3^0. Для любых элементов $a, b, c \in X$ имеем $f(a, b+c) = f(a,b)+f(a,c)$ (аддитивность).

4^0. Для любых элементов $a, b \in X$ и любого вещественного числа λ справедливо равенство $f(\lambda a, b) = f(a, \lambda b) = \lambda f(a,b)$ (однородность).

Функцию $f(a,b)$ со свойствами 1^0 – 4^0 называют **скалярным произведением.** Будем записывать ее просто как (a, b).

Оказывается, что функция $\sqrt{(a,a)} = ||a||$ является нормой, и само пространство X с этой нормой, таким образом, является **нормированным.**

В самом деле, неотрицательность и однородность функции $\sqrt{(a,a)}$ очевидна. Осталось проверить неравенство треугольника. Сначала докажем **неравенство Коши:**

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y).$$

Положим $x_1 = \frac{x}{||x||}$, $y_1 = \frac{y}{||y||}$. Тогда последнее неравенство следует из того, что $|(x_1,y_1)| \le 1$. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $(x_1, y_1) \ge 0$, и тогда имеем

$$0 \le (x_1 - y_1, x_1 - y_1) = (x_1, x_1) + (y_1, y_1) - 2(x_1, y_1) = 2 - 2(x_1, y_1),$$

откуда получим $(x_1, y_1) \le 1$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь **неравенство треугольника:**

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \le \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}.$$

Используя неравенство Коши, имеем

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + 2(x,y) \le$$

$$\le ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| = (||x|| + ||y||)^2.$$

Полное метрическое пространство X с метрикой $\rho(x,y) = ||x-y||$ называется **гильбертовым** пространством. Следовательно, гильбертово пространство — частный случай банахова пространства X с нормой $||x|| = \sqrt{(x,x)}$. Конечномерное гильбертово пространство называется **евклидовым** пространством. Рассмотрением этих пространств мы и ограничимся, и в дальнейшем более подробно будем изучать метрические пространства.

Лекция 19

§ 2. ХАУСДОРФОВОСТЬ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В ЕСТЕСТВЕННОЙ ТОПОЛОГИИ

Сначала введем понятие открытого множества в метрическом пространстве.

Определение 1. *При любом $\varepsilon > 0$* **открытым шаром** *$O(a,\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке a в метрическом пространстве (X,ρ) называется множество, состоящее из всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию*

$$\rho(a,x) < \varepsilon.$$

Определение 2. *Шар $O(a,\varepsilon)$ называется также* **ε-окрестностью** *точки a.*

Определение 3. *Множество точек $K(a,\varepsilon)$, определяемое условием $\rho(a,x) \le \varepsilon$, называется* **замкнутым** *шаром радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.*

Заметим, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ имеем

$$O(a,\varepsilon_1) \subset O(a,\varepsilon_2), \; K(a,\varepsilon_1) \subset K(a,\varepsilon_2).$$

Определение 4. *Точка $a \in M \subset X$ называется* **внутренней** *точкой множества M, если она имеет ε-окрестность, целиком составленную из точек множества M.*

Определение 5. *Множество M называется* **открытым,** *если любая его точка является внутренней.*

Пример. **Для всякой точки $a \in X$** любая ее ε-окрестность будет открытым множеством.

Действительно, если точка $y \in O(a,\varepsilon)$, то имеем $\rho_0 = \rho(a,y) < \varepsilon$. Возьмем ε_1 - окрестность точки y, где $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon-\rho_0}{2}$. Тогда эта окрестность целиком принадлежит множеству $O(a,\varepsilon)$, так как для всякой точки $z \in O(y,\varepsilon_1)$ из неравенства треугольника имеем

$$\rho(a,z) \le \rho(a,y) + \rho(y,z) < \rho_0 + \frac{\varepsilon - \rho_0}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\rho_0}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\rho(a,z) < \varepsilon$, следовательно, точка $z \in O(a,\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Докажем несколько свойств открытых и замкнутых множеств.

Утверждение 1. *Пересечение двух открытых в X множеств M_1 и M_2 — открытое множество.*

Доказательство. Пусть $x \in M_1 \cap M_2$, тогда $x \in M_1$, $x \in M_2$. Поскольку M_1 и M_2 — открытые множества, найдется ε_1-окрестность точки x, содержащаяся в M_1, и найдется ε_2-окрестность точки x, содержащаяся в M_2. Возьмем $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогда ε-окрестность точки x принадлежит и множеству M_1, и множеству M_2, т.е. ε-окрестность точки x содержится в $M_1 \cap M_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Объединение V любого числа открытых множеств M является открытым множеством.*

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in V$. Тогда существует множество $M \subset V$ такое, что $x \in V$, и точка x — внутренняя точка множества M. Следовательно, существует ε-окрестность точки x, целиком содержащаяся в M, а значит, содержащаяся в V, что и требовалось доказать.

Итак, введенные нами открытые множества образуют топологию, которую называют **естественной топологией** метрического пространства. Это пространство будет и хаусдорфовым. Действительно, пусть x, y — любые точки метрического пространства X и $x \neq y$, $\rho(x, y) = \rho_0 > 0$, тогда окрестности $O(x, \frac{\rho_0}{3})$ и $O(y, \frac{\rho_0}{3})$ этих точек, согласно неравенству треугольника, не пересекаются. Если бы существовал элемент $z \in O(x, \frac{\rho_0}{3}) \cap O(y, \frac{\rho_0}{3})$, то

$$\rho_0 = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\rho_0}{3} + \frac{\rho_0}{3} = \frac{2\rho_0}{3},$$

т.е. $\rho_0 = 0$, но это не так.

