Так как при $n \to \infty$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta}{e^{\Delta}-1} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = e^b - e^a = \int_a^b e^x\, dx.$$

**2.** Пусть $0 < a < b$. Тогда имеем $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ и положим $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда для соответствующей интегральной суммы $\sigma_n$ будем иметь

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}x_k}\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

**3.** Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = l$.

Очевидно, имеем

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Отсюда по формуле Ньютона – Лейбница, которая будет доказана чуть позже, получим $l = \ln 2$.

В частности, используя это, найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

**4.** Справедливо следующее равенство:

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx = \begin{cases} 2\pi \ln|\alpha|, & \text{если} \quad |\alpha| > 1, \\ 0, & \text{если} \quad |\alpha| < 1. \end{cases}$$

Положим $x_k = \frac{\pi k}{n}$, $\xi_k = x_k$ $k = 1, \ldots, n$. Тогда имеем $\Delta x_k = \frac{\pi}{n}$. Следовательно,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - 2\alpha\cos x_k + \alpha^2)\frac{\pi}{n} = \pi\sum_{k=1}^{n} \ln|(\alpha - e^{ix_k})(\alpha - e^{-ix_k})|\frac{1}{n} =$$

$$= \pi \ln \prod_{k=1}^{n} |(\alpha - e^{ix_k})(\alpha - e^{-ix_k})|\frac{1}{n} = \pi \ln|\alpha^{2n} - 1|\frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим искомое значение интеграла.

**5.** Пусть $f(x)$ не убывает и ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда для величины

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)\,dx$$

имеют место неравенства

$$0 \le \delta_n \le \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

Очевидно, имеем

$$0 \le \delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left(f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(x)\right)\,dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left(f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(a + \frac{k-1}{n}(b-a))\right)\,dx \le$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(a + \frac{k-1}{n}(b-a))\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

А это и доказывает требуемое неравенство.

**6.** Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную и интегрируемую производную, и пусть символ $\delta_n$ обозначает то же, что и в примере 5. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n\delta_n = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2}.$$

В силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях на каждом отрезке $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, для любой точки $x \in \Delta_k$ существует точка $\xi_k$, принадлежащая интервалу $(x_{k-1}, x_k)$, такая, что

$$f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(x) = f'(\xi_k)(\frac{k}{n}(b-a) - x).$$

Пусть $m_k, M_k$ — соответственно нижняя и верхняя грани производной $f'(x)$ на отрезке $\Delta_k$. Тогда $m_k \leq f'(\xi_k) \leq M_k$.

Из определения $\delta_n$ имеем

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left(a + \frac{k}{n}(b-a) - x\right) f'(\xi_k)\, dx.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \leq \delta_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

Домножая обе части неравенства на $n$ и переходя к пределу, получаем требуемое предельное соотношение.

Отсюда, в частности, для последовательности примера 3, имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \ln 2\right) = -\frac{1}{4}.$$

7. Пусть $p(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{\int\limits_0^1 \frac{dx}{p(x)}} \leq e^{\int\limits_0^1 \ln p(x)\, dx} \leq \int\limits_0^1 p(x)\, dx.$$

Положим $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$. Тогда для соответствующих интегральных сумм в силу неравенств между средними гармоническим, геометрическим и арифметическим имеем

$$\frac{n}{\frac{1}{p(x_1)} + \cdots + \frac{1}{p(x_n)}} \leq e^{\frac{1}{n}\sum \ln p(x_k)} = \sqrt[n]{p(x_1)\ldots p(x_n)} \leq \frac{p(x_1) + \ldots p(x_n)}{n}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получаем искомое неравенство.,

## § 7. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА КАК ПРЕДЕЛА ПО БАЗЕ

Напомним данное в конце § 1 определение интеграла Римана как предела по некоторой базе.

Пусть $A$ — совокупность всех размеченных разбиений отрезка $[a,b]$. Множество $A$ будет основным множеством базы $B$. При всяком $\delta > 0$ окончаниями $b = b_\delta \in A$ этой базы $B$ являются множества, состоящие изо всех размеченных разбиений $V \in A$ с диаметром разбиения $\Delta_V$, меньшим $\delta$. Другими словами, окончание $b_\delta$ задается так:

$$b_\delta = \{V \in A \mid \Delta_V < \delta\}.$$

Пусть, как и раньше, $\sigma(V)$ — интегральная сумма, отвечающая размеченному разбиению $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, т.е.

$$\sigma(V) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Тогда число $I$ называется **интегралом Римана** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если

$$I = \lim_B \sigma(V).$$

Другими словами, число $I$ — интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения $V$ отрезка $[a,b]$ с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь $A'$ — совокупность неразмеченных разбиений отрезка $[a,b]$. Это множество $A'$ является основным множеством базы $B'$, состоящей из окончаний $b'_\delta$, причем $b'_\delta$ состоит изо всех неразмеченных разбиений $T$ с диаметром $\Delta_T < \delta$.

Дадим определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

*Пусть $S(T)$ и $s(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие неразмеченному разбиению $T$ и $\Omega(T) = S(T) - s(T)$. Тогда число*

$$I^* = \inf_{T \in A'} S(T)$$

*называется* **верхним интегралом Дарбу**, а *число*

$$I_* = \sup_{T \in A'} s(T)$$

— **нижним интегралом Дарбу** *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Возьмем любое фиксированное неразмеченное разбиение $T_0$. Обозначим через $\alpha(T_0)$ множество всех тех размеченных разбиений $V$, которым соответствует одно и то же неразмеченное разбиение $T_0$, т.е. множество всех его разметок. Тогда, исходя из леммы 2 §3, определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу можно записать и так:

$$I^* = \inf_{T\in A'} \sup_{V\in\alpha(T)} \sigma(V), I_* = \sup_{T\in A'} \inf_{V\in\alpha(T)} \sigma(V).$$

Отметим несколько свойств введенных выше понятий.

Л е м м а 1. *Пусть размеченное разбиение $V$ есть разметка разбиения $T_0$, т.е. $V \in \alpha(T_0)$. Тогда, если $V \in b_\delta$, то:*

*1)* $\alpha(T_0) \subset b_\delta$;

*2)* $\bigcup\limits_{T_0, \Delta_{T_0}<\delta} \alpha(T_0) = \bigcup\limits_{T_0\in b'_\delta} \alpha(T_0) = b_\delta.$

Действительно, имеем $\Delta_{T_0} = \Delta_V$. Следовательно, для любого размеченного разбиения $V_1 \in \alpha(T_0)$ получим $\Delta_{V_1} = \Delta_V < \delta$, поэтому $\alpha(T_0) \subset b_\delta$. Свойство 2) проверяется аналогично. Лемма 1 доказана.

Отметим теперь несколько свойств базы $B$. Кроме указанных ранее двух свойств:

1) любое окончание базы — непустое множество;

2) для любых окончаний $b_1$ и $b_2$ существует окончание $b_3$ с условием $b_3 \subset b_1 \cup b_2$, выполняются следующие три свойства:

3) Для любых окончаний $b_1$ и $b_2$ выполняется одно из условий: либо $b_1 \subset b_2$, либо $b_2 \subset b_1$.

4) Напомним определение фундаментальной и монотонной последовательности по базе множеств (см. лекцию 30, ч. I). Последовательность разбиений $\{V_n\}$ называется **фундаментальной** по базе $B$, если для любого окончания $b \in B$ существует только конечное множество членов последовательности, не принадлежащих $b$. Фундаментальная последовательность $\{V_n\}$ называется **монотонной** по базе $B$, если для любого окончания $b$ из условия $V_n \in b$ следует, что $V_{n+1} \in b$. В качестве монотонной последовательности по базе $B$ можно взять последовательность $\{V_n\}$ размеченных разбиений отрезка $[a,b]$ таких, что $T_n = T(V_n)$ является разбиением его на $n$ равных частей.

5) $\bigcap\limits_{b\in B} b = \varnothing$.

Введем следующие обозначения для верхнего и нижнего пределов по базе $B$ :

$$J^* = \overline{\lim_B}\, \sigma(V),\ J_* = \underline{\lim_B}\, \sigma(V).$$

Справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1.** *Имеют место неравенства:*

$$J_* \le I_* \le I^* \le J^*.$$

Отсюда в силу критерия Коши получим следующий критерий интегрируемости функции по Риману.

**Т е о р е м а 2.** *Для того чтобы функция была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$J^* = J_*.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о* теоремы 1. Из определения верхних интегралов $I^*$ и $J^*$ и свойств верхнего предела по базе множеств (теорема 3, лекция 30, ч. I) имеем

$$I^* = \inf_T S(T) = \inf_T \sup_{V \in \alpha(T)} \sigma(V) = \inf_{\delta>0} \inf_{\Delta_T<\delta} \sup_{V\in\alpha(T)} \sigma(V) \le$$

$$\le \inf_{\delta>0} \inf_{\Delta_T<\delta} \sup_{V\in b_\delta} \sigma(V) = \inf_{b_\delta \in B} \sup_{V\in b_\delta} \sigma(V) = \overline{\lim_B}\, \sigma(V) = J^*,$$

т. е. $I^* \le J^*$. Аналогично, получим, что $J_* \le I_*$. Теорема 1 доказана.

