкнутая простая фигура $F \subset D$ такая, что $\mu(D \setminus F) < \varepsilon_1$. Кроме того, существует открытая простая фигура F_1 такая, что $D_1 \subset F_1$ и $\mu(F_1) < \varepsilon_1$. Тогда простая фигура $F_2 = F \setminus F_1$ замкнута и $\mu(D \setminus F_2) < 2\varepsilon_1$.

Функция $g(x, y)$ непрерывна в каждой точке фигуры F_2, поэтому из теоремы 1 следует ее интегрируемость на F_2. Следовательно, существует разбиение $T = T_{F_2}$ такое, что $\Omega(T) < \varepsilon_1$.

Дополним это разбиение T до разбиения τ множества D, добавив к нему фигуру $D_0 = D \setminus F_2$. Тогда в сумму $\Omega(\tau)$ добавится слагаемое, равное $(M_0 - m_0)\mu(D_0)$, где $m_0 = \inf\limits_{D_0} g(x, y)$, $M_0 = \sup\limits_{D_0} g(x, y)$.

Следовательно, имеем

$$\Omega(\tau) < \varepsilon_1 + (M_0 - m_0)2\varepsilon_1 = \varepsilon_1(2M_0 - 2m_0 + 1) = \varepsilon,$$

т.е. $\inf\limits_{\tau} \Omega(\tau) = 0$.

Это и означает, что функция $g(x, y)$ интегрируема на D.

Теорема 3 доказана.

Лекция 5

§ 10. МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Ранее мы определили двукратный интеграл как предел по базе $\Delta_V \to 0$ (или $\Delta_\beta \to 0$ на множестве D), где V и β размеченные разбиения соответственно прямоугольника P и множества D.

Это определение можно дословно перенести на случай функций от большего числа переменных. Другими словами, если, например, в определении интеграла I функцию $g(x,y)$ заменить на функцию $g(\bar{x}) = g(x_1,\ldots,x_n)$ при $n \geq 2$, а области $D, D_1,\ldots,D_t$ считать n-мерными, то поскольку измеримость по Жордану была определена при любом $n \geq 1$, мы тем самым получим определение n - кратного интеграла по области $D \subset \mathbb{R}^n$, измеримой по Жордану. Для этого интеграла введем следующее обозначение:

$$I = \int\limits_D \cdots \int g(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int\limits_D \cdots \int g(\bar{x})d\mu.$$

Точные определения для общего случая переписывать не будем. Нас будут в основном интересовать случаи $n = 2, 3$. В этих случаях интеграл I обычно записывают так:

$$I = \iint\limits_D g(x,y)dS, \quad I = \iiint\limits_D g(x,y,z)dV,$$

Отметим, что все факты, доказанные ранее для случая $n = 2$, без принципиальных изменений в доказательстве переносятся на общий случай $n \geq 2$. Укажем только, что сюда относятся и критерий интегрируемости функции в разных формах, и свойства 1^0 $--7^0$ двойного интеграла.

Приведем формулировку теоремы о сведении n-кратного интеграла к $(n-1)$-кратному интегралу. Ограничимся случаем $n = 3$.

Т е о р е м а 1. а) *Пусть существует тройной интеграл A от функции $g(x,y,z)$ по параллелепипеду $P = I_1 \times I_2 \times I_3$. Пусть также существует двойной интеграл $h(x)$ по прямоугольнику $Q = I_2 \times I_3$, т.е. интеграл $h(x) = \iint\limits_Q g(x,y,z)dydz$. Тогда функция $h(x)$ является интегрируемой на отрезке I_1 и справедливо равенство*

$$A = \int\limits_{I_1} h(x)dx.$$

б) Пусть $D \subset P = I_1 \times I_2 \times I_3$ и пусть при фиксированном $x \in I_1$ символ $D(x)$ обозначает собой измеримую по Жордану область точек $(y, z) \in I_2 \times I_3$ с условием $(x, y, z) \in D$ (то есть $D(x)$ является пересечением множества D с плоскостью, состоящей из точек, у которых первая координата фиксирована и равна x). Пусть также при всяком таком x существует интеграл

$$h(x) = \iint\limits_{D(x)} g(x, y, z)dydz.$$

Тогда имеем

$$A = \int\limits_{I_1} h(x)dx.$$

При фиксированном x, применяя аналогичную теорему к двойному интегралу $h(x)$, получим

$$h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{D(x,y)} g(x, y, z)dz,$$

где множество $D(x, y)$ является пересечением множества D с плоскостью $x = \text{const}, y = \text{const}$.

Пример 1. Найти значение величины интеграла

$$I = \int \cdots \int\limits_{D} f(x_1) \ldots f(x_n)dx_1 \ldots dx_n,$$

где область D определяется условиями

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) | 0 < x_1 < \cdots < x_n < 1\}.$$

Обозначим через D_σ область

$$D_\sigma = \{(x_1, \ldots, x_n) | 0 < x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)} < 1\},$$

отвечающую перестановке σ чисел $1, \ldots, n$.

Для различных перестановок σ и τ области D_σ и D_τ не пересекаются. Далее, интеграл $I(\sigma)$, отвечающий области интегрирования D_σ, от той же самой функции $f(x_1) \ldots f(x_n)$ будет равен I. Количество перестановок n чисел равно $n!$. Следовательно,

$$n!I = \sum_\sigma I_\sigma = \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(x_1) \ldots f(x_n)dx_1 \ldots dx_n = \left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^n.$$

Таким образом мы свели вычисление n-кратного интеграла к однократному и получили формулу

$$I = \frac{1}{n!}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^n .$$

Пример 2. Докажем следующую формулу Дирихле – Лиувилля. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и пусть S есть симплекс в n-мерном пространстве, определяемый условиями $x_1 + \cdots + x_n \le 1$, $x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. Тогда имеем

$$J = J_n(p_1,\ldots,p_n) = \int\limits_S \cdots \int f(x_1+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+\cdots+p_n-1}du.$$

Действительно, положим $\lambda = x_1 + \cdots + x_{n-2}$. Расставим пределы интегрирования в интеграле J. Тогда два последних интеграла по переменным x_{n-1} и x_n будут иметь вид

$$H = \int_0^{1-\lambda} dx_{n-1}\int_0^{1-\lambda-x_{n-1}} f(\lambda+x_{n-1}+x_n)x_n^{p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}dx_n.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменной вида

$$x_n = x_{n-1}\frac{1-v}{v}.$$

Тогда

$$v = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}, \quad dx_n = -\frac{x_{n-1}dv}{v^2}$$

и интеграл H принимает вид

$$H = \int_0^{1-\lambda} dx_{n-1}\int_{\frac{x_{n-1}}{1-\lambda}}^{1} f(\lambda+\frac{x_{n-1}}{v})x_{n-1}^{p_{n-1}+p_n-1}(1-v)^{p_n-1}v^{-p_n-1}dv.$$

Поменяв порядок интегрирования в H, получим

$$H = \int_0^1 dv\int_0^{v(1-\lambda)} f(\lambda+\frac{x_{n-1}}{v})x_{n-1}^{p_{n-1}+p_n-1}(1-v)^{p_n-1}v^{-p_n-1}dx_{n-1}.$$

Сделаем еще одну замену переменной вида $x_{n-1} = vt$. Имеем

$$H = \int_0^1 (1-v)^{p_n-1} v^{p_{n-1}-1} dv \int_0^{1-\lambda} f(\lambda+t) t^{p_{n-1}+p_n-1} dt =$$

$$= B(p_{n-1}, p_n) \int_0^{1-\lambda} f(\lambda+t) t^{p_{n-1}+p_n-1} dt.$$

Отсюда получим следующую рекуррентную формулу:

$$J = J_n(p_1, \ldots, p_n) = B(p_{n-1}, p_n) J_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1}+p_n),$$

из которой имеем

$$J = B(p_{n-1}, p_n) B(p_{n-2}, p_{n-1}+p_n) B(p_1, p_2+\cdots+p_n) J_1(p_1+\cdots+p_n) =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+\cdots+p_n-1} du.$$

Таким образом, формула Дирихле – Лиувилля доказана.

В частности, следствием этой формулы является выражение для объема n-мерного шара, заданного соотношением $x_1^2+\cdots+x_n^2 \le a^2$. Ввиду симметрии шара относительно гиперплоскостей $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, можно ограничиться вычислением объема области K, части шара, определяемой так:

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 \le a^2, x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,$$

при этом объем ее будет в 2^n раз меньше объема шара V. Имеем

$$V = 2^n \int \cdots \int_K dx_1 \ldots dx_n.$$

После замены переменных $au_1 = x_1^2, \ldots, au_n = x_n^2$ область K перейдет в симплекс S, определенный выше, и поскольку $dx_k = \frac{a du_k}{2\sqrt{u_k}}$, $k = 1, \ldots, n$, получим

$$V = a^n \int \cdots \int_S \frac{du_1 \ldots du_n}{\sqrt{u_1 \ldots u_n}}.$$

Последний интеграл есть интеграл Дирихле – Лиувилля при

$$f(u_1, \ldots, u_n) = 1, p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, объем n-мерного шара радиуса a равен $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}a^n$.