§ 3. ВНУТРЕННИЕ, ВНЕШНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1. *Любое открытое множество σ, содержащее точку x, называется* **окрестностью** *точки x.*

Определение 2. *Всякое множество $\varkappa$ метрического пространства X, дополнение которого $\sigma = X \backslash \varkappa$ — открыто, называется* **замкнутым.**

Определение 3. Внешней *точкой множества A называется всякая внутренняя точка его дополнения $B = X \setminus A$.*

Определение 4. *Точка z называется* **граничной** *точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой этого множества.*

Множество $\{z\}$ всех граничных точек A называется **границей** и обозначается через ∂A.

Утверждение 1. *Пусть $B = X \setminus A$. Тогда $\partial A = \partial B$, т.е. множества A и B имеют общую границу.*

Действительно, если z — граничная точка множества A, то любая ее окрестность содержит как точки из множества A, так и точки из множества B, а потому z — граничная точка множества B. И наоборот, если $z \in \partial B$, то $z \in \partial A$. Следовательно, границы множеств A и B совпадают, т.е. $\partial A = \partial B$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Если множество A — замкнуто, то $\partial A \subset A$.*

Действительно, в силу того, что множество $B = X \setminus A$ — открыто, точки его границы ∂B не принадлежат B, а значит, они принадлежат его дополнению, т.е. множеству A и $\partial B \subset A$, но так как $\partial A = \partial B$, то $\partial A \subset A$, что и требовалось доказать.

Определение 5. а) *Точка a называется* **предельной** *точкой множества A, если в любой ε-окрестности точки a содержится хотя бы одна точка $x \in A$ такая, что $x \neq a$.*

б) *Точка a называется* **предельной** *точкой множества A, если существует последовательность точек $\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq a$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Утверждение 3. *Определения* а) *и* б) *эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из а) следует б). Для этого нам надо построить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a, $x_n \neq a$. Строим ее так. Точку $x_1 \in A$ выбираем произвольно в 1-окрестности точки a, точку x_2 — в $1/2$-окрестности точки a и т.д. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ вне любой ε-окрестности точки a содержится не более $n_0 = n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ точек последовательности $\{x_n\}$, т.е. точка a является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Докажем теперь, что из б) следует а). Поскольку последовательность $\{x_n\}$ бесконечна и вне любой окрестности точки a лежит лишь конечное число членов последовательности, в ней содержится хотя бы один член этой последовательности, что и требовалось доказать.

Определение 6. *Если точка $x \in A$, но не является предельной точкой множества A, то она называется* **изолированной** *точкой множества A.*

Теперь заметим, что в определении сходимости в полном метрическом пространстве последовательности $\{x_n\}$ к точке a не обязательно требовать, чтобы $\{x_n\}$ была фундаментальной, так как, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon/2$, то тогда для любых $n_1, n_2 > n_0$ имеем

$$\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \le \rho(x_{n_1}, a) + \rho(x_{n_2}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Докажем еще одно простое утверждение.

Утверждение 4. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a, то a — единственная ее предельная точка.*

Действительно, пусть b — другая предельная точка. Тогда $\rho(a,b) = \rho_0 > 0$. Возьмем $\rho_0/2$-окрестность точки a. Вне ее находится лишь конечное число точек последовательности. Тогда внутри $\rho_0/2$-окрестности точки b будет находиться лишь конечное число членов этой последовательности, быть может, ни одного. Противоречие. Следовательно, последовательность, имеющая предел, имеет единственную предельную точку, что и требовалось доказать.

Докажем теперь критерий замкнутости множества.

Теорема. а) *Множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

б) *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда его граница ∂A содержится в нем, т.е. $\partial A \subset A$.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение а).

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in A$. Надо доказать, что $a \in A$. Точка a не может быть внешней для множества A, так как в любой ее окрестности есть точки из A. Значит, она является либо внутренней, либо граничной, т.е. $a \in A$ или $a \in \partial A \subset A$, и в обоих случаях точка a принадлежит множеству A. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество A содержит все свои предельные точки. Нам надо доказать, что его дополнение $B = X \setminus A$ является открытым множеством, т.е. любая точка $x \in B$ является внутренней точкой множества B. Если $x \in B$, то точка x или внутренняя точка B, или граничная точка B. В первом случае доказывать нечего. Разберем второй случай $x \in B$ и $x \in \partial B$, т.е. x — граничная точка множества B. Но с одной стороны эта точка не принадлежит A, так как $x \in B$, а с другой стороны — точка $x \in \partial B = \partial A$, т.е. в любой окрестности точки x есть точка из множества A, и потому $x \in A$ по условию теоремы, но это невозможно, так как $x \in B$, по нашему предположению, и $A \cap B = \varnothing$. Следовательно, точка $x \notin \partial B$, т.е. имеет место только первый случай: x — внутренняя точка множества B, что и требовалось доказать.

Докажем теперь утверждение б). *Необходимость.* Ранее мы уже доказали, что если A — замкнуто, то $\partial A \subset A$.

