сходится.

Доказательство. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, в силу критерия Коши имеем: для всякого $\varepsilon_1 > 0$ существует $B = B(\varepsilon_1)$, такое, что для всех A_1, A_2, $A_2 > A_1 > B$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1.$$

Далее, по второй теореме о среднем существует число A_3, $A_1 < A_3 < A_2$ такое, что

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx = g(A_1)\int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx + g(A_2)\int\limits_{A_3}^{A_2} f(x)\,dx.$$

Положим $M = \sup\limits_{x>a} g(x)$. Но так как

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\int\limits_{A_3}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1,$$

то получим

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| \le 2M\varepsilon_1.$$

Поэтому, взяв $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, будем иметь, что для любых чисел A_1, A_2, $A_2 > A_1 > B\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши интеграл I сходится. Теорема 2 доказана.

Примеры. 1. По признаку Дирихле при $\alpha > 0$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, так как для любого $A > 1$ функция $F(x) = \int\limits_1^A \sin x\,dx$ ограничена, а при $\alpha > 0$ и при $x \to +\infty$ функция $x^{-\alpha}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

2. Пусть $f(x)$ — многочлен степени большей, чем 1. Тогда сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin f(x)\,dx$.

Без ограничения общности можно считать, что старший коэффициент многочлена $f(x)$ положителен. Тогда, начиная с некоторого $A > 0$, производная его $f'(x)$ будет положительна и монотонно возрастать к плюс бесконечности. Достаточно доказать, что сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \sin f(x)\,dx$. Для любого $B > A$ в интеграле $\int\limits_A^B \sin f(x)\,dx$ сделаем замену переменной интегрирования $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$. Получим интеграл

$$\int\limits_{f^{-1}(A)}^{f^{-1}(B)} \frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))}\,dy.$$

По второй теореме о среднем он ограничен величиной $\frac{2}{f'(f^{-1}(A))}$ и при $A \to +\infty$ будет стремиться к нулю. А это и доказывает сходимость исходного интеграла.

Лекция 11

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Определение 1. *Пусть 1) функция $f(x)$ задана на промежутке $[a, b)$ и не ограничена на нем;*

2) для любого $\alpha, a \leq \alpha < b$, функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a, \alpha]$;

3) существует предел $I = \lim\limits_{\alpha \to b-} \int\limits_a^\alpha f(x)\, dx$.

Тогда этот предел I называется **несобственным интегралом второго рода** *от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. При этом для предела I используется обозначение*

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Замечания. **1.** Точка b называется *особой точкой* интеграла I.

2. Если предел $I \in \mathbb{R}$ существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ сходится, а если — нет, то говорят, что этот интеграл расходится.

3. Если особой точкой интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ является нижний предел интегрирования, то несобственный интеграл второго рода определяется аналогично.

4. Если особая точка c лежит внутри отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ определяется как сумма двух несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Пример. Справедливы равенства:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a \to 0+} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{a \to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - a^{1-\alpha}\right), & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{a \to 0+} (-\ln a), & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и равен $\frac{1}{1-\alpha}$, и расходится при $\alpha \geq 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств несобственного интеграла второго рода на примере интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с единственной особой точкой b. Эти свойства аналогичны свойствам несобственных интегралов первого рода.

1. *Критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода.* Для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы имело место условие Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых α_1, α_2 с условиями $\alpha_1, \alpha_2 \in (b-\delta, b)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon.$$

2. *Общий признак сравнения.* Пусть для всех $x \in [a, b)$ справедливо неравенство $|f(x)| \le g(x)$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится. Тогда сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3. *Несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется* **абсолютно сходящимся**, *если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, и* **условно сходящимся**, *если он сходится, но не абсолютно, т.е. интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.*

Можно сформулировать признаки, аналогичные признакам Абеля и Дирихле для интегралов первого рода.

И наконец, любой интеграл с бесконечными пределами интегрирования (или одним бесконечным пределом интегрирования) и конечным числом особых точек можно рассматривать как сумму несобственных интегралов, каждый из которых имеет одну особую точку, являющуюся границей отрезка интегрирования (точки $+\infty$ и $-\infty$ также можно считать особыми), т.е. исследование любого несобственного интеграла сводится к несобственным интегралам первого и второго рода.

§ 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕСОБСТВЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема 1. *Пусть производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и отлична от нуля на интервале (α,β), и пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$. Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

как для собственных, так и для несобственных интегралов.

Доказательство. Пусть сначала точки α и β являются конечными. Тогда особыми точками функций $f(x)$ и $f(\varphi(t))$ могут быть концы соответствующих отрезков. Ввиду монотонности функции $x = \varphi(t)$ каждое значение x принимается лишь один раз, когда переменная t изменяется на интервале (α,β). Тогда для любых $\epsilon_1 > 0$ и $\epsilon_2 > 0$ по теореме о замене переменной для собственного интеграла имеем

$$\int\limits_{\varphi(\alpha+\epsilon_1)}^{\varphi(\beta-\epsilon_2)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha+\epsilon_1}^{\beta-\epsilon_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\epsilon_1 \to 0$ и $\epsilon_2 \to 0$, получим искомую формулу.

Если же α и β — бесконечны, то, взяв $\alpha_1,\beta_1 \in \mathbb{R}$ и используя вновь теорему о замене переменной для собственного интеграла, получим

$$\int\limits_{\varphi(\alpha_1)}^{\varphi(\beta_1)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\alpha_1 \to -\infty$ и $\beta_1 \to +\infty$, получим искомое равенство. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть:*

1) функции $f'(x)$ и $g'(x)$ — непрерывны на промежутке $(a,+\infty)$;

2) сходится хотя бы один из несобственных интегралов

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{a}^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx;$$

3) существует предел $l_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$, а в случае если a — особая точка, то существует предел $l_2 = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

Тогда существуют оба интеграла и имеет место равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим собственные интегралы на отрезке $[a+\epsilon, b]$. По теореме об интегрировании по частям в собственном интеграле будем иметь

$$\int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{a+\epsilon}^{b} - \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f'(x)g(x)\,dx.$$

Устремив в этом равенстве ϵ к нулю, а b к плюс бесконечности, получим искомую формулу. Теорема 2 доказана.

Иногда полезными оказываются следующие специальные определения несобственного интеграла.

Определение 1. *Вещественное число* $l = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{+A} f(x)\,dx$ *называется* **главным значением** *(по Коши) интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *и обозначается так:*

$$l = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Определение 2. *Если c — особая точка несобственного интеграла второго рода от функции $f(x)$ и $c \in (a,b)$, то* **главное значение интеграла** *определяется так:*

$$l_1 = \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Глава X
ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Лекция 12

§ 1. КРИВЫЕ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1. Кривой L *в пространстве* $\mathbb{R}^m$ (**пространственной кривой** *в m-мерном пространстве) называется множество точек* $M \subset \mathbb{R}^m$, *состоящее из всех значений* $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$ *некоторой вектор-функции* $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, *причем функции* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ *заданы на некотором промежутке* $I \subset \mathbb{R}$ *и непрерывны* в каждой точке его.

Под промежутком мы понимаем либо конечные отрезки, интервалы и полуинтервалы, либо бесконечные интервалы и полуинтервалы.

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать случай $I = [a, b]$. Напомним, что в концах отрезка непрерывность понимается как односторонняя непрерывность.

Определение 2. *Точка* $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in L$ *называется* **кратной точкой кривой** L, *если имеются по крайней мере две различные точки* $t_1 \neq t_2$ *промежутка* I *такие, что* $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = c_1, \ldots, \varphi_m(t_1) = \varphi_m(t_2) = c_m$.

Точки кривой, не являющиеся кратными, называются **простыми точками кривой.**

Кривая L, *имеющая только конечное число кратных точек, называется* **параметризуемой кривой.**

Кривая L, *не имеющая кратных точек, за исключением, быть может, концевых точек промежутка* I, *называется* **простой кривой.**

Если только в концевых точках t_1 *и* t_2 *отрезка* I *значения функций* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ *совпадают, то простая кривая называется* **простой замкнутой кривой.**

Л е м м а. *Всякую параметризуемую кривую можно представить в виде объединения конечного числа простых кривых.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно отрезок I разбить на конечное число отрезков с концами в кратных точках исходной кривой.

Определение 3. *Функция* $f(t)$, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *называется* **кусочно-линейной** $[a, b]$, *если для любого значения* $t \in [a, b]$, *за исключением конечного их числа:* $t_1, \ldots, t_{n-1}$, *имеем:* $f'(t)$ *равна постоянному значению на каждом отрезке* $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n$. *Это* *означает также, что на любом отрезке* $[t_k, t_{k+1}]$ *имеет вид* $f(t) = a_k t + b_k$ *(здесь* $t_0 = a, t_n = b$*).*

Определение 4. *Простая кривая* L *называется* **ломаной линией,** *если* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ *являются кусочно-линейными функциями.*

Очевидно, что каждая ломаная состоит из отдельных отрезков, которые называются ее **звеньями,** а концы этих отрезков — точки $A_1, \ldots, A_n$, называются ее **узлами.** Точки $t_0, \ldots, t_n$, которым соответствуют эти узлы, образуют разбиение отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим одно звено ломаной с начальной точкой $A_1(x_1, \ldots, x_m)$ и конечной точкой $A_2(y_1, \ldots, y_m)$. По теореме Пифагора его длина $|l|$ равна величине

$$|l| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_m - x_m)^2}.$$

Если же точки $A_0(x_{1,0}, \ldots, x_{m,0}), \ldots, A_n(x_{1,n}, \ldots, x_{m,n})$ являются последовательными узлами ломаной l, то длина этой ломаной обозначается символом $|l|$ и, очевидно, она равна

$$|l| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_{1,k} - x_{1,k-1})^2 + \cdots + (x_{m,k} - x_{m,k-1})^2}.$$

Определение 5. *Ломаная* l*, соответствующая разбиению* T *отрезка* $[a, b]$*, называется* **вписанной** *в кривую* L*, задаваемую уравнениями* $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, $t \in [a, b]$*, если начальная точка звена совпадает с концом предыдущего и узлы ломаной* l *лежат на кривой* L*.*

Определение 6. *Простая кривая* L *называется* **спрямляемой,** *если длины* $|l|$ *всех ломаных* l*, вписанных в кривую* L*, образуют ограниченное сверху множество.*

Определение 7. Длиной $|L|$ **спрямляемой кривой** L *называется число, равное точной верхней грани длин всех ломаных, вписанных в данную кривую.*

Замечания. **1.** Очевидно, что если мы хотим правильно определить понятие длины кривой, то мы должны требовать, чтобы вписанная ломаная была короче самой кривой. В данном случае это так, поскольку кратчайшее расстояние между двумя точками, как известно, достигается на отрезке прямой, проходящей через эти точки.

2. Бывают *неспрямляемые* кривые, но они задаются очень сложно, и поэтому примеров их мы приводить не будем.