§ 11. СВОЙСТВА ГЛАДКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ

Известно, какую большую роль в построении теории однократных интегралов играет метод замены переменной. В случае же кратных интегралов роль этого метода не меньше (а быть может, и больше).

Для его обоснования нам понадобятся некоторые свойства гладких отображений.

Пусть функция $g(\bar{y}), \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, определена на компактной измеримой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и интегрируема на D. Пусть I обозначает интеграл

$$I = \int \cdots \int_D g(\bar{y}) dy_1 \ldots dy_n.$$

Рассмотрим отображение $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ измеримого компакта $D_0 \subset \mathbf{R}^n$ на множество D, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между внутренними точками множеств D и D_0.

Напомним, что отображение $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ задается системой n функций, $y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots \ y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на D_0.

Будем считать, что каждая из этих функций имеет все непрерывные частные производные на D_0.

Замечания. 1. Функции $\varphi_k(\bar{x})$ называются **криволинейными координатами**, определенными на D_0.

2. Условие взаимной однозначности отображения $\bar{\varphi} : D_0 \to D$ для внутренних точек области D_0 обеспечивается требованием отличия от нуля якобиана этого отображения в каждой точке области D_0 (теорема об обратном отображении).

Перейдем теперь к формулировке и доказательству утверждений о гладких отображениях на областях.

Теорема 1. *Пусть D_0 выпуклое и замкнутое множество и $\varphi(\bar{x})$ гладкая функция на множестве D_0. Пусть также точки $\bar{x}$ и $\bar{x}+\Delta\bar{x}$ принадлежат D_0. Тогда существует точка $\bar{\xi} = \bar{x}+\theta\Delta\bar{x}, 0 < \theta < 1$, такая, что $\Delta\varphi = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi(\bar{\xi}))$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(t)$ одной переменной $t, 0 \leq t \leq 1$,

$$h(t) = \varphi(\bar{x} + t\Delta x).$$

Ясно, что $h(t)$ гладкая функция на отрезке $[0,1]$. Следовательно, к ней можно применить формулу Лагранжа конечных приращений.

Тогда существует число $\theta, 0 < \theta < 1$ такое, что

$$\Delta\varphi = \Delta h = h(1) - h(0) = h'(\theta)(1-0) = h'(\theta).$$

Функция $h(t)$ является сложной функцией от t и по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$h'(\theta) = \frac{\partial\varphi(\bar{\xi})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial\varphi(\bar{\xi})}{\partial x_n}\Delta x_n = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi(\bar{\xi})),$$

где $\xi = \bar{x} + \theta\Delta\bar{x}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\bar{\varphi}(\bar{x})$ гладкое отображение выпуклого компакта D_0 на область D. Тогда существует число $c > 0$ такое, что для любых точек $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in D_0$ справедливо неравенство $||\bar{\varphi}(\bar{a}_1) - \bar{\varphi}(\bar{a}_2)|| \leq c||\bar{a}_1 - \bar{a}_2||$, где $||x||$ длина вектора в евклидовой метрике.*

Доказательство. Из теоремы 1 при $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\varphi_k(\bar{a}_1) - \varphi_k(\bar{a}_2) = \Delta\varphi_k = (\bar{a}_2 - \bar{a}_1, \operatorname{grad}\varphi_k(\xi_k)),$$

где $\bar{\xi}_k = \bar{a}_1 + \theta_k(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)$ и θ_k — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Далее воспользуемся неравенством Коши $|(\bar{a}, \bar{b})| \leq ||\bar{a}|| \cdot ||\bar{b}||$. Получим

$$|\Delta\varphi_k| \leq ||\bar{a}_2 - \bar{a}_1|| \cdot ||\operatorname{grad}\varphi_k(\xi_k)||.$$

Поскольку D_0 компакт и функция $||\operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})||$ непрерывна на D_0, она ограничена на этом компакте некоторой постоянной $c_k > 0$. Используя это и числовое неравенство

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + \dots + |a_n|,$$

будем иметь

$$||\Delta\bar{\varphi}|| \leq |\Delta\varphi_1| + \dots + |\Delta\varphi_n| \leq (c_1 + \dots + c_n)||\Delta\bar{x}|| = c||\Delta\bar{x}||,$$

где $\Delta\bar{x} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$. Теорема 2 доказана.

Обозначим через $A_\varphi(\bar{x})$ матрицу Якоби отображения $\bar{\varphi}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ в точке $\bar{x}$.

Определение 1. *Линейное отображение $\Delta\bar{y} = A_\varphi(\bar{x}) \cdot \Delta\bar{x}$ приращения $\Delta\bar{x}$ вектора $\bar{x}$ называется* **дифференциалом** *отображения $\bar{\varphi}$ и обозначается символом $d\bar{\varphi}(\bar{x})$.*

Очевидно, что $d\bar{\varphi}(\bar{x})$ — вектор с координатами

$$d\varphi_k(\bar{x}) = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть $\bar{\varphi}$ — гладкое отображение выпуклого компакта D_0 и*

$$r(\bar{x}, \Delta\bar{x}) = \Delta\bar{\varphi} - d\bar{\varphi}.$$

Тогда имеет место следующий равномерный предел

$$\frac{||\bar{r}(\bar{x}, \Delta\bar{x})||}{||\Delta\bar{x}||} \underset{D_0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad ||\Delta x|| \to 0.$$

Другими словами, существует числовая функция $\alpha(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to 0$ такая, что для всех $\bar{x} \in D_0$ справедливо неравенство

$$||\bar{r}(\bar{x}, \Delta\bar{x})|| \leq \alpha(\Delta\bar{x})||\Delta\bar{x}||.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим k-е координаты векторов $\Delta\bar{\varphi}$ и $d\bar{\varphi}$. По определению имеем

$$d\varphi_k = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})),$$

а из теоремы 1 при некотором $\bar{\xi}$ получим

$$\Delta\varphi_k = \varphi_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \varphi_k(\bar{x}) = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{\xi})).$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi_k - d\varphi_k = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{\xi}) - \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})).$$

Далее, так как частные производные отображения $\bar{\varphi}$ непрерывны на компакте D_0, то в силу их равномерной непрерывности на D_0 будем иметь

$$\left|\frac{\partial\varphi_k(\bar{\xi})}{\partial x_s} - \frac{\partial\varphi_k(\bar{x})}{\partial x_s}\right| \leq \alpha_k(\Delta\bar{x}),$$

где $\alpha_k(\Delta\bar{x})$ зависит только от $\Delta\bar{x}$ и $\alpha_k(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to 0$.

Отсюда, используя неравенство Коши, получим

$$|\Delta\varphi_k - d\varphi_k| \leq ||\Delta\bar{x}|| \cdot \sqrt{n}\alpha_k(\Delta\bar{x}).$$

Следовательно,

$$||\bar{r}(\bar{x}, \Delta\bar{x})|| \leq \sum_{k=1}^{n} |\Delta\varphi_k - d\varphi_k| \leq ||\Delta\bar{x}|| \cdot \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\Delta\bar{x}) = \alpha(\Delta\bar{x})||\Delta\bar{x}||,$$

причем $\alpha(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to 0$.

Теорема 3 доказана.

§ 12. ОБЪЕМ ОБЛАСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Докажем теорему об объеме области в криволинейных координатах.

Теорема 1. *Пусть Q выпуклый измеримый по Жордану компакт и R образ его при гладком взаимно однозначном отображении $\bar{\varphi}$. Тогда:*

1) множество R измеримо по Жордану;

2) $\mu(R) \leq \int\limits_{Q}\cdots\int |J| d\mu$, где J — определитель матрицы Якоби (якобиан) отображения $\bar{\varphi}$.

Напомним, что определение матрицы Якоби и дифференциала отображения дано в конце предыдущего параграфа.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая плоских областей $Q \subset \mathbf{R}^2$. Заметим сразу, что так как модуль якобиана отображения $\bar{\varphi}$ является непрерывной функцией на Q, то эта функция интегрируема на Q.

Пусть P — некоторый стандартный квадрат, содержащий компакт Q. Пусть, далее, квадраты $P_{k,l}$ со стороной h составляют разбиение квадрата P. Тогда множества $Q_{k,l} = Q \cap P_{k,l}$ образуют разбиение τ компакта Q на выпуклые измеримые множества. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и возьмем величину h столь малой, чтобы общая площадь всех квадратов $P_{k,l}$, содержащих хотя бы одну точку границы ∂Q компакта Q, была бы меньше ε_1. Назовем такие пары (k,l) **особыми**, а остальные — **обычными**.

Диаметр $d_{k,l}$ каждого множества $Q_{k,l}$, отвечающего особым (k,l) при отображении $\bar{\varphi}$, по теореме 2 возрастает не более, чем в c раз, т.е. его образ $R_{k,l}$ можно накрыть кругом радиуса, не превосходящего ch или квадратом со стороной, не превосходящей $2ch$. Его площадь не превосходит $4c^2h^2$. Обозначим через μ_1 сумму по особым парам (k,l) площадей $R_{k,l} = \bar{\varphi}(Q_{k,l})$. Имеем

$$\mu_1 = \sum_{(k,l)}{}' \mu(R_{k,l}) \leq \sum_{(k,l)}{}' 4c^2\mu(P_{k,l}) \leq 4c^2\varepsilon_1.$$

Поскольку ∂R принадлежит объединению этих $R_{k,l}$, $\mu(\partial R) \leq 4c^2\varepsilon_1$. Ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon_1 > 0$ отсюда имеем, что $\mu(\partial R) = 0$, т.е. множество R измеримо по Жордану.

