Лекция 17

§ 5. ИНТЕГРАЛ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Сначала рассмотрим интеграл от дифференциальной n-формы по n-мерной ориентированной поверхности B в пространстве n измерений. Канонический вид формы ω в этом случае можно записать, так:

$$\omega = F(\bar{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Определим интеграл от ω по поверхности B (ориентированной естественным образом) как n-кратный интеграл Римана, т.е.

$$\int\limits_B \omega = \int\limits_B F(\bar{x})\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Поскольку после замены переменных $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$, связанной с параметризацией поверхности $B = \bar{\varphi}(A)$, отвечающей ее ориентации, мы приходим к дифференциальной k-форме $\varphi^*\omega$, определенной на k-мерном множестве A в пространстве k измерений и имеющей канонический вид

$$\omega_1 = \varphi^*\omega = \Phi(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k,$$

по аналогии со случаем $k = n$ мы имеем правило, выражающее k-кратный поверхностный интеграл от k-формы ω_1 через обычный k-кратный интеграл Римана.

Это обстоятельство позволяет нам дать следующее определение поверхностного интеграла от дифференциальной формы.

Определение. Поверхностным интегралом I **по кусочно-гладкой ориентированной поверхности** B *от гладкой дифференциальной k-формы ω (т.е. формы с гладкими коэффицентами) называется выражение*

$$I = \int\limits_B \omega = \int\limits_A \varphi^*\omega,$$

где множество A есть k-мерное выпуклое компактное измеримое по Жордану множество в пространстве k измерений, $B = \bar{\varphi}(A)$.

При этом интеграл по множеству A, как и в случае $k = n$, выражается через обычный k-кратный интеграл Римана с помощью формальной замены выражения $dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$ на выражение $dt_1 \ldots dt_k$.

Заметим еще, что если параметризация $\bar{\varphi}$ поверхности B определяет на B ориентацию, противоположную заданной, то согласно данному выше определению

$$I = \int\limits_B \omega = -\int\limits_A \varphi^* \omega.$$

Пример. Пусть $B = L$ - окружность с центром в нуле радиуса 1 на плоскости xOy, пробегаемая против часовой стрелки. Зададим эту ориентацию с помощью отображения $\bar{\varphi} : [0, 2\pi] \to B$ равенствами

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Рассмотрим дифференциальную 1 - форму

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Тогда имеем $\varphi^* \omega = dt$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_L \omega = \int\limits_A \varphi^* \omega = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Для проверки корректности определения интеграла $\int\limits_B \omega$ надо доказать, что его величина не зависит от параметризации $\bar{\varphi}$, сохраняющей ориентацию. Напомним, что любые две такие параметризации $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ связаны между собой соотношением $\bar{\psi} = \bar{\varphi} \cdot \bar{\lambda}$, где $\lambda : A \to A_1$ — некоторый диффеоморфизм с положительным якобианом.

Т е о р е м а 1. *Пусть параметризации $\bar{\varphi} : A \to B$ и $\bar{\psi} : A_1 \to B$ задают одну и ту же ориентацию поверхности B. Тогда имеем*

$$\int\limits_A \varphi^* \omega = \int\limits_A \psi^* \omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференциальная форма $\bar{\varphi}^* \omega$ является k-формой в пространстве $\mathbb{R}^k$ той же размерности k, поэтому канонический вид ее таков:

$$\bar{\varphi}^* \omega = \Phi(\bar{t})\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k.$$

Воспользуемся теперь формулой замены переменных:

$$\psi(\bar{u}) = (\bar{\varphi} \cdot \bar{\lambda})(\bar{u}),\ \bar{t} = \bar{\lambda}(\bar{u}).$$

Получим

$$\bar{\psi}^*\omega = (\bar{\varphi}\cdot\bar{\lambda})^*\omega = \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\, d\lambda_1(\bar{u})\wedge\cdots\wedge d\lambda_k(\bar{u}) =$$

$$= \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})}\, du_1\wedge\cdots\wedge du_k.$$

Так как $\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})} > 0$ (из условия сохранения ориентации), то по формуле замены переменных в кратном интеграле имеем

$$\int\limits_A \bar{\psi}^*\omega = \int\limits_A (\bar{\varphi}\cdot\bar{\lambda})^*\omega = \int\limits_A \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})}\, du_1\wedge\cdots\wedge du_k =$$

$$= \int\limits_A \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})}\, du_1\ldots du_k = \int\limits_A \Phi(\bar{t})\, dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \int\limits_A \Phi(\bar{t})\, dt_1\wedge\cdots\wedge dt_k = \int\limits_A \bar{\varphi}^*\omega.$$

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема является весьма полезным инструментом в различных приложениях поверхностных интегралов. В случае интеграла Римана она решает задачу нахождения подынтегральной функции по ее первообразной.

Т е о р е м а 2. *Пусть U — выпуклый измеримый компакт в $\mathbb{R}^n$. Пусть также для любой ориентированной кусочно-гладкой k-мерной поверхности $B\subset U$ существует интеграл второго рода $I(B)$ от непрерывной дифференциальной k-формы ω. Тогда форма ω однозначно определяется по значениям интегралов $I(B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\!\!\cdots\!\!\sum a_{i_1,\ldots,i_k}(\bar{x})\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Пусть $a(\bar{x}) = a_{i_1,\ldots,i_k}(\bar{x})$ — любой коэффициент формы ω. Найдем его значение в точке $\bar{x}_0 = (x_{10},\ldots,x_{n0})\in U$. Для этого на k - мерной плоскости $x_i = x_{i0}, i\ne i_1,\ldots,i_k$ возьмем ε-окрестность S_ε точки $\bar{x}_0$. Это будет ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^n$. В качестве параметризации ее возьмем переменные $\bar{t} = (t_1,\ldots,t_k)$, $t_1 = x_{i1},\ldots,t_k = x_{i_k}$. Тогда интеграл $I(S_\epsilon)$ равен

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\omega = \int\limits_{S_\epsilon} a(x_{10},\ldots,t_1,\ldots,x_{n0})\, dt_1\ldots dt_k,$$

где последний интеграл является обычным k-кратным интегралом Римана. Отсюда по теореме о среднем имеем

$$a(\bar{x}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu(S_\varepsilon)} \int\limits_{S_\varepsilon} \omega.$$

Теорема 2 доказана.

§ 6. ОПЕРАЦИЯ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В дальнейшем мы всюду будем пользоваться тем, что выражение, т.е. диффернциальную форму $dF(\bar{x})$, записанную в каноническом виде, можно рассматривать и как обычный дифференциал функции $F(\bar{x})$. Приведем теперь определение внешнего дифференциала.

Определение. Дифференциалом (*точнее, внешним дифференциалом*) *дифференциальной k-формы ω называется $k+1$-форма $\omega_1 = d\omega$ вида*

$$d\omega = \sum_{1 \le m_1 < \dots < m_k \le n} \cdots \sum dF_{m_1 \dots m_k}(\bar{x}) \wedge dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k}.$$

Примеры. 1. Пусть $k=1$. Тогда

$$d\omega = \sum_{1 \le m \le n} dF_m(\bar{x}) \wedge dx_m = \sum_{1 \le m \le n} \sum_{1 \le r \le n} \frac{\partial F_m}{\partial x_r}\, dx_r \wedge dx_m =$$

$$= \sum_{1 \le r < m \le n} \sum \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_m} \right) dx_r \wedge dx_m.$$

2. Пусть $k = n-1 = 2$, $\bar{a} = (P, Q, R)$, $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} \bar{a})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Л е м м а 1. *Пусть заданы ω_1 — дифференциальная k_1-форма,..., ω_r — дифференциальная k_r-форма. Тогда имеет место равенство*

$$d(\omega) = d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{k_1 + \dots + k_s} \omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_s \wedge \dots \omega_r.$$

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться рассмотрением базисных дифференциальных форм вида

$$\omega_1 = F_1(\bar{x})\, dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k_1)} = F_1(\bar{x})\omega_{1,0}, \dots,$$

$$\omega_r = F_r(\bar{x})\, dx_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\tau(k_r)} = F_r(\bar{x})\omega_{r,0},$$

где σ, τ — некоторые подстановки n чисел. По определению имеем

$$d(\omega) = d(F_1(\bar{x}) \dots F_r(\bar{x})) \wedge \omega_{1,0} \wedge \dots \wedge \omega_{r,0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (F_1(\bar{x}) \dots dF_s(\bar{x}) \dots F_r(\bar{x})) \wedge \omega_{1,0} \wedge \dots \wedge \omega_{r,0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} (-1)^{k_1 + \dots + k_s} \omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_s \wedge \dots \omega_r.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство* $d^2\omega = 0$.

Доказательство. Действительно, имеем

$$d^2\omega = d(d\omega) =$$

$$= \sum_{1 \le m_1 < \dots < m_k \le n} \cdots \sum \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r}\, dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{m_1} \wedge dx_{m_k} =$$

$$= \sum_{1 \le m_1 < \dots < m_k \le n} \cdots \sum \sum_{1 \le s < r \le n} \sum \left(\frac{\partial^2 F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r} - \frac{\partial^2 F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_r \partial x_s} \right) \times$$

$$\times dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k} = 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Шварца о равенстве вторых смешанных производных при условии их непрерывности.