§ 2. ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ ДУГИ КРИВОЙ

Теорема. *Пусть функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, задающие простую кривую L, имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда кривая L — спрямляема и ее длина $|L|$ выражается формулой*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt.$$

Доказательство. Покажем сначала, что длина любой ломаной не превосходит величины

$$A = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt.$$

Пусть узлы ломаной l соответствуют точкам $t_0, t_1, \ldots, t_n$ разбиения T отрезка $[a,b]: \; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Тогда имеем

$$|l| = \sum_{s=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(t_s) - \varphi_1(t_{s-1}))^2 + \cdots + (\varphi_m(t_s) - \varphi_m(t_{s-1}))^2} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sqrt{\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi_1'(t)\, dt\right)^2 + \cdots + \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi_m'(t)\, dt\right)^2}.$$

Далее, в силу неравенства (см. гл. VIII, §6, теорема 3)

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(t)\, dt\right)^2 + \cdots + \left(\int_a^b f_m(t)\, dt\right)^2} \le \int_a^b \sqrt{f_1^2(t) + \cdots + f_m^2(t)}\, dt$$

получим

$$|l| \le \sum_{s=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt = A.$$

Таким образом мы доказали, что A — верхняя грань длин всех ломаных l, вписанных в кривую L, т.е. кривая L является спрямляемой.

Покажем, что A есть *точная* верхняя грань длин таких ломаных, т.е. длина кривой L равна A.

Поскольку функции $\varphi_k'(t)$, $k = 1, \ldots, m$, непрерывны на отрезке $[a, b]$, по теореме Гейне – Кантора они являются равномерно непрерывными на этом отрезке. Следовательно, при всех $k = 1, \ldots, m$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t', t'' \in [a, b]$: $|t' - t''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|\varphi_k'(t') - \varphi_k'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}(b-a)} = \varepsilon_1.$$

Возьмем любое разбиение T отрезка $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$, T : $a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b$, и пусть ломаная l соответствует этому разбиению T.

Оценим теперь сверху разность $A - |l| \geq 0$. Имеем

$$A - |l| = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt - \sum_{s=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^m (\varphi_k(t_s) - \varphi_k(t_{s-1}))^2} =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^m (\varphi_k'(t))^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\Delta\varphi_k(t_{s-1})}{\Delta t_{s-1}} \right)^2} \right) dt,$$

где $\Delta\varphi_k(t_{s-1}) = \varphi_k(t_s) - \varphi_k(t_{s-1})$, $\Delta t_{s-1} = t_s - t_{s-1}$.

Далее применим неравенство треугольника в следующем виде. Пусть заданы вершины $O(0, \ldots, 0)$, $A(a_1, \ldots, a_m)$, $B(b_1, \ldots, b_m)$ треугольника OAB. Тогда имеет место неравенство треугольника (неравенство Минковского при p = 2):

$$\left| \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}.$$

Следовательно, получим

$$A - |l| \leq \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\varphi_k'(t) - \frac{\Delta\varphi_k(t_{s-1})}{\Delta t_{s-1}} \right)^2}\, dt =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\varphi_k'(t) - \varphi_k'(\eta_{k,s}) \right)^2}\, dt <$$

$$< \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \varepsilon_1 \sqrt{m}\, dt = \varepsilon_1 \sqrt{m}(b-a) = \varepsilon,$$

где $\eta_{k,s}$ — некоторая точка отрезка $[t_{s-1}, t_s]$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть $s = s(u)$ — длина дуги кривой L, задаваемой уравнениями $x_1 = x_1(t), \ldots, x_m = x_m(t)$, $a \le t \le u$. Тогда для дифференциала длины дуги кривой ds справедлива формула*

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_m)^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы имеем

$$s(u) = \int_a^u \sqrt{(x_1'(t))^2 + \cdots + (x_m'(t))^2}\, dt.$$

Дифференцируя это выражение, найдем

$$ds(u) = \sqrt{(x_1'(u))^2 + \cdots + (x_m'(u))^2} du, \text{ или } ds = \sqrt{(dx_1)^2 + \cdots + (dx_m)^2}.$$

Следствие доказано.

Отсюда имеем, что квадрат дифференциала длины дуги плоской кривой $(m = 2)$ в полярных координатах (r, φ) равен

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

где координаты r и φ определяются по формулам:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Действительно,

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,\ dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

Следовательно, получим

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

В частности, если уравнение эллипса задано в параметрической форме

$$\bar{r} = \bar{r}(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi),\ a \ge b > 0,$$

и угол φ между осью Ox и радиус -вектором $\bar{r}$ изменяется от нуля до 2π, то для дифференциала длины дуги эллипса имеем

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Пример. Найти длину дуги кривой (циклоиды)

$$\begin{cases} x = & R(t - \sin t), \\ y = & R(1 - \cos t), \end{cases}$$

где $0 \le t \le \theta \le 2\pi$. Имеем: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds^2 = 4R^2\sin^2\frac{t}{2}(dt)^2$, $ds = 2R\sin\frac{t}{2}dt$. Следовательно,

$$s = s(\theta) = 4R(1 - cos\frac{\theta}{2}).$$

Заметим, что эта кривая задает траекторию движения точки на ободе катящегося колеса радиуса R.

Глава XI
МЕРА ЖОРДАНА

Лекция 13

§ 1. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ И ОБЪЕМ ТЕЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ЖОРДАНА

О площади плоской фигуры мы уже говорили, когда вводили понятие определенного интеграла как площади криволинейной трапеции. Причем, давая точное определение этого понятия, мы исходили из основных свойств площади фигуры, справедливых для площадей простейших фигур, например, таких, которые являются объединением конечного числа прямоугольников и треугольников.

Сформулируем эти свойства. Обозначим через $\mu(P)$ площадь фигуры P.

1^0. *Для каждой фигуры P, имеющей площадь, функция $\mu(P)$ неотрицательна и однозначно определена.*

2^0. Площадь квадрата со стороной, равной единице, также равна единице.

3^0. Функция $\mu(P)$ является *аддитивной*, т.е., если фигура P разбита на две непересекающиеся фигуры P_1 и P_2, $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

4^0. Функция $\mu(P)$ является *инвариантной* относительно всех движений плоскости. Другими словами, если фигуры P_1 и P_2 можно наложить одну на другую так, чтобы все их точки совпали, т.е. P_1 и P_2 можно совместить при помощи поворота плоскости вокруг некоторой неподвижной точки или параллельного переноса плоскости, то $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

5^0. Функция $\mu(P)$ является *монотонной*, т.е., если $P_1 \subset P_2$, то $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

Заметим, что эти свойства имеют место не только для площадей простых фигур, но и для объемов простых тел, а также для суммарных длин простейших множеств на прямой, т.е. множеств, составленных из конечного числа промежутков и отдельных точек.

В дальнейшем **простейшей** будем называть фигуру, являющуюся объединением конечного числа прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Такие прямоугольники мы будем называть **стандартными прямоугольниками.**

Заметим, что стандартный прямоугольник может включать в себя любое подмножество точек, лежащих на его сторонах. Как известно, каждый стандартный прямоугольник имеет площадь, равную произведению длин его смежных сторон.

При определении площади фигуры в общем случае, как и в случае криволинейной трапеции, мы можем действовать по аналогии с **критерием Римана** существования определенного интеграла.

Для этого естественно для плоской ограниченной фигуры P ввести понятие **верхней площади фигуры** (по аналогии с верхней суммой Дарбу) как точную нижнюю грань площадей $\mu(P_1)$ всех открытых простейших плоских фигур P_1, описанных вокруг P, т.е. $P \subset P_1$; а также **нижнюю площадь** этой фигуры как верхнюю грань площадей $\mu(\bar{P}_2)$ всех замкнутых простейших фигур $\bar{P}_2$, вписанных в P, т.е. $\bar{P}_2 \subset P$.

Введенная таким образом верхняя площадь обозначается через $\mu^*(P)$, а нижняя — через $\mu_*(P)$.

Заметим, что для простейшей фигуры P имеем

$$\mu_*(P) = \mu(P) = \mu^*(P).$$

Если для фигуры P справедливо равенство $\mu^*(P) = \mu_*(P)$, то эта величина называется **площадью фигуры** P и обозначается через $\mu(P)$. Точно так же обстоит дело и с объемом трехмерных фигур, т.е. аналогично определяются верхний и нижний объемы трехмерной фигуры. Для них используются те же самые обозначения: $\mu_*(P), \mu^*(P), \mu(P)$, где, по определению, для измеримой фигуры P полагают $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$.

Введенное понятие площади фигуры называется **мерой Жордана,** а сами фигуры, которым с помощью этого определения приписывается значение площади (или объема в трехмерном пространстве) — **квадрируемыми** (или **кубируемыми** в случае объема) или **измеримыми по Жордану.** Для таких фигур вычисление площади (или объема) сводится к вычислению **определенного интеграла Римана.**

Примеры. 1. Плоская мера Жордана отрезка l, параллельного одной из осей координат, равна нулю. Этот отрезок содержится внутри прямоугольника, одна из сторон которого имеет длину, равную нулю.

2. Любой отрезок l имеет нулевую меру Жордана, так как этот отрезок можно поместить в простейшую фигуру сколь угодно малой площади.

3. Пусть P — простейшая фигура. Тогда мера Жордана ее границы ∂P равна нулю. Границей P служат стороны прямоугольников, составляющих фигуру P. Их конечное число, и каждый из них можно поместить в прямоугольник с одной стороной, имеющей длину, равную нулю.

4. Объединение, пересечение и разность простейших фигур является простейшей фигурой.

Действительно, пересечение двух стандартных прямоугольников будет стандартным прямоугольником. Поэтому для фигур $A = \bigcup_k P_k$ и $B = \bigcup_l Q_l$, состоящих из стандартных прямоугольников P_k, Q_l, их пересечение $A \cap B = A = \bigcup_{k,l}(P_k \cap Q_l)$ является простейшей фигурой. Разность двух стандартных прямоугольников является простейшей фигурой. Покажем, что разность $A \setminus B$ двух простейших множеств A и B является простейшим множеством. Пусть P — прямоугольник, содержащий $A \cup B$, тогда $A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$.

§ 2. КРИТЕРИЙ ИЗМЕРИМОСТИ МНОЖЕСТВА ПО ЖОРДАНУ

Как и в случае интеграла Римана, можно сформулировать критерий квадрируемости фигуры, аналогичный критерию Римана с омега - суммами (по форме он напоминает критерий Лебега). Для этого введем понятие границы ∂P фигуры P, которое, в свою очередь, использует следующие понятия.

1. Пусть $\delta > 0$. Тогда **δ-окрестностью точки x_0 на плоскости** назовем множество точек x, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке x_0.

2. Точка x_0 называется **внутренней** точкой множества P, если найдется δ-окрестность $E(x_0, \delta)$ точки x_0 целиком принадлежащая P, т.е. $E(x_0, \delta) \subset P$.

3. Точка x_1 называется **внешней** точкой множества P, если существует окрестность $E(x_1, \delta)$ такая, что $E(x_1, \delta) \cap P = \varnothing$.

4. Если точка x не является ни внутренней, ни внешней точкой множества P, то она называется **граничной** точкой множества P.

5. Множество всех граничных точек фигуры P называется его **границей** и обозначается через ∂P.

Т е о р е м а (Критерий квадрируемости фигуры). *Фигура P — квадрируема тогда и только тогда, когда мера ее границы равна нулю, т.е. $\mu(\partial P) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Нам надо доказать, что если P — квадрируемая фигура, то $\mu(\partial P) = 0$. Для этого достаточно при любом $\varepsilon > 0$ указать простейшую фигуру H такую, что $\partial P \subset H$ и $\mu(H) < \varepsilon$.