Обозначим через $\mu(R)$ меру Жордана области R. Тогда имеем $\mu(R) = \mu_1 + \mu_2$, где величина μ_1 определена выше и $\mu_2 = \sum\limits_{(k,l)}{}'' \mu(R_{k,l})$.

Символ $\sum''_{(k,l)}$ означает, что суммирование ведется по обычным парам (k,l).

Рассмотрим теперь какой-либо квадрат $P_{k,l}$, целиком лежащий внутри Q. Тогда имеем $Q_{k,l} = P_{k,l}$. Обозначим его вершины через $\bar{x}_0, \bar{x}_0 + \bar{a}_1, \bar{x}_0 + \bar{a}_2, \bar{x}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, причем $||\bar{a}_1|| = ||\bar{a}_2|| = h$. Очевидно, что для любого $\bar{x} \in P_{k,l}$ имеем $||\bar{x} - \bar{x}_0|| = ||\Delta\bar{x}|| < 2h$. Пусть A — матрица Якоби отображения φ. Тогда при линейном отображении с этой матрицей A квадрат $P_{k,l}$ перейдет в параллелограмм K с вершинами $\bar{y}_0 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0), \bar{y}_1 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A\bar{a}_1 = \bar{y}_0 + \bar{b}_1, \bar{y}_2 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A\bar{a}_2 = \bar{y}_0 + \bar{b}_2, \bar{y}_3 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \bar{y}_0 + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$.

Пусть $\alpha(\Delta\bar{x})$ — функция, определенная в утверждении теоремы 3 §11. Заключим стороны параллелограмма в "рамку" K_1, образованную точками, отстоящими во внешнюю сторону от параллелограмма на расстояние, не превосходящее $\rho = \alpha(2h)\cdot 2h$. Тогда $K \subset K_1$.

Докажем, что $R_{k,l} \subset K_1$, то есть, что для любой точки $\bar{x} \in P_{k,l}$ ее образ $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x}) \in K_1$.

Действительно, так как $\bar{x} \in P_{k,l}$, то $\bar{y}_0 + d\bar{\varphi}(\bar{x}) \in K$. Поэтому имеем

$$||\bar{\varphi}(\bar{x}) - \bar{\varphi}(\bar{x}_0) - d\varphi(\bar{x})|| = ||\bar{r}(\bar{x}_0, \Delta\bar{x})|| \leq 2h\alpha(2h) = \rho,$$

то есть $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in K_1$.

Теперь заметим, что множество $R_{k,l}$ измеримо по Жордану по тем же причинам, что и R. Периметр параллелограмма K не превосходит $c\cdot 4h$. Поэтому, исходя из построения фигуры K_1 будем иметь $\mu(K_1) \leq \mu(K) + \rho\cdot c\cdot 4h + 4\pi\rho^2$.

Поскольку $R_{k,l} \subset K_1$, то величина $\mu(R_{k,l})$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(R_{k,l}) \leq \mu(K_1).$$

Используя эти неравенство, приходим к оценке

$$\mu(R_{k,l}) \leq \mu(K_1) \leq \mu(K) + \rho\cdot c\cdot 8h + 4\pi\rho^2 = \mu(K) + \Delta(h).$$

Из линейной алгебры известно, что для линейного отображения с матрицей A, определитель которой равен J, и при котором квадрат $P_{k,l}$ переходит в параллелограмм K, справедливо равенство

$$\mu(K) = |J|\mu(P_{k,l}).$$

Используя это равенство, получим

$$\mu(R_{k,l}) \leq |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}) + \Delta(h).$$

Далее, для каждой особой пары (k,l) выберем произвольным образом точку $\bar{x}_{k,l} \in Q_{k,l}$ и образуем сумму

$$\sigma_1 = \sum{}' |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}),$$

где $\sum'$ означает, что суммирование ведется по особым парам (k, l).

Так как функция $|J_{\bar\varphi}(\bar x)|$ непрерывна на компакте Q, то по теореме Вейерштрасса она ограничена некоторой постоянной $c_2 > 0$. Поэтому

$$|\sigma_1| \le c_2 \sum{}' \mu(Q_{k,l}) = c_2\mu_1 < c_2\varepsilon_1.$$

Пусть $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_2 = \sum'' |J_{\bar\varphi}(\bar x_{k,l})|\mu(Q_{k,l})$, причем в последней сумме суммирование распространено на обычные пары (k, l). Оценим разность между интегральной суммой σ и величиной $\mu(R)$. Имеем

$$|\mu(R) - \sigma| = |\sum{}'' (\mu(R_{k,l}) - |J_{\bar\varphi}(\bar x_{k,l})|\mu(Q_{k,l})) + \sum{}' \mu(R_{k,l}) - \sigma_1| \le$$

$$\le |\sum{}''| + |\sum{}'| + |\sigma_1|.$$

Воспользуемся ранее доказанными неравенствами. Получим

$$|\sum{}''| \le \frac{\Delta(h)}{h^2}\mu(Q), \quad \sum{}'' h^2 = \sum{}'' \mu(Q_{k,l}) \le \mu(Q),$$

$$\left|\sum{}'\right| \le 4c^2\varepsilon_1, \quad |\sigma_1| < c_2\varepsilon_1.$$

Сумма σ представляет собой интегральную сумму для функции $|J_{\bar\varphi}(\bar x)|$ по множеству Q. При $h \to 0$ эта сумма сходится к интегралу

$$J = \int\limits_Q\!\!\int |J_{\bar\varphi}(\bar x)|d\mu.$$

Поскольку $\frac{\Delta(h)}{h^2}$ стремится к нулю при $h \to 0$, то из полученных выше оценок при $h \to 0$ находим

$$\mu(R) \le J + |\mu(R) - J| \le J + \varepsilon_1(4c^2 + c_2).$$

В силу произвольности выбора числа ε_1 отсюда получим, что $\mu(R) \le J$.

Теорема 1 доказана полностью.

Т е о р е м а 2. *Пусть Q — измеримый по Жордану компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$ и R образ его при гладком взаимно однозначном отображении $\bar\varphi$. Тогда*

1) множество R измеримо по Жордану,

2) $\mu(R) \le \int\limits_Q \cdots \int |J| d\mu$, где $J = J_{\bar\varphi}$ — якобиан отображения $\bar\varphi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в условии теоремы 1 можно отказаться от требования выпуклости множества Q. Для этого, как и в теореме 1, рассмотрим разбиение Q на обычные и особые множества $Q_{k,l}$, полагая при этом, что мера $\mu(D)$ объединения D всех стандартных квадратов, содержащих особые множества $Q_{k,l}$, не превышает ε_1, где $\varepsilon_1 > 0$ — любое наперед заданное число. При доказательстве теоремы 1 показано, что мера $\mu(W)$ образа W множества D при отображении $\bar{\varphi}$ не превосходит $4c^2\varepsilon_1$. Далее, каждое обычное множество $Q_{k,l} = P_{k,l}$ является стандартным квадратом, и тем самым удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому для каждого из них справедливо неравенство

$$\mu(R_{k,l}) \le \int \cdots \int\limits_{P_{k,l}} |J|\, d\mu.$$

Здесь, как и раньше, $R_{k,l} = \bar{\varphi}(Q_{k,l}) = \bar{\varphi}(P_{k,l})$.

Суммируя по всем парам (k,l), мы приходим к неравенству

$$\mu(R) = \sum_{(k,l)} \mu(R_{k,l}) \le 4c^2\varepsilon_1 + \int \cdots \int\limits_{Q} |J|\, d\mu.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon_1 > 0$ оно влечет за собой справедливость неравенства

$$\mu(R) \le \int \cdots \int\limits_{Q} |J|\, d\mu.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть условия теоремы 2 выполнены и, кроме того, при всех $\bar{x} \in Q$ имеет место неравенство $|J_{\bar{\varphi}}| \ge \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда справедлива формула*

$$\mu(R) = \int \cdots \int\limits_{Q} |J| d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\bar{\psi}$, определенное на множестве R и обратное к отображению $\bar{\varphi}$. Тогда $\bar{\psi}$ является гладким отображением, его якобиан $J_{\bar{\psi}}$ непрерывен и

$$|J_{\bar{\psi}}| = |J_{\bar{\varphi}}^{-1}| \le \delta^{-1}.$$

По теореме 2 имеет место оценка

$$\mu(R) \le \int \cdots \int\limits_{Q} |J_{\bar{\varphi}}|\, d\mu = \sup_T s(T),$$

где $s(T)$ — нижняя сумма Дарбу по неразмеченному разбиению T множества Q.

