Утверждение 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, тогда $\Delta f \sim df = c\Delta x$, поэтому Δf бесконечно мала при $\Delta x \to 0$, а значит, $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

Примеры. 1. Пусть $f(x) = x^2$, $a = 2,5$. Тогда

$$\Delta f(x) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2, \quad \Delta f(2 \cdot 5) = 5\Delta x + (\Delta x)^2,$$
$$\Delta x = dx, \quad df(x) = 2adx, \quad df(2,5) = 5dx.$$

2. Пусть $f(x) = 3x - 1$, $a = 2$. Тогда

$$\Delta f(x) \,|_{x=2} = f(2 + \Delta x) - f(2) = 3\Delta x = df(2) = 3dx.$$

Дифференциал функции, если он существует, является линейной функцией приращения аргумента, поэтому его называют линейной частью приращения аргумента. Если $f'(a) \neq 0$, то дифференциал в точке $x = a$ называется еще главной частью приращения. Это название отражает свойство разности вида $\beta(\Delta x) = \Delta f - df$, которая есть $o(\Delta x)$, а следовательно, и $o(df)$, т.е.

$$\Delta f - df = o(df).$$

Таким образом, эта разность является бесконечно малой более высокого порядка, чем df, и поэтому дифференциал df вносит при малых Δx главный вклад в значение приращения Δf.

Легко привести пример функции $f(x)$, непрерывной в точке $x = 0$, но не дифференцируемой в этой точке (т.е. $f(x)$ не имеет дифференциала и производной в этой точке). Действительно, для функции

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

имеем $\Delta(|x|) = |x + \Delta x| - |x|$. Отсюда при $x = 0$ получим

$$\Delta(|x|) \,|_{x=0} = |\Delta x|.$$

Тогда

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0^+, \quad \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1 \text{ при } \Delta x \to 0^-,$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует.

Но все же правый и левый пределы в этом случае существуют. Они называются правой и левой производной функции.

Приведенный пример показывает, что непрерывная функция может и не иметь дифференциала. Для некоторого класса таких функций вводится более общее понятие односторонних производных.

Определение 4. *Конечные пределы (если они существуют)*

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

называются соответственно **правой и левой производной функции** $f(x)$ **в точке** $x = a$.

В рассмотренном выше случае $y = |x|$ односторонние производные в точке $x = 0$ существуют, при этом правая производная в этой точке равна $+1$, а левая -1. Связь понятий односторонних и обычной производных между собой выражается следующим очевидным утверждением.

Утверждение 2. *Функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = a$ тогда и только тогда, когда существуют левая и правая производные и они равны между собой.*

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = a$, причем $\varphi(a) = b$, $\varphi'(a) = \alpha$. Далее, пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = b$, причем $f'(b) = \beta$. Тогда сложная функция*

$$g(t) = f(\varphi(t))$$

дифференцируема в точке $t = a$, причем

$$g'(t) = \beta \cdot \alpha.$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функций $\varphi(t)$ и $f(x)$ имеем

$$\Delta\varphi(t) = \alpha\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t, \quad \alpha_1(0) = 0;$$
$$\Delta f(x) = \beta\Delta x + \beta_1(\Delta x)\Delta x, \quad \beta_1(0) = 0.$$

Здесь $\alpha_1(\Delta t)$ и $\beta_1(\Delta x)$ определены в некоторых окрестностях точек $\Delta t = 0$ и $\Delta x = 0$ соответственно и стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$ и при $\Delta x \to 0$.

Возьмем во втором равенстве величину Δx равной $\Delta\varphi(t)$. Тогда получим

$$\Delta f(x) = \beta\Delta\varphi(t) + \Delta\varphi(t)\beta_1(\Delta\varphi(t)) =$$
$$= \beta\alpha\Delta t + \Delta t(\alpha\beta_1(\Delta\varphi(t)) + \alpha_1(\Delta t)\beta_1(\Delta\varphi(t))).$$

Кроме того, имеем, что $\Delta f(x) = \Delta g(t)$, т.е.

$$\Delta g(t) = \beta\alpha\Delta t + \Delta t\gamma(\Delta t),$$

где

$$\gamma(\Delta t) = \alpha\beta_1(\Delta\varphi(t)) + \alpha_1(\Delta t)\beta_1(\Delta\varphi(t)).$$

Но $\Delta\varphi(t) \to 0$ как функция Δt при $\Delta t \to 0$, поскольку функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = a$. Отсюда по теореме о пределе сложной функции имеем, что $\beta_1(\Delta\varphi(t))$ и $\alpha_1(\Delta t)$ есть бесконечно малые при $\Delta t \to 0$. Следовательно, функция $\gamma(\Delta t)$ — тоже бесконечно малая при $\Delta t \to 0$. А это означает, что $\beta\alpha\Delta t$ — дифференциал функции $g(t)$ в точке $t = a$, т.е.

$$dg(t) = \beta\alpha\Delta t = \beta\alpha dt, \quad \frac{dg(t)}{dt} = \beta\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Область определения функций $\alpha_1(\Delta t)$ и $\beta_1(\Delta x)$

$$\Delta\varphi = \alpha\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t,$$
$$\Delta f = \beta\Delta x + \beta_1(\Delta x)\Delta x,$$

целиком содержит некоторые окрестности точек $\Delta t = 0$ и $\Delta x = 0$, поскольку при определении дифференциала мы доопределили эти функции в нуле по непрерывности, положив $\alpha_1(0) = \beta_1(0) = 0$. Если этого не сделать, то наши рассуждения при доказательстве теоремы о дифференцируемости сложной функции будут ошибочны, так как $\alpha_1(\Delta t)$ может принимать значение, равное 0, даже тогда, когда $\Delta t \neq 0$ для некоторых Δt, принадлежащих той окрестности точки 0, в которой была определена функция.

Заметим также, что мы говорим о производной функции $f(x)$ в точке $x = a$ только в том случае, когда эта точка — внутренняя точка области определения $f(x)$. Если же говорится только о правой производной $f'(a+)$, то область определения $f(x)$ должна содержать промежуток $(a, a+\delta)$, а если о левой — то $(-\delta + a, a)$.

Дифференциал $df(x)$ функции $f(x)$ в любой точке $x = x_0$ отрезка $[a, b]$ является линейной функцией $c\Delta x$ от аргумента Δx. Здесь для каждого значения производная $f'(x_0) = c$ имеет свое собственное значение. Таким образом, процедура взятия дифференциала порождает *отображение* отрезка $[a, b]$ в множество линейных функций. Это отображение не является числовой функцией, так как его образ состоит не из чисел, а из функций. За такими отображениями утвердилось название "оператор", в данном случае — дифференциальный оператор. А сама процедура отыскания дифференциала или производной функции в точке, как уже говорилось, называется *операцией дифференцирования* или просто *дифференцированием.* Напомним также, что функция, для которой существует производная в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$ при $0 \leq x \leq 1$. Тогда имеем

$$f'(x) = 2x \text{ при } 0 < x < 1,\ f'(0+) = 0,\ f'(1-) = 2.$$

Докажем теперь теорему о производной обратной функции. Вообще говоря, правило дифференцирования обратной функции просто следует из теоремы о производной сложной функции, но мы докажем его при более слабых предположениях, не требуя заранее существования производной обратной функции.

Т е о р е м а 2 (о производной обратной функции). *Пусть функция $f(x)$, определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет обратную функцию $g(y)$, определенную на отрезке I, концами которого являются точки $f(a)$ и $f(b)$. Пусть x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, а y_0 — внутренняя точка I, причем $f(x_0) = y_0$ и $g(y_0) = x_0$. Пусть в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет производную, отличную от нуля, т. е. $f'(x_0) \neq 0$.*

Тогда в точке y_0 функция $g(y)$ имеет производную $g'(y_0)$, причем

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y_0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если известно, что $g'(y_0)$ существует, то воспользовавшись предыдущей теоремой, получаем:

$$g(f(x)) = x, \quad (g(f(x)))'_x = 1,$$

но

$$(g(f(x)))'_x = g'(y_0)f'(x_0).$$

Следовательно,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Если существование производной заранее не предполагается, то доказательство проведем так. Заметим, что $f(x)$ строго монотонна на $[a, b]$, следовательно, $g(y)$ непрерывна на I и строго монотонна на нем. По определению производной

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0},$$

если этот предел существует.

В силу непрерывности $f(x)$ в точке $x = x_0$ и теоремы о пределе обратной функции имеем, что $g(y) \to g(y_0) = x_0$ при $y \to y_0$.

Определим на I функцию $F(x)$, полагая $F(x_0) = 1/f'(x_0)$ и

$$F(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \quad \text{при } x \neq x_0.$$

Тогда $F(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, поскольку

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Сделаем замену переменной вида $x = g(y)$:

$$F(g(y)) = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}.$$

Применяя теорему о пределе сложной функции, получаем, что существует предел

$$\lim_{y \to y_0} F(g(y)) = F(x_0) = \left. \frac{1}{f'(x)} \right|_{x = g(y_0)}.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{y \to y_0} F(g(y)) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0).$$

Тем самым доказательство теоремы 2 закончено.

Теорема 3 (об инвариантности формы первого дифференциала). *Если вместо дифференциала независимой переменной x в формулу для дифференциала $df(x)$ функции $f(x)$ подставить дифференциал некоторой функции $x = \varphi(t)$, то полученное выражение окажется дифференциалом сложной функции $g(t) = f(\varphi(t))$.*

Другими словами, пусть $df = c_1 dx$ — дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = a$, $d\varphi = c_2 dt$ — дифференциал $\varphi(t)$ в точке $t = \alpha$, причем $\varphi(\alpha) = a$. Тогда функция $c_1 d\varphi = c_1 c_2 dt$ — дифференциал функции $g(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t = \alpha$.