Лемма 2 доказана.

Теорема. *Пусть* $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— дважды непрерывно дифференцируемое отображение и* ω *— гладкая дифференциальная форма. Тогда справедливо равенство*

$$\bar{\varphi}^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение теоремы только для дифференциальной формы

$$\omega = F(\bar{x})\, dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k}.$$

Из определения дифференциала формы ω и леммы 1 имеем

$$d(\bar{\varphi}^*\omega) = d(F(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})) =$$

$$= d(F(\bar{\varphi}(\bar{t})) \wedge d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})) +$$

$$+ F(\bar{\varphi}(\bar{t}) \wedge d(d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})) = A + B.$$

Вновь воспользуемся леммой 1, а затем — леммой 2. Получим

$$B = \sum_{s=1}^{k} d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d^2\varphi_{m_s}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}) = 0.$$

Далее по определению индуцированной формы имеем

$$A = \bar{\varphi}^*(dF(\bar{x}) \wedge dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k}) = \bar{\varphi}^*(d\omega).$$

Теорема доказана.

§ 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. (общая формула Стокса). *Пусть B — кусочно-гладкая ориентированная поверхность размерности k и ориентация ее границы ∂B согласована с ориентацией самой поверхности B, ω — гладкая $k-1$-форма. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{\partial B} \omega = \int_{B} d\omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть поверхность B задается отображением $\bar{\varphi} : A \to B$. Тогда из следующей цепочки равенств получаем утверждение теоремы:

$$\int_{\partial B} \omega \overset{(1)}{=} \int_{\partial A} \bar{\varphi}^*\omega \overset{(2)}{=} \int_{A} d(\bar{\varphi}^*\omega) \overset{(3)}{=} \int_{A} \bar{\varphi}^*(d\omega) \overset{(4)}{=} \int_{B} d\omega.$$

В доказательстве нуждается только второе равенство

$$\int_{\partial A} \bar{\varphi}^*\omega = \int_{A} d(\bar{\varphi}^*\omega),$$

так как первое и четвертое равенства следуют из определения поверхностного интеграла второго рода, а третье — из справедливости соотношения $\bar{\varphi}^*(d\omega) = d(\bar{\varphi}^*\omega)$.

Согласно определению $k-1$-формы в k-мерном пространстве и операции дифференцирования имеем

$$\bar{\varphi}^*\omega = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_{k-1}\le k}\cdots\sum \Phi_{m_1,\ldots,m_{k-1}}(t_1,\ldots,t_k)\, dt_{m_1}\wedge\cdots\wedge dt_{m_{k-1}},$$

$$d(\bar{\varphi}^*\omega) = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_{k-1}\le k}\cdots\sum \frac{\partial\Phi_{m_1,\ldots,m_{k-1}}(t_1,\ldots,t_k)}{\partial t_s}\, dt_s\wedge dt_{m_1}\wedge\cdots\wedge dt_{m_{k-1}},$$

где $1\le s\le k,\ s\ne m_1,\ldots,m_{k-1}$.

Из этого представления в силу линейности интеграла следует, что достаточно доказать равенство $\bar{t} = (t_1,\ldots,t_{k-1})$:

$$\int\limits_{\partial A}\Phi(\bar{t},t_k)\, dt_1\wedge\cdots\wedge dt_{k-1} = \int\limits_{A}\frac{\partial\Phi(\bar{t},t_k)}{\partial t_k}\, dt_k\wedge dt_1\wedge\cdots\wedge dt_{k-1}.$$

Обозначим через D проекцию множества A на гиперплоскость $t_k = 0$. В силу выпуклости множества A его можно представить в виде

$$A = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in D, f_1(\bar{t})\le t_k\le f_2(\bar{t})\},$$

где $f_1(t_1,\ldots,t_{k-1}), f_2(t_1,\ldots,t_{k-1})$ — некоторые функции, определенные на множестве D.

Границу множества D можно разбить на три множества:

$$\Pi_1 = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in D,\ t_k = f_1(t_1,\ldots,t_{k-1})\},$$

$$\Pi_2 = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in D,\ t_k = f_2(t_1,\ldots,t_{k-1})\},$$

$$\Pi_3 = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in\partial D,\ f_1(\bar{t} < t_k < f_2(\bar{t})\}.$$

Ограничимся здесь случаем, когда поверхность Π_3 является кусочно-гладкой ориентированной поверхностью. Она также является цилиндрической, а поверхности Π_1 и Π_2 можно представлять себе как "нижнюю" и "верхнюю" крышки этой цилиндрической поверхности.

Следует отметить, что множество Π_3 может быть и пустым, что, например, имеет место в случае, когда A есть k-мерный шар вида $t_1^2+\cdots+t_k^2\le 1$. Тогда, очевидно, поверхности Π_1 и Π_2 являются полусферами вида $t_1^2+\cdots+t_k^2 = 1$ с условием $t_k\le 0$ и $t_k\ge 0$ соответственно.

Покажем, что интеграл по поверхности Π_3 равен нулю. Действительно, поскольку Π_3 есть $k-1$-мерная поверхность в пространстве k измерений, то ее можно параметризовать

$$t_1 = t_1(\bar{u}), \ldots, t_{k-1} = t_{k-1}(\bar{u}), \ \bar{u} = (u_1, \ldots, u_{k-1}) \in \pi_3, \ \bar{t}(\pi_3) = \Pi_3.$$

Заметим, что $\bar{t}(\bar{u})$ является диффеоморфизмом.

Предположим, что якобиан отображения $\bar{t} : \pi_3 \to \Pi_3$ в точке $\bar{u} = \bar{u}_0$ не равен нулю, т.е.

$$J(\bar{u}_0) = \frac{D(t_1, \ldots, t_{k-1})}{D(u_1, \ldots, u_{k-1})} \neq 0.$$

Тогда в силу непрерывности функции $J(\bar{u})$ в некоторой окрестности точки $\bar{u} = \bar{u}_0$ она отлична от нуля. Далее, согласно теореме об обратном отображении точка $\bar{t}(\bar{u}_0)$ будет внутренней точкой множества D (проекции множества A на гиперплоскость $t_k = 0$). Но точка $\bar{t}(\bar{u}_0)$ — граничная точка множества D, что невозможно. Следовательно, в любой точке $\bar{u} \in \pi_3$ имеем равенство

$$J(\bar{u}) = \frac{D(t_1, \ldots, t_{k-1})}{D(u_1, \ldots, u_{k-1})} = 0.$$

Используя это, после замены переменных $\bar{t} = \bar{t}(\bar{u})$ в поверхностном интеграле получим

$$\int\limits_{\Pi_3} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_{\pi_3} \Phi(\bar{t}(\bar{u}), t_k) J(\bar{u})\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{k-1} = 0.$$

Рассмотрим теперь интегралы по поверхностям Π_1 и Π_2. В силу определения ориентации поверхности (см. пример §12) имеем

$$\int\limits_{\Pi_2} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \Phi(\bar{t}, t_k, f_2(\bar{t}))\, dt_1 \ldots dt_{k-1},$$

$$\int\limits_{\Pi_1} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = (-1)^{k} \int\limits_{D} \Phi(\bar{t}, t_k, f_1(\bar{t}))\, dt_1 \ldots dt_{k-1}.$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_{\partial A} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_{\Pi_1} + \int\limits_{\Pi_2} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \left(\Phi(\bar t, f_2(\bar t)) - \Phi(\bar t, f_1(\bar t))\right) dt_1 \dots dt_{k-1} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \left(\int\limits_{f_2(\bar t)}^{f_1(\bar t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\, dt_k \right) dt_1 \dots dt_{k-1} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\, dt_1 \dots dt_k = (-1)^{k-1} \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k =$$

$$= \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi(\bar t)}{\partial t_k}\, dt_k \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Ограничение на множество Π_3, наложенное при доказательстве последней теоремы, на самом деле не являются существенными. Дело в том, что любое выпуклое тело D в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как бесконечно-гладкий образ другого выпуклого тела $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, граница ∂D_0 которого не содержит отрезков прямой, а для такого тела множество Π_3 пусто.

Легко построить какое-либо бесконечно-гладкое в обе стороны отображение φ такое, что $\varphi(D_0) = D$ b $\psi(D) = D_0$, причем $\varphi(\psi(\bar x)) = \bar x$ для всех $\bar x \in \mathbb{R}^n$. В качестве соответствующего примера рассмотрим отображение $\psi(\bar x)$, задаваемое равенством

$$\psi(\bar x) = \bar x_0 + (\bar x - \bar x_0)\left(1 + e^{-\delta|\bar x - \bar x_0|^2}\right).$$

Здесь $\bar x_0$ — некоторая фиксированная внутренняя точка тела $D \subset \mathbb{R}^n$, а $\delta > 0$ — вещественная постоянная. Тогда тело D_0 получается как образ D при отображении ψ. Ясно, что обратное отображение φ всегда существует, причем как φ, так и ψ являются бесконечно-гладкими.