Имеем $s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \mu_k$, где Q_k — элемент разбиения T множества Q на области $Q_1, \ldots, Q_n$, измеримые по Жордану, $m_k = \inf\limits_{Q_k} |J_{\bar{\varphi}}|$, $\mu_k = \mu(Q_k)$ и $Q_k = \bar{\psi}(R_k)$. По теореме 2 при всех k от 1 до n справедлива оценка

$$\mu(Q_k) \leq \int \cdots \int\limits_{R_k} |J_{\bar{\psi}}| \, d\mu.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получим

$$\int \cdots \int\limits_{R_k} |J_{\bar{\psi}}| \, d\mu \leq M_k \mu(R_k),$$

где $M_k = \sup\limits_{R_k} |J_{\bar{\psi}}|$. Теперь заметим, что $J_{\bar{\psi}} = J_{\bar{\varphi}}^{-1}$, поэтому $m_k = M_k^{-1}$. Но тогда приходим к неравенству

$$s(T) \leq \sum_{k=1}^{n} m_k M_k \mu(R_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(R_k) = \mu(R).$$

Тем самым получены неравенства

$$\mu(R) \leq \int \cdots \int\limits_{Q} |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu \leq \mu(R),$$

которые равносильны равенству

$$\mu(R) = \int \cdots \int\limits_{Q} |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu.$$

Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4. *Утверждение теоремы 3 остается в силе и без ограничения на значение якобиана* $J_{\bar{\varphi}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество K точек $\bar{x} \in Q$, в которых якобиан $J(\bar{x}) = J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})$ обращается в нуль. Покажем, что множество точек K — замкнуто. Действительно, если $\bar{x}_0$ — предельная точка для K, то найдется последовательность $\bar{x}_n \in K$ такая, что $\bar{x}_n \to \bar{x}_0$ при $n \to \infty$. Тогда $J(\bar{x}_n) = 0$ и в силу непрерывности функции $J(\bar{x})$ справедливы равенства

$$J(\bar{x}_0) = J(\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n) = \lim_{n\to\infty} J(\bar{x}_n) = 0.$$

Следовательно, $\bar{x}_0 \in K$.

Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$. Каждую точку $\bar{x} \in K$ окружим окрестностью, в которой функция $J(\bar{x})$ удовлетворяет неравенству $|J(\bar{x})| < \delta$. Поскольку K — компакт, то из всей совокупности окрестностей можно выделить конечное подпокрытие. Обозначим выделенные окрестности через K_0 и разобьем множество Q на два множества Q_0 и Q_1, полагая $Q_0 = K_0 \cap Q$ и $Q_1 = Q \setminus Q_0$.

Тогда $Q = Q_0 \cup Q_1$ и $Q_0 \cap Q_1 = \varnothing$. Оба множества Q_0 и Q_1, очевидно, измеримы по Жордану. Кроме того, Q_0 — открыто, а Q — замкнуто, поэтому Q_1 — тоже замкнуто. Тогда по теореме Вейерштрасса функция $|J(\bar{x})|$ достигает на Q_1 своего минимального значения m в некоторой точке $\bar{x}_0 \in Q_1$. Число m больше нуля, так как $\bar{x}_0$ не входит в $K \subset Q_0$, поскольку Q_0 и Q_1 не пересекаются.

Следовательно, к образу R_1 множества Q_1 при отображении $\bar{\varphi}$ можно применить теорему 3, а к образам R и R_0 множеств Q и Q_0 — теорему 2. Тогда, используя еще и теорему о среднем, получим

$$\mu(R) = \mu(R_0) + \mu(R_1), \quad \mu(R_1) = \int\limits_{Q} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu,$$

$$0 \le \mu(R_0) \le \int\limits_{Q_0} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu \le \delta \mu(Q_0) \le \delta \mu(Q).$$

Следовательно,

$$0 \le \int\limits_{Q} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu - \mu(R) =$$

$$= \left(\int\limits_{Q_1} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu - \mu(R_1) \right) + \int\limits_{Q_0} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu - \mu(R_0) \le$$

$$\le \int\limits_{Q_0} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu \le \delta \mu(Q).$$

В силу произвольности выбора $\delta > 0$ это означает, что

$$\int\limits_{Q} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu = \mu(R).$$

Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (формула замены переменных в кратном интеграле). *Пусть D_0 — измеримый по Жордану компакт и $\bar{\varphi}$ — гладкое взаимно однозначное отображение компакта D_0 на D. Пусть также функция $g(\bar{y})$ интегрируема на D, а функция $f(\bar{x}) = g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|$ интегрируема на D_0. Тогда имеем*

$$\int \underset{D}{\cdots} \int g(\bar{y}) dy_1 \ldots dy_n = \int \underset{D_0}{\cdots} \int f(\bar{x}) dx_1 \ldots dx_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное разбиение T области D на измеримые области $R_1, \ldots, R_t$, и пусть $\bar{\varphi}(Q_s) = R_s, s = 1, \ldots, t$. Обозначим через $m_s = \inf\limits_{R_s} g(\bar{y})$, $M_s = \sup\limits_{R_s} g(\bar{y})$. По теореме о среднем имеем

$$m_s \int \underset{Q_s}{\cdots} \int |J| d\mu \le \int \underset{Q_s}{\cdots} \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| d\bar{x} \le M_s \int \underset{Q_s}{\cdots} \int |J| d\mu.$$

Из теоремы 4 следует, что $\mu(R_s) = \int \underset{Q_s}{\cdots} \int |J| d\mu$. Поэтому, просуммировав предыдущие неравенства по s от 1 до t, получим

$$\sum_{s=1}^{t} m_s \mu(R_s) \le \int \underset{D_0}{\cdots} \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| d\bar{x} \le \sum_{s=1}^{t} M_s \mu(R_s),$$

т.е. справедливы следующие неравенства для верхних и нижних сумм Дарбу от функции $g(\bar{y})$ по области D, отвечающих разбиению T:

$$s(T) \le \int \underset{D_0}{\cdots} \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| d\bar{x} \le S(T).$$

В силу интегрируемости функции $g(\bar{y})$ получим $s(T) \to A$, $S(T) \to A$ при $\Delta_T \to 0$, где $A = \int \underset{D}{\cdots} \int g(\bar{y}) d\bar{y}$. Следовательно, имеем

$$\int \underset{D}{\cdots} \int g(\bar{y}) d\bar{y} = \int \underset{D_0}{\cdots} \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| d\bar{x}.$$

Теорема 5 доказана.

Замечание. В теоремах 4 и 5 в качестве отображения $\bar{\varphi}$ можно взять любое ортогональное отображение. Якобиан этого отображения равен 1. Следовательно, мера Жордана и интеграл Римана инвариантны относительно движений пространства и их определение не зависит от выбора прямоугольной системы координат. Отметим, что инвариантность меры Жордана ранее была получена нами из геометрических соображений.

Примеры. 1. Переход к **полярным координатам** от прямоугольных координат производится по формулам

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Якобиан отображения $(x, y) \to (r, \varphi)$ равен r. Формула замены переменных имеет вид

$$\iint\limits_{D} g(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_0} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

2. Переход к **сферическим координатам** от декартовых прямоугольных координат выполняется по формулам

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\cos\theta, z = r\sin\theta,$$

где r — длина радиус-вектора текущей точки M от начала координат, θ — величина угла между радиус-вектором $\overline{OM}$ и его проекцией на плоскость xOy, φ — величина угла между осью Ox и $\overline{OM}$, и, кроме того, $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$.

Якобиан этого отображения равен $r^2\cos\theta$. Таким образом, получаем для дифференциального выражения элемента объема dV следующую формулу:

$$dV = dxdydz = r^2\cos\theta drd\varphi d\theta.$$

Лекция 7

§ 13. КРИТЕРИЙ ЛЕБЕГА

Начнем с определения множества нулевой меры Лебега. Открытый параллелепипед назовем **стандартным,** если его ребра параллельны осям прямоугольной системы координат. Объединение не более чем счетного числа стандартных параллелепипедов назовем **простейшей фигурой.**

Определение 1. *Множество A точек в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное или счетное множество открытых стандартных параллелепипедов Π_k, $k = 1, \ldots$, с объемом $\mu(\Pi_k) = \delta_k$, покрывающих $A, A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, и таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k < \epsilon$.*

Л е м м а 1. *Конечное или счетное объединение множеств лебеговой меры нуль является множеством лебеговой меры нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам дано, что $\mu(A_k) = 0, k = 1, \ldots$. Докажем, что $\mu(A) = \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. Действительно, по определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует простейшая фигура Π_k такая, что $A_k \subset \Pi_k$ и $\mu(\Pi_k) < \varepsilon/2^k$.

Кроме того, имеем $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ и $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\Pi_k) < \epsilon$. Следовательно, множество A имеет лебегову меру нуль.

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть $B \subset A, \mu(A) = 0$. Тогда $\mu(B) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку любая простейшая фигура, покрывающая множество A, покрывает и множество B, утверждение леммы сразу следует из определения множества лебеговой меры нуль.

Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Компакт $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, лебеговой меры нуль измерим по Жордану и его мера Жордана равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как лебегова мера компакта A равна нулю, то для любого $\varepsilon > 0$ существует простейшая фигура, состоящая не более чем счетного множества открытых стандартных параллелепипедов, покрывающая A, и имеющая объем, меньший ε.

