Из линейной алгебры известно, что

$$\mu(R_{\bar{k}}) = \sqrt{\Gamma(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)} = V_m,$$

где $\Gamma_m = \Gamma(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ — определитель матрицы Грама,

$$\Gamma(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & \dots & (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\bar{a}_m, \bar{a}_1) & \dots & (\bar{a}_m, \bar{a}_m) \end{vmatrix}.$$

Дадим прямой вывод формулы для V_m. При $m = 1, 2$, очевидно, имеем

$$\sqrt{\Gamma_1} = ||\bar{a}_1|| = V_1, \quad \sqrt{\Gamma_2} = V_1 \cdot h_2 = V_2.$$

Следовательно, $h_2^2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$. Докажем, что $h_m^2 = \frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}$, где h_m — расстояние вектора $\bar{a}_m$ до $m-1$ — мерного пространства с базисом $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m-1}$.

Представим $\bar{a}_m$ в виде $\bar{a}_m = \bar{b}_m + \bar{h}_m$, где $\bar{b}_m \in \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m-1}\} = L$, $h_m \perp L$. По условию существуют некоторые вещественные числа $c_1, \dots, c_{m-1}$, такие, что

$$\bar{b}_m = c_1\bar{a}_1 + \dots + c_{m-1}\bar{a}_{m-1}.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств $\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & & (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \\ & & \dots \\ (\bar{a}_m, \bar{a}_1) & \dots & (\bar{a}_m, \bar{a}_m) \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & & (\bar{a}_1, \bar{b}_m) \\ & & \dots \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \dots & ||b_m||^2 + ||h_m||^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & \dots & (\bar{a}_1, \bar{a}_{m-1}) & (\bar{a}_1, \bar{b}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_1) & \dots & (\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}) & (\bar{a}_{m-1}, \bar{b}_m) \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \dots & (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & ||b_m||^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} +$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & & 0 \\ & & \dots \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \dots & ||h_m||^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} = ||h_m||^2,$$

так как определитель в числителе первого слагаемого равен 0 (последняя строка в нем есть линейная комбинация предыдущих).

Таким образом, объем $V_m = \mu(R_{\bar{k}})$ параллелепипеда $R_{\bar{k}}$ равен

$$V_m = V_{m-1}h_m = \sqrt{\Gamma_{m-1}} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}} = \sqrt{\Gamma_m}.$$

Заметим, что $\Gamma_m > 0$. Это следует из равенств

$$\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}} = h_m^2 > 0, \Gamma_1 = ||\bar{a}_1||^2 > 0.$$

Следовательно, имеем

$$\sigma(T) = \sum_{\bar{k}} \sqrt{\Gamma(\bar{r}'_{x_1}(\bar{x}_{\bar{k}}), \ldots, \bar{r}'_{x_1}(\bar{x}_{\bar{k}}))}\mu(D_{\bar{k}}).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta_T \to 0$. Получим

$$\mu(Q) = \int \cdots \int_D \sqrt{\Gamma(\bar{r}'_{x_1}(\bar{x}), \ldots, \bar{r}'_{x_1}(\bar{x}))} dx_1 \ldots dx_m.$$

Это и есть **формула для вычисления площади m - мерной поверхности в n - мерном пространстве.**

При $m = 1$ она дает формулу длины дуги гладкой кривой $\mu(Q) = \int_D ||\bar{r}'(t)||dt$, а при $m = n$ мы приходим к формуле замены переменных в n - кратном интеграле

$$\mu(Q) = \int \cdots \int_D \sqrt{\Gamma} dx_1 \ldots dx_m = \int \cdots \int_D |J_{\bar{r}}(\bar{x})| dx_1 \ldots dx_m,$$

где $J_{\bar{r}}(\bar{x})$ — якобиан отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$.

Замечания. 1. Пусть $A = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ — матрица из m векторов - столбцов в n — мерном пространстве и A^t — транспонированная к ней матрица. Тогда из формулы Бине-Коши имеем

$$\Gamma_m = V_m^2 = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} \begin{vmatrix} a_{i_1,1} & a_{i_1,2} & \ldots & a_{i_1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_m,1} & a_{i_m,2} & \ldots & a_{i_m,m} \end{vmatrix}^2.$$

Это равенство означает следующее. Квадрат объема параллелепипеда равен сумме квадратов объемов его проекций на все координатные m - мерные подпространства (обобщение теоремы Пифагора).

2. Справедливо неравенство Адамара

$$\Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \le \Gamma(\bar{a}_1) \ldots \Gamma(\bar{a}_m),$$

причем равенство достигается только, если векторы $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_j, i \ne j$, ортогональны для всех $1 \le i, j \le m$.

3. В силу своего определения величина площади m-мерной поверхности не зависит от выбора параметризации.

Глава XX
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 10

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейные интегралы — это интегралы по кривой L в n-мерном пространстве. Мы рассмотрим два вида таких интегралов: интегралы первого и второго рода.

Сделаем некоторые допущения. Пространство, в котором задана кривая L, будем для простоты считать двумерным. Саму кривую L будем считать кусочно-гладкой, т.е. ее можно разбить на конечное число гладких кусков (участков). Будем рассматривать только один такой кусок.

Как известно, кривая L является образом некоторого отрезка $[a,b]$ при отображении $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in [a,b]$, где $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, причем $x(t)$ и $y(t)$ — гладкие функции на отрезке $[a,b]$. Кроме того, внутренние точки отрезка переходят во "внутренние" точки кривой, а концы отрезка — точки a и b — переходят в граничные точки кривой A и B, т.е. $\bar{r}(a) = A, \bar{r}(b) = B$. Будем предполагать, что кривая L невырождена, т.е. не содержит особых точек. Другими словами, для любого $t \in [a,b]$ вектор $\bar{r}'(t)$ отличен от нуля.

Пусть T — размеченное разбиение отрезка $[a,b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, $\xi_1, \dots, \xi_m$ — точки разметки, $x_k = x(\xi_k), y_k = y(\xi_k)$, $k = 1, \dots, m$; Δl_k — длина части кривой L, которая является образом отрезка $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$. Для рассматриваемой кривой L длина кривой выражается по формуле

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Пусть функция $g(x,y)$ определена на кривой L.

Определение 1. *Если существует предел при $\Delta_T \to 0$ интегральных сумм*

$$\sigma_1(T) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k, y_k)\Delta l_k,$$

то он называется **интегралом первого рода** *от функции $g(x,y)$ по кривой L.*

Этот интеграл обозначается так:

$$I_1 = \int\limits_L g(x, y)dl.$$

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma_2(T)$, где

$$\sigma_2(T) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k, y_k)\Delta x_k, \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

Определение 2. *Если существует предел I_2 интегральных сумм $\sigma_2(T)$ при $\Delta_T \to 0$, то он называется* **интегралом второго рода** *от функции $g(x, y)$ в направлении от A до B.*

Обозначается этот интеграл символом

$$I_2 = \int\limits_{AB} g(x, y)dx.$$

Аналогично определяется еще один интеграл второго рода

$$I_3 = \int\limits_{AB} g(x, y)dy.$$

Для интегралов I_2 и I_3 обычно употребляют обозначения

$$I_2 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx, \quad I_3 = \int\limits_{AB} Q(x, y)dy.$$

Выражение

$$I = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

называется **общим криволинейным интегралом второго рода** по кривой $L = AB$ от линейной дифференциальной формы $Pdx + Qdy$ (здесь кривая обозначается своими начальной и конечной точками).

§ 2. СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Пусть $x = x(t)$ — постоянная величина. Тогда имеем

$$I_2 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx = 0.$$

Действительно, так как для любого разбиения T величина $\Delta x_k = 0$, то $\sigma_2(T) = 0$. Отсюда следует, что $I_2 = 0$.

2. Т е о р е м а 1 (выражение значения криволинейного интеграла через интеграл Римана). *Пусть функция* $g(x,y)$ *непрерывна на* L. *Тогда криволинейные интегралы* I_1, I_2, I_3 *существуют и они равны*

$$I_1 = \int_a^b g(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt,$$

$$I_2 = \int_a^b g(x(t),y(t))x'(t)dt, \quad I_3 = \int_a^b g(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала интеграл I_1. Интегральная сумма $\Sigma_1(T)$ для интеграла

$$\int_a^b g(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

отличается от интегральной суммы $\sigma_1(T)$ криволинейного интеграла тем, что вместо Δl_k там должна стоять величина

$$\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\Delta t_k$$

при некотором $\xi_k \in \Delta_k$, т.е. дифференциал длины дуги кривой, взятый в точке ξ_k и отвечающий приращению Δt_k переменной t. Далее можно было бы сослаться на определение интеграла Стильтьеса,

$$I_1 = \int_a^b g(x(t),y(t))dl(t),$$

где $l(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$, и тем самым завершить доказательство равенства интегралов. Но мы дадим прямое доказательство этого факта.

В силу непрерывности производной $l'(t)$ на отрезке $[a,b]$ имеем равномерную непрерывность ее на нем. Тогда для любых точек $t, \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ имеем $|l'(t) - l'(\xi_k)| \leq \omega(\Delta t_k)$, причем $\lim\limits_{z\to 0}\omega(z) = 0$.

Отсюда получим

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} l'(t)dt = l'(\xi_k)\Delta t_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k}(l'(t) - l'(\xi_k))dt =$$

$$= l'(\xi_k)\Delta t_k + O(\omega(\Delta t_k)\Delta t_k).$$

Поскольку $g(x, y)$ непрерывна на компакте L, она ограничена на нем, т.е. найдется $M > 0$ такое, что для любых $(x, y) \in L$ имеем $|g(x, y)| \leq M$.

Преобразуем интегральную сумму $\sigma_1(T)$. Получим

$$\sigma_1(T) = \sum_k g(x_k, y_k)\Delta l_k =$$

$$= \sum_k g(x_k, y_k) l'(\xi_k)\Delta t_k + O\left(\sum_k M\Delta t_k \omega(\Delta t_k)\right) =$$

$$= \Sigma_1(T) + O(R),$$

где

$$R \leq M \max_k \omega(\Delta t_k) \cdot \sum_k \Delta t_k \leq M(b-a) \max_k \omega(\Delta t_k).$$

Так как $R \to 0$ при $\Delta_T \to 0$, то это значит, что $\sigma_1(T)$ и $\Sigma_1(T)$ одновременно сходятся и имеют один и тот же предел.

Теорема 1 доказана.

Эта теорема дает универсальный метод вычисления значений криволинейных интегралов. Следующие следствия из теоремы 1 получаются простым переходом от криволинейных интегралов к интегралам Римана, поэтому мы не будем приводить их доказательств.

1^0. Справедливо следующее равенство:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2)dl,$$

где

$$\cos\alpha_1 = (\bar{\tau}, \bar{e}_1) = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \cos\alpha_2 = (\bar{\tau}, \bar{e}_2) = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

$\bar{\tau} = (x', y')$ — касательный вектор к кривой L в точке (x, y), а $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные орты, направленные по осям координат Ox и Oy.

2^0. Если для любых точек $(x, y) \in L$ справедливо неравенство $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, то имеем $\int\limits_L g_1 dl \leq \int\limits_L g_2 dl$.

3^0. Выполняется неравенство $|\int\limits_L g dl| \leq \int\limits_L |g| dl$.

4^0. Если g непрерывна на кривой L, то существует точка $\xi \in L$ такая, что $\int\limits_L g dl = g(\xi)\mu(L)$, где $\mu(L)$ — длина кривой L.

3. Значение криволинейных интегралов первого и второго рода не зависят от выбора параметризации, так как от нее не зависят интегральные суммы в их определении.