*Замечание 1.* Итак, мы видим, что критерий Римана для существования интеграла в форме $I^* = I_*$ на языке понятия предела по базе, в сущности, эквивалентен критерию Коши существования предела по базе $\Delta_V \to 0$.

*Замечание 2.* Из эквивалентности понятий предела по Коши и по Гейне для базы $\Delta_T \to 0$ вытекает, что функция интегрируема тогда и только тогда, когда для любой последовательности разбиений $\{V_n\}$ с условием $\Delta_{V_n} \to 0$ при $n \to \infty$ последовательность интегральных сумм $\{\sigma(V_n)\}$ является сходящейся последовательностью. С другой стороны, специальный критерий интегрируемости, который был доказан ранее, говорит о том, что здесь можно ограничиться лишь одной последовательностью равномерных разбиений отрезка интегрирования. В этом проявляется специфика рассматриваемой базы $\Delta_T \to 0$.

Уточним теорему 1, а именно, покажем, что верхний предел по базе $B$ интегральных сумм совпадает с верхним интегралом Дарбу. Для этого нам будут необходимы несколько лемм.

**Л е м м а 2.** *Пусть модуль функции $f(x)$ ограничен на отрезке $E = [a, b]$ числом $M$. Пусть $T$ — разбиение этого отрезка с диаметром $\delta > 0$. Пусть также разбиение $T_1$ получается из $T$ добавлением к нему одной точки. Тогда для разности верхних сумм Дарбу $S(T)$ и $S(T_1)$ имеем оценку*

$$|S(T_1) - S(T)| \le 2M\delta.$$

*Доказательство.* Рассмотрим отрезок $E_0 = [a_0, b_0]$, являющийся отрезком разбиения $T$ и содержащий точку $t \in T_1$, не входящую в разбиение $T$. Тогда наборы точек $\tau = \{a_0 < b_0\}$ и $\tau_1 = \{a_0 < t < b_0\}$ можно рассматривать как неразмеченное разбиение отрезка $E_0$. Пусть при этом $S(\tau)$ и $S(\tau_1)$ есть верхние суммы Дарбу на этом отрезке. Тогда из определения следует, что

$$S(T_1) - S(T) = S(\tau_1) - S(\tau).$$

Отсюда имеем

$$|S(T_1) - S(T)| = |S(\tau_1) - S(\tau)| \le |S(\tau_1)| + |S(\tau)| \le M\delta + M\delta = 2M\delta.$$

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** *Если в условиях леммы 2 разбиение $T_1$ получается из разбиения $T$ добавлением не более, чем $n$ точек, то имеет место оценка*

$$|S(T_1) - S(T)| \le 2M\delta n.$$

*Доказательство.* Справедливость леммы 3 устанавливается $n$ кратным применением леммы 2. Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Пусть разбиение $T$ отрезка $E = [a, b]$ удовлетворяет условию леммы 2, а разбиение $T_1$ того же отрезка содержит не более $n$ внутренних точек. Тогда справедливо неравенство*

$$S(T) \le S(T_1) + 2M\delta n.$$

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение $T_2 = T \cup T_1$. Тогда в силу основного свойства верхних сумм Дарбу справедливы неравенства

$$S(T_2) \le S(T), \quad S(T_2) \le S(T_1).$$

Далее применим лемму 3 к суммам $S(T)$ и $S(T_2)$, получим

$$S(T) - S(T_2) \le 2M\delta n.$$

Отсюда следует, что

$$S(T) \le S(T_2) + 2M\delta n \le S(T_1) + 2M\delta n.$$

Лемма 4 доказана.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть модуль функции $f(x)$ ограничен на отрезке $E = [a, b]$ числом $M > 0$. Пусть, далее, $I^*$ — верхний интеграл Дарбу от функции $f(x)$, а $\sigma(V)$ — интегральная сумма, отвечающая размеченному разбиению $V$ отрезка $E$. Пусть также $J^* = \overline{\lim\limits_{\Delta_V \to 0}} \sigma(V)$. Тогда имеет место равенство $J^* = I^*$.*

*Замечание.* В силу ограниченности функции $f(x)$ числа $I^*$ и $J^*$ существуют.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Обозначим через $T(V)$ неразмеченное разбиение отрезка $E$, полученное из размеченного разбиения $V$ отбрасыванием точек разметки, а через $\alpha(T_0)$ — множество всех размеченных разбиений $V$ с условием $T(V) = T_0$.

Тогда непосредственно из определений и свойств верхнего предела по базе и из леммы 1 вытекает

$$S(T_0) = \sup_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V), I^* = \inf_T S(T) = \inf_{\delta > 0} \inf_{\Delta_T < \delta} S(T),$$

$$J^* = \overline{\lim_{\Delta_V \to 0}} \sigma(V) = \inf_{\delta > 0} \sup_{\Delta_V < \delta} \sigma(V) =$$

$$= \inf_{\delta > 0} \sup_{\Delta_T < \delta} \sup_{V \in \alpha(T)} \sigma(V) = \inf_{\delta > 0} \sup_{\Delta_T < \delta} S(T).$$

Таким образом всегда имеет место неравенство

$$I^* = \inf_{\delta > 0} \inf_{\Delta_T < \delta} S(T) \le \inf_{\delta > 0} \sup_{\Delta_T < \delta} S(T) = J^*.$$

Нам надо доказать, что $I^* = J^*$. Заметим, что для любого числа $\varepsilon > 0$ число $I^* + \varepsilon$ уже не является нижней гранью множества значений $S(T)$, поэтому существует разбиение $T_0$ такое, что

$$I^* \le S(T_0) \le I^* + \varepsilon.$$

Далее заметим, что величина $\sup\limits_{\Delta_T < \delta} S(T)$ как функция от $\delta$ является неубывающей. Поэтому существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого $\delta$ с условием $0 < \delta < \delta_0$ имеем

$$J^* \le \sup_{\Delta_T < \delta} S(T) \le J^* + \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что существует разбиение $T_1$ с условием $\Delta_{T_1} < \delta$ такое, что

$$J^* - \varepsilon \le S(T_1) \le J^* + \varepsilon.$$

Обозначим через $n$ количество внутренних точек разбиения $T_0$. Тогда по лемме 4 справедлива оценка

$$S(T_1) \le S(T_0) + 2M\delta n.$$

Следовательно,

$$J^* - \varepsilon \le S(T_1) \le S(T_0) + 2M\delta n < I^* + \varepsilon + 2M\delta n.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$0 \le J^* - I^* < 2\varepsilon + 2M\delta n.$$

Но так как числа $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \delta_0$ можно выбрать сколь угодно малыми, то $J^* - I^* = 0$, $J^* = I^*$. Теорема 3 доказана.

**Следствие теоремы 3.** *Справедливо равенство $J_* = I_*$.*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $g(x) = -f(x)$. Тогда по доказанной теореме 3 имеем, что $J^*(g) = I^*(g)$, но $J^*(g) = -J_*(f)$ и $I^*(g) = -I_*(f)$. Отсюда получим $J_*(f) = I_*(f)$.

Следствие доказано.

## § 8. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО РИМАНУ

Докажем, что любая непрерывная на отрезке функция и любая монотонная на отрезке функция являются интегрируемыми на этом отрезке.

**Теорема 1.** *Всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.*

*Доказательство.* В силу теоремы Кантора функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является равномерно непрерывной на нем. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x, y \in [a, b]$ с условием $|x - y| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Возьмем любое разбиение $T$ отрезка $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. Тогда будем иметь

$$\omega_k = \sup_{x,y\in\Delta_k} (f(x) - f(y)) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Отсюда получим

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, для всякого $\epsilon > 0$ мы нашли число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения $T$ с диаметром $\Delta_T < \delta$ выполняется неравенство $\Omega(T) < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\Delta_T\to 0} \Omega(T) = 0$. Отсюда в силу критерия интегрируемости следует, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Всякая функция $f(x)$, ограниченная и монотонная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на нем.*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно рассмотреть только случай неубывающей на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b-0) - f(a+0) + 1},$$

$$\omega_k = \sup_{x,y\in\Delta_k} (f(x) - f(y)) = f(x_k - 0) - f(x_{k-1} + 0).$$

Тогда для любого разбиения $T : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ с диаметром $\Delta_T < \delta$ будем иметь

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le \delta \sum_{k=1}^{n} \omega_k \le (f(b-0) - f(a+0))\delta < \varepsilon,$$

т.е. получим, что $\lim\limits_{\Delta_T\to 0} \Omega(T) = 0$, и, значит, в силу критерия интегрируемости функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Всякая ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция, непрерывная всюду, за исключением конечного числа разрывов, интегрируема на этом отрезке.*

*Доказательство.* В силу критерия интегрируемости функции $f(x)$ в форме $\inf\limits_{T} \Omega(T) = 0$ нам достаточно для любого $\epsilon > 0$ построить разбиение $T$ с условием $\Omega(T) < \epsilon$.