Поскольку фигура P — квадрируема, существует величина $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$. Следовательно, для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдутся открытая простейшая фигура P_1 и замкнутая простейшая фигура P_2 такие, что $P_2 \subset P \subset P_1$ и, кроме того, справедливы неравенства

$$\mu(P) = \mu^*(P) \leq \mu(P_1) < \mu(P) + \varepsilon_1,$$

$$\mu(P) - \varepsilon_1 < \mu(P_2) \leq \mu(P) = \mu_*(P).$$

Рассмотрим фигуру $P_3 = P_1 \setminus P_2$. Она является простейшей. Пусть $H = \bar{P}_3$. Тогда вне этой фигуры H содержатся только внешние или внутренние точки фигуры P. Поэтому $\partial P \subset H$. Далее, имеем $P_1 = P_2 \cup P_3$, $P_2 \cap P_3 = \varnothing$, следовательно, $\mu(P_1) = \mu(P_2) + \mu(P_3)$, откуда

$$\mu(P_3) = \mu(P_1) - \mu(P_2) < \mu(P) + \varepsilon_1 - \mu(P) + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1.$$

Заметим, что $\mu(P_3) = \mu(\bar{P}_3)$, так как граница простейшей фигуры имеет нулевую меру.

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, получим, что $\mu(H) < \varepsilon$, $\partial P \subset H$, следовательно, $\mu(\partial P) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Нам дано, что граница ∂P фигуры P имеет нулевую меру. Надо доказать, что фигура P измерима по Жордану, т.е. имеет место равенство $\mu^*(P) = \mu_*(P)$.

Для этого потребуется одна лемма, полезная и сама по себе.

Лемма (О связности отрезка на плоскости). *Пусть на плоскости заданы отрезок L с концами A_1 и A_2 и некоторое множество M, причем $A_1 \in M$, $A_2 \notin M$. Тогда существует точка $A_0 \in l$ такая, что $A_0 \in \partial M$.*

Доказательство леммы. Для каждой точки $\alpha \in l$ рассмотрим функцию $\rho(\alpha)$, равную расстоянию от нее до точки A_1. Очевидно, что для любой точки $\alpha \in l$ справедливо неравенство $\rho(\alpha) \leq |l|$. Пусть $B = l \cap M$. Тогда множество B непусто, так как точка A_1 принадлежит и отрезку l, и множеству M. Пусть, далее, $\rho_0 = \sup\limits_{A \in B} \rho(A)$. Рассмотрим точку α_0, лежащую на расстоянии ρ_0 от точки A_1. Любая точка α, удаленная от точки A_1 на расстояние $\rho(\alpha) > \rho_0$, не принадлежит как B, так и M, поэтому α_0 не может быть внутренней точкой множества M. С другой стороны, в любой окрестности точки α_0 на отрезке l найдется точка, принадлежащая $B \subset M$. Поэтому точка α_0 не является внешней точкой множества M, следовательно, $\alpha_0 \in \partial M$. Лемма доказана.

Итак, пусть $\mu(\partial P) = 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытая простейшая фигура P_3 такая, что $\partial P \subset P_3$, $\mu(P_3) < \varepsilon$. Граница ее ∂P_3 состоит из конечного числа отрезков, параллельных осям координат. Заключим эти фигуры P и P_3 в квадрат K со сторонами, параллельными осям координат. Далее, продолжим отрезки границы ∂P_3, параллельные оси Ox, до пересечения со сторонами квадрата K. Тогда квадрат K и фигура P_3 разобьются на отдельные стандартные прямоугольники. Пусть это будут прямоугольники $h_1, \ldots, h_m$ (каждый из них будем раассматривать без границы). Тогда прямоугольники h_s, $s = 1, \ldots, m$, либо целиком принадлежат P_3, либо $h_s \cap P_3 = \varnothing$.

Покажем, что если прямоугольник h_s не является подмножеством P_3, но имеет хотя бы одну общую точку с фигурой P, то $h_s \subset P$. Действительно, если в этом прямоугольнике $x_1 \in P$, $x_2 \notin P$, то некоторые точки отрезка l, соединяющего эти точки (а он тоже целиком принадлежит прямоугольнику h_s), принадлежат P, а некоторые точки не принадлежат P. По лемме отрезок l содержит точку $x_0 \in \partial P$, т.е. точка $x_0 \in h_s$, $x_0 \in \partial P \subset P_3$, а это значит, что $h_s \subset P_3$, что противоречит условию, что прямоугольник h_s не является подмножеством P_3.

Таким образом, если $h_s \cap P \notin \varnothing$, то прямоугольник h_s целиком лежит в P. Объединим все такие прямоугольники h_s во множество P_2. Очевидно, что $P_2 \subset P$.

Рассмотрим еще простейшее множество $P_1 = P_2 \tilde{\cup} P_3$. Докажем, что $P \subset P_1$. Действительно, фигура P, как и всякая фигура, состоит из внутренних точек, образующих множество $P \setminus \partial P$, и некоторого подмножества $\Gamma \subset \partial P$, — множества своих граничных точек. Достаточно показать, что $\partial P \subset P_1$, $P \setminus \partial P \subset P_1$.

Включение $\partial P \subset P_1$ следует из того, что $\partial P \subset P_3 \subset P_1$. А всякая внутренняя точка множества P по построению принадлежит: 1) либо P_3; 2) либо некоторому открытому прямоугольнику h_s; 3) либо его границе ∂h_s. Но тогда в первом случае точка $x \in P_3 \subset P_1$, и, следовательно, она принадлежит P_1; во втором случае $x \in h_s$, $x \in P$, а это значит, что $h_s \subset P_2$ (по способу построения множества P_2), т.е. $x \in h_s \subset P_2 \subset P_1$; в третьем случае имеем, что внутренняя точка множества P лежит на границе открытого прямоугольника h_s. Но тогда некоторая ϵ - окрестность этой точки целиком состоит из точек множества P и в то же время в ней содержатся точки из прямоугольника h_s, тогда $h_s \subset P_2$, откуда $\partial h_s \subset \bar{P}_2$, а потому $x \in \partial h_s \subset \bar{P}_2 \subset P$. Отсюда имеем: $P \subset P_1$. Далее, имеем $P_2 \cap P_3 = \varnothing$, кроме того, P_1, P_2 и P_3 — простейшие фигуры. Поэтому

$$\mu(P_1) = \mu(\bar{P}_2) + \mu(P_3) < \mu(\bar{P}_2) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mu(P_2) \le \mu_*(P) \le \mu^*(P) \le \mu(P_1) < \mu(\bar{P}_2) + \varepsilon.$$

Таким образом, получим

$$0 \le \mu^*(P) - \mu_*(P) < \mu(\bar{P}_2) + \varepsilon - \mu(\bar{P}_2) = \varepsilon.$$

Но так как $\epsilon > 0$ — произвольно, то, следовательно, $\mu^*(P) = \mu_*(P)$, т.е. фигура P — измерима по Жордану. Теорема доказана полностью.

Лекция 14

§ 3. СВОЙСТВА МЕРЫ ЖОРДАНА

Проверим, что неотрицательная функция $\mu(P)$, определенная нами для измеримых фигур на плоскости, обладает свойствами монотонности, инвариантности относительно движений плоскости и аддитивности, имеющих место для простейших фигур.

Во-первых, покажем, что множество измеримых фигур замкнуто относительно теоретико-множественных операций: объединения, пересечения и разности множеств. Другими словами, если фигуры P_1 и P_2 — измеримы, то измеримыми по Жордану являются фигуры $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \setminus P_2$.

Докажем сначала измеримость объединения двух множеств. В силу критерия измеримости множества по Жордану достаточно показать, что $\mu(\partial(P_1 \cup P_2)) = 0$. Докажем, что

$$\partial(P_1 \cup P_2) \subset \partial P_1 \cup \partial P_2.$$

Возьмем любое $x \in \partial(P_1 \cup P_2)$. Предположим, что $x \notin \partial P_1$, $x \notin \partial P_2$. Тогда точка x является либо внутренней точкой P_1, либо внутренней точкой P_2, либо внешней точкой и P_1, и P_2. Отсюда следует, что точка x по отношению ко множеству $P_1 \cup P_2$ является либо внутренней, либо внешней точкой. Но это противоречит тому факту, что точка x принадлежит границе множества $P_1 \cup P_2$. Следовательно, граница объединения двух множеств является подмножеством объединения границ этих множеств.

Поместим измеримые множества P_1 и P_2 в стандартный квадрат K. Тогда множества $K \setminus P_1$ и $K \setminus P_2$ являются измеримыми по Жордану, так как их граница содержится в объединении границ множеств K, P_1 и P_2. Отсюда следует измеримость множеств

$$P_1 \setminus P_2, \ P_1 \cap P_2 = K \setminus (K \setminus P_1) \cup (K \setminus P_2).$$

Перейдем теперь к свойству монотонности функции $\mu(P)$. Если $P_1 \subset P_2$, то всякая простейшая фигура, описанная вокруг P_2, содержит и P_1, а потому $\mu^*(P_1) \le \mu^*(P_2)$. Но так как фигуры P_1 и P_2 измеримы, то

$$\mu(P_1) = \mu^*(P_1) \le \mu^*(P_2) = \mu(P_2).$$

Это и означает, что функция $\mu(P)$ является монотонной.

Инвариантность меры Жордана относительно параллельных переносов следует из того, что при параллельном переносе площадь простейшей фигуры не меняется, поэтому при сдвигах плоскости не меняется значение величин $\mu^*(P)$ и $\mu_*(P)$.

Далее, как известно, по теореме Шаля все движения плоскости сводятся либо к сдвигам, либо к поворотам плоскости относительно некоторой неподвижной точки. Так что для завершения доказательства инвариантности меры Жордана относительно движений плоскости нам достаточно показать, что она инвариантна относительно поворотов плоскости вокруг некоторой неподвижной точки. Заметим, что при повороте плоскости площадь простейшей фигуры не меняется, но, к сожалению, она уже перестает быть простейшей.

Итак, пусть задана измеримая по Жордану фигура P. Тогда существуют простейшие фигуры P_1, P_2 такие, что $P_1 \subset P \subset P_2$, причем

$$\mu(P_1) \le \mu(P) < \mu(P_1) + \varepsilon,\ \mu(P_2) - \varepsilon < \mu(P) \le \mu(P_2),$$

и P_1, P_2 представляются в виде объединения конечного числа стандартных прямоугольников. При повороте плоскости вокруг неподвижной точки фигуры P, P_1 и P_2 перейдут соответственно в измеримые фигуры Q, Q_1 и Q_2, причем $Q_1 \subset Q \subset Q_2$. Очевидно, достаточно показать, что если стандартный прямоугольник при повороте переходит в прямоугольник Π, то его можно заключить в открытую простейшую фигуру Π_1 и вписать в него замкнутую простейшую фигуру Π_2, такие, что $\Pi_2 \subset \Pi \subset \Pi_1$ и разность $\mu(\Pi_1) - \mu(\Pi_2)$ может быть сделана сколь угодно малой. Для этого обрамляем прямоугольник Π прямоугольником Π_0 со сторонами, параллельными сторонам Π и находящихся от них на достаточно малом расстоянии. Затем вписываем в Π_0 простейшую фигуру, которая содержит Π. Она и будет искомой.