В частности, интеграл I_1 не зависит от того, какую точку A или B считать началом, а какую — концом кривой L (параметризации в этом случае можно определить, например, соотношением $t = a+b-u$).

В то же время имеет место равенство $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$, т.е. величина интеграла зависит от выбора направления обхода кривой L.

Рассмотрим две параметризации кривой $L : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in [a,b]$ и $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u), u \in [a_1, b_1]$. Пусть $t = t(u)$ — гладкое отображение отрезка $[a_1, b_1]$ на отрезок $[a,b]$. Тогда имеем $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u) = \bar{r}(t(u)), x_1 = x(t(u))$.

Отметим, что производная $t'(u)$ имеет один и тот же знак на всем отрезке $[a_1, b_1]$. В противном случае по теореме Вейерштрасса существовала бы точка $u_0 \in [a_1, b_1]$, такая что $t'(u_0) = 0$. Но тогда $\bar{r}_1'(u_0) = \bar{r}_t'(t(u_0)) \cdot t'(u_0) = 0$, и кривая L имеет особую точку, т.е. она является вырожденной, что на самом деле не так.

Поскольку при отображении $t = t(u)$ концевые точки отрезка $[a_1, b_1]$ переходят в концевые точки отрезка $[a,b]$, при $t'(u) > 0$ имеем $t(a_1) = a, t(b_1) = b$. Действительно, из теоремы Лагранжа при некотором $\xi \in [a_1, b_1]$ имеем $t(b_1) - t(a_1) = t'(\xi)(b_1 - a_1)$. Следовательно, $t(b_1) > t(a_1)$, а это и означает, что $t(a_1) = a, t(b_1) = b$.

Далее воспользуемся теоремой 1 и теоремой о замене переменной в интеграле Римана. Получим цепочку равенств

$$\int\limits_L g(\bar{r})dx = \int\limits_a^b g(\bar{r}(t))x'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} g(\bar{r}(t(u)))x'(t(u))t'(u)du = \int\limits_{a_1}^{b_1} g(\bar{r}_1(u))x_1'(u)du = \int\limits_L g(\bar{r}_1)dx_1.$$

В случае $t'(u) < 0$ имеем $t(a_1) = b, t(b_1) = a$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что при переходе в этом случае от одной параметризации к другой параметризации справедливо равенство

$$\int\limits_L g(\bar{r})dx = -\int\limits_L g(\bar{r}_1)dx_1.$$

Аналогичные свойства для криволинейных интегралов имеют место в пространствах размерности большей двух. Например, в трехмерном случае имеем

$$\int\limits_L g(x,y,z)dl = \int\limits_a^b g(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt,$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt =$$

$$= \int\limits_L (P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2 + R\cos\alpha_3)dl,$$

где $\tau = \bar{r}'/|\bar{r}'|, \cos\alpha_k = (\bar{\tau}, \bar{e}_k), k = 1, 2, 3.$

На этом мы завершаем изучение общих свойств криволинейных интегралов.

Лекция 11

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ. ФОРМУЛА ГРИНА

В силу аддитивности интеграла второго рода для любых кривых $L_1 = AB$ и $L_2 = BC$ в случае, когда кривая $L = L_1 \cup L_2$ не имеет кратных точек, получаем

$$\int\limits_{AB} g dx + \int\limits_{BC} g dx = \int\limits_{AC} g dx.$$

По этой же формуле определяется и понятие интеграла по кривой L в том случае, когда точки A и C совпадают. В этом случае объединение кривых $L = L_1 \cup L_2$ называется замкнутой кривой. Дадим точное **определение.**

Кривая L называется **замкнутой кусочно-гладкой кривой** (без кратных точек), если:

1) $L = L_1 \cup L_2$;

2) L_1 и L_2 — кусочно-гладкие кривые, концы которых совпадают;

3) других общих точек кривые L_1 и L_2 не имеют.

Если на кривой L_1 задано направление обхода, т.е. задана начальная точка A и концевая точка B, и если на кривой L_2 за начальную точку принять B, а за концевую точку A, то на кривой L будет задано направление обхода в том смысле, что для любых трех различных точек $A_1, A_2, A_3 \in L$ всегда будет иметь место один из двух порядков следования точек: $A_1A_2A_3A_1$ или $A_1A_3A_2A_1$.

Поскольку на любой замкнутой кривой L имеется в точности два направления обхода, одно из них, естественно, считать положительным, а другое — отрицательным.

Заметим, что при этом для интеграла I от дифференциальной формы $Pdx + Qdy$ по замкнутой кривой L, взятому в положительном направлении, используется обозначение

$$I = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy.$$

Дадим определение того, как выбирать положительное направление обхода замкнутой кривой. Сначала рассмотрим важный пример окружности $L : x^2 + y^2 = 1$. За положительное направление обхода окружности берется “направление обхода против часовой стрелки”. Оно определяется так. Разобьем окружность на верхнюю полуокружность $L_1 : x^2+y^2 = 1, y \geq 0$, и нижнюю полуокружность L_2. На верхней полуокружности за начало отсчета возьмем точку A с координатами $(1, 0)$, а концевой точкой будем считать точку B, а для нижней полуокружности L_2 за начальную точку возьмем B, а за концевую точку A.

Ясно, что на окружности L можно однозначно задать направление обхода, указав в любой произвольно взятой на ней точке A касательный вектор $\bar{\tau}$.

Будем рассматривать окружность L на плоскости xOy в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть в каждой точке ее заданы $\bar{n}$ — вектор внешней нормали к окружности, лежащий в плоскости xOy, $\bar{\tau}$ — касательный вектор к ней. Если орт $\bar{e}_3$, направленный по оси Oz, совпадает с векторным произведением $[\bar{n}, \bar{\tau}]$, то будем говорить, что вектор $\bar{\tau}$ задает положительное направление обхода окружности L.

Это свойство окружности мы положим в основу определения положительного направления обхода общей кривой L.

Определение 1. *Пусть замкнутая кусочно-гладкая кривая L без кратных точек является границей выпуклого множества D на плоскости xOy. Пусть $\bar{e}_3$ — орт, направленный по оси Oz. В каждой точке кривой L зададим касательный вектор $\bar{\tau}$ и вектор внешней нормали $\bar{n}$. Будем говорить, что на кривой L задано* **положительное направление обхода,** *если вектор $\bar{e}_3$ совпадает с векторным произведением $[\bar{n}, \bar{\tau}]$.*

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать формулу Грина, которая устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутой кривой $L = \partial D$, являющейся границей области D, и двойным интегралом по этой области. Для простоты будем рассматривать случай выпуклой области D.

Т е о р е м а 1 (формула Грина). *Пусть D — выпуклый, измеримый по Жордану, компакт, граница $L = \partial D$ которого является замкнутой невырожденной кусочно-гладкой кривой. Пусть также функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на D и имеют там же непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула*

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy,$$

где кривая L обходится в положительном направлении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем только равенство

$$\oint\limits_L P dx = -\int\limits_D\int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Равенство же

$$\oint\limits_L Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

доказывается аналогично.

Пусть отрезок $[a, b]$ является проекцией области D на ось Ox. Через точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ проведем вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$. В силу выпуклости множества D граница его $L = \partial D$ разбивается на четыре участка: отрезки L_1 и L_3, лежащие на прямых $x = a$ и $x = b$ (каждый из них может состоять только из одной точки), и кривые L_2 и L_4, лежащие в полосе между этими кривыми.

На кривых L_1 и L_3 величина x постоянна, поэтому

$$\int\limits_{L_1} Pdx = \int\limits_{L_3} Pdx = 0.$$

Всякая прямая $x = x_0$ при $x_0 \in (a, b)$ пересекает (в силу выпуклости D) каждую из кривых L_2 и L_4 строго в одной точке, которые обозначим соответственно $\varphi_1(x_0)$ и $\varphi_2(x_0)$, т.е. кривая L_2 является графиком функции $y = \varphi_1(x)$, а кривая L_4 — графиком функции $y = \varphi_2(x)$.

Заметим, что из кусочной гладкости кривой L следует кусочная гладкость функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Из теоремы о выражении криволинейного интеграла через интеграл Римана имеем

$$\int\limits_{L_2} P(x, y)dx = \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))dx, \int\limits_{L_4} P(x, y)dx = -\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))dx.$$

Отсюда получим

$$\int\limits_{L_2 \cup L_4} P(x, y)dx = \int\limits_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)))dx = H.$$

Поскольку функция $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна на D, по теореме Ньютона – Лейбница имеем

$$P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)) = -\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Следовательно,

$$H = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

В силу того что

$$\int\limits_{L_1} Pdx = \int\limits_{L_3} Pdx = 0,$$

справедлива формула $H = \oint\limits_L Pdx$.

Тем самым, теорема 1 доказана.

Заметим, что в силу аддитивности интеграла формула Грина верна для областей, являющихся конечным объединением выпуклых областей.

Примеры. 1. Площадь области D выражается согласно формуле Грина через криволинейный интеграл в следующем виде:

$$\mu(D) = \oint\limits_L xdy = -\oint\limits_L ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

2. Пусть $\varphi : D_0 \to D$ — гладкое взаимно однозначное отображение двух плоских областей. Пусть также якобиан этого отображения $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ не меняет знак в области D_0 и $\varphi(\partial D_0) = \partial D$. Кроме того, пусть $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ непрерывна на D_0. Тогда, исходя из формулы примера 1, проведем вычисление меры области D. Имеем

$$\mu(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy.$$

Далее, пусть задана параметризация вида $u = u(t), v = v(t), a \le t \le b$, кривой ∂D_0. Тогда соответствующая параметризация кривой ∂D задается уравнениями $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t))$.

Из выражения криволинейного интеграла через интеграл Римана получим

$$\mu(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy = \int\limits_a^b x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt = \int\limits_a^b x(t)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt.$$

Но последний интеграл можно представить как интеграл по кривой ∂D_0. Имеем

$$\mu(D) = \varepsilon \oint\limits_{\partial D_0} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

где $\varepsilon = +1$, если кривые ∂D_0 и ∂D имеют одинаковое направление обхода, и -1 в противном случае.

Преобразуя последний интеграл, используя формулу Грина, получим

$$\mu(D) = \varepsilon \oint\limits_{\partial D_0} \left(x\frac{\partial y}{\partial u} du + x\frac{\partial y}{\partial v} dv \right) =$$

$$= \varepsilon \int\int\limits_{D_0} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(x\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right) dudv =$$

$$= \varepsilon \int\int\limits_{D_0} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv = \varepsilon \int\int\limits_{D_0} I dudv.$$

Поскольку якобиан I не меняет знака и величина $\mu(D)$ неотрицательна, то $\varepsilon I = |I|$. Поэтому имеем

$$\mu(D) = \int\int\limits_{D_0} |I| dudv.$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления в криволинейных координатах площади плоской области.

§ 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим гладкую поверхность D в $\mathbb{R}^3$. Будем считать, что она невырождена во всех своих точках, т.е. при ее параметрическом задании $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, где $\bar{r} = (x,y,z), (u,v) \in D_0$, ранг ее матрицы Якоби максимален и равен двум.

Допустим сначала, что область D_0 является квадратом. Возьмем его размеченное разбиение V на равные квадраты $P_{k,l}$ с разметкой $(u_{k,l}, v_{k,l})$, $k,l = 1,\ldots,n$. Здесь точка $(u_{k,l}, v_{k,l})$ — вершина левого нижнего угла квадрата $P_{k,l}$ со стороной δ. Рассмотрим область $D_{k,l}$ — элемент поверхности D, соответствующий квадрату $P_{k,l}$, т.е. $D_{k,l} = \bar{r}(P_{k,l})$. Рассмотрим также множество точек $R_{k,l}$ — часть касательной плоскости к поверхности D в точке $\bar{r}_{k,l} = \bar{r}(u_{k,l}, v_{k,l})$, отвечающую квадрату $P_{k,l}$.