Пусть количество точек разрыва $f(x)$ равно $m$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Каждую точку разрыва $d_s$, $s = 1, \ldots, m$, окружим окрестностью вида $\Delta_k = (d_s - \frac{\varepsilon}{8Mm}, d_s + \frac{\varepsilon}{8Mm})$. Тогда в каждом из отрезков

$$\Delta_r = [d_{r-1} + \frac{\varepsilon}{8Mm}, d_r - \frac{\varepsilon}{8Mm}], r = 1, \ldots, m+1,\ d_0 = a, d_{m+1} = b$$

функция $f(x)$ непрерывна, и, значит, по теореме Кантора она является равномерно непрерывной на каждом из этих отрезков. Поэтому мы можем выбрать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x, y$, принадлежащих этим отрезкам, и $|x-y| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Построим теперь произвольное разбиение $T_0$ указанных отрезков так, чтобы выполнялось условие $\Delta_{T_0} < \delta$. Объединим это разбиение $T_0$ с построенными ранее окрестностями точек разрыва, получим разбиение $T$ отрезка $[a,b]$.

Далее имеем

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2,$$

$$\Omega_1 = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta x_k \le 2Mm \cdot \frac{\varepsilon}{4Mm} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Omega_2 = \sum_{\Delta_k \in T_0} \omega_k \Delta x_k \le (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\Omega(T) < \varepsilon$. Теорема 3 доказана.

## § 9. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим свойства интеграла, связанные с интегрируемостью на заданном фиксированном отрезке. Множество всех интегрируемых функций на отрезке $[a,b]$ будем обозначать символом $R[a,b]$ или просто $IR$.

**Утверждение 1.** *Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля только в $l$ точках. Тогда $f \in IR$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

*Доказательство.* Пусть $M = \max\limits_{1 \le k \le l} |f(x)|$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2Ml}$. Тогда для любого размеченного разбиения $V$ с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$|\sigma(V)| = |\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k| \le l \cdot \frac{\varepsilon}{2Ml} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались тем, что сумма $\sigma(V)$ содержит не более $l$ слагаемых, отличных от нуля, и тем, что $\Delta x_k < \delta$.

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ мы получим, что

$$\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = 0.$$

Утверждение 1 доказано.

**Утверждение 2.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда*

*1) функция $f(x) + g(x) \in R[a,b]$ и*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

*2) для любого вещественного числа $k$ функция $kf(x) \in R[a,b]$ и*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

*Доказательство.* 1) Поскольку $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и для любого размеченного разбиения $V : a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \cdots < \xi_n < x_n = b$ справедливы равенства

$$\sigma_f(V) + \sigma_g(V) = \sigma_{f+g}(V),$$

переходя к пределу при $\Delta_V \to 0$, мы видим, что предел левой части равенства существует, следовательно, существует и предел правой части, т.е. функция $f(x) + g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и, кроме того, имеет место равенство

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

В случае 2) имеем, что $\sigma_{kf}(V) = k\sigma_f(V)$. Из этого следует интегрируемость функции $f(x)$ и выполнение равенства

$$\int\limits_a^b kf(x)\, dx = k\int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Утверждение 2 доказано.

**Утверждение 3.**

*1) Пусть функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

*2) Пусть функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, и пусть в точке $x = x_0$ непрерывности $f(x)$ выполнено неравенство $f(x_0) > 0$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx > 0.$$

*Доказательство.* 1) Составим для любого размеченного разбиения $V$ интегральную сумму $\sigma(V)$. Она — неотрицательна, и, следовательно, интеграл как предел интегральных сумм будет величиной неотрицательной.

2) Поскольку $x_0$ — точка непрерывности и $f(x_0) > 0$, существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x$ с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Возьмем любое размеченное разбиение $V$ с диаметром

$\Delta_V < \frac{\delta_0}{2}$. Тогда на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будут содержаться полностью некоторые отрезки разбиения $V$ с суммой длин не меньшей, чем $\delta_0$. Отсюда получим

$$\sigma(V) > \frac{\delta_0 f(x_0)}{2} > 0.$$

Утверждение 3 доказано.

**Утверждение 4.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Тогда для всех точек $x \in [a, b]$ имеем $f(x) = 0$.*

*Доказательство.* (От противного.) Допустим, что существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) > 0$. Тогда из утверждения 3 имеем, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Противоречие.

Утверждение 4 доказано.

**Утверждение 5.** *Пусть $a < b$ и на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$. Тогда имеем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. Тогда из утверждения 3 следует, что $\int\limits_a^b h(x)\,dx \geq 0$, а из утверждения 2 имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b (h(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b h(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Утверждение 5 доказано.

**Утверждение 6.** *Пусть $a < b$ и на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M$. Тогда имеем*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

*Доказательство.* Утверждение 6 является простым следствием утверждения 5.

**Утверждение 7.** *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $|f(x)|$ интегрируема на нем и имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

*Доказательство.* Поскольку $|f(x)-f(y)| \ge |f(x)|-|f(y)|$, имеем

$$\sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x)-f(y)| \ge \sup_{x,y\in\Delta_k} (|f(x)|-|f(y)|),$$

и, следовательно, $\omega_k(f) \ge \omega_k(|f|)$. Отсюда для любого разбиения $T$ имеем, что

$$\Omega_f(T) \ge \Omega_{|f|}(T).$$

По условию функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, следовательно, существует разбиение $T$ такое, что $\Omega_f(T) < \varepsilon$. Отсюда имеем $\Omega_{|f|}(T) < \varepsilon$. А это по критерию интегрируемости означает, что функция $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Так как имеет место неравенство

$$-|f(\xi)| \le f(\xi) \le |f(\xi)|,$$

то для любого размеченного разбиения $V$ получим

$$-\sigma_{|f|}(V) \le \sigma_f(V) \le \sigma_{|f|}(V).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, будем иметь

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

т. е. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Утверждение 7 доказано.

**Утверждение 8.** *Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда $f^2(x) \in R[a,b]$.*

*Доказательство.* Обозначим через $M$ супремум функции $|f(x)|$ на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо неравенство

$$|f^2(x) - f^2(y)| \le 2M|f(x) - f(y)|,$$

и, следовательно, $\omega_k(f^2) \le 2M\omega_k(f)$. Отсюда получим

$$\Omega_{f^2}(T) \le 2M\Omega_f(T),$$

значит, по критерию интегрируемости функция $f^2(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Утверждение 8 доказано.

**Утверждение 9.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда их произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо на отрезке $[a, b]$.*

*Доказательство.* Имеем

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Тогда из утверждений 8 и 2 следует, что произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемо на отрезке $[a, b]$. Утверждение 9 доказано.

**Теорема** (об интегрируемости сложной функции). *Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, и пусть $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[m, M]$.*

*Тогда сложная функция $h(x) = \varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.*

*Доказательство.* Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[m, M]$ имеем, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1$, $x_2 \in [m, M]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$. Далее, в силу критерия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ найдется разбиение $T$ этого отрезка такое, что

$$\Omega_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon\delta,$$

где $\omega_k(f)$ — колебание функции $f(x)$ на отрезке $\Delta_k$ разбиения $T$.

Разобьем все отрезки $\Delta_k$, $k = 1, \ldots, n$, разбиения $T$ на два класса. К первому классу отнесем те $\Delta_k$, для которых справедливо неравенство $\omega_k(f) < \delta$. На этих отрезках также имеет место неравенство $\omega_k(h) < \varepsilon$. Ко второму классу отнесем все остальные отрезки разбиения $T$, т.е. те, для которых $\omega_k(f) \geq \delta$. В связи с этим сумму $\Omega_h(T)$ представим в виде $\Omega_h(T) = \Omega_1 + \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \sum_k{}' \omega_k(h)\Delta x_k, \quad \Omega_2 = \sum_k{}'' \omega_k(h)\Delta x_k,$$

причем знак “штрих” в сумме $\Omega_1$ означает, что суммирование ведется по $k$, отвечающим отрезкам $\Delta_k$ разбиения $T$, относящимся к первому классу, а знак “$''$” в сумме $\Omega_2$ показывает, что суммирование ведется по числам $k$, отвечающим отрезкам $\Delta_k$ из второго класса.

Из определения суммы $\Omega_1$ имеем

$$\Omega_1 = \sum_k{}' \omega_k(h)\Delta x_k < \varepsilon \sum_k{}' \Delta x_k \leq \varepsilon(b-a).$$

Оценим сверху сумму длин отрезков $\Delta_k$, принадлежащих второму классу. Имеем

$$\delta \sum_k{}'' \Delta x_k \le \sum_k{}'' \omega_k(f)\Delta x_k \le \sum_k \omega_k(f)\Delta x_k = \Omega_f(T) < \delta\epsilon.$$

Следовательно, $\sum\limits_k{}'' \Delta x_k < \varepsilon$.

Пусть $C = \max\limits_{x\in[m,M]} |\varphi(x)|$. Тогда для суммы $\Omega_2$ получим оценку

$$\Omega_2 = \sum_k{}'' \omega_k(h)\Delta x_k \le 2C \sum_k{}'' \Delta x_k \le 2C\varepsilon.$$

Таким образом, имеем $\Omega_h(T) < \varepsilon(b-a+2C)$, т.е. в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ получим соотношение

$$\inf_T \Omega_h(T) = 0,$$

а это в силу критерия интегрируемости означает, что $h(x) = \varphi(f(x))$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

## § 10. АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Свойство аддитивности интеграла выражается следующим утверждением.