Из этого покрытия можно выделить в силу компактности конечное подпокрытие с объемом меньшим ε. Следовательно, множество A измеримо по Жордану и его мера Жордана равна нулю.

Лемма 3 доказана.

Далее, пусть функция $g(x, y)$ ограничена на прямоугольнике P. Обозначим через $\Pi = \Pi(\delta) = \Pi(\bar{x}_0, \delta)$ куб, состоящий из точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с условием $x_{0,s} - \delta < x_s < x_{0,s} + \delta, s = 1, \ldots, n$, где $\bar{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$.

Определение 2. Колебанием функции $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$ *назовем величину*

$$\omega(\bar{x}_0) = \omega_g(\bar{x}_0) = \inf_{\Pi} \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in \Pi} (g(\bar{x}) - g(\bar{y})).$$

Другими словами, имеем

$$\omega(\bar{x}_0) = \inf_{\Pi}(M_\delta(\bar{x}_0) - m_\delta(\bar{x}_0)),$$

где

$$M_\delta(\bar{x}_0) = \sup_{\bar{x} \in \Pi} g(\bar{x}), m_\delta(\bar{x}_0) = \inf_{\bar{x} \in \Pi} g(\bar{x}).$$

Имеет место следующий критерий непрерывности функции в точке в терминах колебания функции в точке.

Л е м м а 4. *Функция $g(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$ тогда и только тогда, когда $\omega_g(\bar{x}_0) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть функция $g(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$. Предположим, что $\omega_g(\bar{x}_0) = \alpha > 0$. Рассмотрим куб $\Pi_{1/n}$. Тогда из определения величины $\omega_g(\bar{x}_0)$ имеем $M_{1/n}(\bar{x}_0) - m_{1/n}(\bar{x}_0) \geq \alpha$. Отсюда получим, что существуют точки $\bar{x}_n$ и $\bar{y}_n$ такие, что $g(\bar{x}_n) - g(\bar{y}_n) > \frac{\alpha}{2} > 0$.

Кроме того, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{y}_n = \bar{x}_0$. Но тогда, переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя непрерывность функции $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$, получим $0 \geq \alpha/2 > 0$. Это противоречивое неравенство показывает, что сделанное предположение неверно. Следовательно, $\omega_g(\bar{x}_0) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Поскольку $\omega_g(\bar{x}_0) = 0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \Pi(\delta)$ имеем $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| < \varepsilon$. Положим $\bar{y} = \bar{x}_0$. Тогда последнее условие будет условием непрерывности функции $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$. Лемма 4 доказана.

Обозначим через $D(\alpha)$ множество точек $\bar{x} \in P$, удовлетворяющих условию $\omega_g(\bar{x}) \geq \alpha > 0$.

Л е м м а 5. *Множество $D(\alpha)$ замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{x}_0$ — предельная точка множества $D(\alpha)$. Докажем, что она принадлежит $D(\alpha)$. Поскольку $\bar{x}_0$ предельная точка $D(\alpha)$, существует последовательность $\bar{x}_n \in D(\alpha)$, сходящаяся к $\bar{x}_0$.

Для любого $\delta > 0$ найдется $\bar{x}_n \in \Pi_\delta(\bar{x}_0)$. В силу того, что $\Pi_\delta(\bar{x}_0)$ открытое множество, существует $\delta_1 > 0$ такое, что $\Pi_{\delta_1}(\bar{x}_n) \subset \Pi_\delta(\bar{x}_0)$. Отсюда имеем

$$M_\delta(\bar{x}_0) - m_\delta(\bar{x}_0) \geq M_{\delta_1}(\bar{x}_n) - m_{\delta_1}(\bar{x}_n) \geq \omega_g(\bar{x}_n) \geq \alpha.$$

Следовательно, $\omega_g(\bar{x}_0) = \inf\limits_{\Pi}(M_\delta(\bar{x}_0) - m_\delta(\bar{x}_0)) \geq \alpha$, то есть точка $\bar{x}_0 \in D(\alpha)$.

Лемма 5 доказана.

Т е о р е м а 1. *Ограниченная на прямоугольнике функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$ множество $D(\alpha)$ имеет лебегову меру нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим, что существует $\alpha > 0$ такое, что множество $D(\alpha)$ не является множеством лебеговой меры нуль, т.е. найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой простейшей фигуры,содержащей $D(\alpha)$, ее объем не меньше ε_0.

Рассмотрим любое разбиение T прямоугольника P на прямоугольники $P_{k,l}$. Пусть Π_0 — множество всех тех прямоугольников $P_{k,l}$, внутри которых находится хотя бы одна точка множества $D(\alpha)$. Площадь простейшей фигуры Π_0 не меньше ε_0. Если бы это было не так, т.е. площадь $\mu(\Pi_0) = \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Покроем границу $\partial\Pi_0$ стандартными прямоугольниками общей площадью, не превосходящей $\frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$. Тем самым множество $D(\alpha)$ покрыто открытой простейшей фигурой площади, не превосходящей $\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) < \varepsilon_0$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $\mu(\Pi_0) \geq \varepsilon_0$.

Заметим, для любого стандартного прямоугольника из Π_0 колебание функции на этом прямоугольнике не меньше, чем α. Поэтому для любого разбиения T имеем $\Omega(T) \geq \alpha\epsilon_0 > 0$. Отсюда получим, что $\inf\limits_{T}\Omega(T) \geq \alpha\varepsilon_0 > 0$. Но это означает, что рассматриваемая функция не интегрируема на прямоугольнике, что противоречит условию теоремы. Следовательно, наше предположение не имеет места, и, значит, для любого $\alpha > 0$ лебегова мера $\mu(D(\alpha)) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Положим $\alpha = \varepsilon/(4\mu(P))$, $\delta = \varepsilon/(4M)$, $M = \max\limits_{\bar{x}\in P}|g(\bar{x})|$. Так как множество $D(\alpha)$ имеет лебегову меру нуль, то его можно покрыть простейшей фигурой с общей площадью, меньшей, чем δ. Множество $D(\alpha)$ — замкнуто и ограничено, следовательно, оно — компакт. Выделим из системы стандартных прямоугольников, из которых состоит эта простейшая фигура, конечное подпокрытие I. Рассмотрим множество $K = P \setminus I$. Оно является компактом. Для любой точки $\bar{x} \in K$ имеем, что $\omega_g(\bar{x}) < \alpha$. Из определения $\omega_g(\bar{x})$ получим, что существует квадрат $\Pi_\gamma(\bar{x}), \gamma > 0$ такой, что колебание функции $g(\bar{x})$ на нем меньше, чем 2α. Квадраты $\Pi_{\gamma/2}(\bar{x})$ образуют покрытие множества K. Выделим из него конечное подпокрытие V. Продолжим стороны прямоугольников, составляющих I и V до пересечения со сторонами P. Получим разбиение T прямоугольника P.

Сумму $\Omega(T)$ представим в виде

$$\Omega(T) = \sum_{(k,l)}\sum{}' \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{(k,l)}\sum{}'' \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где в сумму $\sum\limits_{(k,l)}\sum{}'$ входят те слагаемые, для которых элемент разбиения $P_{k,l} \subset I$, а в сумму $\sum\limits_{(k,l)}\sum{}''$ — те слагаемые, для которых $P_{k,l} \subset V$. Имеем

$$\Sigma_1 \le 2M \sum_{(k,l)}\sum{}' \Delta x_k \Delta y_l < 2M\delta,$$

$$\Sigma_2 \le 2\alpha \sum_{(k,l)}\sum{}'' \le 2\alpha\mu(P).$$

Следовательно,

$$\Omega(T) = \Sigma_1 + \Sigma_2 < 2M\delta + 2\alpha\mu(P) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, имеем $\inf\limits_{T} \Omega(T) = 0$, т.е. функция $g(\bar{x})$ интегрируема на прямоугольнике P.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (критерий Лебега). *Ограниченная функция $g(\bar{x})$ интегрируема по Риману на прямоугольнике P тогда и только тогда, когда множество D точек разрыва ее имеет лебегову меру нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. По теореме 1 для любого натурального числа n множества $D(1/n)$ имеют лебегову меру нуль. Отсюда получим, что лебегова мера $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(1/n)$ равна нулю.

Достаточность. Для любого $\alpha > 0$ имеем $D(\alpha) \subset D$. Поэтому, если мера $\mu(D) = 0$, то $\mu(D(\alpha)) = 0$. Из теоремы 1 следует интегрируемость функции $g(\bar{x})$ на прямоугольнике P.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть функция $g(\bar{x})$ интегрируема на прямоугольнике, $m = \inf\limits_{P} g(\bar{x}), M = \sup\limits_{P} g(\bar{x})$ и пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[m, M]$. Тогда $f(g(\bar{x}))$ интегрируема на прямоугольнике P.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка непрерывности функции $g(\bar{x})$ будет точкой непрерывности функции $f(g(\bar{x}))$. Следовательно, точками разрыва $f \circ g$ могут быть только точки разрыва функции g. И поэтому множество точек разрыва $f \circ g$ имеет лебегову меру нуль, как подмножество множества меры нуль (по критерию Лебега мера множества точек разрыва $g(\bar{x})$ равна нулю).