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием теоремы о дифференцируемости сложной функции, так как согласно последней

$$dg(t) = g'(t)dt = c_1 c_2 dt = c_1 d\varphi(t),$$

что и требовалось доказать.

Смысл этой очень простой и, казалось бы, "пустой" теоремы станет понятным позже, когда мы увидим, что дифференциалы высших порядков уже не обладают свойством инвариантности.

Пример. Решение уравнения Кеплера $x = x(y)$: $x - \varepsilon \sin x = y$, $0 < \varepsilon < 1$ — дифференцируемая функция в силу теоремы о производной обратной функции, причем

$$x'(y) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos x(y)}.$$

§ 3. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы, $c \in \mathbb{R}$. Тогда имеем:

1) $(cf(x))' = cf'(x)$;
2) Если $f(x) = \mathrm{const}$, то $f'(x) = 0$;
3) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Эти утверждения следуют из определения производной. Докажем, например, утверждение 3. Имеем: $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$. Откуда

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \to f' + g' \text{ при } \Delta x \to 0.$$

4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \to$$
$$\to g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

так как

$$g(x+\Delta x) \to g(x), \quad \frac{\Delta f}{\Delta g} \to f'(x), \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

5) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\Delta(1/g)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x)g(x+\Delta x)} \to -\frac{g'}{g^2} \text{ при } \Delta x \to 0,$$

поскольку

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g', \quad \frac{1}{g(x+\Delta x)} \to \frac{1}{g(x)} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следствия:

1. $(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)' = \sum\limits_{k=1}^{n} g_1 \cdot \ldots \cdot g_k' \cdot \ldots \cdot g_n$.

2. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$

Производные элементарных функций

$x' = 1;$

$(x^n)' = nx^{n-1};$

$(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x;$

$(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x$, так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$

$(\ln x)' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$ — обратная функция;

$y = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ — степенная функция,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = (\alpha\ln x)'\cdot e^{\alpha\ln x} = \alpha x^{\alpha-1};$$

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1;$

$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(\pi/2 - x)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{1+x^2};$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Из теоремы 2 о дифференцировании сложной функции и из правил дифференцирования следует:

$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x\ln a;$

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x};$

$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)};$

$(u^v)' = (e^{v\ln u})' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = u^v\left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right).$

Замечание. Если $h(x) = f(g(x))$, то символы $f'_x(g(x))$ и $f'_g(g(x))$ определяются равенствами $f'_x(g(x)) = h'(x)$, $f'_g(g(x)) = f_1(g(x))$, где $f_1(x) = f'(x)$.

Лекция 18

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $f(x)$ является дифференцируемой в каждой точке интервала (a, b). Тогда каждой точке $x \in (a, b)$ можно поставить в соответствие число — производную $f'(x)$ в этой точке. Полученная функция называется функцией, производной от данной, и обозначается также $f'(x)$. Может случиться, что она сама тоже имеет производную. Тогда эта производная называется **второй производной функции** $f(x)$ и обозначается так:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Подобным образом определяются третья, четвертая и все последующие производные:

$$f'''(x) = (f''(x))', \qquad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Пример. $(x^3)'' = ((x^3)')' = (3x^2)' = 6x.$

Т е о р е м а 1(формула Лейбница). *Пусть u, v имеют n-е производные. Тогда справедлива формула*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)} v^{(n-m)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (По индукции). При $n = 1$ утверждение теоремы справедливо. Предположим, что оно верно при $n = s \geq 1$. Докажем его при $n = s + 1$. Имеем

$$(uv)^{(s+1)} = ((uv)^{(s)})' = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} (u^{(m)} v^{(s-m)})' =$$
$$= \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} (u^{(m+1)} v^{(s-m)} + u^{(m)} v^{(s-m+1)}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} u^{(m+1)} v^{(s-m)} + \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} u^{(m)} v^{(s-m+1)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{s+1} \binom{s}{t-1} u^{(t)} v^{(s-t+1)} + \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} u^{(t)} v^{(s-t+1)} =$$

$$= \binom{s}{0} u^{(0)} v^{(s+1)} + \binom{s}{s} u^{(s+1)} v^{(0)} + \sum_{t=1}^{s} \left(\binom{s}{t} + \binom{s}{t-1} \right) u^{(t)} v^{(s-t+1)} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s+1} \binom{s+1}{t} u^{(t)} v^{(s-t+1)},$$

поскольку

$$\binom{s}{t} + \binom{s}{t-1} = \binom{s+1}{t}.$$

Теорема 1 доказана.

Имеется еще одно обозначение для n-й производной, а именно:

$$f^{(n)}(x) = D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Последнее обозначение связано с понятием **дифференциала высшего порядка**, к определению которого мы приступаем.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда существует ее дифференциал

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Зафиксируем значение приращения аргумента $dx = \Delta x = h$. Тогда $df(x)$ можно будет рассматривать как функцию от x, заданную на том же интервале (a, b). Если она дифференцируема, то дифференциал имеет вид

$$d(f'(x)h) = f''(x)h\Delta x.$$

Если мы в этом случае значение Δx возьмем снова равным h, то получим

$$d(f'(x)h) = f''(x)h^2 = f''(x)dx^2.$$

Это выражение называется **вторым дифференциалом** и обозначается $d^2 f(x)$, т.е.

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определим:

$$d^3f(x) = d(d^2f(x)) = f'''(x)dx^3,$$
$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Очевидно, в силу такого определения можно записать:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Целесообразность введения понятия n-го дифференциала будет ясна позднее. Например, далее мы увидим, что приращение $\Delta f(x)$ во многих случаях можно представить в виде

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2f}{2!} + \frac{d^3f}{3!} + \dots + \frac{d^nf}{n!} + \dots$$

(формула Бернулли). Смысл этого равенства мы уточним тогда, когда будем его доказывать.

Заметим, что уже второй дифференциал не обладает свойством инвариантности. Действительно, если

$$f'(x) = f_1(x) \quad \text{и} \quad f''(x) = f_2(x),$$

то при $x = g(t)$ имеем

$$(f(g(t)))''_{tt} = (f_1(g(t))g'(t))'_t = f_2(g(t)) \cdot (g'(t))^2 + f_1(g(t))g''(t).$$

Отсюда получим

$$d^2f(g(x)) = f''_{tt}(g(t))dt^2 = f''_{gg}(g(x))(dg(x))^2 + f'_g(g(x))d^2g(x),$$

в то время как второй дифференциал функции $f(x)$ равен

$$d^2f(x) = f''_{xx}(x)dx^2,$$

и при подстановке в правую часть равенства функции $g(t)$ получим выражение $f''_{gg}(g(x))(dg(x))^2$, которое, как видим, отличается от правой части равенства для $d^2f(g(x))$. Следовательно, свойство инвариантности для второго дифференциала не имеет места.

Для того чтобы глубже прояснить сущность свойства инвариантности дифференциала, мы рассмотрим несколько более общие понятия.

Будем называть **дифференциальным мономом** D_k *порядка* k от n *функций* $f(x), g(x), \ldots, h(x)$, $n \leq k$, одной пеfеменной x следующее выражение

$$D_k = cf^{(\alpha)}(x)g^{(\beta)}(x)\ldots h^{(\gamma)}(x)\ dx^k,$$

где $\alpha + \beta + \cdots + \gamma = k$, причем $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ являются натуральными числами и c — некоторая вещественная постоянная.

Всякая линейная комбинация дифференциальных мономов фиксированного порядка от одного и того же набора функций $f, g, \ldots, h$ называется **однородным дифференциальным выражением порядка** k. **Неоднородным дифференциальным выражением** называется линейная комбинация конечного числа мономов разного порядка, но от тех же функций $f, g, \ldots, h$.

Следует отметить, что на любое дифференциальное выражение можно смотреть как на функцию двух независимых переменных, а именно: x и dx. Но в данный момент нас будет интересовать не функциональная, а алгебраическая сторона вопроса, точнее, свойство дифференциального выражения сохранять свою форму при замене независимой переменной x на функцию $\varphi(t)$ и, соответственно, dx на $d\varphi(t) = \varphi'(t) \cdot dt$. Поясним более четко, что конкретно имеется в виду. Если подставим в однородное дифференциальное выражение D порядка k вместо x функцию $\varphi(t)$, то вместо дифференциала dx^k будем иметь выражение $(d\varphi(t))^k = (\varphi'(t))^k(dt)^k$, а вместо производных $f^{(\alpha)}(x), g^{(\beta)}(x), \ldots, h^{(\gamma)}(x)$ — выражения $f^{(\alpha)}_{\varphi^\alpha}(\varphi(t)), g^{(\beta)}_{\varphi^\beta}(\varphi(t)), \ldots, h^{(\gamma)}_{\varphi^\gamma}(\varphi(t))$, т.е. мы получим некоторое дифференциальное выражение B_1, завсящее от t и от dt. Другое дифференциальное выражение B_2, зависящее от тех же величин t и dt, получим, если то же однородное выражение D применим к функциям $f(\varphi(t)), g(\varphi(t)), \ldots, h(\varphi(t))$, т.е. вместо $f^{(\alpha)}(x), g^{(\beta)}(x), \ldots, h^{(\gamma)}(x)$ рассмотрим $f^{(\alpha)}_{t^\alpha}(\varphi(t)), g^{(\beta)}_{t^\beta}(\varphi(t)), \ldots, h^{(\gamma)}_{t^\gamma}(\varphi(t))$, а вместо $(dx)^k$ — выражение $(dt)^k$. Если при этом оказывается, что вне зависимости от вида функции $\varphi(t)$ имеет место равенство $B_1 = B_2$, то мы говорим, что дифференциальное выражение D обладает свойством **инвариантности, или инвариантно относительно замены переменной.** В противном случае мы считаем, что оно указанным свойством не обладает. Иными словами, инвариантность B означает возможность перестановки порядка выполнения операции замены переменной и операции вычисления этого дифференциального выражения, т.е. коммутативности этих двух операций.