**Т е о р е м а.** *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для любой точки $c \in [a,b]$ она интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. И наоборот если $f(x)$ интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$, причем*

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда в силу критерия интегрируемости имеем, что $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $T$ такое, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Рассмотрим разбиение $T_0 = T \cup \{c\}$ отрезка $[a,b]$. Получим $\Omega(T_0) \le \Omega(T) < \varepsilon$. Разбиение $T_0$ можно представить как объединение разбиений $T_1$ отрезка $[a,c]$ и $T_2$ отрезка $[c,b]$. Поэтому

$$\Omega(T_1) + \Omega(T_2) = \Omega(T_0) < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\Omega(T_1) < \varepsilon, \quad \Omega(T_2) < \varepsilon.$$

В силу инфимум-критерия интегрируемости функции $f(x)$ отсюда имеем, что $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Пусть теперь $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $T_1$ отрезка $[a, c]$ и существует разбиение $T_2$ отрезка $[c, b]$ такие, что

$$\Omega(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Omega(T_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для разбиения $T = T_1 \cup T_2$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\Omega(T) = \Omega(T_1) + \Omega(T_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда в силу инфимум-критерия интегрируемости $f(x)$ следует, что $f(x)$ является интегрируемой на $[a, b]$. Возьмем произвольные размеченные разбиения отрезка $V_1$ отрезка $[a, c]$ и $V_2$ отрезка $[c, b]$, $V = V_1 \cup V_2$ отрезка $[a, b]$. Имеем равенство

$$\sigma(V) = \sigma(V_1) + \sigma(V_2).$$

Переходя в нем к пределу при $\Delta_V \to 0$, получим равенство (1). Теорема доказана.

По определению, положим,

$$\int_a^a f(x)\, dx = \int_b^b f(x)\, dx = 0.$$

Пусть $f(x)$ интегрируема на $[c, a]$. Тогда при $c < a$, по определению, полагают

$$\int_a^c f(x)\, dx = -\int_c^a f(x)\, dx.$$

В силу этого определения утверждение теоремы можно переформулировать так.

С л е д с т в и е. *Пусть $x_0 < x_1$, $a, b, c \in [x_0, x_1]$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда*

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx = 0.$$

Здесь утверждается также, что интегралы на указанных отрезках с концами $a, b, c$ существуют.

Для доказательства ввиду симметричности равенства относительно точек $a, b, c$ достаточно рассмотреть один случай $a < c < b$. Но это точно совпадает с утверждением теоремы.

# Глава VIII
# ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

## Лекция 6

### § 1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА КАК ФУНКЦИЯ ОТ ЕГО ВЕРХНЕГО (НИЖНЕГО) ПРЕДЕЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНАЯ ИНТЕГРАЛА

В предыдущей главе доказано, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого $x \in [a,b]$ она интегрируема на отрезке $[a,x]$, т.е. существует функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du.$$

Докажем несколько свойств этой функции.

**Теорема 1.** *Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ является непрерывной функцией на этом отрезке.*

*Доказательство.* Из интегрируемости функции $f(x)$ следует, что она ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е. найдется постоянная $M > 0$ такая, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Возьмем любые точки $x$, $x + \Delta x \in [a,b]$. Имеем

$$|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = \Big|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(u\,du)\Big| \le \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(u)|\,du \le M|\Delta x|.$$

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Тогда для любой величины $\Delta x$ с условием $|\Delta x| < \frac{\varepsilon}{M}$ имеем $|\Delta F(x)| < \varepsilon$. Следовательно, функция $\Delta F(x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, т.е. функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна во внутренней точке $x_0$ этого отрезка. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ дифференцируема в точке $x = x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

*Доказательство.* В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$ для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

такое, что для всех $u$ с условием $|u-x_0|<\delta$ справедливы неравенства $f(x_0)-\varepsilon<f(u)<f(x_0)+\varepsilon$.

Возьмем любое $|\Delta x|<\delta$ так, чтобы отрезок с концами $x_0$ и $x_0+\Delta x$ содержался бы в отрезке $[a,b]$. Интегрируя неравенства, получим

$$\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)-\varepsilon)\,du\leq\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}\leq\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)+\varepsilon)\,du,$$

т.е. при любом $\Delta x$ с условием $|\Delta x|<\delta$ выполняются неравенства

$$f(x_0)-\varepsilon\leq\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\leq f(x_0)+\varepsilon.$$

Отсюда имеем

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x_0).$$

Теорема 2 доказана.

## § 2. ТЕОРЕМА НЬЮТОНА - ЛЕЙБНИЦА. ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА И АБЕЛЯ

Формулу Ньютона - Лейбница называют **основной теоремой** интегрального исчисления, поскольку она связывает понятия определенного и неопределенного интегралов.

**Теорема 1** (Формула Ньютона - Лейбница). *Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет не более конечного числа точек разрыва. Тогда функция $F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и для любой первообразной $\Phi(x)$ справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(u)\,du=\Phi(b)-\Phi(a).$$

*Доказательство.* Из теорем 1 и 2 предыдущего параграфа следует, что функция $F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du$ является непрерывной на отрезке $[a,b]$ и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ существует производная от $F(x)$ и она равна $f(x)$. Следовательно, функция $F(x)$

является первообразной для функции $f(x)$, кроме того, имеет место формула

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b) = F(b) - F(a),\ F(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0.$$

Пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная функция для $f(x)$. Тогда по свойству первообразной функции существует такое число $c$, что $\Phi(x) = F(x) + c$. Следовательно, имеет место равенство

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du.$$

Теорема 1 доказана.

В качестве приложения формулы Ньютона – Лейбница выведем формулы суммирования Эйлера и Абеля.

**Теорема 2** (Формула суммирования Эйлера). *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Тогда при любом $x$, принадлежащем отрезку $[a,b]$, справедлива формула*

$$\sum_{a<n\leq x} f(n) - \rho(x)f(x) = \int_a^x f(u)\,du - \int_a^x \rho(u)f(u)\,du - \rho(a)f(a).$$

*Доказательство.* Обозначим левую часть последнего равенства через $G(x)$. Легко видеть, что функция $G(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Действительно, если число $x$ — нецелое, то она будет даже дифференцируема, а если число $x = n$ — целое, то сумма в выражении для $G(x)$ возрастает на величину $f(n)$, а функция $\rho(x)f(x)$ убывает ровно на $f(n)$ при переходе через точку $x = n$, так что скачок суммы гасится скачком функции $\rho(x)f(x)$. Следовательно, можно применить формулу Ньютона – Лейбница.

Но тогда при нецелом $x$ имеем

$$G(x) = G(a) + \int_a^x G'(u)\,du = -\rho(a)f(a) + \int_a^x (-\rho(u)f(u))'\,du =$$

$$= -\rho(a)f(a) + \int_a^x f(u)\,du - \int_a^x \rho(u)f'(u)\,du.$$

Теорема 2 доказана.

Ценность этой формулы состоит в том, что она позволяет приближенно заменить сумму на интеграл. Заметим, что часто удобно в качестве пределов суммирования брать полуцелые числа.

**Пример.** *(Упрощенная формула Стирлинга .)* При $n \geq 2$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{5} \leq \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \leq 5.$$

Действительно, из формулы суммирования Эйлера получим

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \sum_{0,5<m\leq n+0,5} \ln m = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \ln t\, dt - \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(t)}{t}\, dt =$$

$$= (n+0,5)\ln(n+0,5) - n - 0,5 - 0,5\ln 0,5 + 0,5 - r(n).$$

Оценим величину $r(n)$. Полагая $\sigma(t) = \int\limits_0^t \rho(u)\, du$, $|\sigma(t)| \leq \frac{1}{8}$, будем иметь

$$r(n) = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(t)}{t}\, dt = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{d\sigma(t)}{t} = \frac{\sigma(t)}{t}\Big|_{0,5}^{n+0,5} + \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\sigma(t)}{t^2}\, dt.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|r(n)| < 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, находим

$$\ln n! = (n+0,5)\ln n - n + (n+0,5)\ln(1+\frac{1}{2n}) + 0,5\ln 2 - r(n),$$

$$|\ln n! - (n+0,5)\ln n + n| \leq (n+0,5)\ln(1+\frac{1}{2n}) + 0,5\ln 2 + |r(n)| <$$

$$< 0,5\ln 2 + \frac{9}{8} < \ln 5.$$

Потенцируя это неравенство, получим сформулированную оценку.

Заметим, что в случае, когда пределы суммирования в теореме 2 — целые числа, то его можно переписать в несколько иной форме.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть $a$ и $b$ — целые числа и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \{x\} f'(x)\,dx.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Так как $a$ и $b$ — целые числа, то $\rho(a) = \rho(b) = \frac{1}{2}$. Кроме того, имеем

$$\int_a^b \rho(x) f'(x)\,dx = \frac{1}{2} f(b) - \frac{1}{2} f(a) - \int_a^b \{x\} f'(x)\,dx.$$

Подставляя полученные выражения в формулу теоремы 2, приходим к утверждению теоремы 3.

**Пример.** При целом $N \geq 1$ имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{12N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

В силу теоремы 3 получим

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \int_1^N \frac{dx}{x} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2} dx =$$

$$= \ln N + \left(1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx\right) + \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx.$$

Обозначим через $\gamma$ следующее выражение $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx$. Будем иметь

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2}\int_N^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_N^\infty \frac{\rho(x)}{x^2} dx = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \int_N^\infty \frac{d\sigma(x)}{x^2},$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\sigma(x) = \int_0^x \rho(t)\,dt$.