Докажем теперь свойство аддитивности меры Жордана. Заметим сначала, что для простейших фигур справедливо неравенство

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B).$$

Далее, пусть фигуры P_1 и P_2 измеримы по Жордану и пусть $P = P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Тогда по критерию измеримости множества фигура P измерима, поскольку граница объединения двух множеств содержится в объединении границ самих множеств. Докажем, что имеет место равенство

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

В силу измеримости фигур P_1 и P_2 для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся простейшие фигуры Q_1 и Q_2, R_1 и R_2 такие, что

$$\mu(Q_1) \le \mu(P_1) < \mu(Q_1) + \varepsilon,\ \mu(Q_2) - \varepsilon < \mu(P_1) \le \mu(Q_2),$$

$$\mu(R_1) \le \mu(P_2) < \mu(R_1) + \varepsilon, \ \mu(R_2) - \varepsilon < \mu(P_2) \le \mu(R_2).$$

Кроме того, для простейших фигур Q_1 и R_1 с условием $Q_1 \cap R_1 = \varnothing$ имеем $\mu(Q_1 \cup R_1) = \mu(Q_1) + \mu(R_1)$, а также $\mu(Q_2 \cup R_2) \le \mu(Q_2) + \mu(R_2)$. Поэтому, учитывая теоретико-множественные включения

$$Q_1 \cup R_1 \subset P_1 \cup P_2 = P \subset Q_2 \cup R_2,$$

получим

$$\mu(Q_1) + \mu(R_1) = \mu(Q_1 \cup R_1) \le \mu(P) \le \mu(Q_2 \cup R_2) \le$$

$$\le \mu(Q_2) + \mu(R_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 2\varepsilon.$$

Очевидно также имеем

$$\mu(Q_1) + \mu(R_1) \le \mu(P_1) + \mu(P_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 2\varepsilon.$$

Из последних неравенств найдем

$$|\mu(P) - \mu(P_1) - \mu(P_2)| < 2\varepsilon.$$

В силу же произвольности выбора $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

Это и доказывает свойство аддитивности меры Жордана.

§ 4. ИЗМЕРИМОСТЬ СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

Цель этого параграфа показать, что если L — спрямляемая кривая, то ее плоская мера Жордана равна нулю. А значит, в силу критерия измеримости фигуры по Жордану будет измеримой фигура, ограниченная спрямляемой кривой.

Для дальнейшего нам потребуется одна полезная лемма о спрямляемых кривых.

Л е м м а. *Пусть кривая L задается уравнениями вида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a,b]$ и является спрямляемой кривой. Тогда длина $s(t)$ части этой кривой, соответствующей отрезку $[a,t]$, где $t \in [a,b]$, является непрерывной и монотонно возрастающей функцией параметра t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возрастание функции $s(t)$ следует из свойства аддитивности длины дуги кривой. Действительно, при $t_1 < t_2$ имеем $s(t_2) = s(t_1) + s_0$, где s_0 — длина дуги кривой, находящейся между точками $A_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1))$ и $A_2 = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$, т.е. величина s_0 — положительна. Отсюда имеем: $s(t_2) > s(t_1)$.

Докажем, что функция $s(t)$ не имеет разрывов. В самом деле, пусть в точке t_0 функция $s(t)$ имеет разрыв. Тогда в силу монотонности $s(t)$ точка t_0 является точкой разрыва первого рода со скачком $h > 0$. Значит, для любого отрезка $[t_1, t_2]$, содержащего эту точку t_0, длина дуги кривой, отвечающей этому отрезку $[t_1, t_2]$, превосходит h.

Далее, исходная кривая L является спрямляемой, поэтому для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует вписанная ломаная l такая, что $0 < s(L) - s(l) < \varepsilon$. Эта ломаная порождает неразмеченное разбиение $T : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$, и каждая точка $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ отвечает некоторому узлу ломаной l. Очевидно, для любого наперед заданного положительного числа δ можно считать, что $\Delta_T < \delta$. Ясно, что длина l_k звена ломаной с номером k удовлетворяет условию

$$l_k \leq s(t_k) - s(t_{k-1}).$$

Пусть точка t_0 принадлежит некоторому интервалу (t_{k-1}, t_{k+1}). В силу равномерной непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[a, b]$ существует положительное число δ такое, что для всех t', t'' с условием $|t' - t''| < \delta$ выполняются неравенства

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{h}{8}, \ |\psi(t') - \psi(t'')| < \frac{h}{8}.$$

Следовательно, имеем

$$l_k = \sqrt{(\varphi(t') - \varphi(t''))^2 + (\psi(t') - \psi(t''))^2} < \frac{h}{4}, l_{k+1} < \frac{h}{4}.$$

Отсюда и из условия спрямляемости кривой получим

$$\frac{h}{2} = h - 2\frac{h}{4} < s(t_{k+1}) - s(t_k) - (l_k + l_{k+1}) \leq s(L) - s(l) < \varepsilon.$$

Последнее неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, но при $\varepsilon = \frac{h}{2} > 0$ оно противоречиво. Следовательно, предположение о разрывности функции $s(t)$ не имеет места. Лемма доказана.

Т е о р е м а. *Пусть L — спрямляемая кривая. Тогда она имеет плоскую меру Жордана, равную нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим кривую L на n дуг, длина каждой из которых равна $a = \frac{s(L)}{n}$. Это возможно, поскольку функция $s(t)$ является монотонной и непрерывной. Тогда k-я дуга кривой L при $k = 1, \ldots, n$ целиком лежит внутри квадрата со сторонами, параллельными осям координат и равными $2a$, и центром в k-й точке деления кривой L. Объединение всех квадратов образует простейшую фигуру P, целиком покрывающую L, причем

$$\mu(P) \leq n(2a)^2 = 4n \cdot \frac{s^2(L)}{n^2} = \frac{4s^2(L)}{n}.$$

Устремим n к бесконечности, получим $\mu^*(L) = 0$, а значит, и $\mu(L) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть граница фигуры P является спрямляемой кривой. Тогда P измерима по Жордану.*

Доказательство. В силу критерия измеримости и предыдущей теоремы получаем измеримость фигуры P, что и требовалось доказать.

§ 5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ И ИЗМЕРИМОСТЬЮ ПО ЖОРДАНУ ЕЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Рассмотрим криволинейную трапецию P, ограниченную кривыми $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Имеет место следующий критерий интегрируемости функции по Риману.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ ограничена и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда для интегрируемости функции $f(x)$ по Риману необходимо и достаточно, чтобы криволинейная трапеция P, отвечающая кривой $y = f(x)$, была измерима по Жордану.*

Доказательство. Необходимость. Нам дано, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману. Тогда в силу критерия интегрируемости имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $S(T)-s(T) < \varepsilon$, где $S(T), s(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие разбиению T.

Заметим далее, что замкнутая простейшая фигура P_1, соответствующая верхней сумме Дарбу $S(T)$, объемлет криволинейную трапецию P, а замкнутая простейшая фигура P_2, соответствующая нижней сумме Дарбу $s(T)$, вписана в нее, т.е. имеют место теоретико-множественные включения $P_2 \subset P \subset P_1$ и отвечающие им неравенства

$$s(T) = \mu(P_2) \leq \mu_*(P) \leq \mu^*(P) \leq \mu(P_1) = S(T).$$

Поскольку справедливо неравенство $S(T) - s(T) = \mu(P_1) - \mu(P_2) < \varepsilon$, то $\mu^*(P) - \mu_*(P) < \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ будем иметь, что $\mu^*(P) = \mu_*(P)$, т.е. криволинейная трапеция P измерима по Жордану. Необходимость доказана.

Достаточность. В силу критерия измеримости граница ∂P криволинейной трапеции P имеет плоскую жорданову меру нуль. Следовательно, плоская мера Жордана ее части: кривой L вида $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, — равна нулю. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует простейшая фигура Q такая, что $L \subset Q$, $\mu(Q) < \varepsilon$. Продолжим вертикальные отрезки сторон стандартных прямоугольников, составляющих фигуру Q, до пересечения с осью Ox. Эти точки пересечения дадут разбиение T отрезка $[a, b]$. Обозначим через Q_1

простейшую фигуру, лежащую под фигурой Q в области $y \geq 0$, а через Q_2 обозначим фигуру $Q \cup Q_1$. Тогда имеем

$$Q_1 \subset P \subset Q_2, \ \mu(Q_2) - \mu(Q_1) = \mu(Q) < \varepsilon.$$

Заметим, что фигуре Q_1 соответствует нижняя сумма Дарбу, а фигуре Q_2 — верхняя сумма Дарбу. Следовательно, $S(T) - s(T) < \varepsilon$, т.е. имеем

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = 0,$$

значит, по критерию интегрируемости функция $f(x)$ является интегрируемой. Теорема доказана.

Примеры. 1. Соображения, использованные нами при доказательстве первой части предыдущей теоремы, показывают, что площадь криволинейной трапеции

$$P: \ y = f(x) \geq 0, \ y = 0, \ x = a, \ x = b,$$

равна

$$\mu(P) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Площадь криволинейного сектора P, граница которого задана в полярных координатах уравнениями $r = f(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется по формуле

$$\mu(P) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Доказательство этой формулы опирается на свойство монотонности меры Жордана. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n равных частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta$. Кривая $r = f(\varphi)$ точками $A_k(r_k, \varphi_k)$, $r_k = f(\varphi_k)$, разбивается на n дуг, а сектор P — на n малых секторов P_k. Пусть

$$f_k = \min_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} f(\varphi), \ F_k = \max_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} f(\varphi).$$

Тогда площадь k -го криволинейного сектора содержит круговой сектор радиуса f_k и находится внутри сектора радиуса F_k. Используя формулу площади кругового сектора и свойство монотонности площади, имеем

$$\frac{1}{2} f_k^2 \Delta\varphi_k \leq \mu(P_k) \leq \frac{1}{2} F_k^2 \Delta\varphi_k, \ \Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k.$$

Откуда получим

$$s_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \Delta\varphi_k \le \mu(P) \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} F_k^2 \Delta\varphi_k = S_n.$$

Суммы s_n и S_n являются нижними и верхними суммами Дарбу для интеграла

$$I = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Поскольку функция $f(\varphi)$ — непрерывна, $f^2(\varphi)$ — непрерывна и интегрируема, а потому при $n \to \infty$ имеем $s_n \to I$, $S_n \to I$. Отсюда получим $\mu(P) = I$. Утверждение доказано.

Аналогично можно вычислять и объемы различных фигур, вписывая в них и описывая вокруг них простейшие фигуры, зависящие от некоторого параметра n, и устремляя потом его к бесконечности. Подобным образом находил площади и объемы еще Архимед, т.е. мы применили **метод исчерпывания,** принадлежащий Архимеду.

Итак, понятие измеримости по Жордану позволяет значительно расширить класс фигур P на плоскости и в пространстве, которым можно приписать значение площади или объема $\mu(P)$. Однако легко можно указать пример плоского множества P, не измеримого по Жордану. Например, рассмотрим функцию Дирихле $\chi(x)$ на отрезке $[0,1]$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Пусть P есть криволинейная трапеция, соответствующая этой функции, т.е. множество точек (x, y) на плоскости xOy, определяемое для всякого x, принадлежащего отрезку $[0,1]$, условиями $0 \le y \le \chi(x)$.

Очевидно, что любая простая фигура, содержащая P, должна содержать единичный квадрат, и поэтому верхняя мера ее $\mu^*(P)$ равна единице. Но в то же время простые фигуры, вписанные в P, могут, очевидно, состоять только из конечного числа отрезков, и они имеют поэтому нулевую площадь, следовательно, нижняя мера фигуры P равна нулю. Значит, фигура P неизмерима по Жордану. Но здравый смысл говорит о том, что фигуре P, тем не менее, разумно приписать меру нуль, и вот по какой причине.