На поверхности D в точке $\bar{r} = \bar{r}(u,v), (u,v) \in D_0$, определены два касательных вектора к ней $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, являющихся первым и вторым столбцами матрицы Якоби $J_{\bar{r}}(u,v)$, т.е.

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_u'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, \bar{r}_2 = \bar{r}_v'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

В силу условия невырожденности матрицы Якоби имеем, что для любой точки $(u,v) \in D$ векторное произведение $[\bar{r}_1, \bar{r}_2]$ отлично от нуля. Заметим, что **особыми точками поверхности** называются такие ее точки, в которых ранг ее матрицы Якоби меньше двух.

Рассмотрим вектор

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{\|[\bar{r}_1, \bar{r}_2]\|}.$$

Определение 1. *Вектор $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$ будем называть* **нормалью к поверхности** *D, отвечающей параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$.*

Такое название вызвано тем, что вектор $\bar{n}$ перпендикулярен касательным векторам $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. В частности, при $(u,v) = (u_{k,l}, v_{k,l})$ имеем, что вектор $\bar{n}$ перпендикулярен к касательной плоскости $R_{k,l}$.

Заметим, что если δ — длина стороны квадрата $P_{k,l}$, то $R_{k,l}$ представляет собой параллелограмм и его площадь $\mu(R_{k,l})$ равна $\|[\bar{r}_1, \bar{r}_2]\|\delta^2$, где касательные к поверхности D векторы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ взяты в точке $\bar{r}(u_{k,l}, v_{k,l})$.

Заметим также, что если задана другая параметризация $\bar{\rho}$ поверхности D, то всегда выполнено одно из равенств, $\bar{n}(\bar{r}) = \bar{n}(\bar{\rho})$ или

$\bar{n}(\bar{r}) = -\bar{n}(\bar{\rho})$. Следовательно, функция $f(u,v)$, равная скалярному произведению векторов $\bar{n}(\bar{r})$ и $\bar{n}(\bar{\rho})$ принимает всего два значения $+1$ и -1. Но эта функция является непрерывной на D_0. Отсюда имеем, что она либо тождественно равна $+1$, либо тождественно равна -1. Это означает, что при замене параметризации определенная нами нормаль к поверхности D либо не меняется во всех точках D, либо меняет свое направление сразу во всех точках D. Поэтому говорят, что нормаль к поверхности, отвечающая некоторой параметризации этой гладкой поверхности без особых точек, **выделяет на ней ее сторону.** Поверхность с выделенной стороной называется **двусторонней поверхностью.**

Определение 2. *Выделение одной из сторон поверхности D с помощью параметризации называется* **ориентацией поверхности** D.

Далее, пусть на поверхности D задана функция $h(\bar{r})$ от трех переменных $\bar{r} = (x, y, z)$. Рассмотрим следующие четыре интегральные суммы, отвечающие размеченному разбиению V :

$$\sigma_0(V) = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l});$$

$$\sigma_s(V) = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l})(\bar{n}, \bar{e}_s), s = 1, 2, 3.$$

Отсюда имеем, в частности, следующие выражения:

$$\sigma_1(V) = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l}) \cos X = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})A(u_{k,l}, v_{k,l})\delta^2,$$

где

$$\cos X = (\bar{n}, \bar{e}_1), A(u,v) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно записать $\sigma_2(V), \sigma_3(V)$, с заменой $\cos X$ на $\cos Y = (\bar{n}, \bar{e}_2), \cos Z = (\bar{n}, \bar{e}_3)$ и с заменой $A = A(u,v)$ на

$$B = B(u,v) = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C = C(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Заметим, что вектор нормали $\bar{n}$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{n} = \left(\frac{A}{\sqrt{\Gamma}}, \frac{B}{\sqrt{\Gamma}}, \frac{C}{\sqrt{\Gamma}}\right), \Gamma = A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

Определение 3. *Если существует предел I_0 при $\Delta_V \to 0$ интегральной суммы $\sigma_0(V)$, то он называется* **поверхностным интегралом первого рода** *от функции $h(\bar{r})$ по поверхности D. Этот интеграл обозначается так:*

$$I_0 = \iint\limits_D h(\bar{r})dS.$$

Определение 4. *Если существуют пределы I_1, I_2, I_3, при $\Delta_V \to 0$ интегральных сумм $\sigma_1(V), \sigma_2(V), \sigma_3(V)$, то они называются* **поверхностными интегралами второго рода** *от функции $h(x, y, z)$ по стороне поверхности D, отвечающей параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.*

Для интеграла второго рода вводятся следующие обозначения:

$$I_1 = \iint\limits_D h(\bar{r})dy \wedge dz, I_2 = \iint\limits_D h(\bar{r})dz \wedge dx, I_3 = \iint\limits_D h(\bar{r})dx \wedge dy.$$

Здесь знак $\wedge$ ставится для того чтобы отличить поверхностный интеграл второго рода от обычного двойного интеграла по плоскому множеству D. Часто этот знак опускается (в тех случаях, когда это не ведет к двусмысленности).

Отметим еще, что вместо дифференциальных форм, участвующих в интегралах I_1, I_2, I_3, можно ввести форму

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

и рассмотреть интеграл второго рода от этой дифференциальной формы $I = \iint\limits_D \omega$.

Приведем два свойства введенных интегралов первого и второго рода. Они вытекают непосредственно из их определений.

1^0. Справедливо равенство

$$I = \iint\limits_D Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_D (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)dS,$$

где $\cos X = (\bar{n}, \bar{e}_1), \cos Y = (\bar{n}, \bar{e}_2), \cos Z = (\bar{n}, \bar{e}_3)$.

2^0. **Т е о р е м а 1** (о сведении поверхностного интеграла к двойному интегралу). *Пусть функция $h(\bar{r})$ непрерывна на гладкой,* *невырожденной (без особых точек), измеримой по Жордану, компактной поверхности D. Тогда имеют место равенства*

$$I_0 = \iint\limits_D h(\bar r)dS = \iint\limits_{D_0} h(\bar r(u,v))\sqrt{\Gamma}dudv, \quad \Gamma = EG - F^2;$$

$$I = \iint\limits_D Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy =$$

$$= \iint\limits_D (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)dS = \iint\limits_D (PA + QB + RC)dudv.$$

Доказательство. В отличие от криволинейных интегралов здесь по существу нечего доказывать, так как функции под знаками интегралов являются интегрируемыми, ввиду их непрерывности на компакте D. И поэтому при $\Delta_V \to 0$ соответствующие интегральные суммы $\sigma_0(V), \ldots, \sigma_3(V)$ обязаны сходиться к значениям этих интегралов. Теорема 1 доказана.

Замечание. Можно было бы дать определения поверхностных интегралов и в n-мерном пространстве, но они несколько сложнее, и, в основном, из-за понятия ориентации. К ним мы вернемся позже.

Примеры. 1. Рассмотрим поверхность D — "внешность" верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ее можно представить как образ круга $D_0 = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$ при отображении

$$x \equiv x, y \equiv y, z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Покажем, что $\bar n = \bar n(\bar r) = \bar r$. Действительно, для параметризации $\bar r = \bar r(x,y)$ имеем

$$\bar r'_x = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right), \bar r'_y = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right),$$

$$[\bar r'_x, \bar r'_y] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar e_1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \bar e_2 \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \bar e_3.$$

Следовательно,

$$\bar n(\bar r) = \frac{[\bar r'_x, \bar r'_y]}{||[\bar r'_x, \bar r'_y]||} = (x, y, z) = \bar r.$$

Вычислим теперь интеграл $I = \int\limits_D\int z dx \wedge dy$. Применяя теорему 1, получим

$$I = \int\limits_{D_0}\int z\cos Z dS = \int\limits_{D_0}\int z\cos Z \frac{dxdy}{|\cos Z|} =$$

$$= \int\limits_{D_0}\int z(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}rdr = -2\pi\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Пусть поверхность D задается уравнением $z = \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ - гладкая функция, $(x,y) \in D_0$, и интегрирование ведется по верхней стороне поверхности D, т.е. в этом случае $\cos Z > 0$. Обозначим эту сторону через D^+. Тогда

$$\int\limits_{D^+}\int h(x,y,z)dx \wedge dy = \int\limits_{D_0}\int h(x,y,\varphi(x,y))dxdy.$$

§ 5. СОГЛАСОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ГРАНИЦЫ

По существу мы дали определение поверхностных интегралов только в случае, когда область D_0 является квадратом. Для интегралов первого рода это определение тривиально распространяется на случай поверхностей, составленных из отдельных частей, каждая из которых есть гладкий образ некоторого квадрата, и соприкасающихся между собой по общим участкам границ. Тогда поверхностный интеграл первого рода понимается как сумма интегралов по составляющим ее частям. Стандартными рассуждениями мы переходим от специального случая к определению поверхностного интеграла для произвольного измеримого по Жордану компакта D_0. Более того, таким образом мы можем рассмотреть интеграл первого рода по поверхностям, которые являются границей пространственных тел, например, по поверхности куба или шара в трехмерном пространстве. Во всех этих случаях будем считать, что понятие интеграла по таким поверхностям уже определено и верна теорема о его сведении к двойному интегралу.

Определение 1. *Поверхность D называется* **кусочно-гладкой,** *если она связна и является объединением конечного числа гладких поверхностей, каждая из которых есть образ выпуклого плоского множества, имеющего кусочно-гладкую границу. При этом общие точки у любых двух поверхностей (если они есть) обязательно принадлежат образам границ, указанных выше плоских множеств.*

Определение 2. Интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности *равен сумме интегралов по ее гладким частям.*

Более сложная ситуация имеет место в случае интегралов второго рода по кусочно-гладкой поверхности, так как здесь необходимо **согласовывать ориентацию** ее частей. Рассмотрим этот случай.

Нам будет нужен ряд новых определений.

Определение 3. Границей $L = \partial D$ гладкой поверхности D *называется образ границы $\Lambda = \partial D_0$ множества D_0, которое отображается в D при ее параметризации $\bar{r}$. При этом считаем, что Λ есть кусочно-гладкая замкнутая кривая без кратных точек, а множество D_0 — выпукло.*

Замечание. Очевидно, что поверхность D может быть плоской, и при этом не обязательно быть выпуклым множеством. Так что выпуклость не является существенным ограничением. Поэтому можно считать множество D_0 образом выпуклого множества.

Определение 4. *Будем говорить, что* **параметризация $\bar{r}$ поверхности D отвечает ориентации ее границы** $L = \partial D$ *(или "согласована" с ориентацией ее границы), если при этой параметризации $\bar{r}$ ориентация кривой L порождается положительной ориентацией ее прообраза Λ (границы множества D_0 — прообраза поверхности D).*

Замечание. Если $\tau = \bar{r}_t'/|\bar{r}_t'|$ — касательный вектор к кривой L в точке A, отвечающий ее параметризации, и $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$ — вектор нормали к поверхности D в точке A, то согласованность ориентации кривой L и ориентации, отвечающей параметризации $\bar{r}$, означает, что "обход" кривой L относительно вектора $\bar{n}$ совершается "против часовой стрелки". Другими словами, вектор $\bar{b} = [\bar{\tau}, \bar{n}])$ является нормалью кривой L, лежащей в касательной плоскости к поверхности D и "внешней" по отношению к проекции D на эту касательную плоскость. Это полностью отвечает определению согласованности ориентации в плоском случае.