Интегрируя последний интеграл по частям, получим

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{\sigma(N)}{N^2} + 2\int_N^\infty \frac{\sigma(x)}{x^3} dx.$$

И наконец, положим $\sigma_0(x) = \sigma(x) - \frac{1}{12}$, $\sigma_1(x) = \int\limits_0^x \sigma_0(t)\,dt$. Очевидно, имеем $\sigma_1(N) = \int\limits_0^N \sigma_0(t)\,dt = 0$. Интегрируем в последней формуле для $s_N$ интеграл по частям, находим

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6}\int\limits_N^\infty \frac{dx}{x^3} + 2\int\limits_N^\infty \frac{d\sigma_1(t)}{t^3}.$$

Отсюда имеем требуемую формулу для $s_N$.

Докажем теперь **формулу суммирования Абеля.**

**Т е о р е м а 4.** *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $A(x) = \sum\limits_{a<m\leq x} \alpha_m$. Тогда при любом $x \in [a,b]$ имеем*

$$\sum_{a<n\leq x} \alpha_n f(n) - A(x)f(x) = -\int\limits_a^x A(t)f'(t)\,dt.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Обозначим через $G(x)$ левую часть последнего равенства. Аналогично доказательству теоремы 2 функция $G(x)$ имеет непрерывную производную в нецелых точках, а при целых значениях она является непрерывной функцией. Заметим также, что при нецелых значениях $x$ имеет место равенство $A'(x) = 0$. Следовательно, продифференцировав $G(x)$ при нецелых $x$, получим $G'(x) = -A(x)f'(x)$. Но и производная правой части рассматриваемого равенства равна той же функции. Тогда из формулы Ньютона – Лейбница имеем искомое равенство. Теорема 4 доказана.

## § 3. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Важную роль при вычислении интегралов играют формулы замены переменной и интегрирования по частям. Они являются следствием формулы Ньютона – Лейбница. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1** (о замене переменной). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[x_0, x_1]$. Пусть также точки $a, b \in [x_0, x_1]$ $a < b$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и множество значений функции $\varphi(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$ является подмножеством отрезка $[x_0, x_1]$. Пусть, кроме того, производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

*Доказательство.* Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Ньютона – Лейбница существует ее первообразная $F(x)$ и $F'(x) = f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

При всех $t \in [\alpha, \beta]$ по условию теоремы определена функция $G(t) = F(\varphi(t))$, которая на этом отрезке имеет производную, причем

$$G'(t) = F'_t(\varphi(t)) = F'_\varphi(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

А это значит, что функция $G(t)$ является первообразной функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Следовательно, имеет место равенство

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2** (Формула интегрирования по частям). *Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы гладкие функции $f(x)$ и $g(x)$. Тогда имеем*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

где символ $h(x)|_a^b$ означает разность $h(b) - h(a)$.

*Доказательство.* Пусть $h(x) = f(x)g(x)$. Тогда имеем

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Следовательно,

$$\int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

По теореме Ньютона – Лейбница получим

$$\int_a^b h'(x)\,dx = h(b) - h(a) = f(x)g(x)|_a^b.$$

Подставляя последнюю формулу в предыдущую, получим искомую формулу. Теорема 2 доказана.

## § 4. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ИНТЕГРАЛА

**Теорема 1** (первая теорема о среднем значениии). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также на этом отрезке функция $g(x)$ неотрицательна, а для функции $f(x)$ при некоторых вещественных числах $m$ и $M$ имеют место неравенства $m \le f(x) \le M$. Тогда найдется вещественное число $\mu$ с условием $m \le \mu \le M$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Поскольку справедливы неравенства

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$

интегрируя их, получим

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

Заметим, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx \geq 0$, так как $g(x) \geq 0$.

Тогда если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то из неравенства (1) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 = \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

и число $\mu$ можно положить равным $m$.

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$, то получим

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Положим отношение интегралов равным $\mu$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также на этом отрезке функция $g(x)$ неположительна, а для функции $f(x)$ при некоторых вещественных $m$ и $M$ имеют место неравенства $m \leq f(x) \leq M$. Тогда найдется вещественное число $\mu$ с условием $m \leq \mu \leq M$ такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Положим $g_1(x) = -g(x)$. Тогда функции $f(x)$ и $g_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и мы имеем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g_1(x)\,dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Подставляя в это равенство $g_1(x) = -g(x)$, получим утверждение следствия.

8*

С л е д с т в и е 2. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и функция* $g(x)$ *интегрируема на этом отрезке, причем для всех точек* $x \in [a,b]$ *функция* $g(x)$ *неотрицательна. Тогда существует точка* $c \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке существует точка $c$, $a \leq \leq c \leq b$ такая, что $\mu = f(c)$, $m \leq \mu \leq M$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем утверждение следствия.

С л е д с т в и е 3. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда на отрезке* $[a,b]$ *найдется точка* $c$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Данное утверждение получается из следствия 2 при $g(x) \equiv 1$.

*Замечание.* Среднее арифметическое значений арифметических функций на отрезке $[a,b]$ стремится к величине

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

поэтому говорят, что интеграл — это среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Т е о р е м а 2 (вторая теорема о среднем значениии). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ *Пусть, далее, функция* $g(x)$ *на этом отрезке неотрицательна и не убывает. Тогда на отрезке* $[a,b]$ *найдется точка* $c$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Рассмотрим последовательность разбиений $T_n : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ с условием, что диаметр $T_n$, равный $\delta_n$, стремится к нулю при $n \to \infty$. (Например, всегда можно считать, что разбиение $T_n$ отрезка $[a, b]$ есть разбиение на $n$ равных частей и тогда $\delta_n = 1/n$). Положим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx, M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

$$\omega_k(g) = \sup_{x',x''\in\Delta_k} |g(x') - g(x'')| = g(x_k - 0) - g(x_{k-1} + 0).$$

Имеем

$$\left|\sigma_n - \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_k) - g(x))f(x)\, dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\, dx \leq M\delta_n \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) \leq M\delta_n g(b).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Поскольку интеграл как функция нижнего предела есть непрерывная функция, функция $F(x) = \int\limits_x^b f(t)\, dt$ является непрерывной и достигает своего минимального и максимального значений на отрезке $[a, b]$, соответственно, в точках $\alpha$ и $\beta$.

Теперь преобразуем сумму $\sigma_n$. Имеем

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \left( \int\limits_{x_{k-1}}^{b} f(x)\, dx - \int\limits_{x_k}^{b} f(x)\, dx \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_k) =$$

$$= g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k).$$

Так как для любого $x \in [a,b]$ справедливы неравенства

$$F(\alpha) \le F(x) \le F(\beta), \; g(x) \ge 0,$$

и функция $g(x)$ не убывает, то из последнего неравенства для $\sigma_n$ получим

$$F(\alpha)g(b) \le \sigma_n \le F(\beta)g(b).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, будем иметь

$$F(\alpha)g(b) \le \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le F(\beta)g(b),$$

т. е.

$$F(\alpha) \le \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le F(\beta).$$

Поскольку функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, по теореме Коши о промежуточном значении найдется точка $c \in [a,b]$, такая, что

$$F(c) = \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b) \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 2 доказана.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Пусть, далее, функция $g(x)$ на этом отрезке неотрицательна и не возрастает. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка $c$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Положим $x_1 = -x$, $f_1(x_1) = f(-x)$, $g_1(x_1) = g(-x)$. Тогда в силу того что $g(x)$ не возрастает на отрезке $[a,b]$, то функция $g_1(x_1)$ не убывает на отрезке $[-b,-a]$. Поэтому к функциям $f_1(x_1)$ и $g_1(x_1)$ можно применить теорему 2. Отсюда следует, что на отрезке $[-b,-a]$ найдется точка $-c$ такая, что

$$\int\limits_{-b}^{-a} f_1(x_1)g_1(x_1)\,dx_1 = g_1(-a) \int\limits_{-c}^{-a} f_1(x_1)\,dx_1.$$

В интегралах последнего равенства сделаем замену переменной вида $x = -x_1$. Получим

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ Пусть, далее, функция $g(x)$ монотонна на этом отрезке. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка $c$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть сначала функция $g(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $g_1(x) = g(x) - g(a)$ будет неотрицательной и неубывающей на этом отрезке. Следовательно, по теореме 2 имеем

$$\int_a^b f(x)g_1(x)\,dx = g_1(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Подставляя сюда выражение для $g_1(x)$, получим утверждение следствия.

Пусть теперь функция $g(x)$ не возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда, положим, $g_1(x) = g(x) - g(a)$. Функция $g_1(x)$ — неотрицательная и невозрастающая. Следовательно, к функциям $f(x)$ и $g_1(x)$ применима теорема 3. Отсюда и следует искомая формула. Следствие доказано.

**Пример.** Пусть $b > a > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}.$$

Действительно, функция $\frac{1}{x}$ — положительна и невозрастающая на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме 3 найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^c \sin x\,dx\right| = \frac{|\cos c - \cos a|}{a} \le \frac{2}{a}.$$

Наконец, приведем вариант доказательства второй теоремы о среднем для гладких функций.