В смысле введенных нами понятий дифференциалы первого и высших порядков являются однородными дифференциальными выражениями, причем первый дифференциал обладает свойством инвариантности (относительно любой замены переменной), а дифференциалы порядка, большего единицы, этим свойством не обладают. Заметим, однако, что в случае линейной замены переменной инвариантность все же имеет место.

Возникает вопрос о том, существуют ли дифференциальные выражения порядка, большего единицы, обладающие свойством инвариантности. Было известно, что, вообще говоря, инвариантные дифференциальные выражения от нескольких функций существуют. В течение ряда лет профессор МГУ А. А. Кириллов привлекал внимание математиков к идущей от О. Веблена проблеме, связанной с описанием классов инвариантных дифференциальных выражений. Прояснить ситуацию в указанном круге вопросов в значительной степени удалось Ф. М. Малышеву в 1978 г. Единственным инвариантным дифференциальным выражением, зависящим от одной функции, является первый дифференциал. Для двух функций f и g все инвариантные выражения порождаются двумя однородными дифференциальными выражениями B_1 и B_2 вида $B_1 = f'g'dx^2$, $B_2 = (f''g' - f'g'')dx^3$. Он доказал общую теорему о конечности количества $N(n)$ "образующих" однородных дифференциальных выражений от n функций и получил оценку $N(n) \leq n!$. Кроме того, для степени инвариантного дифференциального выражения имеет место неравенство $k \leq n(n+1)/2$ [23].

В заключение приведем еще одну теорему, которая касается производных высших порядков от сложной функции.

Т е о р е м а 2(теорема Валле Пуссена). *Пусть функции $F(x)$ и $u(x)$ имеют n-е производные. Тогда для n-й производной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место следующая формула*

$$G^{(n)}(x) = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots=n} F^{(\alpha+\beta+\gamma+\dots)}(u) P_{\alpha+\beta+\gamma+\dots},$$

$$P_{\alpha+\beta+\gamma+\dots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots} \left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha} \left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta} \left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\gamma} \dots .$$

Поясним, что суммирование в правой части ведется по всем целым неотрицательным числам α, β, $\gamma, \dots$, удовлетворяющим равенству $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции, мы, очевидно, приходим к равенству вида

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) F^{(n)}(u),$$

где $c_k(x)$ — некоторые выражения, вид которых не зависит от конкретного задания функций $y = F(u)$, $u = f(x)$. Поэтому для определения точного выражения $c_k(x)$ через функцию $u(x)$ мы можем использовать любые удобные для нас функции. В силу этого будем считать, что $F(u)$ и $u(x)$ — многочлены n-й степени, записанные в виде

$$F(u) = F(u_0) + z\frac{F'(u_0)}{1!} + \cdots + z^n \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!},$$

$$u(x) = u(x_0 + t) = u(x_0) + t\frac{u'(x_0)}{1!} + \cdots + t^n \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Здесь мы полагаем, что переменные z и t определены равенствами $z = u - u_0$, $u_0 = u(x_0)$, $t = x - x_0$. В этом случае функция $G(x)$ будет представлять собой многочлен степени n^2, который может быть записан в виде

$$G(x) = G(x_0) + \frac{G'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}t^n + \cdots + \frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!}t^{n^2},$$

и, кроме того, в виде

$$G(x) = F(u_0) + \frac{F'(u_0)}{1!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right) +$$

$$+ \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right)^n.$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве с помощью полинома Ньютона (см. замечание к §1 гл. II) и сравнивая коэффициенты при t^n в получившемся выражении с первым равенством, приходим к утверждению теоремы. Теорема 2 доказана.

§ 5. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть x_0 — внутренняя точка области определения $f(x)$.

Определение. 1. *Функция $f(x)$* **возрастает в точке** *$x = x_0$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой:*

а) $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$,

б) $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$.

Ясно, что точка $x = x_0$ является точкой возрастания функции $f(x)$, если

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0$$

в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

2. *Функция $f(x)$* **убывает в точке** *$x = x_0$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой:*

а) $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$;

б) $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$.

Точка $x = x_0$ является точкой убывания функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0.$$

3. *Функция имеет в точке локальный максимум (локальный минимум), если в некоторой проколотой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ (соответственно $f(x_0) < f(x)$).*

4. *Функция $f(x)$ имеет* **локальный экстремум** *в точке $x = x_0$, если в этой точке она имеет или локальный максимум, или локальный минимум.*

Т е о р е м а (достаточное условие возрастания или убывания функции в точке). *1. Если $f'(x_0) = c > 0$, то тока $x = x_0$ — точка возрастания функции $f(x)$.*

2. Если $f'(x_0) = c < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке $x = x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то существует число $\delta = \delta(c/2) > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \right| < \frac{c}{2}$$

выполняется для всех точек проколотой δ-окрестности точки $x = x_0$. В этой окрестности имеем

$$0 < \frac{c}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3c}{2}.$$

Следовательно, Δf имеет тот же знак, что и Δx, т.е. x_0 — точка возрастания. Случай 2 сводится к случаю 1 заменой $f(x)$ на $-f(x)$.

Эта теорема называется **леммой Дарбу.**

§ 6. ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, КОШИ И ЛАГРАНЖА

Теорема 1 (теорема Ролля). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Пусть также $f(a)=f(b)$. Тогда на интервале (a,b) существует точка ξ такая, что $f'(\xi)=0$.*

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Следовательно, на этом отрезке найдётся точка x_1, в которой $f(x)$ имеет максимум, а также точка x_2, являющаяся точкой минимума для $f(x)$. Если $x_1=x_2$, то $f(x)$ постоянна на отрезке $[a,b]$ и $f'(x)=0$ всюду на $[a,b]$. Если же $x_1\neq x_2$, то либо $f(x_1)$, либо $f(x_2)$ не равна $f(a)=f(b)$. И та точка из них, для которой равенство не имеет места, будет внутренней точкой отрезка $[a,b]$ и одновременно точкой локального экстремума. Обозначив ее через ξ, имеем $f'(\xi)=0$, поскольку в противном случае была бы точкой возрастания или точкой убывания функции $f(x)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (теорема Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы внутри него. Пусть $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in[a,b]$. Тогда на интервале (a,b) найдется точка c такая, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Преобразуя эквивалентным образом требуемое равенство с учетом того, что $g'(c)\neq 0$, имеем

$$(f(a)-f(b))g'(c)-(g(a)-g(b))f'(c)=0.$$

Заметим, что слева в последнем равенстве стоит значение производной функции $H(x)$ в точке $x=c$, где

$$H(x)=g(x)(f(a)-f(b))-f(x)(g(a)-g(b)).$$

Таким образом, нам достаточно доказать существование точки c, в которой $H'(c)=0$. Но функция $H(x)$ дифференцируема во внутренних точках отрезка $[a,b]$ и

$$H(a)=H(b)=-g(a)f(b)+f(a)g(b).$$

Поэтому по теореме Ролля существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $H'(c)=0$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е (теорема Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда имеет место формула*

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b),$$

где c — некоторая внутренняя точка этого отрезка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следствия является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. Это следствие называется также **формулой конечных приращений.**

Замечания. 1. (**О схеме доказательства леммы Дарбу**). Эта лемма утверждает, что если $f'(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ возрастает. С другой стороны, ее возрастание означает, что приращение функции $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ и приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ имеют одинаковый знак и $\Delta f(x) \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Доказательство этого факта, по существу, основано на свойстве функции, имеющей положительный предел, быть положительной на некотором окончании базы. В данном случае

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

и поэтому в некоторой проколотой окрестности точки x_0 мы имеем неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Это и означает, что в данной проколотой окрестности точки x_0 значения $\Delta f(x)$ и Δx имеют одинаковый знак и $\Delta f(x) \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$.

2(а) (**По поводу теоремы Коши**). Для справедливости утверждения теоремы, в частности, требуется, чтобы $g'(x) \neq 0$ для любого x, принадлежащего отрезку $[a,b]$. Отсюда следует, что $g(a) - g(b) \neq 0$, т.е. в знаменателе отношения в формулировке теоремы стоит ненулевое число. Действительно, если мы предположим, что $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля существует число c такое, что $g'(c) = 0$, но по условию теоремы это не так.

(б) (**Геометрическая интерпретация теоремы Коши**). Пусть при $a \le t \le b$ имеем

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$$

Тогда в некоторой точке c тангенс угла наклона касательной к этой кривой равен тангенсу угла наклона хорды:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

3. (**По поводу теоремы Ролля**). Эта теорема, по существу, утверждает, что при некоторых дополнительных условиях между двумя "нулями" функции всегда лежит "нуль" ее производной. Доказательство теоремы основано на том, что если точка глобального экстремума является внутренней, то она не может быть точкой возрастания или убывания, а отсюда уже следует, что производная в этой точке обращается в нуль.

Докажем несколько *более общую теорему*, а именно, *теорему Ферма*: Пусть, как и ранее, $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Определение 1. 1) *Внутренняя точка x_0 называется* **точкой несобственного локального максимума** (*или* **локального максимума в широком смысле**), *если существует проколотая δ-окрестность точки x_0, в которой*

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

2) *По аналогии определим, что такое* **точка несобственного локального минимума**: *$f(x)$ имеет несобственный локальный минимум (локальный минимум в широком смысле) в точке x_0, если существует проколотая δ-окрестность, в которой*

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leq 0.$$

3) *Точки несобственного локального минимума и максимума называются* **точками несобственного локального экстремума**.