Определение 5. *Будем говорить, что кусочно-гладкая поверхность D является* **двусторонней поверхностью с выделенной стороной,** *если параметризации ее разных кусков выбраны так, что общие участки границ этих кусков при указанных параметризациях ориентированы в противоположных направлениях.*

Пример. Пусть поверхность D является плоской и лежит на плоскости xOy. Рассмотрим верхнюю сторону D и пусть $D = D_1 \cup D_2$. Тогда ориентация поверхностей D, D_1, D_2 будут согласованы с ориентацией их границ L, L_1, L_2, если все эти кривые "обходятся против часовой стрелки". При этом ясно, что общий кусок границ L_1 и L_2 ориентирован в противоположных направлениях для каждой из них.

Поясним определение "согласования" ориентации поверхности D и ее границы $L = \partial D$.

Пусть задана параметризация $\bar{r}$ поверхности D, являющейся образом плоского множества D_0. Пусть также параметризация $u = u(t), v = v(t)$ задает границу $\Lambda = \partial D_0$ и порождает положительную ориентацию. Тогда параметризация границы $L : \bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ задает с помощью вектора $\bar{\tau}$ направление обхода контура (кривой) L, которое мы называем согласованным со стороной поверхности D. Пусть задана любая другая параметризация $\bar{\rho}(t_1)$ кривой L. Тогда вектор $\bar{\tau}_1 = \frac{\bar{\rho}'_{t_1}}{|\bar{\rho}'_{t_1}|}$ задает обход контура L. Если векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}_1$ совпадают, то мы говорим, что ориентация поверхности D и ориентация кривой L, заданная параметризацией $\bar{\rho}(t_1)$, будут *согласованы* или отвечают параметризации $\bar{r}$.

Теперь дадим определение поверхностного интеграла второго рода.

Определение 6. Поверхностным интегралом второго рода от функции $h(\bar{r})$ по выделенной стороне двусторонней кусочно-гладкой поверхности D *называется сумма соответствующих поверхностным интегралов по всем, составляющим поверхность* D, *гладким кускам.*

Ясно, что последнее определение распространяет понятие поверхностного интеграла второго рода на случай поверхностей, являющихся образами при гладком отображении квадрируемых (то есть измеримых по Жордану) плоских фигур. Вместе с тем в этом случае оказывается верной теорема о выражении поверхностного интеграла второго рода через двойной интеграл Римана.

Замечания. 1. (Важное для теоремы Стокса). Указанная выше теорема позволяет рассматривать интегралы типа

$$\iint_D P dx \wedge dx, \iint_D Q dy \wedge dy, \iint_D R dz \wedge dz.$$

Сводя по ней эти интегралы к обычным двойным интегралам, получим, что для любых функций P, Q, R справедливо равенство

$$\int\int_D P dx \wedge dx = \int\int_D Q dy \wedge dy = \int\int_D R dz \wedge dz = 0.$$

Это замечание позволяет, например, записать формулу Грина в компактной и удобной форме:

$$\oint_\Lambda P dx + Q dy = \int\int_D (dP) \wedge dx + (dQ) \wedge dy.$$

Здесь D — выпуклая область, Λ — ее кусочно-гладкая граница, ориентированная в положительном направлении, а dP и dQ — дифференциалы функций P и Q. При этом интеграл $\int\int_D$ понимается не как двойной, а как поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне плоской поверхности D. Действительно, тогда имеем

$$\int\int_D (dP) \wedge dx = \int\int_D (P'_x dx + P'_y dy) \wedge dx =$$

$$= \int\int_D P'_x dx \wedge dx + \int\int_D P'_y dy \wedge dx = -\int\int_D P'_y dx \wedge dy.$$

Аналогично, получим

$$\int\int_D (dQ) \wedge dy = \int\int_D Q'_x dx \wedge dy.$$

Выбирая тривиальную параметризацию $x \equiv x, y \equiv y$, последние интегралы можно рассматривать как обычные двойные интегралы. Поэтому мы получим формулу Грина в доказанном ранее виде.

2. Следует отметить, что поверхности, задаваемые с помощью достаточно простых формул, не всегда являются кусочно-гладкими. Например, сюда относится поверхность конуса с вершиной. Тем не менее построенная выше система определений позволяет рассматривать интегралы и для поверхностей такого рода. Для этого можно использовать конструкцию, родственную теории несобственных интегралов. В указанном выше случае искомое значение поверхностного интеграла определяется как предел интегралов по поверхностям конуса без некоторых окрестностей его вершины, при условии, что радиусы данных окрестностей стремятся к нулю.

Лекция 13

§ 6. ФОРМУЛА СТОКСА

В указанной выше форме формула Грина справедлива не только в плоском случае, но и в трехмерном пространстве, где она называется формулой Стокса.

Т е о р е м а 1 (формула Стокса). *Пусть D — гладкая невырожденная (без особых точек) поверхность в $\mathbb{R}^3$, которая является образом плоского выпуклого множества D_0 при отображении $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, причем его координаты являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Пусть кривая L — кусочно-гладкая граница поверхности D, являющаяся образом кусочно-гладкой границы Λ множества D_0. Ориентация границы L отвечает параметризации $\bar{r}$. Пусть также P, Q, R — гладкие функции на D.*

Тогда справедлива формула

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_D (dP) \wedge dx + (dQ) \wedge dy + (dR) \wedge dz =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности поверхностного интеграла достаточно рассмотреть случай интеграла $K = \oint_L Pdx$, т.е. достаточно доказать формулу

$$K = \oint\limits_L Pdx = \iint\limits_D (dP) \wedge dx = \iint\limits_D P_z' dz \wedge dx - P_y' dx \wedge dy = S.$$

Пусть $\bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ — параметризация поверхности D, причем $(u, v) \in D_0$. Кроме того, на границе Λ области D_0 задана кусочно-гладкая параметризация

$$(u, v) = (u(t), v(t)), t \in I = [0, 1], (u(0), v(0)) = (u(1), v(1)),$$

которая определяет на кривой L параметризацию $\bar{r}(u(t), v(t))$.

В силу теоремы о выражении криволинейного интеграла через определенный интеграл имеем

$$K = \oint\limits_L Pdx = \int\limits_0^1 P(\bar{r}(u(t), v(t)))dx(u(t), v(t)).$$

По той же теореме последний интеграл равен

$$K = \oint\limits_{\Lambda} P(\bar{r}(u,v))dx(u,v) = \oint\limits_{\Lambda} P(\bar{r}(u,v))(x'_u du + x'_v dv).$$

К интегралу K применим формулу Грина. Получим

$$K = \oint\limits_{\Lambda} P(\bar{r}(u,v))dx(u,v) = \iint\limits_{D_0} (dP(\bar{r}(u,v))) \wedge dx(u,v).$$

Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала и непрерывностью вторых частных производных функций $x(u,v), y(u,v)$, $z(u,v)$. Имеем

$$dP(\bar{r}(u,v)) = P'_x dx(u,v) + P'_y dy(u,v) + P'_z dz(u,v).$$

Следовательно,

$$K = \iint\limits_{D_0} P'_z dz(u,v) \wedge dx(u,v) - P'_y dx(u,v) \wedge dy(u,v) = S_1.$$

Здесь S_1 рассматривается как поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне плоской области D_0. Но при параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ оба интеграла S и S_1 дают одно и то же выражение. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть скобки в выражениях $dz(u,v) \wedge dx(u,v)$ и $dx(u,v) \wedge dy(u,v)$, считая, что $dx(u,v) = x'_u du + x'_v dv$ и т.д.

Окончательно имеем, что S и S_1 сводятся к одному и тому же двойному интегралу

$$S = S_1 = \iint\limits_{D_0} (P'_z B - P'_y C) du dv,$$

где

$$B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}.$$

Тем самым, доказано равенство $K = S$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Применяя формулу Стокса к плоской поверхности D, распространим формулу Грина на случай областей, которые являются образами выпуклых множеств, а затем, уже используя это утверждение при доказательстве формулы Стокса, мы можем в теореме 1 считать, что область D_0 есть образ выпуклого измеримого множества.

§ 7. ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО

Эта формула является аналогом формулы Грина в трехмерном пространстве.

Теорема 1 (формула Гаусса – Остроградского). *Пусть:*

1) множество $V \in \mathbb{R}^3$ — выпуклый, измеримый по Жордану, компакт;

2) граница S множества V есть невырожденная (без особых точек) кусочно-гладкая поверхность;

3) заданы гладкие функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ на множестве V.

Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{S^+} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint\limits_{V} (P_x' + Q_y' + R_z') dx dy dz.$$

Здесь интеграл в левой части равенства является интегралом второго рода, который берется по внешней стороне поверхности S^+, а в правой части равенства — обычный тройной интеграл по множеству V.

Доказательство. Как и при доказательстве формулы Грина, рассмотрим только случай $P \equiv 0, Q \equiv 0$. Спроектируем поверхность S на плоскость xOy и обозначим эту проекцию через D. В силу выпуклости V всякая прямая, параллельная оси Oz и пересекающая D, пересекает V по отрезку. Пусть $(x, y) \in D$, тогда нижний конец этого отрезка имеет координаты $(x, y, \varphi_1(x, y))$, а верхний конец отрезка — координаты $(x, y, \varphi_2(x, y))$. Пусть, далее, $\Lambda = \partial D$ обозначает границу множества D.

Тогда поверхность D разбивается на три кусочно-гладких части:

$S_1 = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = \varphi_1(x, y)\}$,

$S_2 = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = \varphi_2(x, y)\}$,

$S_3 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Lambda,\ (x, y, z) \notin S_1 \cup S_2\}$.

Здесь для поверхности S_1 интегрирование ведется по ее нижней стороне, а для S_2 — по верхней стороне, и, наконец, для S_3, представляющей боковую часть поверхности S, — по стороне, нормаль к которой перпендикулярна оси Oz и является внешней нормалью по отношению к D.

По теореме о сведении поверхностного интеграла к двойному интегралу Римана имеем

$$\iint\limits_{S_3} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_3} R \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) dS = 0,$$

поскольку $\cos(\bar{n}, \bar{e}_3) = 0$. Далее,

$$\iint\limits_{S_1} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_1} R \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) dS = -\iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy,$$

$$\iint\limits_{S_2} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_2} R \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) dS = \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy.$$

По формуле Ньютона – Лейбница при фиксированных (x, y) получим

$$R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y)) = \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S} R dx dy = \iint\limits_{S_2} R dx dy - \iint\limits_{S_1} R dx dy =$$

$$= \iint\limits_{D} dx dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz.$$

Теорема 1 доказана.

Замечания. 1. Тем же способом, что и в случае формулы Грина, эту формулу можно распространить на случай областей V, которые являются образом выпуклой области при некотором гладком отображении.

2. Ясно, что если $V = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 удовлетворяют условиям теоремы 1 и соприкасаются по кусочно-гладкой границе, то и для V теорема 1 тоже верна.

3. Формуле Гаусса – Остроградского можно придать вид, аналогичный формулам Грина и Стокса, т.е.

$$\iint\limits_{S} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy =$$

$$= \iiint\limits_{V} (dP) \wedge dy \wedge dz + (dQ) \wedge dz \wedge dx + (dR) \wedge dx \wedge dy.$$

Но это требует введения некоторых новых понятий. В дальнейшем мы предполагаем доказать общую формулу указанного выше вида для пространства n измерений и поверхности размерности $k < n$. Она называется **общей формулой Стокса.** Доказательство ее проводится по существу так же, как и формулы Гаусса – Остроградского. Правда, при этом в связи с согласованием ориентации поверхности и ее границы возникают некоторые новые сложности.

4. Что такое "внешняя нормаль" к кусочно-гладкой поверхности S, которая является границей выпуклого пространственного тела V?

Если в точке $\bar{r} \in S$ существует вектор $\bar{n}$, то из геометрических соображений ясно, что $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль для верхней части S_2 поверхности S, если выполняется условие $n_3 \geq 0$, а для нижней части S_1 поверхности S имеем условие $n_3 \leq 0$.