Теорема 3 доказана.

Лекция 8

§ 14. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Для обычных однократных интегралов мы определили два вида несобственных интегралов. Аналогично в случае кратных интегралов назовем:

1) **несобственным кратным интегралом первого рода** — интеграл по неограниченной области D от ограниченной функции $g(\bar{x})$;

2) **несобственным кратным интегралом второго рода** — интеграл по ограниченной измеримой по Жордану области D от функции $g(\bar{x})$, имеющей конечное число особых точек $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ таких, что в любой окрестности каждой из этих точек функция $g(\bar{x})$ не ограничена (точки $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ не обязаны принадлежать области D).

Пример. Функция $g(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ в области $D = \{(x, y)|x > 0, y > 0\}$ имеет особую точку $x = 0, y = 0$.

Для несобственных интегралов используется то же самое обозначение, что и для собственных интегралов:

$$I = \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

Будем для простоты рассматривать только двойные интегралы и сначала случай несобственных интегралов второго рода с одной особой точкой $\bar{a}$. Проще всего этот интеграл как предел при $r \to 0$ интегралов $I_r = \iint\limits_{D_r} g(x, y)dxdy$, где $D_r = D \setminus O(\bar{a}, r)$, $O(\bar{a}, r)$ — шар радиуса r с центром в точке $\bar{a}$, т.е. по определению имеем

$$I = \iint\limits_D g(x, y)dxdy = \lim_{r\to 0} I_r.$$

Это значение I будем называть **главным значением в смысле Коши** несобственного интеграла от функции $g(x, y)$ по области D.

Аналогично для несобственного интеграла первого рода **главным значением в смысле Коши** назовем величину $I = \lim\limits_{R\to\infty} I_R$, где

$$I_R = \iint\limits_{D_R} g(x, y)dxdy, \ D_R = D \cap O(\bar{0}, R).$$

Перейдем к общему определению несобственного интеграла.

Определение 1. 1) *Число I называется* **несобственным двойным интегралом первого рода** *от функции $g(x, y)$ по неограниченной области D, если для любой последовательности областей D_n, являющихся ограниченными, открытыми, связными, измеримыми по Жордану, и удовлетворяющих следующим условиям:*

а) для любого натурального числа n имеем $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ (условие монотонности);

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$ (условие исчерпывания),/newline имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$, где *$I_n = \iint\limits_{D_n} g(x, y) d\mu$.*

2) Число I называется **несобственным двойным интегралом второго рода** *от неограниченной функции $g(x, y)$ по ограниченной измеримой по Жордану области D со множеством особых точек $L \subset \bar{D}$ ($\bar{D}$ – замыкание D), если для любой последовательности областей D_n, являющихся открытыми, связными, измеримыми по Жордану, и удовлетворяющих следующим условиям:*

а) для любого натурального числа n имеем $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ (условие монотонности);

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$ (условие исчерпывания);

в) $\bar{L} \cap \bar{D}_n = \varnothing$, имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$, где

$$I_n = \iint\limits_{D_n} g(x, y) d\mu.$$

Последовательность $\{D_n\}$ в определении несобственных интегралов первого и второго рода будем называть **допустимыми** (или D - **допустимыми**).

Замечания. 1. Ясно, что для существования несобственного интеграла второго рода необходимо, чтобы $\mu(L) = 0$.

2. В обоих случаях несобственного интеграла первого и второго рода мы сохраняем стандартное обозначение $I = \iint\limits_{D} g(x, y) d\mu$.

3. Точно такое же определение несобственного кратного интеграла имеет место и в случае кратности, большей двух.

Теорема 1. *Пусть $g(x, y) \geq 0$. Тогда для сходимости несобственного интеграла $I = \iint\limits_{D} g(x, y) d\mu$ необходимо и достаточно, чтобы числовое множество $\{I_n = \iint\limits_{D_n} g(x, y) d\mu\}$ было ограничено хотя бы для одной последовательности D-допустимых множеств D_n.*

Доказательство. Необходимость. Если интеграл I существует, то последовательность интегралов I_n сходится к I.

Следовательно, последовательность $\{I_n\}$ ограничена. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\{I_n\}$ ограничена. Тогда по теореме Вейерштрасса существует предел $I_0 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, где $I_0 = \sup I_n$.

Пусть $\{D_n^{'}\}$ — другая D-допустимая последовательность и $I_n^{'} = \iint\limits_{D_n^{'}} g(x,y)dxdy$ — соответствующая ей последовательность интегралов. Зафиксируем теперь некоторое множество $D_m^{'}$ и рассмотрим последовательность $D_n^{''} = D_m^{'} \cap D_n$.

Очевидно, последовательность $\{D_n^{''}\}$ является $D_m^{'}$ - допустимой. В частности, для любого n имеем $D_n^{''} \subset D_{n+1}^{''}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n^{''} = D_m^{'}$, и все множества $D_n^{''}$ являются открытыми, связными и измеримыми по Жордану.

Для дальнейшего будет необходима следующая лемма 1, имеющая и самостоятельный интерес.

Лемма 1 (лемма об исчерпывании). *Справедливы соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(D_n^{''}) = \mu(D_m^{'}), \quad \lim_{n\to\infty} \mu(D_m^{'} \setminus D_n^{''}) = 0.$$

Доказательство. Последовательность $\mu_n = \mu(D_n^{''})$ неубывающая и ограничена сверху числом $\mu(D_m^{'})$. Следовательно, существует число $\mu_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$, причем $\mu_0 \le \mu(D_m^{'})$.

Надо доказать, что $\mu_0 = \mu(D_m^{'})$. Рассмотрим замыкание $\bar{D}_m^{'}$ множества $D_m^{'}$, то есть множество $\bar{D}_m^{'} = D_m^{'} \cup \partial D_m^{'}$. Так как множество $D_m^{'}$ измеримо, то $\mu(\partial D_m^{'}) = 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое простейшее множество $W = W_\varepsilon \in \Pi$ такое, что $\mu(W) < \varepsilon, \partial D \subset W$.

Множество $\bar{D}_m^{'}$ — компакт, а множества $\{D_n^{''}\}, n = 1, 2, \ldots,$ и W образуют его покрытие открытыми множествами. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие множества $\bar{D}_m^{'}$: $D_{n_1}^{''} \subset \cdots \subset D_{n_k}^{''}$ и W. Отсюда имеем $D_{n_k}^{''} \cup W \supset \bar{D}_m^{'}$. Следовательно,

$$\mu(D_{n_k}^{''}) + \mu(W) \ge \mu(D_m^{'}), \quad \mu_{n_k} + \epsilon \ge \mu(D_m^{'}),$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mu_0 + \varepsilon \ge \mu_{n_k} + \varepsilon \ge \mu(D_m^{'}).$$

Поэтому имеем $\mu_0 \ge \mu(D_m^{'})$. Но мы уже показали, что $\mu_0 \le \mu(D_m^{'})$. Таким образом, получаем, что $\mu_0 = \mu(D_m^{'})$.

Далее, в силу того что $(D'_m \setminus D''_n) \cup D''_n = D'_m$ и $(D'_m \setminus D''_n) \cap D''_n = \varnothing$, из свойства аддитивности меры имеем

$$\mu(D'_m \setminus D''_n) + \mu(D''_n) = \mu(D'_m).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(D'_m \setminus D''_n) = 0$. Лемма 1 доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть также $g(x,y)$ интегрируема на D'_m. Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D''_n} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'_m} g(x,y)dxdy = I'_m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$I'_m - \iint\limits_{D''_n} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'_m \setminus D''_n} g(x,y)dxdy.$$

Поскольку функция $g(x,y)$ ограничена на D'_m, т.е. существует число $c > 0$ такое, что для любой точки $(x,y) \in D'_m$ имеем $|g(x,y)| \le c$, при $n \to \infty$ получим

$$|I'_m - \iint\limits_{D''_n} g(x,y)dxdy| \le c\mu(D'_m \setminus D''_n) \to 0.$$

Следствие доказано.

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Так как $D''_n \subset D_n$, то справедливо неравенство

$$\iint\limits_{D''_n} g(x,y)d\mu \le I_n \le I_0.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Используя следствие, получим

$$I'_m = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D''_n} g(x,y)d\mu \le I_0.$$

Отсюда имеем, что существует $I' = \lim\limits_{m\to\infty} I'_m$, причем $I' \le I_0$. Но если теперь в наших рассуждениях последовательности D_n и D'_n поменять местами, то получим противоположное неравенство $I_0 \le I'$. Следовательно, $I' = I_0$.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $g(x,y)$ и $g_0(x,y)$ интегрируемы на любом измеримом по Жордану компакте, содержащемся в множестве D, и пусть на этом множестве D справедливы неравенства $0 \le g_0(x,y) \le g(x,y)$. Тогда имеем:*

1) если несобственный интеграл $\iint\limits_D g(x,y)d\mu = I$ сходится, то сходится интеграл $\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu = I_0$;

2) если же несобственный интеграл $\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu$ расходится, то будет расходиться и интеграл $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как интеграл I сходится, то существует D-допустимая последовательность $\{D_n\}$, такая, что при $n \to \infty$ имеем

$$I_n = \iint\limits_{D_n} g(x,y)d\mu \to I.$$

Но тогда справедливы неравенства

$$I_n' = \iint\limits_{D_n} g_0(x,y)d\mu \le I_n \le I$$

и, кроме того, последовательность I_n' является неубывающей. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} I_n' = I_0 \le I$. По теореме 1 имеем, что существует несобственный интеграл $I_0 = \iint\limits_D g_0(x,y)d\mu$

2) В силу расходимости интеграла $\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu$ для любой D - допустимой последовательности D_n при $n \to \infty$ имеем

$$I_n' = \iint\limits_{D_n} g_0(x,y)d\mu \to +\infty.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ получим $I_n \to +\infty$, поскольку $I_n \ge I_n'$.