**Т е о р е м а 4.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и функция $g(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем производная $g'(x)$ на этом отрезке неотрицательна и непрерывна. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка $c$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Тогда функция $F(t)$ как функция верхнего предела является дифференцируемой, поскольку подынтегральная функция $f(x)$ — непрерывна. Следовательно, имеем

$$I = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x).$$

Интеграл $I$ проинтегрируем по частям. Получим

$$I = g(x)F(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)\,dg(x).$$

Но так как $g'(x)$ неотрицательна, $F(x)$ и $g'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то по первой теореме о среднем значении интеграла имеем

$$\int_a^b F(x)g'(x)\,dx = F(c)\int_a^b g'(x)\,dx = F(c)(g(b)-g(a)).$$

Следовательно,

$$I = g(b)F(b) - g(b)F(c) + g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 4 доказана.

## Лекция 8

## § 5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Равенство, которое доказывается в следующей теореме, называется **формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.**

**Теорема.** *Пусть $n \geq 0$ — целое число и пусть функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда имеет место формула*

$$f(b) = f_n(a,b) + R_n(a,b),$$

*где $f_n(a,b)$ — многочлен Тейлора, т.е.*

$$f_n(a,b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

*и остаточный член $R_n(a,b)$ имеет вид*

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt.$$

*Доказательство* проведем методом математической индукции. При $n = 0$ должно иметь место равенство

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^b f'(t)\,dt = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Это есть формула Ньютона – Лейбница. Так что при $n = 0$, теорема доказана.

Пусть при $n = k$ утверждение теоремы уже доказано, т.е. справедливо равенство

$$f(b) = f_k(a,b) + R_k(a,b).$$

Докажем его при $n = k+1$. Для этого проинтегрируем $R_k(a,b)$ по частям. Получим

$$R_k(a,b) = \frac{1}{k!}\int f^{(k+1)}(t)(b-t)^k\,dt = -\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)\,d(b-t)^{k+1} =$$

$$= -\frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t)(b-t)^{k+1}\Big|_a^b + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+2)}(b-t)^{k+1}\,dt =$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\cdot(b-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\,dt.$$

Подставляя это выражение в равенство, справедливое по предположению индукции при $n=k$, будем иметь

$$f(b) = f_{k+1}(a,b) + R_{k+1}(a,b).$$

Теорема доказана.

*Замечания.* 1. После замены переменной интегрирования вида $t = a+u(b-a)$ остаточный член в формуле Тейлора можно представить в виде

$$R_n(a,b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a+u(b-a))(1-u)^n\,du.$$

2. Если применить к остатку $R_n(a,b)$ теорему о среднем, то можно получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха – Роша, но, правда, при более жестких условиях на функцию $f(x)$. Действительно, при любом $\alpha > 0$ имеем

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^{n+1-\alpha}(b-t)^{\alpha-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{n!\alpha} f^{(n+1)}(c)(b-c)^{n+1-\alpha}(b-a)^{\alpha},$$

где $c$ — некоторая точка интервала $(a,b)$.

В качестве примеров получим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для некоторых элементарных функций при $a=0$ и $b=x$. В двух первых примерах воспользуемся формулой Тейлора из доказанной выше теоремы, а в остальных ее вывод мы упрощаем за счет применения специальных приемов.

1. *Показательная функция.* Из теоремы следует, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где

$$R_n = R_n(0,x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{xu}(1-u)^n\,du.$$

**2.** *Тригонометрические функции.* Имеем

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + r_n,$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} \cos ux \, du,$$

$$r_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 (1-u)^{2n} \cos ux \, du.$$

**3.** *Логарифмическая функция.* Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии получим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Интегрируя это равенство пределах от 0 до $x$, найдем

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n, \quad R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}.$$

**4.** *Арктангенс.* Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от 0 до $x$. Получим

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_n, \quad R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2}.$$

Из теоремы о среднем следует, что существует величина $\theta = \theta(x)$ такая, что $0 < \theta < 1$ и

$$R_n = \frac{(-1)^n}{1+\theta x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Отсюда имеем, что при $|x| \le 1$ предел $R_n$ равен 0 при $n \to \infty$, т.е. при $|x| \le 1$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ и он равен $\operatorname{arctg} x$.

5. *Формула бинома.* Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Ранее было доказано (ч. I, лекция 23, пример 5), что многочлен Тейлора $g(x) = g_{n-1}(x)$, $n \geq 2$, этой функции в окрестности точки $x = 0$ имеет вид

$$g(x) = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

и, более того, ряд Тейлора $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится при $|x| < 1$ и равен $(1+x)^\alpha$. Далее, функция $f(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0.$$

Подставляя в это уравнение вместо функции $f(x)$ ее ряд Тейлора и приравнивая к нулю коэффициенты при степенях аргумента $x$, получим равенства

$$ka_k - (\alpha - k + 1)a_{k-1} = 0, \quad k \geq 1.$$

Отметим, что справедливость их можно проверить непосредственно.

Найдем формулу для выражения $h(x) = \alpha g(x) - (1+x)g'(x)$. Имеем

$$h(x) = \alpha\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k - (1+x)\sum_{k=1}^{n-1} ka_k x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k x^k =$$

$$= (\alpha a_0 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-2}((\alpha-k)a_k - (k+1)a_{k+1})x^k + (\alpha a_{n-1} - (n-1)a_{n-1})x^{n-1} =$$

$$= (\alpha - n + 1)a_{n-1}x^{n-1} = na_n x^{n-1}.$$

Следовательно, остаточный член $R = R_n(x) = f(x) - g(x)$ формулы Тейлора удовлетворяет уравнению

$$\alpha R - (1+x)R' = na_n x^{n-1},$$

т.е. справедливо равенство

$$\left(\frac{R}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{na_n x^{n-1}}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Интегрируя его в пределах от 0 до $x$, получим

$$R = R_n(x) = na_n(1+x)^\alpha \int_0^x \frac{t^{n-1}dt}{(1+t)^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, мы доказали, что имеет место формула

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + r,$$

$$r = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}(1+x)^\alpha x^n \int_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1+xu)^{\alpha+1}}.$$

6. *Арксинус*. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Тогда имеем $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Отсюда по формуле бинома получим

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+2\right)}{(n-1)!}x^{2n-2} + r,$$

$$r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{(n-1)!}(1-x^2)^{-1/2}x^{2n} \int_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1-x^2u)^{\alpha+1}}.$$

Далее, имеем

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Следовательно,

$$|r| \le \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{1-u}}.$$

Используя формулу понижения, получим

$$\int_0^1 \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{1-u}} = 2\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}dt = 2\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Отсюда имеем

$$|r| \le \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теперь проинтегрируем формулу для $f'(x)$. Тогда при некотором $\theta = \theta(x)$, $|\theta| < 1$ получим

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta R_n,$$

где

$$R_n = \int_0^x \frac{t^{2n}dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Заметим, что предел последовательности $\{R_n\}$ при $n \to \infty$ равен 0, если $|x| < 1$. Следовательно, при $|x| < 1$ ряд Тейлора

$$x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

сходится к функции $\arcsin x$.

7. *Интегральный синус.* Пусть функция $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Тогда из примера 2 имеем

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-1)!} + r,$$

где

$$r = r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} \cos(ux)\, du.$$

Интегрируя равенство для $f'(x)$ в пределах от 0 до $x$, получим

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} + R,$$

где

$$|R| \le \int_0^x |r(t)| dt \le \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)(2n+2)}.$$

Отсюда следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выражение $R$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!}.$$

## § 6. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ

**Теорема 1**(неравенство Гельдера). *Пусть $p,q>0$, $p+q=1$ и пусть $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

*Доказательство.* Функции $|f(x)|^p$, $|g(x)|^q$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ по теореме об интегрируемости сложной функции (теорема §9 гл. VII).

Рассмотрим разбиение $T_n : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$ на $n$ равных частей. Тогда искомое неравенство получается предельным переходом в неравенстве для их интегральных сумм

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n}\right| \le \left(\sum_{k=1}^n |f(x)|^p\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |g(x)|^q\frac{b-a}{n}\right)^{1/q}$$

или эквивалентном неравенстве

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right| \le \left(\sum_{k=1}^n |f(x)|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |g(x)|^q\right)^{1/q}.$$

Последнее же неравенство есть неравенство Гельдера для сумм (§8 гл. V). Теорема 1 доказана.

При $p=q=2$ приведенное выше неравенство называется **неравенством Коши – Буняковского.**

**Теорема 2**(неравенство Минковского — обобщенное неравенство треугольника). *Пусть $p\ge 1$, и пусть $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

*Доказательство.* Случай $p=1$ — очевиден. Возьмем, как и в предыдущей теореме 1, разбиение $T_n$ отрезка $[a,b]$ на $n$ равных частей. Тогда достаточно доказать неравенство для соотвествующих интегральных сумм

$$\left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)+g(x_k)|^p\frac{b-a}{n}\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|f(x)|^p\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|g(x)|^p\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)+g(x_k)|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|f(x)|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|g(x)|^p\right)^{1/p}$$

Последнее же неравенство есть неравенство Минковского для сумм (§8 гл. V). Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Пусть функции $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)^2+\cdots+\left(\int_a^b f_m(x)\,dx\right)^2}\leq\int_a^b\sqrt{f_1^2(x)+\cdots+f_m^2(x)}\,dx.$$

*Доказательство.* Разделим отрезок $[a,b]$ на $n$ равных частей и положим $x_k=a+\frac{b-a}{n}k$, $k=0,1,\ldots,n$. Для соответствующих интегральных сумм должно иметь место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n}f_1(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}f_m(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^2\leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{f_1^2(x_k)+\cdots+f_k^2(x_k)}\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

Действительно, оно выводится из следующей цепочки соотношений

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}f_s(x_k)\right)^2=\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k_1=1}^{n}f_s(x_{k_1})\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n}f_s(x_{k_2})\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m}f_s(x_{k_1})f_s(x_{k_2})\right)\leq$$

$$\leq\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\sqrt{\sum_{s=1}^{m}f_s^2(x_{k_1})}\sqrt{\sum_{t=1}^{m}f_t^2(x_{k_2})}=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{s=1}^{m}f_s^2(x_k)}\right)^2.$$

Заметим, что неравенство в этой цепочке соотношений следует из неравенства Коши. Теорема 3 доказана.