Ясно, что экстремальные точки можно рассматривать и как несобственные экстремальные точки, но не наоборот.

Т е о р е м а 3 (теорема Ферма). *Пусть внутренняя точка x_0 отрезка $[a,b]$, на котором определена и непрерывна функция $f(x)$, является точкой экстремума (в широком смысле) этой функции и пусть $\exists\ f'(x_0)$. Тогда имеем $f'(x_0) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка x_0 не может быть точкой возрастания (убывания), так как тогда в некоторой проколотой δ-окрестности этой точки

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0 \quad \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ соответственно}\right).$$

Но тогда неравенства $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) невозможны. Остается принять, что $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Докажем еще одну теорему об обращении в нуль производной.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b), $a < a_1 < b_1 < b$ и $f'(a_1)\cdot f'(b_1) < 0$. Тогда существует точка $\xi \in (a_1, b_1)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $f'(a_1) > 0$. Пусть ξ — точка максимума на отрезке $[a_1, b_1]$. Тогда она является внутренней для этого отрезка, так как a_1 — точка возрастания, а b_1 — точка убывания. Но тогда имеем $f'(\xi) = 0$. Второй случай, $f'(a_1) < 0$, сводится к первому с помощью замены функции $f(x)$ на $g(x) = -f(x)$. Теорема 4 доказана.

С л е д с т в и е (теорема Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и для некоторых $a_1, b_1 \in (a,b)$*

$$f'(a_1) = \alpha, \quad f'(b_1) = \beta.$$

Тогда для всякого числа ξ, лежащего между α и β, найдется точка $x_0 \in [a_1, b_1]$ такая, что $f'(x_0) = \xi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x\xi$. Имеем

$$g'(a_1) = \alpha - \xi, \quad g'(b_1) = \beta - \xi.$$

Но так как ξ лежит между α и β , то $\alpha - \xi$ и $\beta - \xi$ имеют разные знаки. Тогда по теореме 4 имеем, что существует точка x_0 такая, что $g'(x_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$f'(x_0) - \xi = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(x_0) = \xi.$$

Доказательство закончено.

Т е о р е м а 5. *Функция $g(x) = f'(x)$ не может иметь разрывов первого рода.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$f'(x) \to a \text{ при } x \to x_0+, \; f'(x) \to b \text{ при } x \to x_0- .$$

Докажем, что $a = b$. Предположим, что это не так. Тогда $a \neq b$. Пусть

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n} \to x_0+, \; y_n = x_0 - \frac{1}{n} \to x_0-,$$

тогда

$$f'(x_n) \to a \text{ при } n \to \infty, \; f'(y_n) \to b \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $a \neq b$, то или $a \neq f'(x_0)$, или $b \neq f'(x_0)$.

Допустим, что имеет место случай $a \neq f'(x_0)$. Так как число $\frac{f'(x_n)+f'(x_0)}{2}$ находится между $f'(x_n)$ и $f'(x_0)$, то в силу теоремы Дарбу существует c_n с условием $x_n < c_n < x_0$, кроме того,

$$f'(c_n) = \frac{f'(x_n) + f'(x_0)}{2}.$$

Поскольку $c_n \to x_0$, согласно определению правого предела по Гейне имеем

$$f'(c_n) \to a.$$

Отсюда $a = \frac{a+f'(x_0)}{2}$, т.е. $a = f'(x_0)$, а это противоречит тому, что $f'(x_0) \neq a$. Следовательно, предположение, что $a \neq b$, неверно и $a = b$. А это значит, что функция $f'(x)$ не может иметь разрывов первого рода. Теорема 5 доказана.

Попутно мы доказали, что если $f'(x) \to z_0$ при $x \to x_0+$ (или $x \to x_0-$), то $z_0 = f'(x_0)$.

Пример точки разрыва производной. Положим

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x},$$

а при $x = 0$ по определению производной

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \cos 1/\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

В точке $x = 0$ не существует ни правого, ни левого предела $f'(x)$.

Определение 2. *Если* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \underset{(-)}{+} \infty$ *при* $x \to x_0$, *то говорят, что* $f(x)$ *в точке* x_0 *имеет* **бесконечную производную**, и пишут:

$$f'(x_0) = \underset{(-)}{+} \infty.$$

То же самое говорят и пишут о правой и левой производных.

Пример. $f(x) = \sqrt{x}$. При $x \neq 0$ имеем $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Тогда

$$f'(0+) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x} - 0}{\Delta x} = +\infty.$$

§ 7. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА

Теорема 1. *Пусть $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда $f(x) = \mathrm{const} = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.*

Доказательство. По теореме Лагранжа имеем

$$\Delta f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(c)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b). Тогда для того чтобы $f(x)$ не убывает на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы*

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,b).$$

Доказательство. Необходимость. Условие неубывания функции $f(x)$ эквивалентно тому, что $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Переходя к пределу в неравенствах, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность. Если $f'(x) \geq 0$, то по теореме Лагранжа

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0$$

при некотором $c \in (a,b)$, т.е. функция $f(x)$ не убывает на (a,b). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если $f'(x) > 0$ на интервале (a,b), то функция $f(x)$ монотонно возрастает на (a,b).*

Доказательство. По теореме Лагранжа имеем

$$\Delta f(x) = f'(c)\Delta x > 0 \text{ при } \Delta x > 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для того чтобы функция $f(x)$ строго возрастала на нем, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на интервале (a, b) и $f'(x)$ не обращалась в нуль тождественно ни на каком отрезке $[a_1, b_1]$, лежащем внутри отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Необходимость (от противного). Если условие теоремы не выполнено, то или $f'(x_0) < 0$ для некоторой точки $x_0 \in (a, b)$, или $f'(x) \equiv 0$ при всех $x \in [a_1, b_1]$. Тогда в первом случае x_0 — точка убывания функции $f(x)$, а во втором — $f(x) = \text{const}$ на $[a_1, b_1]$. Это противоречит условию возрастания функции $f(x)$.

Достаточность. Так как по условию $f'(x) \geq 0$, то при любых $a_1 < b_1$, где $a_1, b_1 \in [a, b]$, имеем

$$f(b_1) - f(a_1) = f'(c)(b_1 - a_1) \geq 0,$$

т.е. $f(x)$ не убывает.

Докажем, что $f(x)$ возрастает. Пусть это не так, и $f(a_1) = f(b_1)$ при $b_1 > a_1$. Но тогда в силу неубывания $f(x)$ на отрезке $[a_1, b_1]$ имеем, что $f(x) = \text{const}$ на нем, и, следовательно, $f'(x) = 0$ на (a_1, b_1), что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема 4 доказана полностью.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Теорема (неравенство Юнга). *Пусть $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда при $x > 0$ имеем*

$$x^\alpha \leq \alpha x + \beta.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha - \alpha x - \beta$. Заметим, что $f(1) = 1 - \alpha - \beta = 0$. Далее, поскольку

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) < 0 \text{ при } x > 1,$$

при $x > 1$ функция $f(x)$ убывает. Следовательно, при $x > 1$ выполнено неравенство $f(x) < f(1) = 0$.

Если же $0 < x < 1$, то

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) > 0.$$

Отсюда получим, что $f(x) < f(1) = 0$ при $0 < x < 1$. Таким образом, для всех $x > 0$ выполнено неравенство $x^\alpha - \alpha x - \beta \leq 0$, откуда следует справедливость теоремы.

Положим $x = a/b > 0$. Из неравенства Юнга имеем $a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b$. Это неравенство справедливо при любых $a, b \ge 0$.

Положим теперь

$$a = \frac{u_\nu^{1/\alpha}}{\sum_{\nu=1}^n u_\nu^{1/\alpha}}, \quad b = \frac{v_\nu^{1/\beta}}{\sum_{\nu=1}^n v_\nu^{1/\beta}}, \quad u_\nu, v_\nu \ge 0,$$

и просуммируем по ν от 1 до n. Получим

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\frac{u_\nu^{1/\alpha}}{\sum_{s=1}^n u_s^{1/\alpha}}\right)^\alpha \left(\frac{v_\nu^{1/\beta}}{\sum_{s=1}^n v_s^{1/\beta}}\right)^\beta \le 1,$$

т. е.

$$\sum_{\nu=1}^n u_\nu v_\nu \le \left(\sum_{\nu=1}^n u_\nu^{1/\alpha}\right)^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^n v_\nu^{1/\beta}\right)^\beta.$$

Это неравенство называется **неравенством Гельдера**.

Докажем теперь **неравенство Минковского.** Пусть выполняются следующие условия: $p > 1$; $a_\nu, b_\nu \ge 0$, $\nu = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\left(\sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Введем обозначение $1/p + 1/q = 1$. Используя неравенство Гельдера, имеем

$$A = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^p = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} = B + C,$$

$$B = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} \le \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^{q(p-1)}\right)^{1/q},$$

$$C = \sum_{\nu=1}^n b_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} \le \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Так как $q(p-1) = p$, то

$$A \le \left(\left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p}\right) A^{1/q},$$

откуда, поскольку $1 - 1/q = 1/p$, имеем

$$A^{1/p} = \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p},$$

что и требовалось доказать.

§ 9. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — две функции, заданные и дифференцируемые на $[0,1]$, и для всех $t \in [0,1]$ имеет место неравенство $\varphi'(t) > 0$ (или $\varphi'(t) < 0$). Тогда $\varphi(t)$ строго возрастает ($\varphi(t)$ строго убывает при $\varphi' < 0$) и эта функция имеет обратную функцию $t = g(x)$. Совокупности пар $(\varphi(t), \psi(t))$ задают функцию $y = f(x)$ такую, что

$$(x, y) = (x, f(x)) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

где $x = \varphi(t), \quad t = g(x), \quad f(x) = \psi(g(x))$.