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е теоремы 2. *Пусть несобственный интеграл*

$$\iint\limits_D |g(x,y)|d\mu$$

сходится. Тогда сходится интеграл

$$\iint\limits_D g(x,y)d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$g_+ = \frac{|g|+g}{2}, \quad g_- = \frac{|g|-g}{2}.$$

Поскольку $0 \le g_- \le |g|$ и $0 \le g_+ \le |g|$, по теореме 2 сходятся интегралы $\iint\limits_D g_- d\mu$, $\iint\limits_D g_+ d\mu$ Но тогда сходится интеграл от функции $g = g_+ - g_-$. Следствие теоремы 2 доказано.

Определение 2. *Если сходится интеграл* $\iint\limits_D |g(x,y)| d\mu$, *то говорят, что интеграл* $\iint\limits_D g(x,y) d\mu$ **сходится абсолютно.**

Последнее следствие можно сформулировать так: если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Заметим, что утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и для несобственных интегралов второго рода. Оказывается, что в случае несобственных кратных интегралов обычная сходимость влечет за собой и абсолютную сходимость. В случае однократных интегралов это не так.

Приведем только формулировки двух теорем, полезных для приложений.

Теорема 3. *Если интеграл* $\iint\limits_D g(x,y) d\mu$ *сходится и существует повторный интеграл от функции* $g(x,y)$ *по области* D, *то двойной интеграл равен повторному.*

Теорема 4. *Если интеграл* $\iint\limits_D g(\bar{y}) d\mu$ *сходится и* $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ — *гладкое отображение области* D_0 *в* D, *взаимно однозначное для внутренних точек* D_0, *то справедлива следующая формула замены переменных:*

$$\iint\limits_D g(\bar{y}) d\mu = \iint\limits_{D_0} g(\bar{\varphi}(\bar{x})) |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| d\bar{x}.$$

Примеры. 1. Интеграл

$$\int \cdots \int\limits_{\|\bar{x}\|>1} \frac{d\bar{x}}{\|\bar{x}\|^\alpha}$$

где $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, сходится при $\alpha > n$ и расходится при $\alpha \le n$.

Рассмотрим множество S_A точек $\bar{x}$, удовлетворяющих неравенствам $A < \|\bar{x}\| \le 2A$. Положим $A = A_k = 2^k, k = 0, 1, 2, \ldots$. Получим

$$\int \cdots \int\limits_{\|\bar{x}\|>1} \frac{d\bar{x}}{\|\bar{x}\|^\alpha} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha}} \mu(S_{2^k}) \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2n} \cdot 2^{-k\alpha + kn}.$$

Последний ряд сходится при $-\alpha+n<0$, т.е. при $\alpha>n$. Пусть K_A — множество точек $\bar{x}$ вида $||\bar{x}||\leq A$. Тогда имеем

$$\mu(S_A)=\mu(K_{2A})-\mu(K_A)=A^n(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

Отсюда

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{||\bar{x}||^\alpha}\geq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}2^{kn}(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

Последний ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $2^{n-\alpha}$. Следовательно, по признаку сравнения интеграл расходится при $\alpha\leq n$.

2. Интеграл

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{|x|^{\alpha_1}+\cdots+|x|^{\alpha_n}},$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leq 0$, сходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}<1$ и расходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\geq 1$.

Пусть S_A — множество точек, для которых справедливо неравенство

$$A<|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}\leq 2A.$$

Тогда для любой точки $\bar{x}\in S_A$ имеем $|x_s|\leq(2A)^{1/\alpha_s}, s=1,\ldots,n$. Следовательно,

$$\mu(S_A)\leq\frac{1}{2^k}2^n\cdot 2^{\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}\cdot 2^{k(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n})}.$$

Отсюда получим, что интеграл сходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}-1<0$.

Пусть K_A множество точек $\bar{x}$ с условием $|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}\leq A$ и $S_A=K_{2A}\setminus K_A$. Очевидно, имеем

$$\mu(S_A)=\mu(K_{2A})-\mu(K_A)=A^{\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}(\mu(K_2)-\mu(k_1)).$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{|x|^{\alpha_1}+\cdots+|x|^{\alpha_n}}\geq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\mu(S_{2^k})\geq$$

$$\geq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot 2^{k(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n})}(\mu(K_2)-\mu(K_1))$$

расходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}-1\geq 0$.

На этом мы завершаем рассмотрение теории несобственных кратных интегралов.

§ 15. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Наша задача состоит в том, чтобы распространить понятие измеримости на множества, расположенные на двумерных поверхностях в пространствах размерности три и выше. Для этого нам необходимо ответить на следующие вопросы. Что такое поверхность? И какие поверхности мы будем рассматривать?

Раньше (во втором семестре) мы называли **поверхностью** Q множество точек (x,y,z), удовлетворяющих уравнению $z = g(x,y)$ для некоторой функции $g(x,y)$ от двух переменных x и y, причем точка (x,y) принадлежит некоторому множеству на плоскости xOy. Обычно от функции $g(x,y)$ требуют непрерывности всюду, за исключением, быть может, множества L нулевой меры Жордана. Проекцией поверхности Q на плоскость xOy является область D. Предположим, что область D — измеримый по Жордану компакт. Пусть измеримые множества $D_1,\dots,D_t$ образуют его разбиение τ. Возьмем точки $M_1,\dots,M_t$ на границе соответственно каждой из областей $D_1,\dots,D_t$. Этим точкам при проекции на плоскость соответствуют точки $N_1,\dots,N_t$ на поверхности Q. Пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_t$ — углы между нормалью к поверхности Q в точке $N_s, s=1,\dots,t$, и осью Oz. Рассмотрим части касательных плоскостей $Q_s, s=1,\dots,t$, проходящих через точки N_s и имеющих своей проекцией на плоскость xOy область D_s. Получим "чешуйчатую" поверхность. Из линейной алгебры известно, что ее площадь $\mu(Q_s)$ равна

$$\mu(Q_s) = \frac{\mu(D_s)}{|\cos\gamma_s|}, s = 1,\dots,t.$$

Назовем **площадью поверхности** Q величину

$$\mu(Q) = \lim_{\Delta_\tau\to 0}\sum_{s=1}^{t}\frac{\mu(D_s)}{|\cos\gamma_s|} = \iint\limits_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Поскольку уравнение поверхности имеет вид $z = g(x,y)$, то нормаль ее в точке N поверхности Q можно представить в виде

$$\bar n = \bar n(N) = \frac{(-g'_x, -g'_y, 1)}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}.$$

Следовательно, имеем

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}.$$

Отсюда получим

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}\,dxdy.$$

Итак, из не вполне строгих геометрических соображений мы получили формулу площади поверхности в трехмерном пространстве.

Далее мы дадим некоторое уточнение и обобщение этого понятия.

Определение 1. Поверхностью Q **в** n **- мерном пространстве** $\mathbb{R}^n$ *называется множество точек* $\{\bar{r}\}, \bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$, *таких, что* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$, *где* $\bar{x} = (x_1, x_2) \in D$, *причем область* D *является ограниченной и измеримой по Жордану, отображение* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *есть взаимно однозначное отображение внутренних точек множества* D *на точки множества* Q *и* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *непрерывно всюду, за исключением множества* L, *имеющего нулевую меру Жордана.*

Напомним, что отображение $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x}) = (r_1, \dots, r_n)$ непрерывно в точке $\bar{x}$, если непрерывны функции $r_k = r_k(\bar{x}), k = 1, \dots, n$.

Назовем отображение $\bar{r}(\bar{x}) = (r_1(\bar{x}), \dots, r_n(\bar{x}))$ **гладким**, если для любой точки $\bar{x} \in D$ функции $r_k(\bar{x}), k = 1, \dots, n$, имеют непрерывные частные производные (на границе ∂D рассматриваются односторонние производные).

Замечание. Поверхность Q можно задать различными способами. Указанное выше задание поверхности Q называется **параметрическим** (или **параметризацией** множества Q). Выбор параметризации также может быть разным. При любых фиксированных значениях c_1 и c_2 кривые на Q вида $\bar{r} = \bar{r}(x_1, c_2)$ и $\bar{r} = \bar{r}(c_1, x_2)$ называются **криволинейными координатами на поверхности** Q. Каждой точке $\bar{r} \in Q$ соответствует пара (c_1, c_2) криволинейных координат.