Достаточность. Нам надо доказать, что если $\partial A \subset A$, то множество $B = X \setminus A$ — открыто. Мы знаем, что $\partial A = \partial B$, и поэтому $\partial B \subset A$, откуда $\partial B \cap B = \varnothing$. Это значит, что граничные точки множества B в него не входят, а входят только внутренние точки B, т.е. точки множества B — внутренние. Следовательно, множество B — открыто, а значит, множество A — замкнуто.

Теорема доказана полностью.

§ 4. ЛЕММА О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЯГИВАЮЩИХСЯ ШАРОВ. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим два свойства полных метрических пространств. Первое — лемма о последовательности стягивающихся шаров.

Л е м м а. *Пусть $K(x_1, r_1) \supset K(x_2, r_2) \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров в полном метрическом пространстве X, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Тогда существует единственная точка x_0, принадлежащая всем шарам.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что последовательность центров шаров $\{x_n\}$ будет фундаментальной. Действительно, зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всякого $n > n_0$ имеем $r_n < \varepsilon$, а потому при любых $n_1 > n_2 > n_0$ согласно включению $K(x_{n_1}, r_{n_1}) \supset K(x_{n_2}, r_{n_2})$ имеем $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \le r_{n_1} < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет определению фундаментальной последовательности.

Так как $\{x_n\}$ — фундаментальна, то в силу полноты пространства X существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$, причем x_0 является предельной точкой для каждого шара, а поскольку они замкнуты, то для любого натурального числа n имеем $x_0 \in K(x_n, r_n)$.

Покажем, что точка x_0 является единственной точкой, принадлежащей одновременно всем шарам. Пусть это не так, т.е. найдется точка $y_0 \in \cap K(x_n, r_n)$, $\rho(x_0, y_0) = \rho$. Очевидно, существует n такое $r_n < \frac{\rho}{2}$. Из неравенства треугольника получим

$$\rho = \rho(x_0, y_0) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_n, y_0) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.$$

Противоречие. Следовательно, x_0 является единственной общей точкой для всех шаров. Лемма доказана.

Определение. *Пусть X — полное метрическое пространство, и пусть $f : X \to X$ — отображение этого пространства в себя, причем существует вещественное число α с условием $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых $a, b \in X$ имеем*

$$\rho(f(a), f(b)) \le \alpha\rho(a, b).$$

Тогда отображение f называется **сжимающим.**

Докажем теперь **принцип сжимающих отображений.**

Т е о р е м а. *Если $f : X \to X$ — сжимающее отображение, то существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Точка x_0 называется **неподвижной** точкой сжимающего отображения f.

Доказательство. Пусть x_1 — любая точка, принадлежащая X, $x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, пусть $\rho_n = \rho(x_n, x_{n+1})$. Тогда

$$\rho_n = \rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) = \alpha\rho_{n-1}.$$

Следовательно, $\rho_n \leq \alpha^{n-1}\rho_1$. Отсюда, используя неравенство треугольника, получим

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \rho_n + \rho_{n+1} + \dots + \rho_{n+m-1} \leq$$

$$\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^n + \dots + \alpha^{n+m-2})\rho_1 < \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho_1.$$

Поскольку $0 < \alpha < 1$, при $n \to \infty$ имеем $\alpha^{n-1} \to 0$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при любом $n > n_0$ и любом $m \geq 1$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$, что и означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Так как X — полное метрическое пространство, то существует точка x_0, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Теперь докажем, что $f(x_0) = x_0$. От противного. Пусть $f(x_0) = y_0 \neq x_0$ и $\rho(x_0, y_0) = h > 0$. Возьмем число $n_0 = n_0(h/2)$ такое, что для любого $n > n_0$ имеем $\rho(x_n, x_0) < h/2$. Тогда

$$\rho(x_{n+1}, y_0) = \rho(f(x_n), f(x_0)) \leq \rho(x_n, x_0) < \rho(x_n, x_0).$$

Следовательно,

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, y_0) < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h = \rho(x_0, y_0),$$

что при $h > 0$ невозможно. Итак, x_0 — неподвижная точка отображения f. Она будет единственной неподвижной точкой, так как если a и b — неподвижные точки, т.е. $f(a) = a$, $f(b) = b$, то

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq \alpha\rho(a, b) < \rho(a, b),$$

что невозможно. Теорема доказана полностью.

Лекция 20

§ 5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение. *Пусть заданы два метрических пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), и пусть определено отображение $F : X \to Y$. Тогда отображение F называется* **непрерывным в точке** x_0, *если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x с условием $\rho_X(x, x_0) < \delta$ имеет место неравенство $\rho_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, т.е. в пространстве Y любая ε-окрестность $O_Y(F(x_0), \varepsilon)$ точки $F(x_0) \in Y$ содержит целиком образ некоторой δ-окрестности этой точки при отображении F, а именно:*

$$F(O_X(x_0, \delta)) \subset O_Y(F(x_0), \varepsilon).$$

Пример. Сжимающее отображение $F : X \to X$ является непрерывным. В этом случае достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Определим базу множеств $x \to x_0$ для точек метрического пространства X как множество всех открытых δ-окрестностей точки x_0. Тогда определение непрерывности выглядит так: $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, где $x, x_0 \in X$, $F(x), F(x_0) \in Y$.