Как известно, рациональные точки отрезка можно занумеровать, потому фигура P состоит из счетного числа отрезков. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и накроем первый отрезок прямоугольником, площадь которого равна $\varepsilon/2$, второй отрезок — прямоугольником площадью $\varepsilon/2^2$, и т.д. Тогда вся фигура покроется счетным количеством стандартных прямоугольников, а их общая площадь не превышает величины

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \cdots = \varepsilon.$$

Так как фигура P накрыта прямоугольниками, общая площадь которых не превышает ε, то, естественно, считать, что и площадь фигуры P тоже не превосходит ε, а это может быть только в том случае, если она равна нулю.

Мы подошли тем самым к способу определения понятия площади даже для тех фигур, которые неизмеримы по Жордану. Развивая этот подход, приходим к понятию **меры Лебега**, которое можно построить для пространства любой фиксированной размерности, в том числе и для прямой $\mathbb{R}$.

Глава XII
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

Лекция 15

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МЕРЫ ЛЕБЕГА

Рассмотрим случай плоской меры Лебега.

Определение 1. *Пусть* **ограниченная** *плоская фигура P покрыта конечным или счетным множеством стандартных открытых прямоугольников h_n, $n = 1, \dots$. Совокупность $H = \{h_n\}$ всех этих прямоугольников назовем* **покрытием** *плоского множества P (или фигуры P). Величину*

$$\mu_H = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{s=1}^{n} h_s\Big)$$

назовем **мерой покрытия** *H. Множество H называется простейшим множеством.*

Заметим, что величина μ_H всегда неотрицательна.

Определение 2. *Число $\mu^*(P) = \inf\limits_{H} \mu_H$, где инфимум берется по всем возможным покрытиям простейшими множествами фигуры P, называется* **верхней мерой Лебега** *фигуры P.*

Очевидно, имеем $0 \leq \mu^*(P) < +\infty$, поскольку в силу ограниченности фигуры P найдется стандартный квадрат K со стороной l такой, что $P \subset K$. Отсюда получим, что $\mu^*(P) \leq l^2$.

Определение 3. *Пусть $CP = K \setminus P$, где K — стандартный квадрат, покрывающий фигуру P.* **Нижней мерой Лебега** *плоского множества P назовем число*

$$\mu_*(P) = \mu(K) - \mu^*(CP).$$

Определение 4. *Плоское множество P называется* **измеримым по Лебегу,** *если*

$$\mu^*(P) = \mu_*(P) = \mu(P),$$

а число $\mu(P)$ называется **плоской мерой Лебега.**

Докажем следующий критерий измеримости множества по Лебегу.

Т е о р е м а 1. *Пусть A — ограниченное множество. Тогда для измеримости по Лебегу множества A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для всякого $\varepsilon > 0$ существовало бы простейшее множество $B = B(\varepsilon)$, такое, что справедливо неравенство*

$$\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon.$$

Это значит, что любое измеримое по Лебегу множество с любой степенью точности может быть аппроксимировано простейшими множествами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. В силу ограниченности множества A существует стандартный квадрат K, покрывающий A, т.е. $A \subset K$. Нам дано, что множество A — измеримо. Следовательно, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, т.е. $\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) = \mu(K)$.

Далее, из определения верхней меры Лебега имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность открытых стандартных прямоугольников $\{C_n\}$, покрывающая множество A, т.е. $A \subset C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, и такая, что

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, найдется последовательность стандартных прямоугольников $\{D_n\}$ такая, что

$$K \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D, \mu^*(K \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) < \mu^*(K \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отметим, что множества C и D образуют покрытие квадрата K.

Далее, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$ сходится, то существует номер $k = k(\varepsilon/2)$ такой, что $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \mu(C_n) < \varepsilon/2$.

Положим

$$B = \bigcup_{n=1}^{k} C_n, \; P = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} C_n, \; Q = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right).$$

Заметим, что множества B и P образуют покрытие множества A, т.е. $B \cup P \supset A$, и, следовательно, множество P содержит $A \setminus B$.

Имеем также, что множество Q содержит $B \setminus A$. В самом деле,

$$Q = B \cap D \supset B \cap (K \setminus A) = B \setminus A.$$

Таким образом,

$$P \cup Q \supset (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B.$$

Оценим сверху величину $\mu(P \cup Q)$.

Поскольку для любых двух простейших множеств F и G справедливо равенство

$$\mu(F \cup G) = \mu(F) + \mu(G) - \mu(F \cap G),$$

получим

$$\mu(P \cup Q) = \mu(C \cap D) = \mu(C) + \mu(D) - \mu(C \cup D) <$$

$$< \mu^*(A) + \frac{\epsilon}{2} + \mu^*(K \setminus A) + \frac{\epsilon}{2} - \mu(K) = \epsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли множество $B = B(\varepsilon)$ такое, что

$$\mu^*(A \Delta B) \le \mu(P \cup Q) < \varepsilon.$$

А это и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Нам дано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует простейшее множество $B = B(\varepsilon/2)$ такое, что $\mu^*(A \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, поскольку $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$, $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, справедливы неравенства

$$\mu(B) + \mu^*(A \setminus B) \ge \mu^*(A), \ \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) \ge \mu(B).$$

Отсюда и из условия $A \setminus B \subset A \Delta B$, $B \setminus A \subset A \Delta B$ имеем

$$\mu^*(A) - \mu(B) \le \mu^*(A \setminus B) \le \mu^*(A \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(B) - \mu^*(A) \le \mu^*(A \setminus B) \le \mu^*(A \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. $|\mu^*(A) - \mu(B)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, поскольку множество A ограничено, существует стандартный квадрат K такой, что $K \supset A$. Очевидно, имеем

$$(K \setminus A) \Delta (K \setminus B) = A \Delta B.$$

Поэтому, как и раньше, получим

$$|\mu^*(K \setminus A) - \mu(K \setminus B)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя равенство $\mu(B) + \mu(K \setminus B) = \mu(K)$, получим

$$|\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) - \mu(K)| \le |\mu^*(A) - \mu(B)| + |\mu^*(K \setminus A) - \mu(K \setminus B)| < \epsilon,$$

т.е. $|\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) - \mu(K)| < \varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что

$$\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) - \mu(K) = 0,$$

т.е. $\mu^*(A) = \mu(K) - \mu^*(K \setminus A) = \mu_*(A)$. Последнее равенство и означает, что множество A измеримо. Теорема 1 доказана.

Исходя из доказанного критерия, очевидно, имеем, что для любых измеримых множеств A и B их объединение, пересечение, разность и симметрическая разность являются измеримыми множествами. Более того, если измеримые множества A и B не пересекаются, то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Мы не будем детально изучать свойства множеств, измеримых по Лебегу, но следует отметить, что это ненамного сложнее, чем изучение измеримости по Жордану. Тем не менее, мера Лебега обладает существенным преимуществом перед мерой Жордана, так как помимо свойств инвариантности относительно движений плоскости и монотонности, она обладает свойством **счетной аддитивности** взамен свойства конечной аддитивности, которым обладала мера Жордана. Уточним, что имеется в виду.

Теорема 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — бесконечная последовательность непересекающихся множеств, измеримых по Лебегу. Пусть их объединение $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ является ограниченным множеством. Тогда множество A измеримо по Лебегу, причем*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство. Так как множество A — ограничено, то существует стандартный квадрат K, содержащий A. В силу этого и свойства конечной аддитивности для любого фиксированного числа $k \geq 1$ имеем соотношения

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \leq \mu(K).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ сходится, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\varepsilon)$ такое, что для любого числа $k > k_0$ выполняется неравенство $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем какое-нибудь число k, большее k_0. Тогда множество $C = \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$ — измеримо, следовательно, по критерию измеримости (теорема 1) для всякого $\varepsilon > 0$ существует простейшее множество $B = B(\frac{\varepsilon}{2})$ такое, что $\mu^*(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, справедливо следующее соотношение:

$$A\Delta B \subset (C\Delta B) \cup (\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n).$$

Тогда, используя неравенство

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

получим, что $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$. Следовательно, множество A — измеримо. Аналогично доказывается, что и множество $C_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$ является измеримым.

Далее, в силу свойства конечной аддитивности имеем

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{k} \mu A_n + \mu(C_k).$$

Кроме того, ранее мы показали, что $\lim_{k\to\infty} \mu C_k = 0$. А это значит, что $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$. Теорема доказана.

Важным следствием доказанного выше свойства счетной аддитивности меры Лебега является измеримость пересечения счетного числа измеримых множеств, а также измеримость объединения счетного или конечного числа измеримых множеств при условии ограниченности этого объединения.

В частности, отсюда имеем измеримость любого ограниченного открытого множества как объединения не более чем счетного числа открытых стандартных прямоугольников. Но тогда и любое замкнутое множество будет измеримым как дополнение до открытого множества, а следовательно, будет измеримым по Лебегу и любое не более, чем счетное, объединение и пересечение открытых и замкнутых множеств.

Докажем еще одно полезное свойство меры Лебега: **свойство непрерывности.**

Теорема 3. *Пусть $A_1, \dots, A_n, \dots$ — измеримые множества, и пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ — ограниченное множество. Кроме того, пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Тогда $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Доказательство. Имеем

$$A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1}), \; A = A_1 \bigcup_{s=2}^{\infty} (A_s \setminus A_{s-1}),$$

причем для любых $s, t \geq 2, s \neq t$, справедливы соотношения

$$A_1 \cap (A_s \setminus A_{s-1}) = \varnothing,\ (A_s \setminus A_{s-1}) \cap (A_t \setminus A_{t-1}) = \varnothing.$$

Тогда в силу свойства счетной аддитивности меры получим

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{s=2}^{\infty} \mu(A_s \setminus A_{s-1}) = \mu(A).$$

Теорема 3 доказана.

Отметим, что не всякое множество на плоскости измеримо по Лебегу, но неизмеримые множества имеют довольно экзотический вид.

Можно поставить вопрос о том, как связаны между собой понятия измеримых множеств для разных размерностей. Например, если мы имеем измеримую плоскую фигуру P и будем пересекать ее прямыми, параллельными одной из осей координат. Тогда в сечении будут получаться линейные ограниченные множества. Измеримы ли они по Лебегу? Этот вопрос на самом деле имеет принципиально важное значение и вот ответ на него. Да, но за исключением некоторого множества прямых, которое в пересечении с другой осью координат образует множество линейной меры нуль.

Вообще, если какое-нибудь условие выполнено для всех точек множества $M \subset \mathbb{R}$, за исключением множества точек $M' \subset M$, мера которого равна нулю, $\mu(M') = 0$, то говорят, что это условие имеет место для *почти всех* точек множества M. Термин *почти все* в смысле меры Лебега означает, что некоторое свойство выполняется на всем множестве, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Рассмотрим теперь линейную меру Лебега, т.е. меру Лебега для ограниченных множеств на числовой прямой $\mathbb{R}$. Очевидно, что счетное множество имеет меру нуль. Возможен тогда второй вопрос: существуют ли несчетные множества меры нуль? Да, существуют, например, канторово совершенное множество M, являющееся подмножеством отрезка $[0, 1]$ и состоящее из тех чисел, которые записываются в троичной системе счисления в виде бесконечной дроби, не содержащей цифры 1. Например, числа $0,2$; $0,200202$; $0,222\ldots2\cdots = 1$ и т.д.

Очевидно, множество M имеет мощность континуума, в то же время оно получается так: отрезок $[0, 1]$ делится на три равные части и выбрасывается средний интервал $(1/3, 2/3)$, затем эта процедура повторяется с каждым из двух отрезков, полученных после первого деления, и т.д.