Найдем ее производную. Имеем

$$f'(x) = \psi'_g(g(x))g'(x) = \frac{\psi'_g(g(x))}{\varphi'_g(g(x))},$$

поскольку

$$g'(x) = \frac{1}{\varphi'_g(g(x))}.$$

Это равенство для $f'(x)$ можно записать в следующем виде:

$$f'_\varphi(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

что дает нам правило нахождения производной функции, заданной параметрически. Таким же образом можно вычислить производные любого порядка. Найдем, например, формулу для второй производной. Имеем

$$f''(x) = f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)).$$

С одной стороны, справедливо равенство

$$(f'_\varphi(\varphi(t)))'_t = f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

С другой стороны, имеем

$$(f'_\varphi(\varphi(t)))'_t = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}.$$

Следовательно,

$$f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)) = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Лекция 21

§ 10. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Т е о р е м а 1 (первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x \to a-$). *Пусть:*

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некотором интервале вида $(a-\delta_1, a)$, $\delta_1 > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$;

3) $f'(x), g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta_2, a)$ при некотором $\delta_2 > 0$;

4) существует конечный или бесконечный предел при $x \to a-$ отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, т.е. $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что предел $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to a-$ является конечным числом и равен l, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a слева. Поскольку $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ при $x \to a-$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in I(\delta_3) = (a-\delta_3, a)$ имеем

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Тогда для каждого $x \in (a-\delta,\ \delta)$, используя теорему Коши, получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon,$$

где $c \in (x, a) \subset (a-\delta, a)$.

Таким образом, по определению предела

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. *В теореме 1 можно заменить условие* $x \to a-$ *и интервал* $(a-\delta, a)$ *на условие* $x \to a+$ *и интервал* $(a, a+\delta)$.

Для *д о к а з а т е л ь с т в а* этого факта достаточно сделать замену переменной $y = 2a - x$ и применить теорему 1 к функциям $f_1(y) = f(x)$ и $g_1(y) = g(x)$. Очевидно, эти функции удовлетворяют условиям теоремы, причем $y = 2a - x \to a-$ при $x \to a+$.

С л е д с т в и е 2 (первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x \to a$). *Пусть:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на некотором интервале* $(a-\delta, a+\delta)$ *и дифференцируемы на нем, за исключением, быть может, точки* $x = a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3) $f'(x), g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$;

4) существует конечный или бесконечный предел: $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно вытекает из теоремы 1 и следствия 1.

Похожая теорема имеет место для предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и в том случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к ∞ при $x \to a$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$). Однако доказательство в этом случае усложняется по причине, которая будет ясна дальше.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2 (второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a-$). *Пусть:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в интервале вида* $(a-h, a)$, $h > 0$;

2) $f'(x), g'(x) \neq 0$ *при всех* $x \in (a-h, a)$;

3) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ *при* $x \to a-$;

4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда предел отношения функций также существует и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что можно считать

$$\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R},$$

т.е. предел конечен. Действительно, если $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то

$$\lim_{x\to a-} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

И вместо того чтобы доказывать, что $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to a-} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Одновременно это будет означать, что $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Как и при доказательстве теоремы 1, будем использовать формулу Коши. Но здесь ситуация сложнее, так как мы не можем сразу отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ заменить на $\frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}$. Тем не менее, это можно сделать с малой погрешностью, которая, по существу, стремится к нулю. Будем считать, что в некоторой полуокрестности $(a-h_1, a)$ точки a выполняется неравенство $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Это возможно, поскольку $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a-$.

Пусть ε_1 — любое число, $0 < \varepsilon_1 < 1/2$. Возьмем $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ так, чтобы неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon_1, \quad \delta_1 < \min(h, h_1)$$

выполнялось для всех x из интервала $(a-\delta_1, a)$. Это возможно, так как

$$\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

существует по условию. Пусть x_0 — некоторая точка из этой окрестности. Поскольку $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$, то найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1) > 0$ такое, что

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1} \quad \forall\ x \in (a-\delta_2, a).$$

Аналогично найдется $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon_1) > 0$ такое, что

$$|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1} \quad \forall\ x \in (a-\delta_3, a).$$

Пусть $\delta_4 = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $\quad I_4 = \{x \mid \ x \in (a-\delta_4, a)\}$. Тогда для любого $x \in I_4$ в силу теоремы Коши имеем

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon_1,$$

где $c \in (x, x_0) \subset I_4$. Отсюда получим

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right| = \left|\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right) + l\right| < \varepsilon_1 + |l| < 1 + |l|.$$

Далее для тех же значений x будем иметь цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| &= \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} + \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right| \le \\ &\le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right| + \left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right| \le \\ &\le \left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|\left|\frac{\frac{\Delta g(x_0)}{g(x)}}{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)}} - 1\right| + \varepsilon_1 = \left|\frac{\Delta f}{\Delta g}\right| A + \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Но так как

$$\begin{aligned}\frac{\Delta g}{g} &= 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} = 1 + \alpha, \text{ где } |\alpha| < \varepsilon_1, \\ \frac{\Delta f}{f} &= 1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} = 1 + \beta, \text{ где } |\beta| < \varepsilon_1,\end{aligned}$$

то

$$A = \left|\frac{1+\alpha}{1+\beta} - 1\right| = \frac{|\alpha - \beta|}{|1+\beta|} \le \frac{2\varepsilon_1}{0,5} = 4\varepsilon_1.$$

Следовательно, получаем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le (|l| + 1)4\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1(4|l| + 5) = \varepsilon.$$

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l| + 5}\right).$$

Тогда для любого $\varepsilon = \left(0, \frac{1}{2}(4|l|+5)\right)$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ такое, что для любого $x \in (a - \delta, a)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$. Это значит, что

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если в теореме 2 условия $x \to a-$ и $x \in (a-h, a)$ заменить на условия $x \to a+$ и $x \in (a, a+h)$, то утверждение теоремы остается в силе.*

Для *д о к а з а т е л ь с т в а* достаточно применить теорему 2 к функциям

$$f_1(y) = f_1(2a - x) = f(x), \quad g_1(y) = g_1(2a - x) = g(x).$$

С л е д с т в и е 2 (второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$). *Пусть:*

1) $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой h-окрестности точки a;

2) $f'(x), g'(x) \neq 0$ в той же окрестности точки a;

3) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$;

4) существует предел отношения производных $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда предел отношения функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения непосредственно следует из утверждений теоремы 2 и следствия 1.

Замечания. **1.** В теоремах 1 и 2 условие $x \to a-$ можно заменить условием $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, а во вторых следствиях теорем 1 и 2 — на $x \to \infty$.

Доказательство проводится посредством подходящей замены переменной. Например, в случае $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ надо положить $x = -1/t$. Тогда

$$\left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=-1/t} = \frac{f_t'\left(-\frac{1}{t}\right)/\frac{1}{t^2}}{g_t'\left(-\frac{1}{t}\right)/\frac{1}{t^2}} = \frac{f_t'\left(-\frac{1}{t}\right)}{g_t'\left(-\frac{1}{t}\right)} = \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}.$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = l,$$

и затем по теореме 1 имеем

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2. Применение теоремы Штольца о пределе отношения двух последовательностей позволяет существенно упростить довольно громоздкий вывод второго правила Лопиталя. Далее мы приведем еще один вариант доказательства теоремы 2, основанный на указанной выше идее.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. В силу определения предела по Гейне мы имеем, что условие $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$ при $x \to a-$ означает выполнение условия $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l$ для любой возрастающей последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, $x_n \neq a$. Но так как по условию теоремы $g(x) \to \infty$ при $x \to a-$, то и $g(x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а это значит, что к отношению $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ можно применить теорему Штольца. Поэтому, используя еще и теорему Коши, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)},$$

если только последний предел существует. Но для чисел c_n мы имеем здесь неравенства $x_n < c_n < x_{n+1}$, откуда следует, что $c_n \to a$ при $n \to \infty$, поэтому последний предел существует и равен l.

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$. По второму правилу Лопиталя имеем

$$\ln x^x = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

2. Используя первое правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Лекция 22

§ 11. ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В качестве приложения докажем *формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* или, как ее еще называют, *локальную формулу Тейлора.*

Мы видим, что дифференциал df приближает приращение Δf с точностью до бесконечно малой порядка, большего 1. Это означает также, что
$\Delta f(a) - df(x)|_{x=a} = o(\Delta x)$, т.е. имеем

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(|x-a|) \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Правило Лопиталя позволяет обобщить это утверждение.

Рассмотрим **многочлен Тейлора степени** n:

$$q(x) = f_n(a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n,$$

где $\Delta x = x - a$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $f(x)$ дифференцируема $n-1$ раз в некоторой окрестности точки $x = a$ и существует $f^{(n)}(a)$. Тогда*

$$r(x) = f(x) - f_n(a,x) = o((\Delta x)^n) \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0,$$

Доказательство. Применим первое правило Лопиталя $n-1$ раз при $x \to a$ к отношению

$$\alpha(x) = \frac{r(x)}{(x-a)^n}.$$

Получим

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{r'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - q^{(n-1)}(x)}{x-a}.$$

Далее имеем

$$q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} \frac{r^{(n-1)}(x)}{((x-a)^n)^{(n-1)}} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a) \right) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) = 0.$$

Другими словами, $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. Следовательно, $r(a) = (x-a)^n \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая, т.е.

$$r(x) = o((x-a)^n).$$

Теорема доказана.