Определение 2. *Поверхность* Q *называется* **гладкой**, *если задающее ее отображение* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *является гладким. Гладкая поверхность называется* **невырожденной**, *если ранг матрицы Якоби отображения* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *максимален, а именно: он равен двум.*

Мы стремимся определить меру, то есть понятие площади множеств на *невырожденных поверхностях.* Для этого сначала уясним какими свойствами должна обладать площадь или мера множества. Кроме обычных свойств меры (монотонность, аддитивность, инвариантность относительно ортогональных преобразований пространства, независимость от параметризации) необходимо, чтобы в случае

$r_3 \equiv 0, \ldots, r_n \equiv 0$, то есть "плоского" отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$, мы имели формулу

$$\mu(Q) = \iint\limits_D |J_{\bar{r}}(\bar{x})| dx_1 dx_2,$$

где $J_{\bar{r}}(\bar{x})$ якобиан отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$,

$$J_{\bar{r}}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Для простоты рассуждений предположим, что плоское множество D есть замкнутый квадрат. Тогда в этом случае мера $\mu(Q)$ образа D есть предел при $\Delta_T \to 0$ интегральных сумм $\sigma(T)$ для разбиения T квадрата D на равные квадраты $D_{k,l}, k, l = 1, \ldots, n$, со стороной h $(\mu(D_{k,l}) = h^2)$,

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |J_{\bar{r}}(\bar{x}_{k,l})| \mu(D_{k,l}),$$

где $\bar{x}_{k,l}$ левая нижняя вершина квадрата $D_{k,l}$.

При выводе формулы площади фигуры Q мы видели, что число $|J_{\bar{r}}(\bar{x}_{k,l})| \mu(D_{k,l})$ равно площади параллелограмма, в который переходит квадрат $D_{k,l}$ при замене отображения $\Delta\bar{r} = \bar{r}(\bar{x}) - \bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ на линейное отображение $\bar{\rho}$ вида

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{x}) = A(\bar{x}_{k,l})(\bar{x} - \bar{x}_{k,l}) = d\bar{r}(\bar{x}_{k,l}),$$

где $A(\bar{x}_{k,l})$ — матрица Якоби отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{x}_{k,l}$.

Итак, при вычислении $\mu(Q)$ мы берем разбиение D на квадраты $D_{k,l}$, а затем для каждого квадрата $D_{k,l}$ заменяем отображение $\Delta\bar{r}$ на линейное отображение $d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$. При такой замене мы можем сказать чему равна площадь образа. Сумма же полученных площадей по всем парам $(k, l), k, l = 1, \ldots, n$, дает нам интегральную сумму $\sigma(T)$.

Естественно ту же самую схему положить в основу определения площади поверхности Q и в общем случае, т.е. надо взять разбиение T квадрата D на равные квадраты $D_{k,l}$, $k, l = 1, \ldots, n$. Далее, заменить отображение $\Delta\bar{r}$ на линейное отображение $\bar{\rho}$,

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{k,l}(\bar{x}) = d\bar{r}(\bar{x}_{k,l}),$$

и просуммировать меры $R_{k,l} = \bar{\rho}(D_{k,l})$. Тогда мы получим

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mu(R_{k,l}).$$

Определение 3. *Если существует предел* $\sigma(T)$ *при* $\Delta_T \to 0$, *то этот предел мы и будем называть* **площадью поверхности** Q.

Осталось провести явное вычисление величины $\sigma(T)$ и найти ее предел $\mu(Q)$. Для этого заметим, что векторы $\bar{e}_1 = (h, 0)$ и $\bar{e}_2 = (0, h)$ при отображении $\bar{\rho} = d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ переходят в векторы

$$\bar{a}_1 = \bar{\rho}(\bar{e}_1) = h(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r_n}{\partial x_1})$$

$$\bar{a}_2 = \bar{\rho}(\bar{e}_2) = h(\frac{\partial r_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r_n}{\partial x_2}).$$

Теперь надо найти площадь параллелограмма, образованного векторами $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Для этого мы воспользуемся формулой из линейной алгебры, которая утверждает следующее

$$\mu^2 = \begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1), & (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \\ (\bar{a}_2, \bar{a}_1), & (\bar{a}_2, \bar{a}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2.$$

Приведем простой вывод ее. Очевидно, формула площади параллелограмма, составленного из векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, имеет вид

$$\mu = ||\bar{a}_1|| \cdot ||\bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}{||\bar{a}_1||^2}||.$$

Преобразуем эту формулу. Получим

$$||\bar{a}_1||^2\mu^2 = (\bar{a}_2||\bar{a}_1||^2 - \bar{a}_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{a}_2||\bar{a}_1||^2 - \bar{a}_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2)) =$$

$$= ||\bar{a}_1||^4||\bar{a}_2||^2 - 2||\bar{a}_1||^2(\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2 + ||\bar{a}_1||^2(\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2.$$

Следовательно,

$$\mu^2 = ||\bar{a}_1||^2||\bar{a}_2||^2 - (\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2 = EG - F^2 = \Gamma(\bar{x}).$$

Таким образом, будем иметь

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\Gamma(\bar{x}_{k,l})}\mu(D_{k,l}).$$

Функция $\sqrt{\Gamma(\bar{x})}$ непрерывна на D, поэтому существует предел

$$\lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(T) = \int\int_D \sqrt{\Gamma(\bar{x})} dx_1 dx_2 = \mu(Q).$$

Другими словами, мы имеем

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2.$$

Заметим, что последний интеграл может оказаться как собственным, так и несобственным.

Отметим, что величина площади параллелограмма, образованного сторонами $\bar{a}_1 = h\bar{r}'_{x_1}, \bar{a}_2 = h\bar{r}'_{x_2}$, как известно, равна

$$\mu(R_{k,l}) = h^2 ||[r'_{x_1}, r'_{x_2}]||.$$

Отсюда мы получим еще одну формулу для площади поверхности

$$\mu(Q) = \int\int\limits_D ||[r'_{x_1}, r'_{x_2}]|| dx_1 dx_2.$$

Примеры. 1. Площадь поверхности верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ равна 2π.

Имеем

$$\mu(Q) = \int\int\limits_{x^2+y^2 \le 1} \frac{dxdy}{\cos(\bar{n}, \bar{e}_3)},$$

где $\bar{n} = (x, y, z), z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) = z.$

Следовательно, получим

$$\mu(Q) = \int\int\limits_{x^2+y^2 \le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам. Будем иметь

$$\mu(Q) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi \int\limits_0^1 \frac{dr^2}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\pi.$$

2. Площадь двумерного тора $Q \in \mathbb{R}^3$, задаваемого уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(\varphi, \theta) = ((b + a\cos\theta)\cos\varphi, (b + a\cos\theta)\sin\varphi, a\sin\theta), b > a,$$

на области D изменения параметров,

$$D = \{(\varphi, \theta) | 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Имеем

$$\bar{r}'_\varphi = (-(b + a\cos\theta)\sin\varphi, (b + a\cos\theta)\cos\varphi, 0),$$

$$\bar{r}'_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta),$$

$$E = (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\varphi) = (b + a\cos\theta)^2, F = (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\theta) = 0, G = (\bar{r}'_\theta, \bar{r}'_\theta) = a^2,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = a|b + a\cos\theta| = a(b + a\cos\theta).$$

Отсюда получим

$$\mu(Q) = \int\int_D \sqrt{EG - F^2}d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a\cos\theta)d\theta = 4\pi^2 ab.$$

§ 16. ПЛОЩАДЬ M -МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ N ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть m, n — натуральные числа, $1 \leq m < n$.

Назовем m - **мерной поверхностью** Q в $\mathbf{R}^n$ множество точек $\{\bar{r}\}, \bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, таких, что $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in D$, причем множество D ограниченно и измеримо по Жордану, а отображение $\bar{r}$ взаимно-однозначно отображает D на Q и оно непрерывно всюду на D, за исключением множества L, имеющего нулевую меру Жордана.

Будем говорить, что гладкая поверхность Q **невырождена,** если ранг матрицы Якоби отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ максимален, то есть равен m.

Пусть для простоты множество D есть куб и пусть T — разбиение его на равные кубы $D_{\bar{k}}$ со стороной h. Пусть, также, $\bar{x}_{\bar{k}}$ — левая нижняя вершина куба $D_{\bar{k}}$.

Положим $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\bar{k}}(\bar{x}) = d\bar{r}(\bar{x}_{\bar{k}}), R_{\bar{k}} = \bar{\rho}(D_{\bar{k}})$ и определим интегральную сумму

$$\sigma(T) = \sum_{\bar{k}} \mu(R_{\bar{k}}).$$

Определение 1. Площадью поверхности Q *назовем величину*

$$\mu(Q) = \lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(T).$$

Для вычисления $\sigma(T)$ нам необходимо найти объем параллелепипеда $R_{\bar{k}}$, образованного векторами $\bar{a}_1 = h\bar{r}'_{x_1}, \ldots, \bar{a}_m = h\bar{r}'_{x_m}$.