Для нормали, отвечающей параметризации $z = \varphi(x, y)$, имеем

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}} > 0.$$

Следовательно, параметризации $z = \varphi(x, y)$ всегда отвечает "верхняя" сторона поверхности и потому при переходе к двойному интегралу в случае поверхности S_2 мы берем знак $+$ перед интегралом, а в случае поверхности S_1 — знак $-$.

Примеры. 1. Из теоремы 1 имеем следующее выражение для объема тела V через поверхностный интеграл по поверхности $S = \partial V$:

$$V = \iint\limits_{S+} x dy \wedge dz = \iint\limits_{S+} y dz \wedge dx = \iint\limits_{S+} z dx \wedge dy.$$

Здесь поверхностные интегралы берутся по внешней стороне поверхности.

Отметим, что для определения внешней стороны поверхности S следует через точку на поверхности провести нормальную прямую к ней и в качестве направления внешней нормали к поверхности S выпуклого тела V взять то направление луча этой прямой с вершиной в данной точке, на котором не содержится других точек тела V.

2. Интеграл Гаусса. Пусть S — кусочно-гладкая, невырожденная, измеримая по Жордану, компактная поверхность. Пусть P — некоторая фиксированная точка, M — переменная точка на поверхности $S, \bar{r} = \bar{r}(P, M)$ — радиус-вектор с начальной точкой P и концевой точкой $M, \bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности в точке M. Тогда имеем

$$G = \iint\limits_{S+} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{если} \quad P \in V \setminus S, \\ 2\pi, & \text{если} \quad P \in S, \\ 0, & \text{если} \quad P \notin V. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала случай, когда точка $P \notin V \setminus S$. Пусть точка M имеет координаты (x, y, z), а точка P — координаты (a, b, c). Тогда

$\bar{r} = (x-a, y-b, z-c)$, вектор нормали к поверхности в точке M равен $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Следовательно,

$$\cos(\bar{r}, \bar{n}) = \frac{(\bar{r}, \bar{n})}{||\bar{r}||} = \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{r}.$$

Используя формулу Гаусса – Остроградского, получим

$$G = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial(\frac{x-a}{r^3})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{y-b}{r^3})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{z-c}{r^3})}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial(\frac{x-a}{r^3})}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-a)r_x'}{r^4}, \frac{\partial(\frac{y-b}{r^3})}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-b)r_y'}{r^4},$$

$$\frac{\partial(\frac{z-c}{r^3})}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-c)r_z'}{r^4}, r_x' = \frac{x-a}{r}, r_y' = \frac{y-b}{r}, r_z' = \frac{z-c}{r}.$$

Следовательно, получим

$$G = \iiint\limits_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}{r^5} \right) dxdydz = 0.$$

Если точка $P \in V \setminus S$, то окружим ее шаром V_ε, целиком лежащем внутри $V \setminus S$. Поверхность этого шара обозначим через S_ε. В силу предыдущего имеем

$$0 = \iint\limits_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = \iiint\limits_{V \setminus V_\varepsilon} 0 dV.$$

Но поскольку имеет место равенство, которое символически можно записать так:

$$\iint\limits_{S \setminus S_\varepsilon} = \iint\limits_S - \iint\limits_{S_\varepsilon},$$

то, в силу равенства

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = 4\pi,$$

имеем, что значение G интеграла в случае $P \in V \setminus S$ равно 4π.

Случай, когда $P \in S$ рассматривается аналогично.

3. Формула Грина. Замечательным следствием формулы Гаусса – Остроградского является еще одна формула Грина, имеющая важные приложения в математической физике.

Пусть u и v — гладкие функции, имеющие непрерывные вторые частные производные $u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{zz}$. Пусть также V — выпуклый, измеримый по Жордану, компакт с границей ∂V, являющейся кусочно-гладкой ориентированной поверхностью. Пусть, кроме того, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ обозначает оператор Лапласа, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производную по направлению внешней нормали к поверхности ∂V. Тогда справедлива следующая формула Грина

$$\iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS = \iiint\limits_{V} (v\Delta u - u\Delta v) \, dV.$$

Действительно, по формуле Гаусса – Остроградского получим

$$A = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z} \right) \, dV =$$

$$= \iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial x} \cos(\bar n, \bar e_1) + u\frac{\partial v}{\partial y} \cos(\bar n, \bar e_2) + u\frac{\partial v}{\partial z} \cos(\bar n, \bar e_3) \right) \, dS =$$

$$= \iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} \, dS.$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Используя полученную для величины A формулу, найдем

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) \, dV =$$

$$\iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \iiint\limits_{V} u\Delta v \, dV.$$

Поменяем в последней формуле функции u и v местами. Левая часть равенства при такой замене не изменится, следовательно, не изменится и значение выражения, стоящего в правой части. А это дает следующее равенство:

$$\iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \iiint\limits_{V} u\Delta v\,dV = \iint\limits_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \iiint\limits_{V} v\Delta u\,dV,$$

т.е.

$$\iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dS = \iiint\limits_{V} (u\Delta v - v\Delta u)\,dV.$$

Последняя формула называется **формулой Грина** и является весьма полезной при исследовании **гармонических функций,** т.е. функций, удовлётворяющих уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Лекция 14

§ 8. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ТОЛЬКО ОТ ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Будем считать, что P, Q, R — гладкие функции. Сформулируем и докажем теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, имеющего фиксированные начальную и концевую точки.

Теорема 1. *Пусть L — кусочно-гладкая невырожденная кривая. Тогда для того чтобы интеграл*

$$I = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

не зависел от пути интегрирования (а зависел только от начальной и концевой точек кривой L), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $h(x, y, z)$ такая, что

$$dh = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Мы считаем, что P, Q, R, L определены внутри некоторого шара $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл I не зависит от пути интегрирования. Обозначим через $\bar{r}_0$ центр шара Ω и через $\bar{r}, \bar{r}_1$ — произвольные точки шара Ω. Поскольку интеграл I зависит только от начальной и концевой точек кривой L, интеграл $\int_{\bar{r}_0\bar{r}} \omega, \omega = Pdx + Qdy + Rdz$, есть функция от $\bar{r}$. Обозначим ее через $h(\bar{r})$. Пусть точки $\bar{r}_1$ и $\bar{r}$ лежат на прямой, параллельной оси Ox. Тогда

$$h(\bar{r}) - h(\bar{r}_1) = \int_L Pdx = \int_{x_1}^{x} P(t, y_1, z_1)dt.$$

Дифференцируя это равенство по первой переменной x, получим

$$\frac{\partial h(\bar{r})}{\partial x} = P(\bar{r}_1).$$

Аналогично, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Q, \frac{\partial h}{\partial z} = R.$$

Следовательно, дифференциальная форма ω есть полный дифференциал. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ — любые точки, принадлежащие Ω, и L — кусочно-гладкая невырожденная кривая, имеющая своими концами точки $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in [0,1]$, — параметризация этой кривой. Тогда, переходя от криволинейного интеграла к определенному интегралу от одной переменной, получим

$$\int\limits_L dh = \int\limits_0^1 h_t'(\bar{r}(t))dt = h(\bar{r}_2) - h(\bar{r}_1).$$

Это означает, что интеграл от полного дифференциала зависит от начальной и концевой точек пути интегрирования, но не зависит от самого этого пути. Теорема 1 доказана.

Выясним теперь условия, при которых дифференциальная форма ω есть полный дифференциал от некоторой функции $h(\bar{r})$. Для простоты рассмотрим только двумерный случай.

Теорема 2. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^2$. Для того чтобы дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy$ на Ω была полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы для всех точек Ω выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство. Необходимость. Если дифференциальная форма ω является полным дифференциалом, то есть $\omega = dh$, то равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ означает равенство смешанных производных. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,v)dv,$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка области Ω. Тогда имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P(x,y).$$

Далее, по правилу Лейбница получим

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Q(x_0,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t,y)}{\partial y}dt = Q(x_0,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}dt =$$

$$= Q(x_0, y) + Q(x, y) - Q(x_0, y) = Q(x, y).$$

Таким образом, дифференциал функции $h(x, y)$ совпадает с дифференциальной формой ω. Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть Ω — выпуклая область. Дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ тогда и только тогда является полным дифференциалом, когда для всех точек области Ω выполняются равенства*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

И вообще, в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ условие, что дифференциальная форма ω является полным дифференциалом некоторой функции h, т.е. $\omega = dh$, эквивалентно условию $d\omega = 0$.

Пример. Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, принимающая комплексные значения

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv,$$

где u, v — вещественнозначные функции и $f(z)$ — однозначная в некоторой области Ω комплексной плоскости **C**. Пусть L — простая спрямляемая ориентированная кривая, $L \in \Omega$.

Определим криволинейный интеграл I от функции $f(z)$ по кривой L следующей формулой:

$$I = \int\limits_L f(z)\, dz = \int\limits_L (u + iv)(dx + idy) = \int\limits_L (udx - vdy) + i \int\limits_L (vdx + udy).$$

Пусть функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ являются гладкими в области Ω. Далее потребуем, чтобы интеграл I не зависел от кривой интегрирования L, а зависел только от начальной ее точки z_0 и концевой точки z.

В силу теорем 1 и 2 в этом случае имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия называются **условиями Коши – Римана.** Отметим, что при наличии гладкости функций u и v в области Ω они являются необходимыми и достаточными условиями дифференцируемости функции комплексного переменного.

Итак, пусть функции u и v являются гладкими. Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \int\limits_L f(z)\, dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz = U(x, y) + iV(x, y),$$

где

$$U = U(x,y) = \int\limits_{z_0}^{z} udx - vdy, V = V(x,y) = \int\limits_{z_0}^{z} vdx + udy.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = u, -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = v.$$

Следовательно, функция $F(z)$ является дифференцируемой и

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z).$$

Таким образом, функция $F(z)$ является первообразной функции $f(z)$, и для интеграла от функции $f(z)$ имеет место теорема Ньютона – Лейбница.

Простым следствием теорем 1 и 2 является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ — однозначна и непрерывна в области Ω, принадлежащей комплексной плоскости* **C**. *Тогда для любого простого спрямляемого ориентированного замкнутого контура $L \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{L} f(z)\, dz = 0.$$

Полученная теорема называется **основной теоремы Коши** в теории функций одного комплексного переменного.

§ 9. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим выпуклую область V в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть на этой области задана скалярная функция $h(\bar{u}), \bar{u} \in V$ и отображение $\bar{\varphi}(\bar{u})$ области V в трехмерное пространство.

Традиционно в приложениях анализа к математической физике и механике ряд вопросов, связанных с изучением функций $h(\bar{u})$ и $\bar{\varphi}(\bar{u})$, выделяется в отдельный раздел, который называется *векторным анализом* или *теорией (векторного) поля.* По существу, этот раздел ничего нового, кроме обозначений, не содержит. Но язык этих обозначений надо знать.

Определение 1. *Функция* $h(\bar{u})$ *называется* **скалярным полем**, *а отображение* $\bar{\varphi}(\bar{u})$ *называется* **векторным полем на области** V. *Если функции* $h(\bar{u})$ *и* $\bar{\varphi}(\bar{u})$ *— гладкие, то соответствующие поля тоже называются* **гладкими.**

Далее будем считать, что $h(\bar{u})$ и $\bar{\varphi}(\bar{u})$ — гладкие функции на V.

Определение 2. *Векторное поле* $A(\bar{u}) = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}) = \operatorname{grad} h(\bar{u})$ *называется* **градиентом** *скалярного поля* $h(\bar{u})$.