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно использовать для вычисления пределов. Действительно, при $x \to 0$ имеем, например,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5/120 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{120}.$$

Важно отметить, что локальная формула Тейлора имеет и глубокий содержательный смысл. В частности, она обобщает понятие дифференцируемости функции в точке, поскольку при $n = 1$ мы получаем из нее данное выше определение дифференциала функции.

Будем говорить, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют **касание n-го порядка в точке** x_0, если при $x \to x_0$ выполняется соотношение $f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n)$. Тогда локальная формула Тейлора утверждает, что многочлен Тейлора $f_n(x)$ имеет касание n-го порядка с функцией $f(x)$.

Заметим, что если два многочлена n-й степени $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеют касание порядка n в некоторой точке x_0 с какой-либо функцией $g(x)$, то их коэффициенты совпадают и $P_n(x) = Q_n(x)$. Действительно, тогда имеем

$$h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = (P_n(x) - g(x)) + (g(x) - Q_n(x)) = o((x-x_0)^n).$$

Но так как многочлен $h_n(x)$ имеет степень n, то, устремляя $x \to x_0$, получим, что все коэффициенты $h_n(x)$ равны нулю. Это и означает, что $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ представляют собой один и тот же многочлен. Отсюда также следует, что многочлен Тейлора $f_n(x) = f_n(a, x)$, из доказанной выше теоремы, определен однозначно. Производные функции $f(x)$ в точке a выражаются через его коэффициенты c_k по формулам

$$f_k(a) = k!c_k, \; k = 1, \dots, n.$$

Интересно, что возможна ситуация, когда в точке a функция $f(x)$ вторая производная $f''(a)$ уже не существует, и в то же время в этой точке имеет место касание порядка $n \geq 2$ этой функции и многочлена $P_n(x)$ степени n. Тогда при $k \geq 2$ величины

$$\partial_k = \frac{c_k}{k!},$$

где c_k — коэффициенты многочлена $P_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$, можно рассматривать как обобщение понятия производной соответствующего порядка функции $f(x)$ в точке $x = a$. Будем называть эти числа **метками** k-го порядка функции $f(x)$ в точке $x = a$ и обозначать их через $\partial_k = \partial_k(f(a))$.

Приведем **пример**, в котором на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ "почти всюду" разрывна, но в то же время она на "всюду плотном множестве" имеет не только производную первого порядка, но и метки $\partial_k(f(x))$ любого порядка (точный смысл слов, взятых в кавычки, станет ясным ниже). Эта функция задается так

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное}, \\ n^{-n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \; (m, n) = 1. \end{cases}$$

Относительно данной функции ограничимся доказательством утверждения, касающегося существования только первой производной.

Очевидно, что если x_0 — рациональное число из отрезка $[0, 1]$, то $f(x)$ разрывна в точке x_0. Если x_0 — иррациональное число, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число дробей со знаменателями, не превосходящими $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, а именно, $r_1, \dots, r_k$.

Пусть $\delta = \min\limits_{i \leq k} |x_0 - r_i|$. Тогда для любого x с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| < N^{-N} < N^{-1} < \varepsilon.$$

Далее нам потребуются следующие определение и теорема. *Число α называется* **алгебраическим,** *если оно удовлетворяет алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. Оно будет иррациональным, если любой многочлен первой степени с целыми коэффициентами не обращается в нуль.*

Т е о р е м а (теорема Рота). *Пусть ξ — иррациональное алгебраическое число и $\rho > 2$ — произвольная постоянная. Тогда существует конечное число пар (p, q) целых чисел, $q \geq 1$, $(p, q) = 1$ таких, что*

$$|\xi - \frac{p}{q}| < q^{-\rho}.$$

Пусть x_0 — любое алгебраическое иррациональное число. По теореме Рота при $\rho > 2$ неравенство

$$|x_0 - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\rho}$$

имеет лишь конечное число решений. Обозначим эти решения через $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_r}{q_r}$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и положим

$$N = \max(q_1, \ldots, q_r, \rho, [1/\varepsilon] + 1), \ \delta = \min_{i \leq r} \left| x_0 - \frac{p_i}{q_i} \right|.$$

Тогда, если $|x - x_0| < \delta$, то при $x = m/n$, $(m, n) = 1$, имеем, что

$$n > N, \ \left| \frac{m}{n} - x_0 \right| \geq \frac{1}{n^\rho}, \ |f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{n^n}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{n^{-n}}{n^{-\rho}} = n^{\rho - n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Если же x — иррациональное число, то

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0 < \varepsilon.$$

Таким образом установлено, что при алгебраическом иррациональном числе x_0 функция $f(x)$ имеет производную, равную нулю.

Назовем множество A *всюду плотным* на отрезке $[a, b]$, если для любой точки $x \in [a, b]$ в каждом интервале, содержащем x, находится хотя бы одна точка множества A.

Тогда указанная выше функция будет: 1) разрывна на всюду плотном множестве отрезка $[0, 1]$, 2) непрерывна на всюду плотном множестве в $[0, 1]$, 3) иметь производную на всюду плотном множестве в $[0, 1]$ (см. [34]).

В связи с рассмотренным примером может возникнуть вопрос: Будет ли функция $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ дифференцируема n раз, если в каждой точке этого отрезка у функции $g(x)$ существует метка $\partial_n g(x)$? Пример функции $y = e^{-1/x^2} \sin e^{1/x^2}$ дает отрицательный ответ на этот вопрос.

В заключение приведем другое доказательство локальной формулы Тейлора, допускающее простое обобщение на случай функций от нескольких переменных.

Второе доказательство теоремы. Применим метод математической индукции по параметру n. При $n = 1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала функции. Предположим теперь, что $n > 1$. Из условия теоремы вытекает, что функция $r(x)$ дифференцируема $(n - 1)$ раз в некоторой окрестности U точки $x = a$, и в самой точке дифференцируема n раз. Кроме того, в точке a сама функция и все ее производные до n-го порядка включительно равны нулю.

Далее, пусть $x \in U$ и $\Delta x = x - a$. Обозначим через $g(t)$ функцию вида

$$g(t) = r(a + t\Delta x).$$

Тогда имеем

$$r(x) = r(x) - r(a) = r(a + \Delta x) - r(a) = g(1) - g(0).$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа к функции $g(t)$, при некотором ξ, $0 < \xi < 1$, получим

$$r(x) = g'(\xi) = r'_x(a + \xi\Delta x)\Delta x.$$

Заметим, что точка $a + \xi\Delta x \in U$. Поэтому к производным в правой части последнего равенства можно применить предположение индукции с заменой значения параметра n на $n - 1$. Тогда будем иметь

$$r'_x(a + \xi\Delta x) = o(|x - a|^{n-1}).$$

Отсюда следует, что $r(x) = o(|x-a|^n)$. Теорема доказана.

§ 12. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки можно записать приближенное равенство

$$f(x) \approx f_n(a, x).$$

Оказывается, что многочлен $f_n(a,x)$ может хорошо приближать $f(x)$ и в некоторой, иногда весьма большой, окрестности точки a. Более того, знание всех чисел $f^{(n)}(a)$, соответствующих только одной точке a, часто позволяет вычислить $f(x)$ при любом x с любой требуемой степенью точности. Этот факт важен не столько для вычислений, сколько для построения теории. Выражаясь более точно, мы сейчас докажем одну из важнейших теорем анализа, центральную теорему курса в этом семестре, а именно: формулу Тейлора с остаточным членом в общей форме (или в форме Шлемильха–Роша).

Теорема (формула Тейлора). *Пусть $f(x)$ — $(n+1)$ раз дифференцируемая функция на интервале (x_0, x_1). Пусть $a < b$ — любые две точки из этого интервала. Тогда для любого положительного $\alpha > 0$ существует точка c, лежащая между a и b такая, что*

$$r_n(b) = f(b) - f_n(a,b) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{\alpha} \cdot (b-c)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Напомним, что

$$f_n(a,b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

Доказательство. Определим число H равенством

$$H = \frac{f(b) - f_n(a,b)}{(b-a)^{\alpha}}.$$

По существу, нам надо доказать, что на интервале (a,b) найдется точка c такая, что

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(b-c)^{n+1-\alpha} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Докажем это, опираясь на теорему Ролля. Равенство, определяющее число H, можно записать так:

$$f(b) - f_n(a,b) - H(b-a)^\alpha = 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, определенную на $[a,b]$ соотношением

$$\varphi(t) = f(b) - f_n(t,b) - H(b-t)^\alpha.$$

Тогда, очевидно, $\varphi(a) = 0$. Кроме того, имеем, что $\varphi(t)$ дифференцируема на (a,b) и непрерывна на $[a,b]$. Далее, так как справедливо равенство $f_n(b,b) = f(b)$, то

$$\varphi(b) = f(b) - f(b) - H(b-b)^\alpha = 0.$$

Следовательно, по теореме Ролля на интервале (a,b) производная $\varphi'(t)$ обращается в нуль в некоторой точке c, т.е.

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = c, \quad c \in (a,b).$$

Запишем $\varphi'(t)$ в развернутой форме:

$$\varphi'(t) = -f_n'(t,b) + \alpha H(b-t)^{\alpha-1} =$$

$$= \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(b-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n\right)_t' + \alpha H(b-t)^{\alpha-1}.$$

Так как при $s = 1, \dots, n$ имеем

$$\left(\frac{f^{(s)}(t)}{s!}(b-t)^s\right)_t' = \frac{f^{(s+1)}(t)}{s!}(b-t)^s - \frac{f^{(s)}(t)}{(s-1)!}(b-t)^{s-1},$$

то

$$\varphi'(t) = \alpha H(b-t)^{\alpha-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n.$$

Отсюда при $t = c$ получаем

$$\varphi'(c) = \alpha H(b-c)^{\alpha-1} - f^{(n+1)}(c)\frac{(b-c)^n}{n!} = 0.$$

Следовательно,

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(b-c)^{n+1-\alpha} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Доказательство закончено.