Пусть E_0 — исходный отрезок $[0, 1]$, E_1 — то множество, которое осталось после первого шага, E_2 — множество, оставшееся после второго шага, и т.д.

Очевидно, $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ и множество M равно $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда при любом $n \geq 1$ для верхней меры множества M справедливы оценки $\mu^*(M) \leq \mu(E_n)$. Очевидно, имеем

$$\mu(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu(E_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, мера множества M равна 0.

На этом мы завершаем изучение основ теории меры Лебега.

Лекция 16

§ 2. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Понятие линейной меры Лебега позволяет расширить класс интегрируемых функций с помощью введения понятия интеграла Лебега. Для того чтобы сказать, что это такое, сначала введем понятие измеримой функции.

Определение 1. *Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, называется* **измеримой** *на этом отрезке, если для всякого $y \in \mathbb{R}$ множество E точек $x \in [a,b]$, для которых выполняется неравенство $f(x) < y$, является измеримым множеством на отрезке $[a,b]$ в смысле линейной меры Лебега.*

Из свойств меры Лебега, доказанных в предыдущем параграфе, имеем, что вместе с множеством E измеримыми будут множества точек $x \in [a,b]$, для которых справедливы соотношения

$$f(x) \geq y,\ f(x) = y,\ z < f(x) \leq y.$$

В частности, любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ измерима, поскольку множество $I_y = \{x \in [a,b] |\ f(x) \geq y\}$ будет замкнутым, а любое замкнутое множество является измеримым.

В качестве второго примера измеримой на отрезке $I = [a,b]$ функции $f(x)$ рассмотрим ограниченную функцию, имеющую разрывы на множестве лебеговой меры нуль. В силу критерия Лебега она будет интегрируема по Риману. Покажем, что эта функция является измеримой.

Возьмем любое число $y \in \mathbb{R}$. Достаточно показать, что множество

$$I_y = \{x \in I \,|f(x) \geq y\}$$

является измеримым. Предельные точки x_0 множества I_y могут быть двух видов: точками непрерывности функции $f(x)$ и ее точками разрыва. Если такая точка x_0 — точка непрерывности, то она обязана принадлежать I_y. Действительно, поскольку x_0 — предельная точка множества I_y, существует последовательность точек $x_n \in I_y$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ f(x_n) \geq y.$$

Отсюда в силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0 имеем

$$y \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0),$$

т.е. точка x_0 принадлежит I_y.

Если же предельная точка x_0 множества I_y не принадлежит ему, то она является точкой разрыва функции $f(x)$. Обозначим множество всех таких точек x_0 через F. Множество F имеет меру нуль как подмножество множества нулевой меры Лебега.

В силу того, что множество $A = I_y \cup F$ — замкнуто, оно измеримо. Следовательно, множество I_y — измеримо, как разность измеримого множества и множества меры нуль.

Тем самым установлена измеримость функции, имеющей множество точек разрыва нулевой меры Лебега.

Рассмотрим далее функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, ограниченную и измеримую на нем. Тогда для некоторого $M > 0$ для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$. Отрезок $[-M, M]$ на оси ординат разобьем на n равных частей: $-M < y_0 < y_1 \cdots < y_n = M$. Множество точек x, удовлетворяющих условию $y_s \leq f(x) < y_{s+1}$, обозначим через E_s, $s = 0, \ldots, n-1$. Заметим, что множество E_s — измеримо. Положим $\mu_s = \mu(E_s)$.

Определение 2. *Сумму* $S_n = \sum\limits_{s=0}^{n-1} \mu_s y_s$ *назовем* **интегральной суммой Лебега.**

Можно доказать, что всегда существует предел $I = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$. Этот предел называется **интегралом Лебега** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается так: $(L)\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Поскольку для любой интегрируемой по Риману функции множество точек разрыва имеет меру нуль (критерий Лебега), в силу доказанного выше она измерима по Лебегу. Более того, интеграл Лебега от этой функции равен интегралу Римана. Действительно, пусть $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x), M_i = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$. Тогда для интеграла Лебега имеют место неравенства

$$m_i \Delta x_i \leq (L) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leq M_i \Delta x_i.$$

Следовательно, в силу аддитивности интеграла Лебега, для верхней $S(T)$ и нижней $s(T)$ сумм Дарбу получим

$$s(T) \leq (L) \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq S(T).$$

Отсюда, переходя к пределу при диаметре Δ_T разбиения T, стремящемся к нулю, будем иметь

$$\lim_{\Delta_T\to 0} s(T) = \lim_{\Delta_T\to 0} S(T) = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, мы доказали, что интеграл Лебега равен интегралу Римана, если последний существует. Заметим, что поэтому для интеграла Лебега используется то же обозначение, что и для интеграла Римана.

Перейдем теперь к рассмотрению неограниченных измеримых функций на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим сначала случай неотрицательной функции $f(x)$. Для любого вещественного числа y определим функцию $f_y(x)$ следующим образом:

$$f_y(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad |f(x)| \le y, \\ y, & \text{если} \quad |f(x)| > y. \end{cases}$$

Эта функция измерима. Тогда **интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to\infty}\int_a^b f_y(x)\,dx.$$

Если этот предел конечен, то функция $f(x)$ называется **суммируемой.** Очевидно, что суммируемая функция может обращаться в бесконечность лишь на множестве лебеговой меры нуль.

Пусть теперь функция $f(x)$ принимает значения произвольного знака. Тогда определим функции

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \; f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ **суммируема,** если суммируемы обе функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$, и интеграл от функции $f(x)$ равен разности интегралов от функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Отметим, что в случае ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ понятия суммируемой и измеримой функций совпадают. Из определения суммируемой функции непосредственно следует, что:

1) вместе с $f(x)$ будет суммируемой функция $|f(x)|$, при этом модуль интеграла от подынтегральной функции $f(x)$ не превосходит интеграла от модуля этой функции;

2) если $f(x)$ — измерима и $|f(x)|$ — суммируема, то функция $f(x)$ — суммируема;

3) если $f(x)$ — измерима и модуль ее не превосходит суммируемой функции $g(x)$, то функция $f(x)$ — суммируема;

4) если $f(x)$ — суммируема и $g(x)$ — ограниченная измеримая функция, то их произведение является суммируемой функцией;

5) если $f(x)$ — суммируемая функция и $g(x)$ не совпадает с ней на множестве меры нуль, то функция $g(x)$ — суммируема, и интегралы от этих функций равны между собой.

Отметим еще, что для интеграла Лебега от суммируемой функции верны те же свойства, что и для интеграла Римана, но кроме этого добавляется еще одно важное свойство: **свойство счетной аддитивности интеграла Лебега.** Его можно сформулировать так.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано счетное разбиение единицы, т.е. задано счетное множество измеримых функций $g_n(x)$, принимающих всего два значения 0 и 1, причем для любого $x \in [a, b]$ одна и только одна функция $g_n(x)$ отлична от нуля. Тогда для всякой суммируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x) g_n(x)\,dx.$$

Это свойство можно сформулировать и по-другому. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на непересекающееся семейство измеримых множеств E_n. Тогда интегралы от функции $f(x)$ по множествам E_n существуют и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx.$$

Интеграл по множеству E_n можно записать и так:

$$\int_{E_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x) g_n(x)\,dx,$$

где $g_n(x)$ — индикаторная функция множества E_n, т.е.

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E_n, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin E_n. \end{cases}$$

В заключение отметим, что в случае интеграла Лебега упрощается по сравнению с интегралом Римана предельный переход под знаком интеграла. Приведем точную формулировку этого утверждения.

Т е о р е м а (теорема Лебега). *Пусть на отрезке $[a,b]$ последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ и пусть для некоторой суммируемой функции $g(x)$ на отрезке $[a,b]$ выполнено неравенство $|f_n(x)| \le g(x)$. Тогда предельная функция $f(x)$ — суммируема и имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы абсолютные величины функций $f_n(x)$, $n \ge 1$, не превосходят суммируемой функции $\varphi(x)$. Следовательно, и абсолютная величина предельной функции $f(x)$ не превосходит $\varphi(x)$, и значит, она является суммируемой функцией.

Нам надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx = 0$, где $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Для каждого $n \ge 1$ определим множество A_n тех точек x, для которых $|g_n(x)| \ge \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Тогда в силу упомянутого выше свойства счетной аддитивности меры Лебега справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\mu A_n = 0$. В противном случае нашлась бы точка x такая, что для бесконечного множества значений n выполнялось неравенство $|g_n(x)| \ge \varepsilon_1$. А это противоречит тому, что

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0.$$

Представим интеграл $J = \int_a^b g_n(x)\,dx$ в виде

$$J = J_1 + J_2, \text{где} \quad J_1 = \int\limits_{I\setminus A_n} g_n(x)\,dx, J_2 = \int\limits_{A_n} g_n(x)\,dx, \quad I = [a,b].$$

По теореме о среднем имеем

$$|J_1| \le \epsilon_1(b-a) = \frac{\epsilon}{3},$$

а для интеграла J_2 справедлива оценка

$$|J_2| \le \int\limits_{A_n} |g_n(x)|\,dx \le 2\int\limits_{A_n}\varphi(x)\,dx.$$

Пусть $B_m = \{x \in A_n \mid \varphi(x) \ge m\}$. Тогда в силу сходимости интеграла $\Phi = \int\limits_{A_n}\varphi(x)\,dx$ имеем

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{B_m}\varphi(x)\,dx = 0.$$

Следовательно, существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m > m_0$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_{B_m} \varphi(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Далее, представим интеграл Φ в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где

$$\Phi_1 = \int\limits_{B_m} \varphi(x)\,dx, \quad \Phi_2 = \int\limits_{A_n \setminus B_m} \varphi(x)\,dx.$$

В силу теоремы о среднем имеем

$$|\Phi_2| \le m\mu(A_n \setminus B_m) \le m\mu(A_n).$$

Поскольку мера множества A_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то при любом фиксированном $m > m_0$ можно указать $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство

$$|\Phi_2| \le m\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ мы нашли $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^b g_n(x)\,dx\right| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\,dx = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим еще один факт, состоящий в том, что для ограниченной неотрицательной функции интегрируемость по Лебегу эквивалентна измеримости по Лебегу ее криволинейной трапеции.

Для более полного изучения теории интеграла Лебега можно познакомиться со следующими оригинальными работами: H. Lebesgue. Intégrale, Longueur, Aire. Thèse, Paris, 1902; C. de la Vallée Poussin. Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Gauthier – Villars et C^{ie}, Paris, 1916; А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций, М. - Л., 1934; Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд, ГИТТЛ, М. - Л., 1951; Ш. де ла Валле Пуссен. Курс анализа бесконечно малых. Т.1, ГТТИ, М. - Л., 1933.

§ 3. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

Имеется еще одно обобщение понятия интеграла Римана — это **интеграл Стильтьеса.** Он отражает другую особенность интеграла Римана по сравнению с интегралом Лебега. Если мера Лебега и интеграл Лебега вводились для того, чтобы расширить класс измеримых множеств и класс интегрируемых функций, то введением интеграла Стильтьеса мы решаем другую задачу. Дело в том, что на интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

можно посмотреть вот с какой стороны. При фиксированном отрезке $[a, b]$ интеграл I — это число, которое ставится в соответствие каждой интегрируемой функции. Тем самым, интеграл Римана задает некоторую числовую функцию, определенную на множестве $\{f\}$ всех функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$. Сузим класс функций и будем рассматривать непрерывные функции, определенные на отрезке $[a, b]$. Множество всех таких функций принято обозначать символом $C[a, b]$, причем для каждой функции $f \in C[a, b]$ определяют величину $||f|| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$, называемую **нормой функции** $f(x)$ в пространстве $C[a, b]$. Пусть $f \in C[a, b]$, тогда, как мы знаем, f — интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$I(f)$ — линейная числовая функция, т.е. для любых $f, g \in C[a, b]$ и любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$.