С другой стороны, с помощью стандартных вычислений можно показать, что при достаточно малом (в зависимости от отношения минимального и максимального расстояний от точки x_0 до границы ∂D тела D) значении параметра δ тело D_0 будет выпуклым и его граница ∂D_0 не будет содержать отрезков прямой. Учитывая достаточную громоздкость этих выкладок и большой произвол в выборе отображения ψ, проводить их здесь мы не будем, а ограничимся только сделанным замечанием.

Лекция 18

ДОПОЛНЕНИЕ.

§ 1. ПОНЯТИЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввел в математику Г.Вейль (H.Weyl.*Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.* Math. Ann.,1916, Bd.77, S.313 – 352). Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, теории функций, классической механике. Здесь мы докажем критерий равномерного распределения значений числовой последовательности на отрезке, принадлежащий Г.Вейлю.

Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Построим последовательность дробных частей $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}, \ldots$. Для простоты изложения в дальнейшем будем считать, что все члены последовательности $\{x_n\}$ находятся на полуинтервале $[0,1)$. Пусть $F(N) = F(N, \alpha, \beta)$ обозначает количество членов последовательности $\{x_n\}$, таких, что $n \le N$ и $\alpha \le \{x_n\} < \beta$, причем $0 \le \alpha < \beta \le 1$.

Положим

$$D(N) = \sup_{0 \le \alpha < \beta \le 1} |N^{-1} F(N, \alpha, \beta) - (\beta - \alpha)|.$$

Величина $D(N)$ называется *отклонением* первых N членов последовательности $\{x_n\}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *равномерно распределенной по модулю, равному единице* (р.р. mod 1 или просто р.р.), если $\lim\limits_{N \to \infty} D(N) = 0$.

Для дальнейшего нам будет необходима следующая лемма об оценке сверху абсолютной величины коэффициентов Фурье одной функции.

Лемма. *Пусть задано разложение функции*

$$\psi(x) = \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}}$$

в ряд Фурье

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x}.$$

Тогда при $N \geq 1$ и $m \geq 0$ справедлива оценка

$$|c_m| = |c_{-m}| \leq \frac{4 + \ln N}{\pi N} e^{-m/N}.$$

Доказательство. Очевидно, для коэффициентов Фурье имеет место равенство

$$c_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \psi_N(t) e^{2\pi imt}\, dt = \varepsilon \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi imt}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi t}}\, dt = \varepsilon K_m,$$

где $\varepsilon = 1/N$.

Рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{z | \Im z \geq 0,\ |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}$ функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{e^{2\pi imz}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi z}}.$$

Знаменатель ее обращается в нуль в точке

$$z = ia = i\frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2})}{\pi}.$$

Функция $f(z)$ будет однозначной функцией в области Π с разрезом по лучу $(ia, +i\infty)$.

Рассмотрим произвольное число $b > a > 0$ и построим контур L, состоящий из следующих промежутков вида $L_1 = [-1/2, 1/2]$, $L_2 = [1/2, 1/2 + ib]$, $L_3 = [1/2 + ib, ib]$, $L_4 = [ib, ia]$, $L_5 = [ia, ib]$, $L_6 = [ib, -1/2 + ib]$, $L_7 = [-1/2 + ib, -1/2]$, т.е. построим замкнутый контур $L = \bigcup\limits_{s=1}^{7} L_s$, который обходится в положительном направлении ("против часовой стрелки").

В силу основной теоремы Коши (пример к §8) имеем

$$\int_L f(z)\, dz = 0.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$c_m = \int_{L_1} f(z)\, dz = -\int_{L_2} f(z)\, dz - \cdots - \int_{L_7} f(z)\, dz.$$

В силу периодичности подынтегральной функции ($f(z + 1) = f(z)$) имеем

$$\int_{L_2} f(z)\, dz = -\int_{L_7} f(z)\, dz.$$

Далее, поскольку по разным берегам разреза значение квадратного корня от аналитической функции отличаются только знаком, а направления обхода по отрезкам L_4 и L_5 — противоположны, то

$$\int\limits_{L_4} f(z)\,dz = \int\limits_{L_5} f(z)\,dz.$$

Пусть $z = x + ib$, $x \in L_1$. Тогда при $b \to +\infty$ имеет место равномерный предел

$$f(z) = \frac{e^{2\pi imz}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi z}} \underset{S}{\rightrightarrows} 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Вейерштрасса, поскольку для некоторой постоянной $c > 0$ справедливо неравенство

$$|f(z)| = |f(x+ib)| \leq ce^{-\pi b(2m+1)}.$$

Следовательно, по теореме о переходе к пределу под знаком собственного интеграла от функции, зависящей от параметра, получим

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{L_3} f(z)\,dz = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{L_6} f(z)\,dz = 0.$$

Таким образом, имеем

$$K_\varepsilon = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz = 2 \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{L_4} f(z)\,dz = 2 \int\limits_{ia}^{+i\infty} f(z)\,dz.$$

Заметим, что $\sin(\pi it) = i\,\mathrm{sh}\,(\pi t)$. Поэтому интеграл K_ε преобразуется к виду

$$K_\varepsilon = 2i \int\limits_a^{+\infty} \frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{sh}^2\,\pi t}}\,dt = 2 \int\limits_a^{+\infty} \frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\pi t - \varepsilon^2}}\,dt.$$

Очевидно, имеем

$$\pi a = \ln(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}), \quad e^{\pi a} = \varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2},$$

$$e^{-\pi a} = -\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}, \quad \mathrm{sh}\,\pi a = \varepsilon,$$

Выполним в последнем выражении для интеграла K_ε замену переменных вида $x = t - a$. Получим

$$K_\varepsilon = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi m(x+a)}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\pi(x+a) - \mathrm{sh}^2\,\pi a}}\,dx.$$

Используя формулы,

$$\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{sh} \frac{u+v}{2} \operatorname{ch} \frac{u-v}{2}, \quad \operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{ch} \frac{u+v}{2} \operatorname{sh} \frac{u-v}{2},$$

найдем

$$\operatorname{sh}^2 \pi(x+a) - \operatorname{sh}^2 \pi a = \operatorname{sh} \pi(x+2a) \cdot \operatorname{sh} \pi x.$$

Следовательно, интеграл K_ε примет вид

$$K_\varepsilon = 2e^{-2\pi am} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi mx}}{\sqrt{\operatorname{sh} \pi(x+2a) \operatorname{sh} \pi x}}\, dx = 2e^{-2\pi am} G_a.$$

Так как при $x \geq 0$ функция $\operatorname{sh} x$ — монотонная и $\operatorname{sh} \pi x \geq \pi x$, то справедливы неравенства

$$G_a \leq I_1 + I_2,\ I_1 = \int_0^{2a} \frac{e^{-2\pi mx}}{\sqrt{\pi x \operatorname{sh} \pi(x+2a)}}\, dx,\ I_2 = \int_{2a}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi x}\, dx.$$

Далее, имеем $(\operatorname{sh} 2\pi a = 2\epsilon\sqrt{1+\epsilon^2})$:

$$I_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{sh} 2\pi a}} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{8a}{\pi \operatorname{sh} 2\pi a}} \leq \frac{2}{\pi}.$$

После замены переменной $t = e^{\pi x}$ получим

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{e^{2\pi a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}.$$

В результате замены переменной $u = 1/t$ находим

$$\int_{e^{2\pi a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \int_0^{e^{-2\pi a}} \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi a}{\operatorname{sh} \pi a} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$G_a \leq \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Наконец, получаем оценку для коэффициента Фурье

$$|c_m| \le 2\varepsilon \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) e^{-m\varepsilon} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\pi} \left(4 + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{-m\varepsilon} = \frac{4 + \ln N}{\pi N} e^{-m/N}.$$

Лемма полностью доказана.

Заметим, что в дальнейшем мы могли бы воспользоваться более слабыми оценками коэффициентов Фурье функции $\psi_N(x)$, но приведенная оценка имеет самостоятельный интерес.

§ 2. КРИТЕРИЙ Г. ВЕЙЛЯ

Докажем теперь следующую теорему, которая называется **критерием Г.Вейля** равномерного распределения значений последовательности по модулю, равному единице.

Теорема. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю единица;

2) при любых фиксированных α и $\beta, 0 \le \alpha < \beta < 1$, имеет место соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F(N,\alpha,\beta)}{N} = \beta - \alpha;$$

3) для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,1]$, справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx;$$

4) для любой непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx;$$

5) при любом целом числе $m \ne 0$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} = 0.$$

Доказательство. Очевидно, из определения имеем, что из первого утверждения теоремы следует второе утверждение. Кроме того, из третьего утверждения следует четвертое утверждение, а из него следует утверждение 5). Остается только доказать, что справедливы импликации: 2) $\Rightarrow$ 3) и 5) $\Rightarrow$ 1).

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 3). Определим периодическую функцию $g(x)$ с периодом 1 равенством

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha \le x < \beta, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда утверждение 2) можно представить в виде

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Заметим, что если последнее равенство выполняется для нескольких функциий $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, то оно выполняется для любой их линейной комбинации $c_1 g_1(x) + \cdots + c_k g_k(x)$ с вещественными коэффициентами $c_1, \ldots, c_k$. Следовательно, это равенство имеет место для любой кусочно-постоянной функции.