Определение 3. Производной по направлению l *скалярного поля* $h(\bar{u})$ *в точке* $\bar{u}_0$ *называется величина*

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(\bar{u}_0+t\bar{e})-h(\bar{u}_0)}{t}=\frac{\partial h}{\partial l},$$

где $\bar{e}$ *— вектор, определяющий направление* l.

Известно, что

$$\frac{\partial h}{\partial l}=(\operatorname{grad} h(\bar{u}),\bar{e}).$$

Примеры. 1. Множество всех точек $\bar{u}$, удовлетворяющих условию $h(\bar{u})$, равно некоторой постоянной величине a, называется **множеством уровня** функции $h(\bar{u})$. Пусть множество уровня $h(\bar{u}) = h(\bar{u}_0) = a$ представляет собой гладкую поверхность $\Pi = \Pi_a$ в окрестности точки $\bar{u} = \bar{u}_0$. Тогда в любом направлении l для кривой $L \in \Pi$, имеющей это направление, т.е. касательный вектор к кривой L в точке $\bar{u}_0$ совпадает с вектором направления l, справедливо равенство $\frac{\partial h}{\partial l} = 0$, поскольку для точек кривой L имеем $\Delta h(\bar{u}_0) = h(\bar{u}_1) - h(\bar{u}_0) = 0$. Отсюда получим

$$\frac{\partial h}{\partial l}=(\operatorname{grad} h(\bar{u}),\bar{e})=0.$$

Следовательно, если вектор $\operatorname{grad} h(\bar{u}_0)\neq\bar{0}$, то вектор градиента функции $h(\bar{u})$ в точке $\bar{u}_0$ ортогонален вектору $\bar{e}$, касательному к поверхности уровня Π.

2. Рассмотрим функцию $h(\bar{u}) = f(r)$, где $r = ||\bar{u}-\bar{u}_0||$. Поверхностью уровня $\Pi = \Pi_a$ этой функции является сфера с центром в точке $\bar{u}_0$ и радиусом, равным a. Тогда вектор градиента функции $f(r)$ направлен по нормали к сфере, т.е. по ее радиусу $\bar{r} = \bar{u} - \bar{u}_0$. Следовательно, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$. В частности, имеем $\operatorname{grad}(-\frac{1}{r}) = \frac{\bar{r}}{r^3}$.

3. Пусть в точке $\bar{u}_0$ помещена пробная единичная точечная масса, а в точках $\bar{u}_1$ — масса $m_1, \dots, \bar{u}_k$ — масса m_k. Пусть $\bar{r}_1 = \bar{u}_1 - \bar{u}_0, \dots, \bar{r}_k = \bar{u}_k - \bar{u}_0$. Тогда сила притяжения, действующая на пробную массу, равна

$$\bar{F}(\bar{u}_0)=m_1\frac{\bar{r}_1}{r_1^3}+\dots+m_k\frac{\bar{r}_k}{r_k^3}.$$

Из предыдущего примера получим

$$\bar{F}(\bar{u}_0) = \operatorname{grad}\left(-\sum_{s=1}^{k}\frac{m_s}{r_s}\right).$$

4. Пусть на измеримом по Жордану компакте $V \in \mathbb{R}^3$ задана кусочно-непрерывная функция распределения $\rho(M), M \in V$, массы тела V. Положим $\rho(M) = 0$, если $M \notin V$.Пусть P — некоторая фиксированная точка, M — любая переменная точка и пусть $\bar{r} = \bar{r}(M) = \bar{r}(P, M)$. Тогда сила, действующая на пробную точечную единичную массу, помещенную в точке P, по аналогии с дискретным случаем равна

$$\bar{F}(P) = \iiint\limits_V \frac{\rho(M)\bar{r}(M)}{r^3(M)}dV(M),$$

где $dV(M) = dx(M)dy(M)dz(M)$.

Силовую функцию $\bar{F}(P)$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{F}(P) = \operatorname{grad}\varphi(P),$$

где

$$\varphi(P) = -\iiint\limits_V \frac{\rho(M)}{r(M)}dV(M).$$

Действительно, имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(P) = \iiint\limits_V \rho(M)\operatorname{grad}\left(-\frac{1}{r(P,M)}\right)dV(M) =$$

$$= \iiint\limits_V \rho(M)\frac{\bar{r}(P,M)}{r^3(P,M)}dV(M) = \bar{F}(P).$$

Определение 4. *Пусть $\bar{\varphi}(\bar{r}) = (P, Q, R)$ — гладкое векторное поле. Тогда величина*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{\varphi}$$

называется **дивергенцией векторного поля**, *а вектор*

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \operatorname{rot}\varphi$$

называется **ротором векторного поля** $\bar{\varphi}$.

Если введем в рассмотрение оператор "набла" ∇, полагая

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

то предыдущие определения можно формально записать в виде

$$\operatorname{div} \bar{\varphi} = (\nabla, \bar{\varphi}), \operatorname{rot} \bar{\varphi} = [\nabla, \bar{\varphi}], \operatorname{grad} h = \nabla h,$$

где символические выражения $(\cdot,\cdot), [\cdot,\cdot]$ обозначают соответственно скалярное и векторное произведения.

Можно также определить $\operatorname{div} \bar{\varphi}$ и $\operatorname{rot} \bar{\varphi}$ из тождества для дифференциальных форм:

$$d\omega_2 = (dP) \wedge dy \wedge dz + (dQ) \wedge dz \wedge dx + (dR) \wedge dx \wedge dy = (\operatorname{div} \bar{\varphi}) dx\, dy\, dz,$$

$$d\omega_1 = (dP) \wedge dx + (dQ) \wedge dy + (dR) \wedge dz = v_1\, dy \wedge dz + v_2\, dz \wedge dx + v_3\, dx \wedge dy,$$

где

$$\operatorname{rot} \bar{\varphi} = (v_1, v_2, v_3), \quad dh(\bar{u}) = (\operatorname{grad} h(\bar{u}), d\bar{u}).$$

Отсюда, используя соотношения $dx \wedge dx = 0, dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ и т.д., получим соответственно выражения для $\operatorname{div} \bar{\varphi}$ и $\operatorname{rot} \bar{\varphi}$.

Отметим два полезных тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} h(\bar{u}) \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{\varphi}(\bar{u}) \equiv 0.$$

Их доказательство получается прямыми вычислениями. Оно является следствием того, что для дифференциальной формы ω справедливо равенство $d^2\omega = 0$.

Действительно, первое тождество следует из формулы

$$d(dh(\bar{u})) = d^2 h(\bar{u}) = 0,$$

а второе тождество — из формулы

$$d^2\omega_1 = d(dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz) = 0.$$

Определение 5. *Криволинейный интеграл I_0 второго рода*

$$I_0 = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

по кусочно-гладкой ориентированной замкнутой кривой L называется **циркуляцией вектора** *$\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ по замкнутому контуру L.*

Если $\bar{\tau}$ — единичный касательный вектор в положительном направлении обхода контура L, то интеграл I_0 можно записать в виде

$$I_0 = \oint_L (\bar{\varphi}, \bar{\tau}) dl,$$

где dl — элемент длины дуги кривой L.

Определение 6. *Поверхностный интеграл второго рода по выделенной стороне двусторонней кусочно-гладкой измеримой поверхности* S *вида*

$$I = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

называется **потоком вектора** $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ *через поверхность* S.

Если через $\bar{n}$ обозначим нормаль к поверхности, соответствующую выбранной стороне поверхности, то поток I через поверхность S можно записать в виде

$$I = \iint_S (\bar{\varphi}, \bar{n}) dS.$$

Переформулируем в векторном виде теоремы Стокса и Гаусса – Остроградского.

Пусть сторона поверхности S, отвечающая вектору нормали $\bar{n}$, согласована с направлением обхода контура, отвечающим вектору τ, единичному касательному вектору к кривой L. Это можно сделать, например, так. По непрерывности определим вектор нормали на кривой L, а затем вектор τ направим в ту сторону, чтобы относительно $\bar{n}$ обход контура совершался "против часовой стрелки".

Т е о р е м а 1 (формула Стокса). *Циркуляция вектора* $\bar{\varphi}$ *по кусочно-гладкой границе* L *кусочно-гладкой поверхности* S *равна потоку* $\operatorname{rot}\bar{\varphi}$ *через эту поверхность, т.е.*

$$\oint_L (\bar{\varphi}, \bar{\tau}) dl = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{\varphi}, \bar{n}) dS.$$

Т е о р е м а 2 (формула Гаусса – Остроградского). *Поток вектора* $\bar{\varphi}$ *через кусочно-гладкую границу* S *выпуклой трехмерной области* V *равен тройному интегралу от дивергенции вектора* $\bar{\varphi}$ *по множеству* V, *т.е.*

$$\iint_S (\bar{\varphi}, \bar{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{\varphi} dV,$$

где $\bar{n}$ *— внешняя нормаль к поверхности* S.

Отметим еще три интересных следствия формулы Гаусса – Остроградского. Справедливы следующие равенства:

1) $\iint_S (\bar{n}, \bar{\varphi}) dS = \iiint_V (\nabla, \bar{\varphi}) dV,$

2) $\iint_S [\bar{n}, \bar{\varphi}] dS = \iiint_V [\nabla, \bar{\varphi}] dV,$

3) $\iint\limits_S \bar{n} h dS = \iiint\limits_V \nabla h dV.$

Действительно, рассмотрим, например, формулу 2). В ней первая координата векторного равенства имеет вид

$$\iint\limits_S (R\cos\beta - Q\cos\gamma) dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dV.$$

Для векторного поля $\bar{\varphi}_1 = (0, R, -Q)$ предыдущее равенство представляет собой обычную формулу Гаусса – Остроградского. Аналогично устанавливается равенство вторых, третьих координат равенства 2).

Равенство 3) следует из формулы Гаусса – Остроградского для векторных полей $(h, 0, 0), (0, h, 0), (0, 0, h)$.

Обозначим через d диаметр области V, а через $\mu(V)$ ее объем. Тогда, используя теорему о среднем для каждой компоненты векторных полей $\operatorname{rot}\varphi = [\nabla, \varphi]$ и $\operatorname{grad} h = \nabla h$ в равенствах 1),2),3), а затем, переходя к пределу при $d \to 0$, получим

4) $\operatorname{div}\varphi = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S (\bar{n}, \bar{\varphi})\, dS,$

5) $\operatorname{rot}\varphi = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S [\bar{n}, \bar{\varphi}]\, dS,$

6) $\operatorname{grad} h = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S \bar{n} h\, dS.$

Интеграл в равенстве 4) представляет собой поток векторного поля φ через замкнутую поверхность S, являющуюся границей тела V. По аналогии с этим интегралы в равенствах 5) и 6) назовем *векторными потоками* соответственно векторного поля φ и скалярного поля h через поверхность S.

Отметим также, что эти формулы дают инвариантное относительно выбора прямоугольной системы координат определение градиента, дивергенции и ротора.

Лекция 15

§ 10. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Определение 1. *Векторное поле* $\bar{F}(M)$, $M \in V$, *называется* **потенциальным** *в области* V, *если найдется скалярная функция* $h(M)$ *такая, что* $\bar{F}(M) = \operatorname{grad} h(M)$, *сама функция* $h(M)$ *тогда называется* **потенциалом векторного поля** $\bar{F}(M)$.

Если величину $\bar{F}(M)$ рассматривать в качестве силы, действующей в точке M на пробную точечную единичную массу, то потенциал $h(M)$ будет иметь смысл работы по перемещению этой точечной массы из бесконечности в точку M.