Заметим также, что определение предела по базе множеств B отображения $F : X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y будет иметь вид: точка $y_0 \in Y$ называется пределом отображения $F : X \to Y$ по базе B, если для всякого $\epsilon > 0$ найдется окончание $b = b(\epsilon) \in B$ такое, что для всякой точки $x \in b$ имеем $\rho_Y(F(x), y_0) < \epsilon$. Для числовых функций остается прежнее определение предела функции $f : X \to \mathbb{R}$ по базе B со всеми доказанными ранее свойствами предела.

Докажем теперь теорему о непрерывности сложного отображения.

Т е о р е м а 1. *Пусть отображения $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$ таковы, что отображение F непрерывно в точке $x_0 \in X$, а отображение G непрерывно в точке $y_0 = F(x_0) \in Y$. Тогда композиция отображений F и G, т.е. отображение $H : X \to Z$, где $H(x) = G(F(x))$, является непрерывной функцией в точке x_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $z_0 = G(y_0)$. Тогда справедливы равенства $H(x_0) = G(F(x_0)) = G(y_0) = z_0$. Так как отображение G непрерывно в точке y_0, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $y \in O_Y(y_0, \delta)$ имеем $G(y) \in O_Z(z_0, \varepsilon)$.

Далее, в силу непрерывности отображения F в точке x_0 найдется $\delta_1 = \delta_1(\delta(\varepsilon)) > 0$, такое, что для всякого $x \in O_X(x_0, \delta_1)$ имеем $F(x) \in O_Y(y_0, \delta) = O_Y(y_0, \delta(\varepsilon))$.

Отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta_1 = \delta_1(\delta(\varepsilon)) > 0$ такое, что при любом $x \in O_X(x_0, \delta_1)$ имеем $H(x) = G(F(x)) \in O_Z(z_0, \varepsilon)$, т.е. отображение $H(x)$ непрерывно в точке x_0, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве X сходится к точке x_0, а отображение $F : X \to Y$ непрерывно в точке x_0. Тогда имеем*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0), \text{ т.е. } F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности отображения F для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in O_X(\delta)$ имеем $F(x) \in O_Y(F(x_0), \varepsilon)$.

Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то можно указать $n_0 = n_0(\delta) = n_0(\delta(\varepsilon))$ такое, что для любого $n > n_0$ имеем $x_n \in O_X(x_0, \delta)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Задачи. 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена во всех точках квадрата $K \in \mathbb{R}^2$, и пусть для любого фиксированного y функция $g(x) = f(x, y)$ непрерывна для каждой точки x. Тогда внутри квадрата K найдется точка непрерывности $f(x, y)$ как функции двух переменных.

2. Пусть функция $f(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^2$, и пусть для каждого фиксированного значения одной переменной она является многочленом по другой переменной. Тогда функция $f(x, y)$ является многочленом от двух переменных.

3. Построить замкнутое множество A, содержащееся внутри замкнутого единичного квадрата на плоскости xOy, которое обладает следующим свойством: для любого линейного замкнутого множества L на отрезке $[0, 1] \subset Ox$ найдется точка $y_L \in [0, 1] \subset Oy$ такая, что проекция на ось Ox множества точек плоскости, лежащих на пересечении с горизонтальной прямой $y = y_L$, точно совпадает с множеством L.

§ 6. ПОНЯТИЕ КОМПАКТА. КОМПАКТЫ В $\mathbb{R}^N$ И ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^N$. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТЕ

Определение 1. *Множество K в метрическом пространстве X называется* **компактом,** *если из любого покрытия открытыми множествами этого компакта можно выделить конечное подпокрытие.*

Определение 2. *Множество B в метрическом пространстве называется* **ограниченным,** *если оно содержится в некотором шаре $O(x_0, r)$ с центром в точке x_0 и радиуса r.*

Л е м м а 1. *Компакт является ограниченным множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K обозначает компакт. Возьмем любую точку $x_0 \in K$. Тогда шары $O_n = O(x_0, n)$ в совокупности покрывают все пространство X, в том числе и K. В силу компактности K из них можно выделить конечное подпокрытие

$$\{O_{t_1} \subset O_{t_2} \subset \cdots \subset O_{t_s},\ t_1 < t_2 < \cdots < t_s;\ K \subset O_{t_s}\},$$

а это означает, что компакт K является ограниченным множеством. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть K — компакт. Тогда любая бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset K$ имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассуждать от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ не имеет предельных точек, принадлежащих K. Тогда любую точку $x \in K$ можно окружить своей ε-окрестностью $O(x, \varepsilon)$, внутри которой не будет точек из $\{x_n\}$, кроме, может быть, самой точки x. Получим покрытие компакта K открытыми множествами. Выберем из него конечное подпокрытие. Но тогда получим, что точками K, принадлежащими последовательности $\{x_n\}$, могут быть только центры выбранных ε-окрестностей, а их конечное число. Следовательно, множество точек последовательности $\{x_n\}$ — конечно. Противоречие. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Компакт K является замкнутым множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что компакт K содержит все предельные точки. Действительно, пусть x_0 — любая предельная точка K. Тогда можно указать последовательность $\{x_n\} \subset K$ такую, что при $n \neq m$ имеем $x_n \neq x_m$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Отсюда по лемме 2 получим, что $x_0 \in K$. Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к описанию компактов в n-мерном пространстве и доказательству полноты пространства $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 1. *Любой замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$, т.е. множество точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с условием $a_s \leq x_s \leq x_s + l$, $s = 1, \ldots, n$, является компактом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассматривать только случай $\mathbb{R}^2$, так как общий случай $\mathbb{R}^n$ принципиальных отличий не имеет. Итак, пусть h — замкнутый квадрат покрыт бесконечной системой открытых множеств $\{U\}$. Надо доказать, что из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Докажем это утверждение от противного. Разделим h на 4 равных квадрата прямыми, проходящими через середины его сторон, параллельно осям координат. Так как квадрат h не допускает конечного подпокрытия, то, по крайней мере, один из четырех новых замкнутых квадратов не допускает конечного подпокрытия. Тогда этот квадрат делим на 4 равных квадрата и т.д.