С л е д с т в и е. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха – Роша верна и при $a \geq b$.*

Доказательство. 1. Если $b = a$, то $f_n(a,b) = f(a)$, $r_n(b) = 0$ и формула имеет место.

2. Если $b < a$, то применим теорему к функции $g(x) = f(2a - x)$, $b_1 = 2a - b$. Тогда $b_1 > a$ и справедливо равенство

$$g(b_1) = g_n(a, b_1) + R_n(b_1).$$

Но легко убедиться в том, что $g(b_1) = f(b)$, $g_n(a,b_1) = f_n(a,b)$, $R_n(b_1) = r_n(b)$. Действительно, имеем

$$(b_1 - a)^s = (a - b)^s = (-1)^s(b - a)^s;$$

$$g_n(a,b_1) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(b_1 - a) + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b_1 - a)^n =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n = f_n(a,b).$$

Далее при некотором c_1, $a < c_1 < b$, справедливо равенство

$$R_n(b_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b_1 - a}{b_1 - c_1}\right)^{\alpha}(b_1 - c_1)^{n+1}\frac{g^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}.$$

Положим $c = 2a - c_1$. Тогда $b < c < a$,

$$R_n(b_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b - a}{b - c}\right)^{\alpha}\frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}(b - c)^{n+1} = r_n(b).$$

Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха–Роша в случае $a \geq b$ имеет тот же вид, что и при $a < b$. Следствие доказано.

Частные случаи формулы Тейлора.

1. Остаточный член в форме Лагранжа ($\alpha = n+1$). В этом случае

$$r_n(b) = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{b - a}{b - c}\right)^{n+1}(b - c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}.$$

2. Остаток в форме Коши ($\alpha = 1$):

$$r_n(b) = \frac{n+1}{1}\frac{b - a}{b - c}\cdot(b - c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

$$c = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 - \theta = \frac{b - c}{b - a},$$

$$r_n(b) = (b - a)^{n+1}(1 - \theta)^n\frac{f^{(n+1)}(a + \theta(b - a))}{n!}.$$

Замечания. **1**. Формула Тейлора (с остаточным членом в любой форме) в частном случае $a = 0$ обычно называется *формулой Маклорена.*

2. Сравнивая формулы Тейлора с остаточными членами в общей форме и в форме Пеано, видим, что в первом случае имеем более точный результат, однако достигается это за счет более жестких требований к функции. В самом деле, в первом случае в окрестности точки, в которой рассматривается разложение, требуется существование $(n+1)$-й производной данной функции, а во втором случае — только $(n-1)$-й производной, то есть на две производные меньше.

Лекция 23

§ 13. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К НЕКОТОРЫМ ФУНКЦИЯМ

1. Показательная функция: $f(x) = e^x$. Имеем

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1; \quad f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

При любом фиксированном x остаток в ней стремится к нулю, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

2. Функция $f(x) = \sin x$. Имеем

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2k+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos\theta x.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа дает

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

3. Функция $f(x) = \cos x$. Имеем

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2k)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + 2k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos\theta x.$$

Тогда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

4. Функция $f(x) = \ln(1+x)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$
$$R_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

Заметим, что если $|x| < 1$, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того,

а) если $0 \le x < 1$, то $|R_n| \le \frac{1}{n+1}$;

б) если $-1 < -r \le x < 0$, то $|R_n| \le \frac{r^{n+1}}{n(1-r)}$, где

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

(остаток в форме Коши).

5. Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$. Имеем

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta_1 x)^{\alpha-n-1}, \quad 0 < \theta_1 < 1$$

(остаток в форме Лагранжа),

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta_2 x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right)^n, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

(остаток в форме Коши). Если $|x| < 1$, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Мы видим, что во всех этих случаях $R_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Другими словами,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0, x) = f(x).$$

Это предельное выражение символически записывается так:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

и называется **рядом Тейлора функции** $f(x)$ в точке $x = a$.

Заметим, что при всех $n \in N$ для n-го члена ряда имеет место равенство

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{d^n f(x)}{n!} = \left.\frac{d^n f(x)}{n!}\right|_{\substack{x=a\\ \Delta x = x-a}}.$$

Поэтому ряд Тейлора можно переписать в следующем виде

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{n!} + \dots .$$

Тем самым определен точный смысл равенства, приведенного ранее в лекции 18, §4.

Замечание. Ряд Тейлора не всегда сходится к породившей его функции.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда при любом натуральном k имеем

$$f^{(k)}(0) = 0.$$

Таким образом, мы видим, что ряд Тейлора нулевой, а породившая его функция отлична от тождественного нуля.

Лекция 24

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТОЧКИ. ВЫПУКЛОСТЬ

Наша дальнейшая цель — применение построенной теории к решению задач, связанных с изучением поведения функций. Одна из них — задача отыскания локальных и глобальных экстремумов функций. Ранее мы уже доказали ряд утверждений подобного типа. Напомним их, а заодно и некоторые понятия, которые потребуются далее.

1. Точки x, в которых $f'(x) = 0$, называются **стационарными.**

2. **Критерий возрастания (в широком смысле)** на интервале (a, b) дифференцируемой функции: для того чтобы функция $f(x)$ не убывала на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на (a, b).

3. **Критерий возрастания в строгом смысле:** для того чтобы $f(x)$ строго возрастала на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на (a, b) и, кроме того, $f'(x) \not\equiv 0$ ни на каком интервале $(a_1, b_1) \supset (a, b)$.

Отсюда имеем **достаточное условие строгого возрастания:** для того чтобы $f(x)$ строго возрастала, достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b)$.

4. **Т е о р е м а Ферма.** Если в точке $x_0 \in (a, b)$ имеется несобственный локальный экстремум функции $f(x)$, то x_0 — стационарная точка.

Далее мы выведем несколько достаточных условий достижения функцией локального экстремума в заданной точке.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т.е. в этой точке $f'(x_0) = 0$). Тогда:*

1а) если $f'(x) > 0$ слева от x_0 и $f'(x) < 0$ справа от x_0, то x_0 — точка строгого локального максимума функции $f(x)$;

1б) если $f'(x) < 0$ слева от x_0 и $f'(x) > 0$ справа от x_0, то x_0 — точка строгого локального минимума $f(x)$;

2) если $f'(x)$ имеет справа и слева от точки x_0 один и тот же знак, то x_0 не является точкой экстремума ни в широком, ни в строгом смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1а. По теореме Лагранжа имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

где точка c находится на интервале с концами x_0 и x.

Из условия следует, что $f'(c)(x - x_0) < 0$. Действительно, если $x - x_0 > 0$, то $c > x_0$ и, значит, $f'(c) < 0$, $(x - x_0)f'(c) < 0$; если же $x - x_0 < 0$, то $f'(c) > 0$ и $(x - x_0)f'(c) < 0$. Отсюда получим, что $f(x) < f(x_0)$, что и требовалось доказать. Доказательство п. 1б проводится аналогично.

2. Если $f'(x) > 0$ справа и слева от x_0, то $f'(c)(x - x_0) < 0$ слева и > 0 справа. Отсюда имеем $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ при $x_1 < x_0 < x_2$, что и требовалось доказать. Случай $f'(x) < 0$ рассматривается аналогично.

Доказанная нами теорема позволяет сформулировать следующее **правило исследования стационарной точки на экстремум:**

Если при переходе через стационарную точку слева направо производная меняет знак $+$ на знак $-$, то функция имеет локальный максимум в этой точке, если меняется знак $-$ на знак $+$, то функция имеет локальный минимум, и если она не меняет знак, то локального экстремума нет.

Т е о р е м а 1а. *Пусть $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если $f'(x)$ меняет знак $+$ на знак $-$ при переходе через точку x_0 слева направо, то $f(x)$ имеет локальный максимум, если знак $-$ на знак $+$, то локальный минимум, и если не меняет знак, то локального экстремума нет.*

Д о к а з а т е л ь с т в о совершенно аналогично доказательству теоремы 1, так как там мы нигде не пользовались существованием производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Общее правило отыскания (локального и глобального) **экстремума** функции $f(x)$ на отрезке в случае, когда $f(x)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема (т.е. дифференцируема всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек).

Находим все стационарные точки и точки, в которых $f'(x)$ не существует, и проверяем их на экстремальность. Затем, добавляя концевые точки и выбирая наибольшее и наименьшее из значений функции в этих точках, находим ее глобальные экстремумы.

Т е о р е м а 2 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда:*

1) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 — точка (строгого) локального максимума;

2) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 — точка (строгого) локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в точке $x = x_0$, и поскольку $f'(x_0) = 0$, то $f'(x)$ меняет знак с + на – при переходе через x_0 слева направо. Поэтому по теореме 1 точка x_0 является локальным максимумом.

2. $f''(x_0) > 0$, поэтому $f'(x)$ возрастает в точке $x = x_0$.

Из теоремы 1 тогда следует, что x_0 — точка локального минимума. Доказательство закончено.