Возьмем теперь любую интегрируемую функцию $f(x)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T : 0 = x_0 < \cdots < x_r = 1$ отрезка $[0, 1]$, что выполняются неравенства

$$s(T) \le \int_0^1 f(x)\,dx \le S(T), \quad S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $s(T)$ и $S(T)$ — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу,

$$s(T) = \sum_{t=1}^{r} m_t \Delta x_t, \; S(T) = \sum_{t=1}^{r} M_t \Delta x_t,$$

$$m_t = \inf_{x\in\Delta_k} f(x), M_t = \sup_{x\in\Delta_k} f(x).$$

Суммы Дарбу $s(T)$ и $S(T)$ можно представить также в виде

$$s(T) = \int_0^1 h(x)\,dx, \; S(T) = \int_0^1 H(x)\,dx,$$

где

$$h(x) = m_t, H(x) = M_t, \text{если} \quad x \in \Delta_t = [x_{t-1}, x_t), t = 1, \ldots, r.$$

Так как $h(x)$ и $H(x)$ — кусочно-постоянные функции, то существует число N_0 такое, что для всех $N > N_0$ выполняются неравенства

$$|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) - \int_0^1 h(x)\,dx| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n) - \int_0^1 H(x)\,dx| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, имеем

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} < N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n) < S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но поскольку для всех точек $x \in [0,1]$ выполняется неравенство $h(x) \le f(x) \le H(x)$, будем иметь

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n).$$

Поэтому из предыдущего неравенства получим

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} < N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) < S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, имеем

$$|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\,dx| < S(T) - s(T) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

А это и означает, что выполняется утверждение 3).

Докажем теперь, что из 5) следует 1). Надо доказать, что

$$\lim_{Q\to\infty} D(Q) = 0.$$

Для этого преобразуем функцию

$$F(Q,\alpha,\beta) = \sum_{n\le Q} g(x_n),$$

где

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \alpha\le x<\beta,\\ 0 & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

Заметим, что функцию $g(x)$ можно представить в виде

$$g(x)=\rho(\beta-x)-\rho(\alpha-x)+(\beta-\alpha),$$

где $\rho(x)=1/2-\{x\}$. Рассмотрим далее периодическую функцию $g_0(x)$, с периодом 1,

$$g_0(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \alpha<x<\beta,\\ 1/2, & \text{если} \quad x=\alpha, x=\beta,\\ 0, & \text{если} \quad 0\le x<\alpha, \beta<x<1.\end{cases}$$

Она совпадает с функцией $g(x)$ во всех точках, кроме точек $x=\alpha$ и $x=\beta$, в которых она принимает значение, равное $1/2$. Эту функцию можно представить в виде

$$g_0(x)=\rho_0(\beta-x)-\rho_0(\alpha-x)+\beta-\alpha,$$

где

$$\rho_0(x)=\begin{cases}1/2-\{x\}, & \text{если} \quad x \quad \text{— нецелое число},\\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{— целое число}.\end{cases}$$

Ранее (см. лекцию 23, ч. III) для любого $N\ge 1$ мы получили неравенство

$$|\rho_0(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}|\le\psi_N(x),$$

где $\psi_N(x)=\frac{4}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}}$. Заметим, что последнее неравенство остáется справедливым, если значение функции ρ_0 в целых точках, равное нулю, заменить на значение $1/2$ функции $\rho(x)=1/2-\{x\}$ в тех же точках.

Разложим функцию $\psi_N(x)$ в ряд Фурье. По лемме его коэффициенты Фурье c_m оцениваются следующим образом

$$|c_m|\le(\pi N)^{-1}(4+\ln N)e^{-|m|/N}.$$

Таким образом

$$g(x)=\beta-\alpha+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi n}(\sin 2\pi n(\beta-x)-\sin 2\pi n(\alpha-x))+R_N,$$

где
$$|R_N| \le \psi_N(\beta - x) + \psi_N(\alpha - x).$$
Положим $M = [N \ln N] + 1$. Тогда функцию $\psi_N(x)$ можно представить в виде
$$\psi_N(x) = \sum_{0<|m|\le M} c_m e^{2\pi i m x} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right).$$

Теперь преобразуем функцию $F(Q;\alpha,\beta)$, исходя из соотношений для функции $g(x)$. Получим
$$|Q^{-1}F(Q;\alpha,\beta) - (\beta-\alpha)| = |Q^{-1}\sum_{n\le Q} g(x_n) - (\beta-\alpha)| \le$$
$$\le Q^{-1} \sum_{1\le|m|\le M} (|c_m| + \frac{1}{2\pi|m|})(|T_m(\beta)| + |T_m(\alpha)|) + \frac{A\ln N}{N},$$
где $A > 0$ — некоторая постоянная,
$$T_m(\beta) = \sum_{n\le Q} e^{2\pi i m(\beta - x_n)}.$$

Заметим, что для любого вещественного числа β справедливо равенство
$$|T_m(\beta)| = |T_m(0)| = T_m.$$

Возьмем любое число $\epsilon > 0$. Выберем наименьшее число N из условия
$$\frac{A\ln N}{N} < \frac{\varepsilon}{2},$$
т.е. возьмем
$$N = \left[\frac{2A}{\varepsilon}\ln\frac{2A}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Так как $\lim\limits_{Q\to\infty} Q^{-1}T_m = 0$, то существует число Q_0 такое, что для всех $Q > Q_0$ и для всех m, $1 \le m \le M = [N\log N] + 1$ выполняется неравенство
$$|Q^{-1}T_m| \le \frac{\pi\varepsilon}{4(1+\ln N)\ln N}.$$

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ мы нашли число Q_0 такое, что для всех $Q > Q_0$ справедливо неравенство
$$D(Q) = \sup_{0\le\alpha<\beta<1} |Q^{-1}F(Q;\alpha,\beta) - (\beta-\alpha)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{N\to\infty} D(Q) = 0$.

Теорема доказана полностью.

Примеры. **1.** Пусть α и β — вещественные числа и α — иррациональное число. Тогда последовательность $\{\alpha n+\beta\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Действительно, при любом фиксированном целом числе m, отличном от нуля, имеем

$$\sigma_N = |N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m(\alpha n+\beta)}| \le \frac{1}{N|\sin \pi m\alpha|}.$$

Так как α — иррациональное число, то $\sin \pi m\alpha \neq 0$. Поэтому $\sigma_N \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, согласно критерию Г.Вейля последовательность $\{\alpha n + \beta\}$ равномерно распределена по модулю 1.

2. Пусть α — иррациональное число и $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1. В частности, последовательность $x_n = \alpha n + \sqrt{n}$ равномерно распределена по модулю 1.

Положим $x_{n+1} - x_n = \alpha + y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S_N = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}.$$

Тогда имеем

$$S_N e^{2\pi i m\alpha} = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m(x_{n+1}-y_n)} =$$

$$= N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_{n+1}} + r_N,$$

где

$$r_N = N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{2\pi i m(x_{n+1}-y_n)} - e^{2\pi i m x_{n+1}}\right).$$

Отсюда получим

$$S_N(1 - e^{2\pi i m\alpha}) = r_N + N^{-1}(e^{2\pi i m x_{N+1}} - e^{2\pi i m x_1}).$$

Правая часть последнего равенства стремится к 0 при $N \to \infty$. Действительно, имеем

$$|r_N| \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} |e^{-2\pi i m y_n} - 1| = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} |\sin \pi m y_n| \le 2\pi|m|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} |y_n|.$$

Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n| = 0$. Получаем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}|y_n| = 0.$$

Поэтому имеем $\lim\limits_{N\to\infty} r_N = 0$.

Так как $1 - e^{2\pi i m\alpha} \neq 0$ (ввиду иррациональности числа α), то $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = 0$, а это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

3. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n \geq 2$. Тогда последовательность $\{\ln F_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Действительно, для F_n имеет место формула

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Отсюда получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем, что

$$\ln F_{n+1} - \ln F_n \to \ln\alpha,$$

поскольку число $\ln\alpha$ является иррациональным.

Значит, в силу утверждения примера 2 последовательность $\{\ln F_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

4. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ — иррациональное число. Тогда последовательность $\{f(n)\}$ равномерно распределена по модулю 1.

В самом деле, из теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$\lim_{n\to\infty}\Delta f(n) = \alpha.$$

Отсюда, используя утверждение примера 2, получим, что $\{f(n)\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Прежде чем рассматривать следующий пример, докажем неравенство Г.Вейля - ван дер Корпута.

Лемма. *Пусть $u_1,\ldots,u_N$ — любые комплексные числа, H — натуральное число, $1 \leq H \leq N$. Тогда справедливо неравенство*

$$H^2\left|\sum_{1\leq n\leq N} u_n\right|^2 \leq H(N+H-1)\sum_{1\leq n\leq N}|u_n|^2 +$$

$$+2(N+H-1)\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\left|\sum_{1\le n\le N-h} u_n\bar{u}_{n+h}\right|.$$

Здесь $\bar{u}$ обозначает число, комплексно сопряженное к числу u.