## Лекция 9

## § 7. КРИТЕРИЙ ЛЕБЕГА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Ранее мы доказали и уже неоднократно использовали критерий интегрируемости функции на отрезке, принадлежащий Риману. Этот критерий имеет вид: ограниченная на отрезке функция интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место одно из эквивалентных соотношений:

$$\text{а)} \lim_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0 \quad \text{или} \quad \text{б)} \inf_T \Omega(T) = 0,$$

где понятие омега-суммы определено ранее (лемма 6 §3 главы VII).

Как видим, этот критерий непосредственно ничего не говорит о том, какие именно функции интегрируемы по Риману, а какие — нет. На данный вопрос и отвечает **критерий Лебега.**

Для его формулировки определим понятие множества, имеющего нулевую меру Лебега.

**Определение.** *Множество $A$ точек на числовой прямой имеет* **лебегову меру нуль,** *если для всякого числа $\epsilon > 0$ существует конечное или счетное покрытие $A$ интервалами с общей длиной, не превосходящей $\epsilon$. Другими словами, для всякого $\epsilon > 0$ найдутся интервалы $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ с длинами их соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ таких, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ и для любого натурального $n$ имеет место неравенство $s_n = \delta_1 + \cdots + \delta_n < \epsilon$.*

Это обозначают так: $\mu(A) = 0$.

**Утверждение 1.** *Любое не более чем счетное множество точек $\{x_n\}$ на числовой прямой имеет лебегову меру нуль.*

Действительно, можно взять интервалы с центрами в этих точках и длинами $\delta_1 = \epsilon/2, \ldots, \delta_n = \epsilon/2^n, \ldots$ . Тогда имеем

$$s_n = \frac{\epsilon}{2} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \epsilon.$$

**Утверждение 2.** *Пусть $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$. Тогда и $\mu(B) = 0$.*

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что всякое покрытие множества $A$ интервалами является и покрытием для множества $B$.

Теперь сформулируем **критерий Лебега.**

**Т е о р е м а 1.** *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы множество $A$ — точек разрыва этой функции имело лебегову меру нуль, т.е. $\mu(A)=0$.*

Прежде чем доказывать этот критерий, дадим его применения.

**Т е о р е м а 2.** *Пусть функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, и пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[m,M]$. Тогда функция $f(g(x))$ интегрируема на $[a,b]$.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть $x_0$ — точка непрерывности функции $g(x)$, тогда по теореме о непрерывности сложной функции $h(x)=f(g(x))$ является непрерывной функцией в точке $x_0$.

Следовательно, точками разрыва функции $h(x)$ могут быть только точки разрыва функции $g(x)$. Пусть $A$ — множество точек разрыва $g(x)$, а $B$ — множество точек разрыва $h(x)$. Тогда имеем $B\subset A$.

Поскольку функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, по критерию Лебега получим, что $\mu(A)=0$. Отсюда в силу утверждения 2 имеем $\mu(B)=0$. Таким образом, по тому же критерию Лебега функция $h(x)=f(g(x))$ является интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Теорема 2 доказана.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Покажем, что множество точек разрыва функции $f(x)$ является счетным. В главе IV §3 (теорема 1) доказано, что $f(x)$ имеет разрывы только первого рода. Пусть $x_0$ — точка разрыва, тогда в этой точке существуют левосторонний и правосторонний пределы: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=l_2$, причем $l_1\neq l_2$. На интервале с концами в точках $l_1$ и $l_2$ можно выбрать рациональное число $r$, и это рациональное число поставим в соответствие данной точке $x_0$. Множество всех выбранных таким образом рациональных чисел $r$, как подмножество всех рациональных чисел, является не более чем счетным. По утверждению 1 не более чем счетное множество имеет лебегову меру, равную нулю. Следовательно, согласно критерию Лебега монотонная на отрезке функция будет интегрируемой на этом отрезке. Теорема 3 доказана.

## § 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ ЛЕБЕГА

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Обозначим через $I=I(\delta,x_0)$ промежуток $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$, если $x_0$ — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, и соответственно, промежуток $[a, a+\delta)$ или $(b-\delta, b]$, если $x_0 = a$ или $x_0 = b$.

**Определение. Колебанием функции** $f(x)$ **в точке** $x_0$ *назовем величину*

$$\omega(x_0) = \omega_f(x_0) = \inf_{\delta>0} \sup_{x,y\in I(\delta)} (f(x) - f(y)),$$

*другими словами, величина* $\omega(x_0)$ *определяется равенством*

$$\omega(x_0) = \inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0)),$$

*где*

$$M_\delta(x_0) = \sup_{x\in I(\delta)} f(x),\ m_\delta(x_0) = \inf_{x\in I(\delta)} f(x).$$

Имеет место следующий критерий непрерывности функции в точке.

**Лемма 1.** *Функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$ *тогда и только тогда, когда колебание* $\omega_f(x_0)$ *функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$ *равно* 0.

*Доказательство. Необходимость.* Предположим противное, т.е., что имеет место равенство $\omega_f(x_0) = \alpha > 0$. Рассмотрим последовательность $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ . Пусть $I = I(1/n)$. В силу определения инфимума имеем

$$\sup_{x,y\in I}(f(x) - f(y)) = M_{1/n}(x_0) - m_{1/n}(x_0) \geq \alpha.$$

Далее, в силу определения супремума получим, что существуют точки $x_n$, $y_n \in I(1/n)$, такие, что $f(x_n) - f(y_n) > \frac{\alpha}{2} > 0$. Но так как длина промежутка $I(1/n)$ стремится к нулю при $n$, стремящемся к бесконечности, то имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу, используя непрерывность функции $f(x)$ в точке $x_0$, получим $0 \geq \frac{\alpha}{2} > 0$. Имеет место противоречие.

Следовательно, $\omega_f(x_0) = 0$.

*Достаточность.* Нам дано, что $\omega_f(x_0) = 0$. Но тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x, y \in I(\delta)$ имеем $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Положим здесь $y = x_0$. Тогда получим условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x_0$. Лемма доказана полностью.

*Доказательство* критерия Лебега. *Необходимость.* Нам дано, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Надо доказать, что множество $D$ точек разрыва функции $f(x)$ имеет лебегову меру нуль.

Предположим противное, т.е. что множество $D$ не является множеством нулевой меры. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого множества интервалов, покрывающих множество $D$, $D \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, найдется натуральное число $n_0$ с условием $\delta_1 + \cdots + \delta_{n_0} \geq \varepsilon_0$. Отметим, что число $n_0$ зависит от последовательности интервалов $\{I_n\}$.

Рассмотрим теперь любое разбиение $T$ отрезка $[a, b]$. Среди отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения $T$ выделим те, *внутри* которых содержится хотя бы одна точка множества $D$. На каждом таком отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ колебание функции $f(x)$ не меньше, чем $\alpha$. Сумма длин этих отрезков будет не меньше, чем $\varepsilon_0$, поскольку множество $D$ содержится в них, за исключением, быть может, конечного числа точек, попадающих в точки $x_k$ разбиения $T$. ( Если бы оказалось, что сумма длин указанных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ была бы меньше, чем $\varepsilon_0$, то, покрывая точки $x_k \in D$ конечным числом интервалов так, чтобы общая сумма длин всех интервалов, покрывающих $D$, оказалась меньше, чем $\varepsilon_0$, получим систему интервалов, покрывающих $D$ и имеющих общую длину, меньшую, чем $\varepsilon_0$, что невозможно.)

Таким образом, для любого разбиения $T$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\Omega(T) \geq \alpha\varepsilon_0.$$

Следовательно, $\inf\limits_T \Omega(T) \geq \alpha\varepsilon_0 > 0$, а это в силу критерия интегрируемости функции по Риману означает, что функция $f(x)$ не является интегрируемой. Противоречие. Необходимость доказана.

*Достаточность.* Для любого $\epsilon > 0$ построим разбиение $T$ такое, что $\Omega(T) < \epsilon$. Пусть $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Положим $\delta = \frac{\epsilon}{4M}, \alpha = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Так как множество $D$ имеет лебегову меру нуль, то его можно покрыть системой интервалов $I$, имеющих сумму длин меньшую, чем $\delta$. В каждой точке $x_0$ множества $K = [a, b] \setminus I$ колебание функции $f(x)$ равно 0, поэтому существует интервал, покрывающий эту точку $x_0$, на котором колебание функции будет меньше, чем $\alpha$. Итак, получим систему интервалов $J$, покрывающих множество $K$. Из системы интервалов $I \cup J$, покрывающих отрезок $[a, b]$, можно выделить конечное покрытие $[a, b]$. В качестве точек $x_k$ разбиения $T$ концы интервалов этого конечного покрытия.