Мы получим систему вложенных квадратов. Их проекции на любую из двух осей образуют систему стягивающихся отрезков, которая имеет единственную общую точку, т.е. существует точка x_0 на оси Ox, и аналогично, точка y_0 на оси Oy такие, что x_0 принадлежит проекциям всех вложенных квадратов на ось Ox, а y_0 — проекциям на ось Oy. Но тогда точка $A = (x_0, y_0)$ принадлежит всем квадратам. Кроме того, она покрыта каким-то открытым множеством U_0 из покрытия $\{U\}$. Следовательно, найдется ε-окрестность $O(A, \varepsilon) \subset U_0$, целиком накрывающая некоторый квадрат из построенной системы вложенных квадратов. В частности, таким может быть квадрат K_0 с длиной стороны меньшей, чем $\varepsilon/\sqrt{2}$. Но тогда квадрат K_0 будет покрыт всего лишь одним множеством U_0. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть для любых двух точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ определено скалярное произведение (a, b) и метрика $\rho(a, b)$ задается равенством $\rho(a, b) = \sqrt{(a - b, a - b)}$. Тогда метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой ρ является полным.*

Доказательство. Достаточно показать, что любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу этого пространства. Очевидно, что $\{x_n\}$ ограничена, и потому ее можно покрыть замкнутым кубом K. Поскольку K — компакт, по лемме 2 существует предельная точка $x_0 \in K$ последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, $\{x_n\}$ сходится к x_0, так как фундаментальная последовательность не может иметь более одной предельной точки. Теорема 2 доказана.

Докажем теперь критерий компактности множества в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом тогда и только тогда, когда K ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Необходимость. Если K — компакт, то по леммам 1 и 3 это множество ограничено и замкнуто.

Достаточность. Проведем доказательство от противного. Сначала в силу ограниченности K поместим его внутрь куба h. Предположим, что существует покрытие множества K открытыми множествами $\{U\}$, не допускающее конечного подпокрытия. Тогда куб h можно разбить на 2^n равных куба (аналогично разбиению теоремы 1). Далее возьмем один из получившихся кубов h_1, не допускающий конечного подпокрытия, и т.д. Последовательность кубов $\{h_n\}$ сходится к одной точке x_0, которая является предельной точкой K и потому принадлежит K. Некоторое открытое множество $U \in \{U\}$ покрывает эту точку. В силу того, что это множество открыто, оно будет покрывать и некоторый куб h_n, что противоречит построению h_n. Теорема 3 доказана.

Напомним, что числовой функцией на множестве A называется отображение $F : A \to \mathbb{R}$. Далее под термином "функция" мы будем понимать только числовые функции. Докажем несколько свойств функций, непрерывных на компакте.

Т е о р е м а 4. *Пусть $f(x)$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда:*

1) $f(x)$ — ограничена на K;

2) существуют x_1, $x_2 \in K$ такие, что

$$f(x_1) = M = \sup_{x \in K} f(x), \; f(x_2) = m = \inf_{x \in K} f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Для каждой точки $x \in K$ найдется окрестность $O(x, \delta(x))$ этой точки, в которой функция $f(x)$ ограничена. Эти окрестности образуют покрытие открытыми множествами. Выделим из него конечное подпокрытие и получим, что $f(x)$ ограничена на всем компакте K.

2) Проведем доказательство от противного. Пусть ни в какой точке функция $f(x)$ не принимает максимальное значение. Тогда функция $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ является непрерывной на компакте K. Следовательно, по утверждению 1) этой теоремы она ограничена. Отсюда имеем

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < M_1, \quad \text{или} \quad f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

т.е. число $M - \frac{1}{M_1}$ — верхняя грань значений функции $f(x)$, меньшая, чем M. Это противоречит определению числа M. В случае нижней грани значений функции $f(x)$ доказательство проводится аналогично. Теорема 4 доказана.

§ 7. СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Определение 1. *Множество A в метрическом пространстве X называется* **связным,** *если при любом его разбиении на два непустых непересекающихся подмножества A_1 и A_2 они будут иметь общую граничную точку, принадлежащую A, т.е. точку a с условиями:*

1) $a \in A$;

2) в любой ϵ-окрестности точки a есть как точки из множества A_1, так и точки из множества A_2, отличные от a.

Примерами связных множеств на плоскости являются отрезок, прямоугольник, круг.