Доказательство. Для удобства рассуждений определим числа u_n для всех целых значений n следующим образом: $u_n = 0$ при $n \le 0$ и при $n > N$. Тогда имеет место равенство

$$H\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N+H-1}\sum_{m=0}^{H-1} u_{n-m}.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, и, пользуясь неравенством Коши:

$$\left|\sum a_\nu b_\nu\right|^2 \le \sum |a_\nu|^2 \sum |b_\nu|^2,$$

получим

$$H^2\left|\sum_{n=1}^{N} u_n\right|^2 \le (N+H-1)W,$$

где

$$W = \sum_{n=1}^{N+H-1}\left|\sum_{m=0}^{H-1} u_{n-m}\right|^2.$$

Преобразуем сумму W. Для этого выделим сумму "диагональных" членов W_1 и сумму "недиагональных" членов W_2. Имеем

$$W = \sum_{m=0}^{H-1}\sum_{k=0}^{H-1}\sum_{n=1}^{N+H-1} u_{n-m}\bar{u}_{n-k} = W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = \sum_{m=0}^{H-1}\left|\sum_{n=1}^{N+H-1} u_{n-m}\right|^2,$$

$$W_2 = \sum\sum_{0\le m<k\le H-1}\sum_{n=1}^{N+H-1}\left(u_{n-m}\bar{u}_{n-k} + \bar{u}_{n-m}u_{n-k}\right).$$

Очевидно, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{N+H-1} u_{n-m} = \sum_{n=1}^{N} u_n,$$

поскольку $u_n = 0$ при $n \leq 0$ и при $n > N$. Поэтому

$$W_1 = H \left| \sum_{n=1}^{N} u_n \right|^2 .$$

Преобразуем сумму W_2. Для этого обозначим $n-m = l, n-k = l+h$. Получим

$$W_2 = \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{h=1}^{H-m-1} \sum_{l=1}^{N-h} (u_l \bar{u}_{l+h} + \bar{u}_l u_{l+h}).$$

Меняя порядок суммирования по h и по m в сумме W_2, и, переходя к неравенствам, имеем

$$|W_2| \leq 2 \sum_{h=1}^{H-1} \sum_{m=0}^{H-h-1} \left| \sum_{l=1}^{N-h} u_l u_{l+h} \right| = 2 \sum_{h=1}^{H-1} (H-h-1) \left| \sum_{n=1}^{N-h} u_n u_{n+h} \right|$$

Лемма доказана.

5. Пусть для любого фиксированного натурального числа h последовательность $\{x_{n+h} - x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1. Тогда $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Зафиксируем целое число m, отличное от нуля, и натуральное число H. По неравенству Г.Вейля – ван дер Корпута имеем

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} \right|^2 \leq \frac{H+N-1}{HN} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{H-1} \frac{(H+N-1)(H-h)}{H^2 N} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m (x_{n+h} - x_n)} \right| .$$

При любом фиксированном $h \geq 1$ последовательность $\{x_{n+h} - x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1, следовательно, по критерию Г.Вейля при $N \to \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m (x_{n+h} - x_n)} \to 0.$$

Устремляя N к бесконечности в предыдущем неравенстве, получим

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} \right|^2 \leq \frac{1}{H} .$$

В силу того, что последнее неравенство имеет место для сколь угодно больших H, имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} = 0,$$

а это и означает, что $\{x_n\}$ р.р. mod 1.

6. Пусть $k \geq 1$ — некоторое фиксированное число. Пусть также предел

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^k x_n = \alpha$$

является иррациональным числом. Тогда последовательность $\{x_n\}$ — равномерно распределена по модулю 1.

Доказательство утверждения получается по индукции по параметру k. При $k = 1$ оно совпадает с утверждением примера 2. Предположим, что это утверждение верно при $k = m$. Докажем его при $k = m + 1$. Имеем

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) = \Delta^m x_{n+h} - \Delta^m x_n =$$

$$= \Delta^{m+1} x_n + \Delta^{m+1} x_{n+1} + \cdots + \Delta^{m+1} x_{n+h-1}.$$

Отсюда при фиксированном $h \geq 1$ и при $n \to \infty$ получим

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) \to h\alpha,$$

причем $h\alpha$ — также иррациональное число.

Заметим теперь, что

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) = \Delta^m(\Delta_h x_n).$$

В силу предположения индукции, примененного к последовательности $\{\Delta_h x_n\}$, имеем, что последовательность $\{\Delta_h x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1 при любом фиксированном $h \geq 1$.

Следовательно, из утверждения примера 5 имеем, что последовательность $\{x_n\}$ — равномерно распределена по модулю 1. В частности, отсюда следует, что последовательность значений многочлена $f(n)$ со старшим коэффициентом, являющимся иррациональным числом, будет равномерно распределена по модулю 1.

Примерные вопросы и задачи к коллоквиумам и экзаменам
Семестр I, коллоквиум №1

1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения, функции. Взаимно - однозначное соответствие. Обратная функция.

2. Эквивалентность множеств. Счётные множества. Счётность множества рациональных чисел.

3. Теорема Г.Кантора о неэквивалентности множества и множества всех его подмножеств.

4. Множество мощности континуум. Несчётность континуума.

5. Иррациональность квадратного корня из двух. Десятичная запись вещественного числа. Свойства вещественных чисел. Аксиома Архимеда.

6. Теорема о существовании точной верхней грани у ограниченного сверху числового множества.

7. Лемма об отделимости множеств. Лемма о системе вложенных отрезков. Лемма о последовательности стягивающихся отрезков.

8. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности и их свойства.

9. Неравенство Бернулли и бином Ньютона.

10. Сходящиеся последовательности и их арифметические свойства.

11. Предельный переход в неравенствах.

12. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса.

13. Число "e" и его иррациональность. Постоянная Эйлера.

14. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании частичного предела ограниченной числовой последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.

15. Критерий Коши сходимости последовательности.

16. Теорема Штольца. Предел последовательности средних арифметических членов сходящейся последовательности. Существование решения уравнения И.Кеплера.

17. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии. Итерационная формула Герона. Предельные соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, a > 0; \quad \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Задачи к коллоквиуму

1. Доказать, что $[a,b] \sim (a,b)$, $[a,b] \sim [a,b)$.
2. $\sup A = -\inf(-A)$, $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.
3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$, где k — постоянная.

   б). $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$, $a > 0$.
4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\dots+x_n}{n} = +\infty$.
5. Пусть $p_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (p_1 \dots p_n)^{1/n} = p$.

6. Исходя из $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$.

7. Доказать, что последовательность $a_n = (1+1/n)^{n+p}$ строго убывает тогда и только тогда, когда $p \geq 1/2$.

8. Для любого рационального числа r с условием $|r| < 1$ справедливо равенство $1+r \leq e^r \leq 1+\frac{r}{1-r}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots\frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

10. Пусть x_n — последовательность с ограниченным изменением, т.е. существует $C > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\sum_{k=1}^{n-1}|x_{k+1}-x_k| < c$. Тогда последовательность x_n сходится.

11. Пусть $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$.

12. а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$, если последние пределы существуют.

б). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n = b$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_nb_n = ab$.

в). $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-a_n)$.

13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$. Тогда существует $\min\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n$.

14. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$. Тогда последовательность $\{a_n\}$ имеет либо наибольший, либо наименьший элемент, либо и тот и другой.

15. Пусть $s_n = a_1+\dots+a_n \to +\infty$, $a_k > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$. Тогда множество предельных точек дробных частей $\{s_n\}$ совпадает с отрезком $[0,1]$.

16. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n) = 0$ и не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$, и пусть $l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}s_n$, $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}s_n$. Тогда последовательность s_n расположена всюду плотно на отрезке $[l,L]$.

17. а) Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$. Тогда существует бесконечно много номеров n, таких, что $a_n > \max(a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},\dots)$.

б) Пусть $a_n > 0$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n = 0$. Тогда существует бесконечно много номеров n, таких, что $a_n < \min(a_1,a_2,\dots,a_{n-1})$.

Семестр I, коллоквиум №2

1. Предел функции в точке. Функции, бесконечно малые в точке. Финальная ограниченность функций, имеющих предел в точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Свойство монотонности предела функции.

2. Критерий Коши существования предела функции по базе множеств.

3. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.

4. Теоремы о пределе сложной функции по базам множеств.

5. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность синуса и показательной функции.

6. Замечательные пределы.

7. Разрывы функции в точке и их классификация. Разрывы монотонных функций.

8. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций.

Непрерывность уравнения Кеплера.

9. Теоремы Коши о промежуточных значениях функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о достижении экстремальных значений функциями, непрерывными на отрезке.

10. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке. Свойства открытых и замкнутых множеств на числовой оси.

11. Лемма Бореля о конечном покрытии компакта открытыми множествами. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на компакте.

12. Понятия дифференциала и производной функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Односторонние производные. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.

13. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциремость решения уравнения Кеплера.

14. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производные элементарных функций.

15. Производные и дифференциалы высших порядков. Формулы Лейбница и Валле Пуссена.

16. Теорема Дарбу о возрастании функции в точке. Теорема Ролля о нуле производной. Теоремы Коши и Лагранжа о конечных приращениях.

17. Теорема Ферма об экстремуме функции. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной. Теорема о точках разрыва производной на интервале.

Задачи к коллоквиуму

1. Доказать, что а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ $(a > 1,\ n > 0)$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0$ $(a > 1,\ \varepsilon > 0)$.