Т е о р е м а 3 (третье достаточное условие экстремума). *Пусть*

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(2k)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума;

2) если $f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. При $k = 1$ утверждение следует из теоремы 2. Пусть $k > 1$. Выразим $f'(x)$ по формуле Тейлора:

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-3)!}(x - x_0)^{2k-3} +$$

$$+ \frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2}.$$

Отсюда

$$f'(x) = \frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2}.$$

Так как $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то $f^{(2k-1)}(x)$ убывает и, следовательно, $f^{(2k-1)}(x)$ меняет знак + на – при переходе через точку x_0, а значит, и $f'(x)$ меняет знак + на –. Поэтому x_0 — точка локального максимума. Случай 2 рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **выпуклой вверх** *на интервале (a, b), если график функции лежит под касательной для любой точки данного интервала.*

Это значит, что если x_0 — произвольная фиксированная точка из (a, b) и

$$f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

то

$$f_1(x) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Поясним, что график линейной функции $f_1(x)$ является касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется* **выпуклой вниз** *на (a,b), если график ее лежит над касательной, т.е.*

$$f_1(x) \le f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Теорема 4. *1. Если $f''(x) \le 0$ на (a,b), то $f(x)$ выпукла вверх на (a,b).*

2. Если $f''(x) \ge 0$ на (a,b), то $f(x)$ выпукла вниз на (a,b).

Доказательство. 1. Из формулы Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2,$$

где $c \in (a,b)$.

Так как $f''(c) \le 0$, то $f(x) \le f_1(x)$ $\forall x \in (a,b)$, что и требовалось доказать. Случай 2 доказывается аналогично.

Теорема 4а. *Если $f''(x_0) < 0$ и $f''(x)$ непрерывна в x_0, то $\exists$ δ-окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ выпукла вверх.*

Доказательство. Поскольку $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f''(x_0) < 0$, существует число $\delta_1 > 0$ такое, что $f''(x) < 0$ в δ_1-окрестности точки x_0, и в ней по теореме 4 функция $f(x)$ выпукла вверх, что и требовалось доказать.

Замечание. Если в определениях 1 и 2 имеют место строгие неравенства, то функция $f(x)$ называется **строго выпуклой.** Строгие знаки неравенства в теоремах 4 и 4а влекут за собой строгую выпуклость функции $f(x)$.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ имеет первую производную на интервале (a,b) и выпукла на этом интервале. Тогда производная $f'(x)$ является непрерывной и монотонной функцией на этом интервале, причем строгая выпуклость $f(x)$ влечет за собой строгую монотонность $f'(x)$. Выпуклость вверх при этом соответствует убыванию, а выпуклость вниз — возрастанию производной $f'(x)$.*

Доказательство. Мы ограничимся рассмотрением только одного случая, а именно, когда функция выпукла вниз в нестрогом смысле. Выберем произвольным образом на интервале (a,b) две точки $x_1 < x_2$. Пусть $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) на координатной плоскости соединим хордой и ее угловой коэффициент $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ обозначим через k_0. Через точку (x_1,y_1) проведем касательную прямую к графику функции $y=f(x)$. Поскольку $f(x)$ выпукла вниз, эта касательная лежит под графиком, следовательно, и под хордой, имея с ней общую точку (x_1,y_1). Но это возможно лишь в том случае, если угловой коэффициент касательной $f'(x_1)$ не превосходит углового коэффициента хорды k_0, т.е. если $f'(x_1) \le k_0$.

Рассуждая подобным образом относительно точки (x_2, y_2), приходим к неравенству $k_0 \le f'(x_2)$, откуда имеем $f'(x_1) \le k_0 \le f'(x_2)$. В силу произвольности выбора точек $x_1 < x_2$ это означает, что $f'(x)$ не убывает на (a, b).

Теперь заметим, что по теореме Дарбу функция $f'(x)$ принимает все свои промежуточные значения, а это ввиду монотонности $f(x)$ влечет за собой непрерывность функции $f'(x)$. Таким образом, рассматриваемый случай разобран полностью.

Другие случаи рассматриваются совершенно аналогично, поэтому теорему 5 можно считать доказанной.

Замечание. Из определений 1 и 2 следует, что всякая хорда, соединяющая две различные точки графика функции, выпуклой вверх, лежит под ее графиком, а для функции, выпуклой вниз, она лежит над графиком. Это свойство часто берется в качестве исходного определения выпуклости функции (вверх или вниз соответственно). Рассмотрим его подробнее на примере функции выпуклой вверх. Запишем свойство выпуклости вверх функции в аналитической форме с помощью неравенств. Значения координат точки (x, y), находящейся на хорде с концами в точках (x_1, y_1), $y_1 = f(x_1)$ и (x_2, y_2), $y_2 = f(x_2)$ при x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b), с условием $x_1 < x_2$ можно записать в виде

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Поскольку величина y в этом случае не должна превосходить $f(x)$, то условие выпуклости вверх будет выражено следующим соотношением

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

В этом случае функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и имеет на нем правую и левую производную. Далее мы докажем непрерывность функции и ограничимся рассмотрением только правой производной.

Сначала докажем непрерывность справа функции $f(x)$ в любой точке x_0 интервала (a, b). Прежде всего отметим следующий геометрический факт, состоящий в том, что всякая прямая пересекает график функции $f(x)$ либо по некоторому отрезку, либо не более чем в двух точках. Действительно, если бы нашлись три такие точки $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ и $C = (x_3, y_3)$, $x_1 < x_2 < x_3$, то на интервале (x_1, x_2) или на интервале (x_2, x_3) существовала бы точка x_4, для которой точка $D = (x_4, f(x_4))$ не лежит на хорде с концами A и C. Но тогда при $x \in (x_1, x_2)$ точка D обязана лежать выше хорды AB и хорда DC лежит выше точки B, что противоречит выпуклости вверх функции $f(x)$. Если бы точка x_4 лежала на интервале (x_2, x_3), то выше точки B проходила бы хорда AD.

Отсюда следует, что если точка $x_5 \in (a, b)$ лежит левее точки x_0, то часть графика функции $f(x)$, отвечающая точкам $x > x_0$, лежит под продолжением хорды l_1, соединяющей точки $(x_5, f(x_5))$ и $(x_0, f(x_0))$. Это значит, что если k_1 — угловой коэффициент хорды l_1, то при всех $x > x_0$ имеем $\Delta f(x_0) \le k_1 \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$. Следовательно, при $\Delta x > 0$ заключаем, что

$$\Delta f(x_0) = O(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0+,$$

т.е. $f(x)$ непрерывна справа в точке $x_0 \in (a, b)$. Подобным же образом можно установить, что функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна слева. Таким образом, во всех точках интервала (a, b) эта функция является непрерывной.

Переходя к доказательству существования правой производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, заметим, что для любых точек x_6 и x_7 с условием $x_0 < x_6 < x_7$ хорда, соединяющая точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_6, f(x_6))$, лежит не ниже хорды, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_7, f(x_7))$, поэтому для угловых коэффициентов k_6 и k_7 этих хорд справедливо неравенство $k_6 \ge k_7$, т.е.

$$k_6 = \left.\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right|_{\Delta x = x_6 - x_0} \ge \left.\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right|_{\Delta x = x_7 - x_0} = k_7.$$

Таким образом, отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ не убывает при монотонном стремлении величины Δx к нулю справа. С другой стороны, это отношение ограничено величиной k_1, рассмотренной выше при доказательстве непрерывности справа функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. Следовательно, согласно свойству монотонных функций существует предел отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

который по определению и называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0. Случай левой производной аналогичен.

Итак, мы доказали, что у выпуклой вверх функции правая и левая производные в любой внутренней точке отрезка $[a, b]$ существуют, хотя они и не обязаны быть равными.

С другой стороны, мы установили, что правая производная функции $f(x)$ в точке x_0 не превосходит углового коэффициента k_7. Но предел величины k_7 при $x_7 \to x_0$ есть левая производная $f'(x_0-)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, откуда следует, что в любой точке интервала правая производная не превосходит левой производной. Если же рассмотреть две различные точки $x_0 < x_1$, то угловой коэффициент k хорды, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$, "разделяет" значения правой производной $f(x_0+)$ в точке x_0 и левой производной $f'(x_1-)$ в точке x_1, т.е.

$$f'(x_0+) \geq k \geq f'(x_1-) \geq f'(x_1+).$$

Отсюда следует, что $f'(x+)$ не возрастает на (a, b). То же справедливо и для левой производной. Поскольку обе эти функции монотонны, каждая из них имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода. Все остальные точки интервала (a, b) являются точками непрерывности обеих функций. Но в этом случае в силу последнего неравенства их значения совпадают, и тогда функция $f(x)$ имеет обычную производную

$$f'(x_0) = f'(x_0+) = f'(x_0-),$$

которая к тому же будет непрерывной и невозрастающей функцией в этой точке.

Кроме того, по свойству точки разрыва первого рода в ней существуют правые и левые пределы для $f'(x+)$ и $f'(x-)$ и они одновременно совпадают соответственно с правой и левой производными в этой точке. Дело в том, что у функции выпуклой вверх правая производная в каждой точке непрерывна справа, а левая производная — непрерывна слева. Снова будем рассматривать только правую производную функции $f(x)$ в точке x_0. По определению она равна предельному значению чисел k, являющихся угловыми коэффициентами хорды, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, когда x стремится к x_0 справа. Отметим, что при уменьшении x величина k не убывает. Если $x_0 < x_1 < x$, то угловой коэффициент k_1 хорды, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x, f(x))$, не превосходит $f'(x_1+)$. Величина же k_1 стремится к k при $x_1 \to x$. Поэтому предел l функции $f'(x_1+)$ при $x_1 \to x_0+$ не меньше, чем k, т.е. $l \geq k$. Отсюда следует, что

$$l \geq \lim_{x \to x_0+} k = f'(x+),$$

но в силу того, что $f'(x+)$ не возрастает, всегда имеем, что $l \leq f'(x+)$, т.е. $l = f'(x+)$, что и означает непрерывность справа функции $f'(x+)$ в точке x_0.