Связное открытое множество называется **областью,** а связное множество, являющееся компактом, — **континуумом.**

Т е о р е м а 1. *Пусть A — связное множество в $\mathbb{R}^n$, функция $F(x)$ непрерывна на A, и пусть существуют точки $x_1, x_2 \in A$, $F(x_1) = a$, $F(x_2) = b$, $a < b$. Тогда для любого числа $c \in (a, b)$ существует точка $x_3 \in A$ такая, что $F(x_3) = $* с.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два множества

$$M_1 = \{x \in A | \, F(x) < c\}, \; M_2 = A \setminus M_1.$$

В силу связности множества A существует точка x_3, являющаяся граничной точкой как для множества M_1, так и для множества M_2. В каждой из окрестностей $O_n = O(x_3, 1/n)$ есть точка $a_n \in M_1$ и точка $b_n \in M_2$. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к x_3. Тогда из непрерывности функции $F(x)$ имеем:

$$F(x_3) = F(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} F(a_n) \le c,$$

$$F(x_3) = F(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} F(b_n) \ge c,$$

т.е. в точке x_3 функция $F(x)$ равна c. Теорема 1 доказана.

Глава XIV
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекция 21

§ 1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^N$

Еще раз обратим внимание на тот факт, что поскольку понятие непрерывности функции определяется как предел функции по базе, над непрерывными функциями n переменных в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$ можно совершать арифметические операции с сохранением их непрерывности с обычной оговоркой о необращении в нуль знаменателя частного $\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$. Справедливы также теоремы о неравенствах для непрерывных функций в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$ типа таких: если $f(\bar{x}_0) \geq g(\bar{x}_0)$, то в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{x}_0$ имеем $f(\bar{x}) \geq g(\bar{x})$.

Будем, как и раньше, говорить, что функция $f(\bar{x})$, заданная на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, является непрерывной на множестве $B \subset A$, если $f(\bar{x})$ непрерывна для любой точки $\bar{x} \in B$. Напомним, что для функции, непрерывной на компакте, справедливы теоремы об ограниченности функции на нем, о достижении ею точной верхней и точной нижней граней и о равномерной непрерывности, а для непрерывной функции, заданной на связном множестве, справедлив аналог теоремы о промежуточном значении.

Но кроме этих свойств есть свои специфические особенности функций многих переменных.

Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — некоторая точка из $\mathbb{R}^n$ и функция $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{a}$. Выделим одну из координат точки $\bar{a}$. Пусть это будет координата с номером s, $1 \leq s \leq n$, и обозначим через $M \subset \mathbb{R}^n$ множество всех тех точек, у которых все координаты, кроме s-й, совпадают с координатами точки $\bar{a}$. Если в качестве аргумента $\bar{x}$ рассматривать точки $\bar{x} \in M$, то мы получим функцию $\varphi(x_s)$ одной переменной x_s, $\varphi(x_s) = f(a_1, \ldots, x_s, \ldots, a_n)$. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$, то $\varphi(x_2) = a_1^2 + a_1 x_2$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $f(\bar{x})$ **непрерывна в точке** $\bar{a}$ **по переменной** x_s, *если* $\varphi(x_s)$ *непрерывнf в точке* $x_s = a_s$.

Можно дать более общее определение непрерывности функции $f(\bar{x})$ по любому направлению.

Определение 2. Направлением *в* $\mathbb{R}^n$ *называется любой единичный вектор* $\bar{e} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Множество всех точек $\bar{x}$ вида $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ называется:*

а) **открытым лучом,** *выходящим из точки $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t > 0$;*

б) **замкнутым лучом,** *— если $t \geq 0$;*

в) **прямой,** *проходящей через точку $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если t — произвольное вещественное число.*

Рассмотрим функцию $\psi(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$.

Определение 4. *Будем говорить, что* **функция** $f(\bar{x})$ **непрерывна в точке** $\bar{a}$ **по направлению** $\bar{e}$, *если $\psi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$.*

Имеет место следующее очевидное свойство. Если $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x} = \bar{a}$ как функция n переменных, то она непрерывна в точке $\bar{a}$ по любому направлению $\bar{e}$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры. 1. Пусть функция $f(x, y)$ задана следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Она непрерывна в нуле по x и по y, но разрывна в этой точке как функция двух переменных x, y.

2. Пусть функция $f(x, y)$ задана соотношениями:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Она является непрерывной по любому направлению, проходящему через точку $x = 0, y = 0$, но разрывна как функция двух переменных в этой точке.

Рассмотрим теперь отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Этому отображению однозначно соответствуют m функций $\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_m(\bar{x})$, которые представляют собой координаты точки $\bar{y} = F(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$, т.е.

$$\bar{y} = (\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_m(\bar{x})), \; y_s = \varphi_s(\bar{x}), \; s = 1, \ldots, m.$$

Утверждение. *Для непрерывности отображения $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все функции $\varphi_s(\bar{x})$ были бы непрерывны в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$.*

Доказательство непосредственно следует из определения непрерывного отображения, поскольку

$$|a_s - b_s| \leq \sqrt{\sum_{t=1}^{n} (a_t - b_t)^2}.$$

Переформулируем теперь теорему о непрерывности сложного отображения метрических пространств на случай функций многих переменных.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f:\mathbb{R}^n \to R^m$, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, и пусть отображение $f(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{x}=\bar{x}_0$, а функция $g(\bar{y})$ непрерывна в точке $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$. Пусть также в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$ определена сложная функция $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$. Тогда функция $h(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}=\bar{x}_0$.*

Определение 5. *Функция $F: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, называется* **равномерно непрерывной на множестве** *A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in A$ с условием $\rho(\bar{x},\bar{y}) < \delta$ имеем $|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| < \varepsilon$.*

Т е о р е м а 2. *Функция F, непрерывная на компакте K, является равномерно непрерывной на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Возьмем число $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ и для каждой точки $\bar{x} \in K$ рассмотрим окрестность $O(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}(\varepsilon_1))$ точек $\bar{y}$ с условием $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon_1$. Тогда "усеченные" окрестности $O(x, \frac{1}{2}\delta_x(\varepsilon_1))$ покрывают компакт K. По определению компакта из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. В качестве $\delta = \delta(\varepsilon)$ возьмем минимальный из конечного числа радиусов выбранных шаровых окрестностей.