Напомним, что числовые функции, определенные на множестве, элементами которого являются функции, во избежание путаницы, называют **функционалами.** Более того, функционал I, ставящий всякой функции $f \in C[a, b]$ в соответствие число $I(f)$, называется **линейным функционалом,** если выполняются следующие свойства:

1^0. Аддитивность: $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)\ \forall f_1, f_2 \in C[a, b]$;

2^0. Однородность: $I(cf) = cI(f)\ \forall c \in \mathbb{R},\ \forall f \in C[a, b]$;

3^0. Ограниченность: существует $M > 0$ такое, что для любой функции $f \in C[a, b]$ справедливо неравенство $|I(f)| \le M||f||$. Наименьшее из таких чисел M называется **нормой линейного функционала** I и обозначается $||I||$.

Таким образом, интеграл Римана $I(f)$ задает линейный функционал на пространстве $C[a, b]$. С помощью интеграла Римана на пространстве $C[a, b]$ можно построить много других линейных функционалов. Например, для любой фиксированной интегрируемой по Риману функции $g(x)$ на пространстве $C[a, b]$ можно задать линейный функционал

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Заметим, что, если функция $G(x)$ такова, что для всякого $x \in [a, b]$ справедливо равенство $g(x) = G'(x)$, то $I_g(f)$ можно представить в виде

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Для развития теории интегрирования и для некоторых ее приложений, например, для теории вероятностей, вариационного исчисления, теоретической механики, важно иметь ответ на вопрос: любой ли линейный функционал $\varphi(f)$ на пространстве $C[a, b]$ можно представить в таком виде, т.е. всегда ли найдется такая функция $g(x)$, что

$$\varphi(f) = I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Легко понять, что если мы имеем дело с обычным интегралом Римана, то ответ отрицательный, так как тогда, например, функционал $\varphi(f) = f(x_0)$, где x_0 — фиксированная точка отрезка $[a, b]$ (в частности, $x_0 = \frac{a+b}{2}$) в таком виде представить нельзя. Но можно расширить понятие интеграла Римана таким образом, что уже любой линейный функционал $\varphi(f)$ на пространстве $C[a, b]$ можно будет представить в виде

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Расширение понятия интеграла Римана в указанном направлении и достигается введением понятия **интеграла Стильтьеса.** Для этого нам потребуется определить новый класс функций.

Определение. *Функция $u(x)$ называется* **функцией с ограниченным изменением** *или, что то же самое,* **функцией ограниченной вариации** *на отрезке $[a, b]$, если существует вещественное число*

$M > 0$ *такое, что для любого разбиения* $T: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *выполняется неравенство*

$$V(f;T) = \sum_{s=1}^{n} |u(t_s) - u(t_{s-1})| < M.$$

Величина, равная $\sup\limits_T V(f;T) = V_a^b(f)$, называется **полным изменением** или **полной вариацией** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Отметим следующие свойства функций с ограниченным изменением на отрезке.

1^0. Сумма двух функций с ограниченным изменением есть функция с ограниченным изменением.

Действительно, пусть $h(x) = f(x)+g(x)$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство $V(h,T) \le V(f,T) + V(g,T)$. Отсюда следует, что полное изменение $V_a^b(h)$ функции $h(x)$ не превосходит суммы полных изменений функций $f(x)$ и $g(x)$.

2^0. Ограниченная монотонная функция на отрезке $[a,b]$ — функция с ограниченным изменением.

Рассмотрим только случай неубывающей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Имеем

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

3^0. Пусть $a < c < b$ и функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$, тогда имеет место равенство $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Возьмем любые разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ и положим $T = T_1 \cup T_2$. Тогда $V(f,T) = V(f,T_1) + V(f,T_2)$. Так как

$$\sup_{T_1} V(f,T_1) = V_a^c(f), \ \sup_{T_2} V(f,T_2) = V_c^b(f),$$

то, переходя в предыдущем равенстве к супремумам по разбиениям T_1 и T_2, получим

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = \sup_{T=T_1 \cup T_2} V(f,T) \le V_a^b(f).$$

Возьмем теперь любое разбиение T отрезка $[a,b]$ и добавим к нему точку c. Получим разбиения T_1 отрезка $[a,c]$ и T_2 отрезка $[c,b]$. Тогда

$$V(f,T) \le V(f,T_1) + V(f,T_2).$$

Переходя в этом неравенстве к супремумам по всем разбиениям T, получим

$$V_a^b(f) \le \sup_T (V(f,T_1) + V(f,T_2)) \le V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Вместе с ранее доказанным противоположным неравенством это дает

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

4^0. Каждая функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ может быть представлена как разность двух ограниченных монотонно возрастающих функций.

Положим $\varphi(x) = V_a^x(f)$. Тогда функция $\varphi(x)$ не убывает и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. Далее, положим $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$. При $x_1 > x_2$ имеем

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) = V_a^{x_1} - V_a^{x_2} - f(x_1) + f(x_2) = V_{x_2}^{x_1} - (f(x_1) - f(x_2)) \geq 0,$$

так как

$$V_{x_2}^{x_1} = \sup_T V(f,T) \geq \sup_T |\sum_{s=1}^n (f(a_s) - f(a_{s-1}))| = |f(x_2) - f(x_1)|.$$

5^0. Функция с конечным числом максимумов и минимумов на отрезке $[a,b]$ является функцией с ограниченным изменением.

Пусть отрезки $[x_{s-1}, x_s]$, $s = 1, \ldots, n$, задают участки монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$V_a^b(f) = \sum_{s=1}^n V_{x_{s-1}}^{x_s}(f), \quad \text{где} \quad V_{x_{s-1}}^{x_s}(f) = |f(x_s) - f(x_{s-1})|.$$

Пример. Найти полное изменение функции $f(x) = \sin x$ при $x \in [0, 2\pi]$.

Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на отрезки монотонности функции $\sin x$: $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Тогда согласно свойствам 5^0 и 3^0 будем иметь:

$$V_0^x(\sin x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 2 - \sin x, & \text{если} \quad \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, \\ 4 + \sin x, & \text{если} \quad 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $u(x)$ — функция с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$, и пусть $V = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,\ \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — размеченное разбиение отрезка $[a,b]$ и $T = T(V)$ — соответствующее ему неразмеченное разбиение. Пусть, кроме того,

$$\Delta_s u = u(t_s) - u(t_{s-1}),\ \sigma(V) = \sigma_u(V) = \sum_{s=1}^n f(\xi_s)\Delta_s u.$$

Тогда $\sigma(V)$ называется **интегральной суммой Стильтьеса.**

Если существует предел

$$\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I_u(f),$$

то функция $f(x)$ называется **интегрируемой по функции** $u(x)$ на отрезке $[a, b]$, а величина $I = I_u(f)$ — **интегралом Стильтьеса** от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ (или относительно функции $u(x)$) и обозначается так:

$$I = I_u(f) = \int_a^b f(x)\, du(x).$$

Этот предел можно рассматривать как предел по базе B, окончаниями которой $b = b_\delta$ служат множества, состоящие из размеченных разбиений U с диаметром $\Delta_U < \delta$. Следовательно, предел I единственен.

Докажем теперь одно достаточное условие существования интеграла Стильтьеса.

Т е о р е м а (достаточное условие интегрируемости). *Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$. Тогда для существования интеграла Стильтьеса $\int_a^b f(x)\, du(x)$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на $[a, b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По критерию Коши имеем, что существование предела интегральных сумм Стильтьеса, $\lim_{\Delta_U \to 0} \sigma(U)$, эквивалентно выполнению условия Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ должно найтись число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых размеченных разбиений U_1 и U_2 с условием $\Delta_{U_1} < \delta$, $\Delta_{U_2} < \delta$, следует, что справедливо неравенство $|\sigma(U_1) - \sigma(U_2)| < \varepsilon$.

Обозначим через v полное изменение функции $u(x)$ на отрезке $[a, b]$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых x_1, x_2 с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1 = \varepsilon/2v$. Возьмем теперь любые размеченные разбиения U_1 и U_2 с диаметрами Δ_{U_1} и Δ_{U_2}, меньшими δ. Пусть $T_1 = T(U_1)$ и $T_2 = T(U_2)$ — соответствующие им неразмеченные разбиения отрезка $[a, b]$. Разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$ является измельчением разбиений T_1 и T_2, и пусть U_3 — произвольное разбиение с условием $T_3 = T(U_3)$. Тогда

$$|\sigma(U_1) - \sigma(U_3)| = |\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i u - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(x_{i,j})\Delta_{i,j} u)| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} (f(x_i) - f(x_{i,j}))\Delta_{i,j} u| < \epsilon_1 v.$$

Аналогично доказывается, что $|\sigma(U_2) - \sigma(U_3)| < \epsilon_1 v$. Следовательно,

$$|\sigma(U_1) - \sigma(U_2)| < |\sigma(U_1) - \sigma(U_3)| + |\sigma(U_3) - \sigma(U_2)| < 2\epsilon_1 v = \epsilon.$$

Теорема доказана.

Укажем основные свойства интеграла Стильтьеса.

1^0. Если функция $u(x)$ дифференцируема, то имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x) = \int\limits_a^b f(x)u'(x)\,dx,$$

где последний интеграл понимается как интеграл Римана.

2^0. *Свойство линейности:*

$$\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,du(x) = \int\limits_a^b f_1(x)\,du(x) + \int\limits_a^b f_2(x)\,du(x),$$

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,du(x) = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,du(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3^0. При $a < c < b$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x) = \int\limits_a^c f(x)\,du(x) + \int\limits_c^b f(x)\,du(x),$$

(*свойство аддитивности*).

4^0. Если $f'(x)$ и $u(x)$ интегрируемы по Риману, то имеет место следующее *правило интегрирования по частям:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x) = f(x)u(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)u(x)\,dx,$$

где последний интеграл понимается как интеграл Римана.

5^0. Если $u(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ на этом отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x) \geq \int\limits_a^b g(x)\,du(x).$$

Приведем примеры вычисления интегралов Стильтьеса.

1. Пусть $\{x\}$ — дробная часть числа x, т.е. $\{x\} = x - [x]$, где $[x] = m \in \mathbb{Z}$ — целая часть числа x, $m \le x < m+1$. Найти значение интеграла $\int\limits_0^3 x\, d\{x\}$.

Имеем:

$$\int\limits_0^3 x\, d\{x\} = \int\limits_0^3 x\, dx + 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1) = -1,5.$$

2. Пусть

$$u(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad 0 \le x < \pi, \\ \cos x, & \text{если} \quad \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$$

Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} x\, du(x)$.

Имеем:

$$I = \int\limits_0^{\pi} x\, d\sin x + \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\, d\cos x + (-1)\cdot\pi = -2.$$

В заключение приведем теорему об общем виде линейного функционала в пространстве $C[a,b]$.

Т е о р е м а. *1) Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл Стильтьеса*

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

является линейным функционалом в пространстве $C[a,b]$.