2. Пусть функция $f(x)$ ограничена на любом интервале $(1, b)$, $b > 1$. Тогда а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x))$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x) \geq C > 0)$.

3. Пусть функция $f(x)$ ограничена на любом интервале $(1, b)$, $b > 1$, и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = \infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

4. Пусть при $x > 1$ задана последовательность вещественнозначных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Тогда найдется функция $f(x)$, растущая быстрее любой из этих функций при $x \to +\infty$.

5. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функции

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{если } |f(x)| < c, \\ c, & \text{если } f(x) > c, \end{cases}$$

где $c > 0$ — любое вещественное число,

$$m(x) = \inf_{a \leq y < x} f(y), \quad M(x) = \sup_{a \leq y < x} f(y),$$

также непрерывны.

6. Пусть $f(x)$ непрерывна и ограничена на интервале $(a,+\infty)$. Тогда для любого числа T найдется последовательность $x_n \to +\infty$, такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0$.

7. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. Тогда существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что $f(\xi)=\frac{f(x_0)+\dots+f(x_n)}{n+1}$.

8. Для того, чтобы функцию $f(x)$, непрерывную на конечном интервале (a,b), можно было продолжить непрерывным образом на отрезок $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a,b).

9. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, непрерывна хотя бы в одной точке, периодична и отлична от постоянной. Тогда она имеет наименьший положительный период.

10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, отлична от постоянной и удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+y)=f(x)f(y)$. Тогда $f(x)=a^x$, где $a=f(1)$. В этой задаче условие непрерывности можно заменить на условие ограниченности функции на любом интервале $(0,\alpha)$.

11. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x=0$.

12. Привести пример функции, определенной на всей числовой оси, непрерывной и разрывной почти всюду на ней.

13. Пусть уравнение $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$ имеет три различных вещественных корня. Тогда $p<0$.

14. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $(n-1)$-го порядка на интервале (a,b), n раз дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и справедливы равенства
$f(x_0)=f(x_1)=\dots=f(x_n)\quad(a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$.
Тогда существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

15. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[1,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. И наоборот, если $f(x)=o(x)$, то $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

16. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$, $f(a)<0$ и при некотором положительном k для всех $x>a$ выполняется неравенство $f'(x)>.k$ Тогда уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень в интервале $(a,\ a-f(a)/k)$.

17. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы n раз при $x\geq x_0$, пусть также
$f(x_0)=g(x_0)$, $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$ при $k=1,\dots,n-1$ и $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$ при всех $x>x_0$. Тогда при $x>x_0$ справедливо неравенство $f(x)>g(x)$.

Семестр II, коллоквиум

1. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке

2. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

3. Интеграл Римана как предел по базе. Классы интегрируемых функций.

4. Основные свойства определенного интеграла. Аддитивность интеграла.

5. Интеграл как функция верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла.

6. Теорема Ньютона - Лейбница. Формулы суммирования Эйлера и Абеля.

7. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

8. Первая и вторая теоремы о среднем значении.

9. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

10. Неравенства, содержащие интегралы.

11. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

12. Определение несобственного интеграла. Критерий Коши и достаточное условие сходимости несобственных интегралов.

13. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Специальные признаки сходимости.

14. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в несобственном интеграле.

15. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.

16. Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела. Определение меры Жордана.

17. Критерий измеримости множества по Жордану.

18. Свойства меры Жордана. Измеримость спрямляемой кривой.

19. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.

20. Определение и свойства меры Лебега. Интеграл Лебега. Интеграл Стильтьеса.

Задачи к коллоквиуму

1. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда точки непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ образуют всюду плотное множество.

2. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда для выполнения равенства $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

3. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0$.

4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

5. Пусть $f(x) \in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx$.

6. Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда функцию
$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ можно представить в виде суммы линейной функции и периодической функции с периодом T.

7. Пусть $f(x)$ — многочлен степени большей 1. Тогда $\int\limits_0^\infty \sin(f(x))\,dx$ сходится.

8. Пусть $f'(x)$ — монотонна и $|f'(x)| \geq A$ на $[a,b]$. Тогда имеем $\left|\int\limits_a^b \sin(f(x))\,dx\right| \leq \frac{2}{A}$.

9. Пусть $f''(x)$ — непрерывна и $|f''(x)| \geq A$ на $[a,b]$. Тогда имеем $\left|\int\limits_a^b \sin(f(x))\,dx\right| \leq \frac{4}{\sqrt{A}}$.

10. Пусть функция $f(x)$ монотонна на интервале $(0,a)$ и существует интеграл $\int\limits_0^a x^p f(x)\,dx$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0$.

11. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

12. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

13. Пусть $f(x) \in R[0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{[n/2]} f(\frac{2\nu-1}{n}) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

14. Пусть $f(x) \in R[0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1/n)-f(2/n)+\cdots+(-1)^n f((n-1)/n)}{n} = 0$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}\right)^{2/(n(n+1))} = e$.

16. Доказать формулу Валлиса $\pi = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{n}$, интегрируя по отрезку $[0,\pi/2]$ неравенство $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$.

17. Пусть функция $f(x)$ ограничена. Для того чтобы $f \in R[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ множество точек отрезка $[a,b]$, в которых $f(x)$ имеет колебание больше чем ε, можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше δ (Критерий Дюбуа-Реймона).

18. Пусть $f,g \in R[a,b]$. Тогда $\max(f,g) \in R[a,b]$ и $\min(f,g) \in R[a,b]$.

19. Пусть $a(t), b(t) \in C[a,b]$ и $\int\limits_a^b (a(t)x'(t) + b(t)x(t))\,dt = 0\ \forall x(t) \in C^1[a,b]$, $x(a) = x(b) = 0$. Тогда функция $a(t)$ дифференцируема и $a'(t) = b(t)$.

20. При $s > 1$ имеем $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s} = s\int\limits_1^{\infty} \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}\,dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

21. $\lim\limits_{s\to1+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$.

22. Пусть $f(x) > 0$ и не убывает на $[1,+\infty)$, и пусть при $x\to+\infty$ справедливо соотношение $\int\limits_1^x \frac{f(u)}{u}\,du \sim x$. Тогда имеем $f(x) \sim x$ при $x \to +\infty$.

23. Пусть $f(x) \geq 0$ на $[0,+\infty)$, и пусть при $\delta \to 0+$ справедливо равенство $\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-\delta t}\,dt \sim \frac{1}{\delta}$. Тогда при $T \to +\infty$ имеем $\int\limits_0^T f(t\,dt) \sim T$.

24. Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и $f \in R[a,b]$. Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Семестр II, экзамен

1. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке

2. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

3. Интеграл Римана как предел по базе. Классы интегрируемых функций.

4. Основные свойства определенного интеграла. Аддитивность интеграла.

5. Интеграл как функция верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла.

6. Теорема Ньютона - Лейбница. Формулы суммирования Эйлера и Абеля.

7. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

8. Первая и вторая теоремы о среднем значении.

9. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

10. Неравенства, содержащие интегралы.

11. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

12. Определение несобственного интеграла. Критерий Коши и достаточное условие сходимости несобственных интегралов.

13. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Специальные признаки сходимости.

14. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в несобственном интеграле.

15. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.

16. Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела. Определение меры Жордана.

17. Критерий измеримости множества по Жордану.

18. Свойства меры Жордана. Измеримость спрямляемой кривой.

19. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.

20. Непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$. Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

21. Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования. Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл дифференциала.

22. Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

23. Дифференциалы высших порядков. Достаточное условие дифференцируемости. Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

24. Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие экстремума.

25. Неявные функции. Теорема о неявной функции.

26. Система неявных функций. Теорема теорема о системе неявных функций. Теорема об обратном отображении.

27. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.

Семестр III, экзамен

1. Сходимость числового ряда. Гармонический ряд. Формулировка критерия Коши. Общий член и остаток ряда.

2. Признаки сходимости рядов (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Куммера и Раабе). Интегральный признак Коши – Маклорена. Сходимость ряда дзета-функции Римана.

3. Признаки сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле для произвольных числовых рядов.

4. Абсолютная и условная сходимость рядов. Перестановки членов абсолютно сходящегося ряда.

5. Теорема Римана о перестановках членов в условно сходящихся рядах.

6. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов. Теорема Мертенса о произведении рядов.

7. Теоремы о сходимости двойного и повторных числовых рядов.

8. Равномерная сходимость функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Критерий Коши и признак Вейерштрасса для равномерной сходимости функционального ряда.

9. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда.

10. Теорема Дини о равномерной сходимости функционального ряда.

11. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

12. Теорема о двойном и повторных пределах по базам множеств.

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Теорема Коши Адамара. Теорема Абеля о непрерывности суммы ряда на отрезке.

14. Бесконечные произведения. Признак абсолютной сходимости. Выражение гамма-функции в виде бесконечного произведения, формула Эйлера и функциональное уравнение для гамма-функции.

15. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра. Правило Лейбница. Теорема о равенстве повторных интегралов.

16. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости несобственных интегралов.

17. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости несобственных интегралов.

18. Теорема о повторных интегралах с бесконечными пределами. Вычисление интеграла Дирихле.

19. Интегральное представление для гамма-функции Эйлера. Формула дополнения. Формула Стирлинга.