Если теперь возьмем любые $\bar{x}, \bar{y}$ с условием $\rho(\bar{x},\bar{y}) < \delta$, то оказывается для точки $\bar{x}$, покрытой некоторой окрестностью $O(\bar{x}_0, \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1))$, выполняются неравенства

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon_1, \quad \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1).$$

Кроме того, имеем $\rho(\bar{x},\bar{y}) < \delta \leq \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1)$. Поэтому

$$\rho(\bar{y}, \bar{x}_0) \leq \rho(\bar{y}, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1),$$

откуда следует, что $|f(\bar{y}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon_1$. Значит,

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| + |f(\bar{x}_0) - f(\bar{y})| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ мы указали $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in K$ с условием $\rho(\bar{x},\bar{y}) < \delta$ выполнено неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$, следовательно, функция $f(\bar{x})$ — равномерно непрерывна на компакте K. Теорема 2 доказана.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^N$

Пусть числовая функция $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Приращением $\Delta f(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ *называется разность* $\Delta f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a})$. *Разность* $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$ *называется* **приращением аргумента** $\bar{x}$.

Длина вектора $\Delta\bar{x}$ обозначается через $|\Delta\bar{x}|$ и равна $\rho(\bar{x}, \bar{a})$.

Утверждение 1. *Если функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x} = \bar{a}$, то приращение ее $\Delta f(\bar{x})$ стремится к нулю при $\Delta\bar{x}$, стремящемся к нулю, т.е. $\Delta f(\bar{x}) = o(1)$.*

Доказательство очевидно следует из определения и свойств предела функции по базе множеств.

Определение 2. *Линейная функция от приращения аргумента $\Delta\bar{x}$ называется* **дифференциалом** $df(\bar{x})$ **функции** $f(\bar{x})$ **в точке** $\bar{x} = \bar{a}$, *если приращение $\Delta f(\bar{x})$ при $\Delta\bar{x} \to 0$ можно представить в виде*

$$\Delta f(\bar{x}) = df(\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|).$$

Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ **дифференцируема в точке** $\bar{x} = \bar{a}$, *если существует дифференциал $df(\bar{x})$ функции в точке $\bar{x} = \bar{a}$.*

Утверждение 2. *Если функция дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство очевидно следует из того, что приращение $\Delta f(\bar{x})$ стремится к нулю при $\Delta\bar{x} \to 0$.

Итак, подчеркнем еще раз, что дифференциалом $df(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ называется линейная или главная часть приращения функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Поскольку $df(\bar{x})$ — линейная функция, ее можно записать в виде

$$df(\bar{x}) = A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) = \sum_{s=1}^{n} A_s \Delta x_s,$$

где A_s — некоторые вещественные числа и $\Delta x_s = x_s - a_s$. Если $f(\bar{x}) = x_s$, то $df(\bar{x}) = dx_s = \Delta x_s$.

Теорема 1. *Пусть $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$, тогда все координатные функции $\varphi_s(x_s) = f(a_1, \ldots, x_s, \ldots, a_n)$ дифференцируемы в точках $x_s = a_s$, $s = 1, \ldots, n$, причем $A_s = \varphi_s'(a_s)$.*

Доказательство. В формуле для приращения $\Delta f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ через его дифференциал положим $x_r = a_r$ при $r \neq s$. Получим

$$\Delta f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = A_s \Delta x_s + o(|\Delta x_s|).$$

Тогда согласно определению функции $\varphi_s(x_s)$ будем иметь

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \varphi_s(x_s) - \varphi_s(a_s) = A_s\Delta x_s + o(|\Delta x_s|),$$

т.е.

$$A_s = \lim_{\Delta x_s \to 0} \frac{\varphi_s(x_s) - \varphi_s(a_s)}{\Delta x_s} = \varphi_s'(a_s).$$

Определение 3. *Производная $\varphi_s'(a_s)$, когда она существует, называется* **частной производной функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ по s-й переменной** *и обозначается так:*

$$\varphi_s'(a_s) = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_s} = \left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}}.$$

С л е д с т в и е. *Дифференциал функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ однозначно записывается в виде*

$$df(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Пример. Пусть $f(x, y) = x^2 + xy$. Тогда

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y, \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x, df(x,y) = (2x + y)dx + xdy.$$

Итак, необходимым условием дифференцируемости функции в точке является существование всех ее частных производных в этой точке. Докажем теперь одно достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Т е о р е м а 2. *Пусть в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ существуют все ее частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}$, $s = 1, \dots, n$, и эти частные производные непрерывны в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Тогда функция $f(\bar{x})$ является дифференцируемой в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Только для краткости записи будем считать, что $n = 2$. Приращение $\Delta f(x, y)$ функции $f(x, y)$ в точке (a, b) можно записать так:

$$\Delta f(x, y) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) =$$

$$= (f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)) + (f(a, b + \Delta y) - f(a, b)).$$

К каждой из двух разностей в скобках можно применить формулу конечных приращений Лагранжа, поскольку в рассматриваемой окрестности точки (a,b) функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные по x и по y. Получим

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a+\xi\Delta x, b+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(a, b+\eta\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

где ξ, η — некоторые постоянные, $0 < \xi, \eta < 1$.