Действительно, пусть задана кривая L с начальной точкой A и переменной точкой M. Обозначим через $l(M)$ длину дуги AM этой кривой, а через $\bar{\tau}(M)$ — единичный касательный вектор к ней в точке M. Тогда работа $W(P)$ силы $\bar{F}(M)$ по перемещению пробной массы по пути AP равна

$$W(P) = \int\limits_{AP} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M))dl(M) = \int\limits_{AP} (\operatorname{grad} h(M), \bar{\tau}(M))dl(M) =$$

$$= \int\limits_{AP} \frac{\partial h(M)}{\partial l} dl(M) = h(P) - h(A).$$

Определение 2. Циркуляцией векторного поля $\bar{F}(M)$ **по замкнутому контуру** L *назовем величину*

$$\oint\limits_{L} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M))dl(M).$$

Из предыдущего выражения для работы $W(P)$ силы $\bar{F}(M)$ по контуру L имеем, что циркуляция потенциального поля по любому замкнутому спрямляемому контуру равна нулю.

Отметим, что в теоремах 1, 2 и 3 §8 мы получили необходимое и достаточное условие потенциальности поля. Сформулируем эти условия, используя новую терминологию.

Теорема 1. *Для того чтобы гладкое векторное поле было потенциальным в выпуклой области* Ω, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий:*

1) для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой $L \in \Omega$

$$\oint_L (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M))dl = 0,$$

2) $\operatorname{rot} \bar{F}(M) = 0$.

Напомним, что для отображения $\bar{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ в силу определения имеет место равенство

$$\operatorname{rot} \bar{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Определение 3. *Векторное поле* $\bar{\varphi}(\bar{u})$ *называется* **соленоидальным** *(или* **трубчатым***), если существует векторное поле* $\bar{\psi}(\bar{u})$ *такое, что*

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \operatorname{rot} \bar{\psi}(\bar{u}),$$

а векторное поле $\bar{\psi}(\bar{u})$ *называется* **векторным потенциалом поля** $\bar{\varphi}(\bar{u})$.

Теорема 2. *Пусть* Ω *— выпуклый компакт. Для того чтобы векторное поле* $\bar{\varphi}$ *было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы для всех точек* Ω *выполнялось равенство*

$$\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0.$$

Доказательство. Необходимость. Поле $\bar{\varphi}$ является соленоидальным. Следовательно,

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \operatorname{rot} \bar{\psi}(\bar{u}).$$

Но поскольку для любого векторного поля $\bar{\psi}$ справедливо равенство $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{\psi} = 0$, имеем $\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0$ на области Ω. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь $\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0$ на области Ω. Докажем, что существует векторное поле $\bar{\psi}$ такое, что $\operatorname{rot} \bar{\psi} = \bar{\varphi}$. Поставим в соответствие векторному полю $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ дифференциальную форму

$$\omega = \omega(\bar{r}, d\bar{r}) = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

$$\bar{r} = (x, y, z), d\bar{r} = (dx, dy, dz).$$

Тогда условие $\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0$ на Ω эквивалентно тому, что $d\omega \equiv 0$ на Ω. А условие существования векторного поля $\bar{\psi} = (A, B, C)$, удовлетворяющего равенству $\operatorname{rot} \bar{\psi} = \bar{\varphi}$, означает, что найдется дифференциальная форма $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$ такая, что $d\alpha = \omega$.

Будем искать форму α, исходя из равенства

$$d\alpha = \int_0^1 \frac{d(t^2\omega(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt = \omega(\bar{r}, d\bar{r}).$$

Рассмотрим сначала только одно слагаемое $\omega_0 = R\, dx \wedge dy$. Имеем

$$\frac{d(t^2 R(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt} = 2tR + t^2\frac{dR}{dt} =$$

$$= t\left(2R + x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right) = t\left(\frac{\partial(Rx)}{\partial x} + \frac{\partial(Ry)}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Далее воспользуемся тем, что $d\omega = 0$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Получим

$$\frac{d(t^2 R(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt} = t\left(\frac{\partial(Rx)}{\partial x} + \frac{\partial(Ry)}{\partial y} - z\frac{\partial P}{\partial x} - z\frac{\partial Q}{\partial y}\right) =$$

$$= t\left(\frac{\partial(Rx - Pz)}{\partial x} + \frac{\partial(Ry - Qz)}{\partial y}\right).$$

Отсюда имеем

$$\omega_0 = \int_0^1 \frac{d(t^2 R(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt\, dx \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 (Rx - Pz)t\, dt\right) dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^1 (Qz - Ry)t\, dt\right) dy \wedge dx.$$

Аналогично получим соотношения

$$\int_0^1 \frac{d(t^2 Q(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt\, dz \wedge dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^1 (Qz - Ry)t\, dt\right) dz \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 (Py - Qx)t\, dt\right) dx \wedge dz,$$

$$\int_0^1 \frac{d(t^2 P(t\bar r, d\bar r))}{dt}\, dt\, dy\wedge dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^1 (Py - Qx)t\, dt\right) dy\wedge dz + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^1 (Rx - Pz)t\, dt\right) dz\wedge dy.$$

Следовательно, форму α можно взять в виде

$$\alpha = \left(\int_0^1 (Qz - Ry)t\, dt\right) dx +$$

$$+ \left(\int_0^1 (Rx - Pz)t\, dt\right) dy + \left(\int_0^1 (Py - Qx)\, dt\right) dz.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Теорема 2 — частный случай теоремы Пуанкаре о множестве замкнутых и точных дифференциальных форм. Форму α в доказательстве достаточности теоремы 2 можно выбрать не единственным способом. Например, условию теоремы удовлетворяет любая форма вида $\alpha + d\beta$. Отметим также, что любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

Пример. Пусть V — некоторый выпуклый измеримый по Жордану компакт, $V \subset \mathbb{R}^3$. Для любой фиксированной точки $P \in \mathbb{R}^3$ и любой точки $M \in V$ определим радиус-вектор

$$\bar r = \bar r(M) = (x(M), y(M), z(M)), r = \sqrt{x^2(M) + y^2(M) + z^2(M)}$$

и элемент объема dV области V в виде $dV = dx(M)\, dy(M)\, dz(M)$. Пусть на области V задано векторное поле $\bar j = \bar j(M)$.

Тогда можно определить силовое поле $\bar H = \bar H(P)$ векторного поля $\bar j(M)$ по следующей формуле:

$$\bar H = \bar H(P) = \iiint_V \frac{[\bar j, \bar r]}{r^3}\, dV.$$

Отметим, что в любой точке $P \in \mathbb{R}^3$ определено силовое поле $\bar H(P)$. В случае $P \in \mathbb{R}^3 \setminus V$ интеграл, задающий поле $\bar H$, представляет собой обычный тройной интеграл Римана от гладкой функции. Если же $P \in V$, то этот интеграл является несобственным и его сходимость следует из признака сравнения (для этого область V можно разбить на шаровые слои с центром в точке P и радиусом r с условием $\varepsilon < r \le 2\varepsilon$, $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$).

Покажем, что для любой точки $P \notin V$ имеет место равенство

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0,$$

т.е. в силу теоремы 2 поле $\bar{H}$ является соленоидальным в области $\mathbb{R}^3 \setminus V$.

Действительно, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — орты, направленные по осям координат Ox, Oy, Oz прямоугольной системы координат, $\bar{j} = (j_1, j_2, j_3)$, $\bar{r} = (x, y, z)$, то имеем

$$\frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3} = \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_1 \frac{j_2 z - j_3 y}{r^3} + \bar{e}_2 \frac{j_3 x - j_1 z}{r^3} + \bar{e}_3 \frac{j_1 y - j_2 x}{r^3} = P\bar{e}_1 + Q\bar{e}_2 + R\bar{e}_3.$$

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (j_3 y - j_2 z)\frac{3x}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y} = (j_1 z - j_3 x)\frac{3y}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z} = (j_2 x - j_1 y)\frac{3z}{r^5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \bar{H} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

т.е. поле $\bar{H}$ является соленоидальным в области $\mathbb{R}^3 \setminus V$.

Покажем теперь, что при $P \notin V$ векторным потенциалом поля $\bar{H}$ является векторное поле

$$\bar{J} = \iiint\limits_V \frac{\bar{j}\, dV}{r},$$

т.е. поле $\bar{H}$ представляется в виде $\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{J}$.

В силу гладкости подынтегральной функции можно поменять порядок следования оператора rot и тройного интеграла. Тогда достаточно доказать, что

$$\operatorname{rot}\left(-\frac{\bar{j}}{r}\right) = \frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3}.$$

Действительно, имеем

$$\operatorname{rot} \frac{\bar{j}}{r} = [\nabla, \frac{\bar{j}}{r}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{j_1}{r} & \frac{j_2}{r} & \frac{j_3}{r} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_1 \left(j_3 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} - j_2 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} \right) + \bar{e}_2 \left(j_1 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} - j_3 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} \right) +$$

$$+\bar{e}_3 \left(j_2 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} - j_1 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} \right) =$$

$$= -P\bar{e}_1 - Q\bar{e}_2 - R\bar{e}_3,$$

где функции P, Q и R определены выше.

На этом мы завершаем рассмотрение вопросов, связанных с векторным анализом.

Глава XXI
ОБЩАЯ ФОРМУЛА СТОКСА

Лекция 16

§ 1. ПОНЯТИЕ ОРИЕНТИРОВАННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Общая формула Стокса является естественным многомерным обобщением теоремы Ньютона – Лейбница о выражении определенного интеграла через первообразную функцию. Впервые эта формула была опубликована А.Пуанкаре в 1899 году в знаменитом мемуаре “Новые методы небесной механики”. Чтобы подчеркнуть возможность использования найденной формулы при интегрировании по поверхности любой размерности, он назвал ее обобщением теоремы Стокса, имея в виду формулу Стокса, связывающую поток векторного поля через поверхность и его циркуляцию вдоль границы поверхности.

Современное изложение доказательства различных вариантов общей формулы Стокса, как правило, опирается на применение достаточно развитой теории внешних дифференциальных форм и интегралов от них по поверхностям. Эта причина, по - видимому, является определенным препятствием для полного изложения ее доказательства в курсах анализа.

Здесь мы предлагаем новый вариант доказательства общей формулы Стокса, использующий, по существу, те же средства, что и в классическом трехмерном случае. Сначала с помощью параметризации поверхности мы определяем понятие интеграла от дифференциальной формы. При этом мы показываем, что его значение с точностью до знака не зависит от выбора параметризации. Далее обосновывается связь между выбором параметризации, определяющей ориентацию поверхности, и знаком интеграла. Следующий шаг — введение правила согласования ориентации поверхности и ориентации ее границы, что одновременно используется для конструирования поверхности путем “склейки” образов выпуклых множеств по общим частям их границ, имеющих противоположную ориентацию. Заметим, что использование выпуклости прообразов этих множеств вносит некоторые упрощения в доказательство основной теоремы без существенного ограничения общности.

Отметим еще раз важность проблемы согласования ориентации поверхности и ориентации ее границы, которая возникает неоднократно в процессе изложения. Уже на примере самой формулы Ньютона –

Лейбница эта особенность выявляется как зависимость знака интеграла от направления интегрирования, т.е. изменение знака интеграла при перестановке пределов интегрирования. Наиболее просто вопрос о согласовании ориентаций поверхности и ее границы решается в случае поверхностей размерности 1 (кривые) и коразмерности 0. Данное обстоятельство лежит в основе нашего индуктивного определения ориентации поверхности и ее границы. При этом согласование ориентаций проводится с использованием выпуклости прообраза поверхности.

В заключение следует сказать, что основная трудность при выводе общей формулы Стокса как раз и состоит в построении необходимой системы понятий, в то время как само доказательство очень простое.

Пусть k и n — натуральные числа, $1 \leq k \leq n$. Мы определим **кусочно-гладкую ориентированную поверхность размерности k в пространстве n измерений** индукцией по ее размерности k.