20. Теорема о приближении функции Бернулли тригонометрическим многочленом.

21. Неравенство Бесселя для строго регулярной функции. Полнота замкнутой ортонормированной системы.

22. Теорема о замкнутости тригонометрической системы функций.

23. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье для строго кусочно-гладкой функции.

24. Ядро Дирихле и интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Принцип локализации Римана.

25. Признак Дини для сходимости ряда Фурье. Признаки Липшица, Жордана и Дирихле.

26. Разложение котангенса на простейшие дроби. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

27. Ядро Фейера. Аппроксимационная теорема Вейерштрасса для тригонометрических и алгебраических многочленов.

28. Методы Лапласа и стационарной фазы.

Семестр IV, экзамен

1. Двойной интеграл Римана как предел по базе. Критерий Римана интегрируемости функции от двух переменных по прямоугольнику.

2. Эквивалентность трех формулировок критерия существования двойного интеграла по прямоугольнику. Специальный критерий интегрируемости функции двух переменных по прямоугольнику, связанный с равномерными разбиениями.

3. Критерий измеримости по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры.

4. Эквивалентность двух определений — обобщенного и через характеристическую функцию множества, — двойного интеграла по ограниченной области, измеримой по Жордану.

5. Критерий измеримости по Жордану плоского множества.

6. Основные свойства двойного интеграла (линейность, интегрирование неравенств, теорема о среднем, аддитивность). Сведение двойного интеграла к повторному.

7. Интегрируемость функции двух переменных: а) непрерывной на прямоугольнике, б) непрерывной и ограниченной на множестве, измеримом по Жордану.

8. Теорема об оценке погрешности при замене приращения гладкого отображения на его дифференциал на компактном выпуклом множестве.

9. Лемма о площади образа выпуклого множества при гладком отображении. Замена переменных в двойном интеграле.

10. Критерий Лебега интегрируемости функции двух переменных по Риману.

11. Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий сходимости и признак сравнения для несобственного интеграла первого рода от неотрицательной функции.

12. Площадь поверхности. Выражение площади поверхности через двойной интеграл.

13. Свойства криволинейных интегралов первого и второго рода. Сведение криволинейного интеграла к определенному интегралу.

14. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой. Формула Грина.

15. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Ориентация кусочно-гладких поверхностей.

16. Формула Стокса.

17. Формула Гаусса-Остроградского.

18. Замена переменных в дифференциальной форме. Интеграл от дифференциальной формы по ориентированной поверхности.

19. Общая формула Стокса.

20. Потенциальное и соленоидальное векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

21. Дивергенция и ротор векторного поля. Основные формулы векторного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

2. *Валле-Пуссен Ш.* Курс анализа бесконечно малых. Т. I, II. Л.; М.: ГТТИ, 1933.

3. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа. Т. I, II. Л.; М.: ГТТИ, 1933.

4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс математического анализа. Т. I – III. М.: Физматгиз, 1962.

5. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

6. *Дьедонне Ж.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1964.

7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I, II. М.: Наука, 1990.

8. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. I – III. М.: Высшая школа, 1981.

9. *Виноградов И. М.* Дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1985.

10. *Ильин В.А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. I. Изд. 4-е, перераб. и доп., 1982, Ч. II. Изд. 2-е, стереотип., 1980. М.: Наука.

11. *Камынин Л. И.* Курс математического анализа. Ч. I, II. 1993, 1995. М.: Изд-во Моск. ун-та.

12. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Фазис, 1997. Ч. II. М.: Наука, 1990.

13. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1980.

14. *Ландау Э.* Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

15. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

16. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

17. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. I, II. Изд. 3-е. М.: Наука, 1978.

18. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

19. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.

20. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.

21. *Малышев Ф. М.* Симплециальные системы линейных уравнений. В кн.: Алгебра. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. С. 53 – 56.

22. *Крыжановский Д. А.* Sur les différentes définitions de limite. Одеса. Наукови записки науково-дослидчих катедр. 1924. Т.1(№8-9), с. 1 – 10.

23. *Гливенко В. И.* Опыт общего определения интеграла. Докл. АН СССР, 1937. Т.4, №2, с. 61 – 63.

24. *Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N.* A generalisation of the Heine limit for functions which converge on a base. Analysis Math. 1993, 30,№4, p.161 – 171.

25. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Об эквивалентноси двух типов сходимости по базе множеств. Докл. РАН 1993,т.330, №6, с.677 – 679.

26. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О сходимости по декартову произведению баз и о последовательных пределах. Докл. РАН. 1994,т. 339, №4, с. 437 – 438.

27. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Об общей формуле Стокса. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1995, №2, с. 34 – 44.

28. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О двойных и повторных пределах по базе. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1995, №5, с. 31.

29. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О равномерной сходимости функций в смысле Гейне. ДАН. 1996, т.347,№3, с.298 – 299.

30. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О равномерной поточечной сходимости по базе множеств. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1997, №1, с. 70 – 72.

31. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1967.

32. *Gordon R. A.* An iterated limits theorem applied to the Henstok integral. Real Analysis Exchange. 1995/96, v. 21(2) p.774 – 781.

33. *Lyche R. T.* Sur les fonctions d'une variable réelle. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandliger. – 1938, Bd. XI, №2, S.4 – 6.

34. *Nagell T.* Introduction to Number Theory. Stockholm.: Wiley& Sons, 1951.

35. *De la Vallée Poussin Ch.-J.* Mém. de l'Acad. de Belgique. 1896, v. LIII, №6.

36. *Chaundy T. W., Joliffe A. E.* The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. Proc. London Math. Soc.(2), 1916, v.15, p.214 – 216.

37. *Hardy G. H.* Some theorems concerning trigonometrical series of a special type. Proc. London Math. Soc.(2), 1930, v.32, p.441 – 448.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

ЧАСТЬ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава I. ВВЕДЕНИЕ 7

Лекция 1

§ 1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения. Функции 7

Лекция 2

§ 2. Эквивалентные множества. Счетные и несчетные множества. Мощность континуума 14

Лекция 3

§ 3. Вещественные числа 19

Лекция 4

§ 4. Полнота множества вещественных чисел 23

§ 5. Леммы об отделимости множеств, о системе вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков 27

Глава II. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 29

Лекция 5

§ 1. Метод математической индукции. Бином Ньютона и неравенство Бернулли 29

§ 2. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства 33

Лекция 6

§ 3. Предел последовательности 38

§ 4. Предельный переход в неравенствах 41

Лекция 7

§ 5. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число “e” и постоянная Эйлера 45

Лекция 8

§ 6. Теорема Больцано – Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной последовательности 52

§ 7. Критерий Коши для сходимости последовательности 53

Глава III. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ 55

Лекция 9

§ 1. Понятие предела числовой функции 55

§ 2. База множеств. Предел функции по базе 57

Лекция 10
§ 3. Свойство монотонности предела функции 63
§ 4. Критерий Коши существования предела функции по базе 64
Лекция 11
§ 5. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне 67
§ 6. Теоремы о пределе сложной функции 68
§ 7. Порядок бесконечно малой функции 72
Глава IV. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ 74
Лекция 12
§ 1. Свойства функций, непрерывных в точке 74
§ 2. Непрерывность элементарных функций 76
Лекция 13
§ 3. Замечательные пределы 79
§ 4. Непрерывность функции на множестве 82
Лекция 14
§ 5. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке 90
Лекция 15
§ 6. Понятие равномерной непрерывности 93
§ 7. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции, непрерывные на компакте 94
Глава V. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 98
Лекция 16
§ 1. Приращение функции. Дифференциал и производная функции 98
Лекция 17
§ 2. Дифференцирование сложной функции 103
§ 3. Правила дифференцирования 107
Лекция 18
§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков .. 109
§ 5. Возрастание и убывание функции в точке 115
Лекция 19
§ 6. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа 117
Лекция 20
§ 7. Следствия из теоремы Лагранжа 122
§ 8. Некоторые неравенства 123
§ 9. Производная функции, заданной параметрически ... 125
Лекция 21
§ 10. Раскрытие неопределенностей 126
Лекция 22
§ 11. Локальная формула Тейлора 132

§ 12. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме ... 137
Лекция 23
§ 13. Применение формулы Тейлора к некоторым функциям ... 141
Лекция 24
§ 14. Исследование функций с помощью производных. Экстремальные точки. Выпуклость ... 144
Лекция 25
§ 15. Точки перегиба ... 151
Лекция 26
§ 16. Интерполирование ... 157
Лекция 27
§ 17. Метод хорд и метод касательных (метод Ньютона). Быстрые вычисления ... 160
Глава VI. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ... 166
Лекция 28
§ 1. Точная первообразная. Интегрируемые функции ... 166
Лекция 29
§ 2. Свойства неопределенного интеграла ... 169
Лекция 30
Дополнение. Обобщение понятия предела по Гейне на функции, сходящиеся по базе множеств ... 174
ЧАСТЬ II. ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Глава VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ... 183
Лекция 1
§ 1. Введение ... 183
§ 2. Определение интеграла Римана ... 184
Лекция 2
§ 3. Критерий интегрируемости функции по Риману ... 190
Лекция 3
§ 4. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману ... 195
§ 5. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману ... 196
§ 6. Метод интегральных сумм ... 200
Лекция 4
§ 7. Свойства интеграла Римана как предела по базе ... 204
§ 8. Классы функций, интегрируемых по Риману ... 209
Лекция 5
§ 9. Свойства определенного интеграла ... 212
§ 10. Аддитивность интеграла ... 217