2) Пусть $I(f)$ — любой линейный функционал в $C[a,b]$. Тогда существует функция $u(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[a,b]$ такая, что $I(f)$ представляется в виде

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\, du(x).$$

Мы не будем давать полного доказательства этой теоремы, остановимся только на его основных моментах.

1) Аддитивность и однородность $I(f)$ следует из линейности интегральных сумм Стильтьеса $\sigma(U)$, соответствующих размеченному разбиению U отрезка $[a,b]$, $T = T(U)$. Для этой суммы справедливо неравенство

$$|\sigma(U)| \le \|f\| \cdot V(u,T) \le \|f\| \cdot V_a^b(u).$$

Переходя в нем к пределу при $\Delta_V \to 0$, получим

$$|\int_a^b f(x)\,du(x)| \le \|f\| V_a^b(u).$$

Тем самым, доказана ограниченность $I(f)$.

2) Пусть $I(f)$ — линейный функционал на пространстве $C[a,b]$. Этот функционал можно продолжить на пространство ступенчатых функций. Пусть отрезок $[a,\beta]$ содержится в отрезке $[a,b]$. Тогда положим

$$\chi_\beta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = a,\ \beta < x \le b, \\ 1, & \text{если} \quad a < x \le \beta. \end{cases}$$

Далее определим функцию $I_\beta(\chi) = u(\beta)$. Эта функция $u(\beta)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной непрерывности $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ будем иметь, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x_1, x_2 с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Возьмем теперь размеченное разбиение $U : \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с диаметром Δ_U, меньшим δ.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(\xi_1)\chi_{x_1}(x) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)(\chi_{x_k}(x) - \chi_{x_{k-1}}(x)).$$

Отсюда имеем

$$I(\varphi) = f(\xi_1)u(x_1) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)(u(x_k) - u(x_{k-1})).$$

Далее, из определения функции $\varphi(x)$ получим, что для любого $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Следовательно, имеем

$$|If - I\varphi| = |I(f - \varphi)| \le \varepsilon \|I\|.$$

А это означает, что при $\Delta_U \to 0$ величина If является пределом величин $I\varphi$, но предел $I\varphi$ представляет собой интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b f(x)\,du(x).$$

На этом и завершается доказательство теоремы.

Глава XIII
НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 18

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ

В предыдущей главе было показано, что с помощью интеграла Стильтьеса можно выражать линейные функционалы, определенные на пространстве непрерывных функций $C[a, b]$. На примере пространства $C[a, b]$ мы познакомились с функциональным пространством. Может возникнуть вопрос: почему множество $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций называется пространством? Ответ достаточно прост. Дело в том, что термин "пространство" по существу эквивалентен термину "множество". Отличие состоит в том, что термин пространство "в чистом виде" употребляется редко, а чаще в сочетании с другими терминами, например: топологическое пространство, метрическое, линейное, нормированное пространства и т.д. Все эти понятия играют важную роль в математике вообще и в математическом анализе в частности. Здесь мы познакомимся с некоторыми из них. Рассмотрим следующую схему.

Пространства

↙ ↘

Топологические Линейные (векторные)

↓ ↘ ↓

Хаусдорфовы Линейные топологические

↓ ↓

Метрические ⟶ Нормированные

↙ ↙

Полные ⟶ Банаховы ⟶ Гильбертовы ⟶ Евклидовы

На этой схеме показаны те некоторые из рассматриваемых в математике пространств, определения которых мы дадим. Стрелки имеют следующий смысл: то пространство, на которое указывает стрелка, является частным случаем того, из которого она "выходит".

Перейдем к определению пространств, указанных на схеме.

Пусть X — некоторое множество, $\Sigma = \Sigma_X$ — множество, состоящее из некоторых подмножеств множества X, т.е. $\Sigma \subset \Omega(X)$, где $\Omega(X)$ — множество всех подмножеств X. Пусть Σ обладает следующими свойствами:

1^0. $X \in \Sigma$, $\varnothing \in \Sigma$;

2^0. а) Если A и $B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$;

б) Объединение любого числа элементов из Σ принадлежит Σ.

Для того чтобы указать, что элементами Σ являются некоторые подмножества множества X, говорят, что Σ есть некоторая **система подмножеств.**

Определение 1. *Каждая система подмножеств* Σ, *удовлетворяющая свойствамм* 1^0 *и* 2^0, *называется* **топологией** *на множестве* X.

Определение 2. *Пара множеств* (X, Σ) *называется* **топологическим пространством.**

Часто говорят просто, что X — топологическое пространство, если на нем задана топология Σ. Каждый элемент $\sigma \in \Sigma$, т.е. каждое подмножество $\sigma \subset X$, принадлежащее системе Σ, называется **открытым множеством** (в топологии Σ).

Любое подмножество $A \subset X$ такое, что $X \setminus A \in \Sigma$, называется **замкнутым множеством** (в топологии Σ).

Пусть x — некоторая точка, принадлежащая X. Тогда любой элемент $\sigma \in \Sigma$, которому принадлежит точка x, называется **окрестностью точки** x, т.е. любое открытое множество, содержащее точку x, называется ее окрестностью. Фиксированные окрестности точки x часто обозначают символом σ_x.

Определение 3. *Топологическое пространство* $T = (X, \Sigma)$ *называется* **хаусдорфовым,** *если любые две различные точки* x *и* y *этого пространства имеют непересекающиеся окрестности* σ_x и $\sigma_y \in \Sigma$, т.е.

$$\sigma_x \cap \sigma_y = \varnothing.$$

Пример хаусдорфова пространства $(\mathbb{R}, \Sigma)$. Пусть множество Σ состоит из всевозможных подмножеств вещественной оси $\mathbb{R}$, имеющих в своем составе конечное или счетное число непересекающихся интервалов. Тогда пространство $(\mathbb{R}, \Sigma)$ является хаусдорфовым, поскольку любые две различные точки x и y можно окружить непересекающимися открытыми δ-окрестностями.

Отметим, что изучение различных топологических пространств составляет предмет теоретико-множественной топологии.

Определение 4. *Пусть задан декартов квадрат $X^2 = X \times X$ некоторого множества X и пусть на множестве X^2 определена числовая функция $\rho(x_1, x_2)$ со следующими свойствами:*

1) для любых $(x_1, x_2) \in X^2$ имеем $\rho(x_1, x_2) \geq 0$, причем $\rho(x_1, x_2) = 0$, если $x_1 = x_2$ (неотрицательность);

2) для любых $(x_1, x_2) \in X^2$ имеем $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ (симметричность);

3) для любых $x, y, z \in X$ справедливо неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Тогда пара (X, ρ) или само множество X называется **метрическим пространством**, *а функция $\rho(x_1, x_2)$ называется* **метрикой** *этого пространства, или* **расстоянием** *от точки x_1 до точки x_2, или* **функцией расстояния.**

Примеры. 1. Пусть X — произвольное множество и

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ 1, & \text{если} \quad x \neq y, \end{cases}$$

тогда пара (X, ρ) является метрическим пространством.

2. Пусть на множестве вещественных чисел расстояние задается по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$, тогда пара $(\mathbb{R}, \rho)$ является метрическим пространством.

Отметим, что метрику на одном и том же множестве X можно задавать по-разному. При этом получаются различные метрические пространства. Например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно задать расстояние между точками $\bar{x} = (x_1, x_2)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2)$ как по формуле

$$\rho_0(\bar{x}, \bar{y}) = \max\left(|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\right),$$

так и по формуле

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Для всякого числа $\varepsilon > 0$ определим открытые ε-окрестности точек $x \in X$ в метрическом пространстве (X, ρ) (обозначим их через $\sigma_x(\epsilon)$) как множество точек, содержащееся в X и состоящее изо всех точек точек $y \in X$ с условием $\rho(x, y) < \varepsilon$. Множества σ, являющиеся объединением любой совокупности, составленной из ε-окрестностей различных точек $x \in X$, назовем **открытыми.** Тогда можно показать, что система множеств $\Sigma = \{\sigma\}$ задает на множестве X **топологию** и превращает это множество в **топологическое хаусдорфово пространство.** Заданная топология называется **топологией, порожденной метрикой** ρ.

Определение 5. *Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ метрического пространства (X, ρ) называется* **последовательностью Коши** *или чаще* **фундаментальной последовательностью,** *если она удовлетворяет* **условию Коши,** *а именно: для всякого числа $\epsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\epsilon)$ такой, что для всех номеров $n_1, n_2 > n_0$ имеем $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \epsilon$.*

Определение 6. *Последовательность $\{x_n \in X\}$ называется* **сходящейся** *к точке $a \in X$, если числовая последовательность $\rho_n = \rho(x_n, a)$ сходится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.*

Этот факт записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Из неравенства треугольника легко можно показать, что такая точка $a \in X$ единственна.

Определение 7. *Метрическое пространство (X, ρ) называется* **полным,** *если всякая последовательность Коши сходится к некоторой точке $a \in X$.*

Теперь обратимся к линейным пространствам, которые должны быть знакомы из курса высшей алгебры.

Определение 8. *Множество $X = \{x\}$ назовем* **линейным пространством,** *если выполнены следующие условия:*

1) для любых двух элементов $x, y \in X$ однозначно определен элемент z такой, что $z = x + y$, называемый их *суммой,* причем:
а) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
б) $x + y = y + x$;
в) существует нулевой элемент 0, такой, что для любого $x \in X$ имеем $x + 0 = x$;
г) для всякого $x \in X$ существует обратный элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = 0$;
2) для любого вещественного числа α и любого $x \in X$ определен элемент $\alpha x \in X$ (произведение элемента $x \in X$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$), причем:
а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
б) $1 \cdot x = x$;
3) операции сложения и умножения связаны свойством дистрибутивности:
а) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
б) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Примерами линейных пространств являются n-мерное векторное пространство, пространство непрерывных функций $C[a, b]$.

Элементы линейного пространства называются **векторами.**

Определение 9. *Линейное пространство X называется* **нормированным,** *если для любого вектора x определена его норма $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\|0\| = 0$;
2) для любого $x \neq 0$ имеем $\|x\| > 0$;
3) для всякого вещественного числа α имеем $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
4) для любых элементов $x, y \in X$ справедливо неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Заметим, что пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, является нормированным пространством с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Утверждение. *Функция $\rho(x, y) = \|x - y\|$, определенная на декартовом квадрате X^2, где X — нормированное пространство, является метрикой на пространстве X.*

Доказательство. Покажем, что функция $\rho(x, y)$ является метрикой. Для этого надо проверить, что функция $\rho(x, y)$: 1) неотрицательна; 2) симметрична и 3) удовлетворяет неравенству треугольника.

Действительно, имеем:

1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ и $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x)$;
3) пусть $a = x - z$, $b = z - y$, тогда имеем

$$\rho(x, y) = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| = \|x - z\| + \|z - x\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Утверждение доказано.

Определение 10. *Полное нормированное пространство называется* **банаховым** *пространством.*

Теперь мы переходим к определению **гильбертова** пространства. Для этого нам потребуется определение скалярного произведения. Пусть на множестве X задана структура линейного пространства. Определим функцию $f(a, b)$ на декартовом квадрате X^2, т.е. на множестве пар (a, b), где $a \in X$, $b \in X$. Пусть далее функция $f(a, b)$ обладает следующими свойствами.

1^0. Для любого элемента $a \in X$ имеем $f(a, a) > 0$ при $a \neq 0$ (положительность).

2^0. Для любых элементов $a, b \in X$ имеем $f(a, b) = f(b, a)$ (симметричность).