Сумму $\Omega(T)$ представим в виде $\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2$, где $\Omega_1$ и $\Omega_2$ представляют собой суммы слагаемых вида $\omega_k \Delta x_k$, причем в первой сумме $\Omega_1$ переменная суммирования $k$ пробегает значения, удовлетворяющие условию $(x_{k-1}, x_k) \subset I$, а все оставшиеся значения $k$ входят во вторую сумму $\Omega_2$.

Тогда для $\Omega(T)$ получим оценку вида

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2 < 2M\delta + \alpha(b - a) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Отсюда в силу того, что $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, следует интегрируемость функции $f(x)$. Теорема доказана полностью.

При использовании критерия Лебега (в частности, для доказательства неинтегрируемости функции по Риману) иногда бывает полезна другая его формулировка в виде приведенной ниже теоремы. Докажем сначала одно вспомогательное утверждение — лемму 2.

Пусть $D(\alpha)$ обозначает множество точек отрезка $[a, b]$, для которых выполнено неравенство $\omega(x) \geq \alpha$.

**Л е м м а 2.** *Множество точек $D(\alpha)$ является замкнутым.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть $x_0$ является предельной точкой множества $D(\alpha)$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к $x_0$ при $n \to \infty$, причем колебание функции $f(x)$ в точках $x_n$ не меньше, чем $\alpha$, т.е. $\omega_f(x_n) \geq \alpha$. Заметим, что каково ни было число $\delta > 0$, найдется член последовательности $x_n \in I_\delta(x_0)$. Положим

$$\delta_1 = \min(x_n - x_0 + \delta, x_0 + \delta - x_n),$$

т.е. величина $\delta_1$ равна расстоянию от точки $x_n$ до границ интервала $I_\delta(x_0)$. Тогда получим, что $I_{\delta_1}(x_n) \subset I_\delta(x_0)$. Отсюда имеем

$$M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \geq M_{\delta_1}(x_n) - m_{\delta_1}(x_n) \geq \omega_f(x_n) \geq \alpha.$$

Так как при произвольном числе $\delta > 0$ имеем неравенство $M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \geq \alpha$, то

$$\inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0)) = \omega_f(x_0) \geq \alpha.$$

Следовательно, всякая предельная точка множества $D(\alpha)$ принадлежит ему самому, т.е. $D(\alpha)$ — замкнуто. Лемма доказана.

**Т е о р е м а.** *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > 0$ множество $D(\alpha)$ имело лебегову меру нуль.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость.* Поскольку функция $f(x)$ интегрируема по Риману, по доказанному выше критерию Лебега мера множества точек разрыва ее равна нулю, $\mu(D) = 0$. Но для любого $\alpha > 0$ имеет место следующее включение $D(\alpha) \subset D$. Следовательно, $\mu(D(\alpha)) = 0$. Необходимость доказана.

*Достаточность.* Очевидно, $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(1/n)$. По условию теоремы для любого натурального числа $n$ имеем $\mu(D(1/n)) = 0$. Следовательно, $\mu(D) = 0$, и по критерию Лебега функция $f(x)$ интегрируема. Теорема доказана.

# Глава IX
# НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## Лекция 10

### § 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Наша дальнейшая цель состоит в распространении понятия интегрируемости функции по Риману на новые классы функций, а именно:

1) на функции, заданные на бесконечном промежутке;

2) на неограниченные функции.

Понятие предела, которым мы владеем, позволяет достичь этой цели без особого труда, а обобщение понятия интеграла Римана при этом называется **несобственным интегралом.**

Для первого случая интегралы типа

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

называются **несобственными интегралами первого рода**, во втором случае, когда функция $f(x)$ является неограниченной на конечном отрезке $[a,b]$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется **несобственным интегралом второго рода.**

Случай, когда и промежуток интегрирования, и сама функция не ограничены, не вносит ничего нового в эту проблематику, так как его можно свести к случаю несобственных интегралов первого и второго родов простым разбиением промежутка интегрирования на части, и потому отдельно мы его рассматривать не будем. Разберем более подробно понятие несобственного интеграла первого рода, при этом остановимся только на случае интегралов вида $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

**Определение.** *Пусть $a$ — вещественное число и пусть для любого $A > a$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, A]$ и*

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

*Если при $A \to +\infty$ существует предел*

$$I = \lim_{A\to+\infty} F(A),$$

*то этот предел $I$ называется* **несобственным интегралом первого рода** *от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$.*

Для интеграла $I$ используется обозначение:

$$I = \int_a^{\infty} f(x)\,dx \left( = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)\,dx \right).$$

Если предел $I$ существует, то говорят, что **несобственный интеграл сходится.** Если же этот предел не существует, то выражение $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ понимают как некий символ, который тоже называют **несобственным интегралом,** но говорят про него, что он расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^{a} f(x)\,dx,$$

а несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ понимают как сумму двух несобственных интегралов

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

*Замечания.* **1.** В отличие от несобственных интегралов обычный интеграл Римана по конечному промежутку называется **собственным.**

**2.** Из свойств собственного интеграла и определения несобственного интеграла для любых вещественных $a$ и $b$ тривиально имеем

$$\int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

**Примеры. 1.** При $a > 0$ справедливо равенство

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln A - \ln a), & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что этот интеграл сходится при $\alpha > 1$ и равен $\frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$, и расходится при $\alpha \leq 1$.

**2.** При натуральном числе $n$ интегрированием по частям получим

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!.$$

## § 2. КРИТЕРИЙ КОШИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Из критерия Коши существования предела функции при $A \to \infty$ непосредственно получается следующая теорема.

**Теорема 1** (Критерий сходимости несобственного интеграла первого рода). *Для сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, т.е. чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $B = B(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех чисел* $A_1$, $A_2$, *больших* $B$, *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Символически это условие Коши можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists B = B(\varepsilon) > 0 : \forall A_1, A_2 > B \Longrightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

**Теорема 2** (общий признак сравнения). *Пусть для всех* $x \in [a, +\infty)$ *справедливо неравенство* $|f(x)| \leq g(x)$ *и пусть интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *сходится. Тогда будет сходиться интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

*Доказательство.* Докажем, что выполнено условие Коши для сходимости несобственного интеграла от функции $f(x)$. В силу сходимости интеграла от функции $g(x)$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых $A_1, A_2$, $A_1 > A_2 > B$ справедливо неравенство $\int_{A_1}^{A_2} g(x)\, dx < \varepsilon$. Но поскольку

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\, dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\, dx < \varepsilon,$$

условие Коши выполняется и для интеграла от функции $f(x)$ с тем же самым $B = B(\varepsilon)$. Теорема 2 доказана.

**Пример.** Пусть при некотором $\alpha > 1$ и при $x \to \infty$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \ll \frac{1}{x^\alpha},$$

т.е. пусть существуют $c > 0$ и $x_0 = x_0(c) > 0$ такие, что $|f(x)| \leq cx^{-\alpha}$ при $x > x_0$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Действительно, имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Первый из интегралов суммы является собственным, а второй интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится по признаку сравнения, поскольку $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

## § 3. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИЗНАКИ АБЕЛЯ И ДИРИХЛЕ

Сначала дадим определения понятий абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов.

**Определение 1.** *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* **абсолютно сходящимся,** *если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

**Определение 2.** *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* **условно сходящимся,** *если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *расходится.*

Из общего признака сравнения непосредственно следует, что абсолютная сходимость интеграла влечет за собой его условную сходимость. Обратное неверно.

Как и ранее, будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, A]$ при любом $A > a$.

**Т е о р е м а 1** (признак Дирихле). *Пусть при любом числе $x \in [a, +\infty)$ функция $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ ограничена и пусть функция $g(x)$ неотрицательна и, не возрастая, стремится к нулю при $x \to +\infty$. Тогда интеграл*

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

*сходится.*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Поскольку функция $g(x)$ на плюс бесконечности не возрастает и стремится к нулю, для всякого $\varepsilon_1 > 0$ существует $B = B(\varepsilon_1) > a$ такое, что для всех $x > B$ имеем неравенство $0 \le g(x) < \varepsilon_1$. Пусть, далее, $M = \sup\limits_{x \ge a} |F(x)|$. Тогда по второй теореме о среднем для любых $A_1, A_2$, $A_2 > A_1 > B$ найдется такое число $A_3$, $A_1 < A_3 < A_2$, что

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx \right| = \left| g(A_1) \int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx \right| < \varepsilon_1 \left| \int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx \right| =$$

$$= \varepsilon_1 \left| \int\limits_a^{A_3} f(x)\,dx - \int\limits_a^{A_1} f(x)\,dx \right| \le 2\varepsilon_1 M.$$

Если теперь мы зададимся произвольным $\varepsilon > 0$, то, взяв $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, получим, что для любых $A_1, A_2$, $A_2 > A_1 > B\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

т.е. выполняется условие Коши, поэтому интеграл $I$ сходится. Теорема 1 доказана.

**Т е о р е м а 2** (признак Абеля). *Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и пусть функция $g(x)$ неотрицательна, монотонна и ограничена сверху на промежутке $[a, +\infty)$. Тогда интеграл*

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$