При $k = 1$ эта поверхность представляет собой **кусочно-гладкую кривую** без кратных точек, на которой задано направление обхода, т.е. начало следующего гладкого куска кривой совпадает с концом предыдущего. При этом под гладким куском кривой мы понимаем образ направленного отрезка числовой оси при гладком взаимно однозначном отображении, имеющем ранг, равный единице.

Пусть $k \geq 2$. Тогда поверхность (точнее, гладкий кусок поверхности) размерности k определяется как образ B выпуклого k-мерного множества A в k-мерном пространстве, имеющего кусочно-гладкую границу ∂A, при гладком взаимно однозначном невырожденном (то есть ранга k) отображении $\bar{\varphi}$, то есть $B = \bar{\varphi}(A)$.

Заметим, что в этом случае ∂B — граница поверхности B — является поверхностью размерности $k - 1 \geq 1 (\partial B = \bar{\varphi}(\partial A))$. Прообраз A отображения $\bar{\varphi}$ называется *картой* гладкого куска поверхности B. Само отображение $\bar{\varphi}$ назовем *параметризацией* данного куска поверхности.

Пусть заданы две параметризации $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ поверхности B. Будем говорить, что они определяют **одинаковую ориентацию** поверхности B, если замена параметров является диффеоморфизмом $\bar{\lambda}$ с положительным якобианом $J_{\bar{\lambda}}$. Если же якобиан $J_{\bar{\lambda}}$ отрицателен, то параметризации $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ задают **противоположные ориентации.**

Заметим, что если якобиан отображения λ положителен хотя бы в одной точке, то он положителен и для всех точек множества A. Этот факт следует из того, что отображения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ не вырождены, то есть матрицы Якоби $J_{\bar{\varphi}}$ и $J_{\bar{\psi}}$ отображений $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ имеют максимальный ранг, равный k, и $J_{\bar{\psi}} = J_{\bar{\lambda}} \cdot J_{\bar{\varphi}}$. Таким образом, ориентируемая поверхность допускает в точности две ориентации.

Для того чтобы определить понятие ориентированной поверхности, состоящей из многих гладких кусков, нам прежде всего потребуется "согласовать" ориентацию поверхности и ее границы.

§ 2. СОГЛАСОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИЙ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ГРАНИЦЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Определим сначала **внешнюю сторону границы** $\partial A \subset \mathbb{R}^k$. Так как она является кусочно-гладкой поверхностью размерности $k-1$, то в каждой точке ее гладкости можно задать вектор нормали к ней (этот вектор ортогонален касательному подпространству размерности $k-1$). Прямая, проходящая через рассматриваемую точку $x_0 \in \partial A$ и коллинеарная вектору нормали, пересекает множество A по некоторому отрезку в силу выпуклости A. Тогда направляющий вектор $\bar{n}$ луча этой прямой с началом в точке x_0, не пересекающий множество A, называется **внешней нормалью к границе** ∂A **в точке** x_0, а вектор $(-\bar{n})$ — **внутренней нормалью.**

Пусть параметризация $\bar{\chi} = \bar{\chi}(\bar{t})$, $\bar{\chi} = (\chi_1, \ldots, \chi_k)$, $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{k-1})$ задает данный гладкий кусок границы множества A. Будем говорить, что эта **параметризация отвечает (соответствует) внешней стороне границы** ∂A, если матрица Якоби этого отображения, дополненная *слева* вектором внешней нормали $\bar{n}$, т.е. матрица

$$\left(\bar{n}, \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t_{k-1}}\right),$$

имеет положительный определитель. Тем самым на прообразе A мы согласовали ориентацию множества A и ориентации его границы ∂A.

Далее пусть, как и раньше, $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ задает параметризацию поверхности $B = \bar{\varphi}(A)$ и пусть $\bar{\chi} : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ задает параметризацию границы ∂A. Тогда отбражение $\bar{\varphi} \cdot \bar{\chi}$ задает параметризацию границы ∂B поверхности B.

Будем говорить, что **ориентация поверхности** B **и ориентация ее границы** ∂B **согласованы,** если ∂B есть образ границы ∂A, параметризация которой отвечает ее внешней стороне.

Пример. Пусть множество ∂B задается уравнением

$$x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

на границе ∂A выпуклого множества A в $k-1$ - мерном пространстве, где f — кусочно-гладкая функция на A. Тогда множество ∂B является кусочно - гладкой поверхностью размерности $k-1$ и ее параметризацию $\bar{\varphi}$ можно задать следующими уравнениями:

$$x_1 = t_1, \ldots, x_{k-1} = t_{k-1},\ x_k = f(t_1, \ldots, t_{k-1}).$$

Матрица Якоби этого отображения имеет ранг, равный $k-1$, поскольку она содержит единичную подматрицу размерности $k-1$. Внешняя нормаль $\bar{n}$ к поверхности B коллинеарна вектору

$$\bar{h} = \left(-\frac{\partial f}{\partial t_1}, -\frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}}, 1\right), \bar{n} = \frac{\bar{h}}{\bar{h}},$$

а матрица

$$\left(\bar{n}, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t_{k-1}}\right),$$

может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial t_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial t_2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{h} & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial t_{k-1}} \end{pmatrix},$$

и ее определитель равен

$$(-1)^{k-1}\left(1 + (\frac{\partial f}{\partial t_1})^2 + (\frac{\partial f}{\partial t_2})^2 \dots + (\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}})^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно, ориентация поверхности B и ориентация ее границы ∂B в данном случае согласованы, если k – нечетное число. В случае четного числа k для того, чтобы согласовать ориентации поверхности B и ее границы, следует ориентацию границы ∂B заменить на противоположную.

Определим теперь кусочно-гладкую k-мерную ориентированную поверхность в n-мерном пространстве, состоящую из нескольких связанных между собой гладких ориентированных кусков с согласованно ориентированными границами.

Пусть два таких куска $\bar{\varphi}_1 : A_1 \to B_1$ и $\bar{\varphi}_2 : A_2 \to B_2$ соприкасаются по участку (b) их границ ∂B_1 и ∂B_2, причем $B_1 \cap B_2 = (b) \subset \partial B_1 \cap \partial B_2$. Если при этом: 1) участок (b) является кусочно-гладкой поверхностью размерности $k-1$ и 2) две ориентации поверхности (b), порождаемые $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$, являются противоположными, то объединение поверхностей $B = B_1 \cup B_2$ мы будем рассматривать как одну кусочно-гладкую ориентированную поверхность B (состоящую из двух кусков поверхности B_1 и B_2). Аналогично поступаем и для случая любого конечного количества связанных между собою подобным образом гладких кусков поверхности.

Заметим, что при разбиении гладкого куска ориентированной поверхности на две кусочно-гладкие ориентированные поверхности при помощи кусочно-гладкой ориентированной граничной поверхности эта граничная поверхность относительно каждого из получившихся ориентированных кусков приобретет противоположные ориентации.

Совокупность карт, отвечающих всем кускам данной поверхности, будем называть ее **атласом.**

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение. *Пусть $1 \le k \le n$. Тогда* **дифференциальной формой k-го порядка**, *определенной на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, будем называть следующее выражение (канонический вид дифференциальной формы):*

$$\omega = \omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{1 \le m_1 < \dots < m_k \le n} \cdots \sum F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})\, dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k},$$

причем операция $\wedge$ внешнего произведения дифференциалов (формальная) удовлетворяет условиям:

а) $(dx \wedge dy) \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz)$ (ассоциативность);

б) $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (антисимметричность);

в) $d(ax_1 + bx_2) \wedge dy \wedge \dots \wedge dz = a\, dx_1 \wedge dy \wedge \dots \wedge dz + b\, dx_2 \wedge dy \wedge \dots \wedge dz$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *(полилинейность).*

Дифференциальную форму ω_0 вида $\omega = F(\bar{x})\, dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k}$ назовем **базисной дифференциальной k-формой.**

Примеры. 1. Пусть $k = 1$. Тогда форму первого порядка можно представить в виде

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} F_s(\bar{x})\, dx_s.$$

2. Пусть $k = n$. Тогда сумма в определении дифференциальной формы ω состоит из одного слагаемого, и форма ω имеет вид

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = F(\bar{x})\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

§ 4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Определение понятия замены переменных в дифференциальной форме нужно в основном для того, чтобы ввести понятие поверхностного интеграла по ориентированной кусочно-гладкой поверхности, размерность которой меньше размерности основного пространства. Но, разумеется, оно имеет место и в случае, когда эти размерности совпадают. По существу, данное определение достигается заменой $\bar{x}$ на $\bar{\varphi}(\bar{t})$ и dx_i на $d\varphi_i(\bar{t})$.

Определение. *Пусть ω — дифференциальная k-форма и $\bar{\varphi}$ — гладкое отображение, $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда имеет место следующее* **правило замены переменных** $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$:

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \omega_1(\bar{t}, d\bar{t}),$$

где

$$\omega_1 = \omega_1(\bar{t}, d\bar{t}) = \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_k \le n} \cdots \sum F_{m_1,\ldots,m_k}(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}),$$

$$d\varphi_s(\bar{t}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t_r}\, dt_r.$$

Приведем форму ω_1 к каноническому виду

$$\omega_1(\bar{t}, d\bar{t}) = \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_k \le n} \cdots \sum \Phi_{r_1,\ldots,r_k}(\bar{t})\, dt_{r_1} \wedge \cdots \wedge dt_{r_k}.$$

Для этого сначала преобразуем к каноническому виду элементарную форму ω_0, где

$$\omega_0 = d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}).$$

Имеем

$$\omega_0 = \left(\sum_{r_1=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial t_{r_1}}\, dt_{r_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{r_k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{m_k}}{\partial t_{r_k}}\, dt_{r_k}\right) =$$

$$= \sum_{r_1=1}^{n} \cdots \sum_{r_k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial t_{r_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_{m_k}}{\partial t_{r_k}}\, dt_{r_1} \wedge \cdots \wedge dt_{r_k} =$$

$$= \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_k \le n} \cdots \sum \left(\varepsilon_\sigma \sum_{\sigma} \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial t_{\sigma(r_1)}} \cdots \frac{\partial \varphi_{m_k}}{\partial t_{\sigma(r_k)}}\right) dt_{r_1} \wedge \cdots \wedge dt_{r_k} =$$

$$= \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_k \le n} \cdots \sum \frac{D(\varphi_{m_1}, \ldots, \varphi_{m_k})}{D(t_{r_1}, \ldots, t_{r_k})}\, dt_{r_1} \wedge \cdots \wedge dt_{r_k}.$$

Здесь ε_σ равно $+1$ или -1 в зависимости от четности подстановки σ, составленной из чисел $\sigma(r_1), \ldots, \sigma(r_k)$. Подставляя последнее выражение в равенство, определяющее форму ω_1, найдем

$$\Phi_{r_1,\ldots,r_k} = \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_k \le n} \cdots \sum F_{m_1,\ldots,m_k}(\bar{\varphi}(\bar{t})) \frac{D(\varphi_{m_1}, \ldots, \varphi_{m_k})}{D(t_{r_1}, \ldots, t_{r_k})}.$$

Форму ω_1 обычно обозначают символом $\omega_1 = \varphi^*\omega$ и называют **формой, индуцированной отображением** φ, или просто **индуцированной формой**.

Примеры. 1. Пусть $k = 1$. Тогда

$$\varphi^*\omega = \sum_{r=1}^{n} \Phi_r(\bar{t})\, dt_r, \quad \Phi_r(\bar{t}) = \sum_{m=1}^{n} F_m(\bar{\varphi}(\bar{t})) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_r}.$$

2. При $k = n$ имеем

$$\varphi^*\omega = F(\bar{\varphi}(\bar{t})) \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$