Глава VIII. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА ... 219

Лекция 6

§ 1. Интеграл как функция верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла ... 219

§ 2. Теорема Ньютона – Лейбница. Формулы суммирования Эйлера и Абеля ... 220

Лекция 7

§ 3. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле ... 225

§ 4. Первая и вторая теоремы о среднем значении ... 226

Лекция 8

§ 5. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме ... 233

§ 6. Неравенства, содержащие интегралы ... 239

Лекция 9

§ 7. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману ... 241

§ 8. Доказательство критерия Лебега ... 242

Глава IX. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ... 246

Лекция 10

§ 1. Определение несобственных интегралов первого и второго рода ... 246

§ 2. Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов ... 248

§ 3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле ... 249

Лекция 11

§ 4. Несобственные интегралы второго рода ... 253

§ 5. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в несобственном интеграле ... 255

Глава X. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ ... 257

Лекция 12

§ 1. Кривые в многомерном пространстве ... 257

§ 2. Теорема о длине дуги кривой ... 259

Глава XI. МЕРА ЖОРДАНА ... 262

Лекция 13

§ 1. Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела. Определение меры Жордана ... 262

§ 2. Критерий измеримости множества по Жордану ... 264

Лекция 14

§ 3. Свойства меры Жордана ... 267

§ 4. Измеримость спрямляемой кривой ... 269

§ 5. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции 271
Глава XII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА 275
Лекция 15
§ 1. Определение и свойства меры Лебега 275
Лекция 16
§ 2. Интеграл Лебега 282
Лекция 17
§ 3. Интеграл Стильтьеса 288
Глава XIII. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА 296
Лекция 18
§ 1. Определения 296
Лекция 19
§ 2. Хаусдорфовость метрического пространства в естественной топологии 302
§ 3. Внутренние, внешние и граничные точки множества в метрическом пространстве 303
§ 4. Лемма о последовательности стягивающихся шаров. Принцип сжимающих отображений 306
Лекция 20
§ 5. Непрерывные отображения метрических пространств 308
§ 6. Понятие компакта. Компакты в $\mathbb{R}^n$ и полнота пространства $\mathbb{R}^n$. Свойства непрерывных функций на компакте 309
§ 7. Связные множества и непрерывность 312
Глава XIV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ 314
Лекция 21
§ 1. Непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$ 314
§ 2. Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$ 317
Лекция 22
§ 3. Дифференцирование сложной функции 320
§ 4. Производная по направлению. Градиент 321
§ 5. Геометрический смысл дифференциала 323
Лекция 23
§ 6. Частные производные высших порядков 324
§ 7. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора 326

Лекция 24
§ 8. Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных 330
§ 9. Неявные функции 332
Лекция 25
§ 10. Система неявных функций 337
§ 11. Условный экстремум функции многих переменных . 341
§ 12. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби . 344
ЧАСТЬ III. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ
Глава XV. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ 347
Лекция 1
§ 1. Основные свойства сходящихся рядов. Критерий Коши 347
Лекция 2
§ 2. Ряды с неотрицательными членами 355
Лекция 3
§ 3. Основные признаки сходимости для рядов с неотрицательными членами 360
Лекция 4
§ 4. Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряды Лейбница 368
§ 5. Признаки Абеля и Дирихле 370
Лекция 5
§ 6. Перестановки членов ряда 373
Лекция 6
§ 7. Арифметические операции над сходящимися рядами 376
Лекция 7
§ 8. Двойные и повторные ряды 381
Глава XVI. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ 388
Лекция 8
§ 1. Сходимость функционального ряда 388
§ 2. Равномерная сходимость 391
Лекция 9
§ 3. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности 394
§ 4. Признаки равномерной сходимости 396
Лекция 10
§ 5. Теорема Дини 401
§ 6. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда 402
Лекция 11
§ 7. Двойные и повторные пределы по базе множеств . 407

Лекция 12
§ 8. Степенные ряды 411
Лекция 13
§ 9. Бесконечные произведения 416
Лекция 14
§ 10. Бесконечные определители 422
§ 11. Равностепенная непрерывность и теорема Арцела .. 425
Глава XVII. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА 428
Лекция 15
§ 1. Собственные параметрические интегралы и их непрерывность 428
§ 2. Дифференцирование и интегрирование собственных параметрических интегралов 431
Лекция 16
§ 3. Теорема Лагранжа 436
Лекция 17
§ 4. Равномерная сходимость по Гейне 439
§ 5. Эквивалентность двух определений равномерной сходимости 440
Лекция 18
§ 6. Равномерная сходимость несобственных параметрических интегралов 444
Лекция 19
§ 7. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по параметру несобственных интегралов 449
Лекция 20
§ 8. Несобственные интегралы второго рода 456
§ 9. Применение теории параметрических интегралов ... 458
Лекция 21
§ 10. Интегралы Эйлера первого и второго рода 461
Лекция 22
§ 11. Формула Стирлинга 467
Глава XVIII. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ 471
Лекция 23
§ 1. Представление дробной доли вещественного числа тригонометрическим рядом.Формула суммирования Пуассона. Суммы Гаусса 471
Лекция 24
§ 2. Неравенство Бесселя. Замкнутость и полнота ортонормированной системы функций 482
Лекция 25
§ 3. Замкнутость тригонометрической системы функций 488

§ 4. Простейшие свойства тригонометрических рядов Фурье ... 493
Лекция 26
§ 5. Интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье. Принцип локализации Римана ... 497
§ 6. Признаки поточечной сходимости рядов Фурье ... 501
Лекция 27
§ 7. Поведение коэффициентов Фурье ... 506
§ 8. Разложение котангенса на простейшие дроби и представление синуса в виде бесконечного произведения 509
§ 9. Задача Кеплера и ряды Бесселя ... 511
Лекция 28
§ 10. Ядро Фейера и аппроксимационная теорема Вейерштрасса ... 514
§ 11. Интеграл Дирихле и разложение на простейшие дроби ... 517
Лекция 29
§ 12. Преобразование Фурье и интеграл Фурье ... 522
Лекция 30
§ 13. Метод Лапласа и метод стационарной фазы ... 534
ЧАСТЬ IV. КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
Глава XIX. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ... 544
Лекция 1
§ 1. Двойной интеграл Римана как предел по базе ... 544
§ 2. Суммы Дарбу и их свойства ... 547
Лекция 2
§ 3. Критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике ... 550
§ 4. Специальный критерий интегрируемости функции на прямоугольнике ... 553
Лекция 3
§ 5. Измеримость по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры ... 556
§ 6. Понятие двойного интеграла Римана по ограниченной области, измеримой по Жордану ... 558
Лекция 4
§ 7. Основные свойства двойного интеграла ... 562
§ 8. Переход от двойного интеграла к повторному ... 564
§ 9. Интегрируемость непрерывной функции на измеримом множестве ... 566
Лекция 5
§ 10. Многократные интегралы ... 568

§ 11. Свойства гладкого отображения на выпуклом множестве 572
Лекция 6
§ 12. Объем области в криволинейных координатах. Теорема о замене переменных в кратном интеграле 575
Лекция 7
§ 13. Критерий Лебега 584
Лекция 8
§ 14. Несобственные кратные интегралы 588
Лекция 9
§ 15. Площадь поверхности 595
§ 16. Площадь m-мерной поверхности в евклидовом пространстве n измерений 600
Глава XX. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 603
Лекция 10
§ 1. Криволинейные интегралы 603
§ 2. Свойства криволинейных интегралов 604
Лекция 11
§ 3. Криволинейные интегралы второго рода по замкнутому контуру. Формула Грина 609
Лекция 12
§ 4. Поверхностные интегралы 614
§ 5. Согласование ориентации поверхности и ее границы 618
Лекция 13
§ 6. Формула Стокса 622
§ 7. Формула Гаусса – Остроградского 624
Лекция 14
§ 8. Криволинейные интегралы, зависящие только от пределов интегрирования 630
§ 9. Элементы векторного анализа 633
Лекция 15
§ 10. Потенциальное и соленоидальное векторные поля . 639
Глава XXI. ОБЩАЯ ФОРМУЛА СТОКСА 645
Лекция 16
§ 1. Понятие ориентированной многомерной поверхности 645
§ 2. Согласование ориентаций поверхности и ее границы в общем случае 647
§ 3. Дифференциальные формы 649
§ 4. Замена переменных в дифференциальной форме ... 649
Лекция 17
§ 5. Интеграл от дифференциальной формы 651
§ 6. Операция внешнего дифференцирования 654
§ 7. Доказательство общей формулы Стокса 656

Лекция 18

Дополнение. Равномерное распределение значений числовых последовательностей на отрезке 660

§ 1. Понятие равномерного распределения. Лемма об оценке коэффициентов Фурье 660

§ 2. Критерий Г.Вейля 664

Примерные вопросы и задачи к коллоквиумам и экзаменам 674

Литература 684