Далее, в силу непрерывности частных производных при $\Delta x \to 0$ имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial f(a+\xi\Delta x, b+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} + o(1),$$

$$\frac{\partial f(a, b+\eta\Delta y)}{\partial y} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} + o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Поскольку

$$|\Delta x| \le |\Delta\bar{x}|,\ |\Delta y| \le |\Delta\bar{x}|, \Delta\bar{x} = (\Delta x, \Delta y),$$

имеем

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}dy + o(|\Delta\bar{x}|) = df(\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|),$$

т.е. функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x,y) = (a,b)$. Теорема доказана.

Приведем пример непрерывной, имеющей частные производные, функции в окрестности точки $(0,0)$, но недифференцируемой в этой точке: $z = \sqrt{|xy|}$.

Частные производные этой функции, очевидно, существуют при $x^2 + y^2 \ne 0$. По определению они существуют в точке $(0,0)$:

$$\frac{\Delta z(0,0)}{\Delta x} = \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\Delta z(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

следовательно, $z'_x(0,0) = 0$, $z'_y(0,0) = 0$.

Если же $\Delta x = \Delta y > 0$, то приращение функции $z(x,y)$ в точке $(0,0)$ равно Δx, но по определению дифференциала оно должно быть $o(\Delta x)$.

Таким образом, функция $z = \sqrt{|xy|}$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Лекция 22

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Т е о р е м а. *Пусть $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}))$ есть отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, определенное в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{a}$ и дифференцируемое в этой точке. Пусть, далее, для всякого $\epsilon > 0$ при отображении φ образ некоторой δ-окрестности $O(\bar{a}, \delta)$ содержится в ϵ-окрестности точки $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$. Пусть, наконец, для любой точки $\bar{y} \in O(\bar{b}, \epsilon)$ определена числовая функция $f(\bar{y})$, которая является дифференцируемой в точке $\bar{b}$. Тогда сложная функция $h(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{x}))$ является дифференцируемой в точке $\bar{x} = \bar{a}$, причем имеют место равенства*

$$\frac{\partial h}{\partial x_s} = \frac{\partial h}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial h}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_s}, \ s = 1, \dots, n.$$

Здесь частные производные по переменной x_s рассматриваются в точке $\bar{x} = \bar{a}$, а частные производные по $\bar{y}_l$, $l = 1, \dots, m$ — в точке $\bar{y} = \bar{b}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду дифференцируемости функции $f(\bar{y})$ в точке $\bar{y} = \bar{b}$ приращение функции Δf при произвольном приращении аргумента $\Delta\bar{y} = \bar{y} - \bar{b}$ можно представить так:

$$\Delta f = df + o(|\Delta\bar{y}|),$$

где

$$df = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_l} \Delta y_l.$$

Подставим вместо Δy_l приращение $\Delta\varphi_l$ функции $\varphi_l(\bar{x})$ соответствующее приращению $\Delta\bar{x}$ аргумента $\bar{x}$. Тогда слева в этой формуле мы получим $\Delta h(\bar{x})$ и она принимает вид

$$\Delta h(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_l} \Delta\varphi_l(\bar{x}) + o(|\Delta\varphi(\bar{x})|).$$

В силу дифференцируемости функций $\varphi_l(\bar{x})$ имеем

$$\Delta\varphi_l(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s} \Delta x_s + o(|\Delta\bar{x}|), \quad l = 1, \dots, m.$$

Частные производные функций $\varphi_l(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ — это конкретные вещественные числа. Поэтому существует число $M > 0$, такое, что они по абсолютной величине не превосходят M. Тогда имеем

$$|\Delta\varphi_l(\bar{x})| \leq 2Mn|\Delta\bar{x}|, \; |\Delta\varphi| \leq 2Mn^2|\Delta\bar{x}|.$$

Отсюда найдем

$$o(|\Delta\varphi(\bar{x})|) = o(|\Delta\bar{x}|).$$

Подставляя теперь значения $\Delta\varphi_l(\bar{x})$ в формулу для $\Delta h(\bar{x})$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1 (инвариантность формы первого дифференциала). *Если в выражение для первого дифференциала $df(\bar{y})$ вместо независимого приращения Δy_s подставить дифференциал функции $y_s = \varphi_s(\bar{x})$, то полученное выражение будет дифференциалом сложной функции $h(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{x}))$. Другими словами, форма первого дифференциала функции не изменится, если независимые переменные оказываются зависимыми функциями.*

Доказательство. Утверждение следствия — простая переформулировка утверждения теоремы.

Следствие 2 (правила дифференцирования). *Справедливы следующие формулы:*

а) $d(cu) = cdu \quad \forall c \in \mathbb{R}$;

б) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

в) $d(uv) = udv + vdu$;

г) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ · *при* $v(\bar{x}_0) \neq 0$.

Доказательство. Ограничимся доказательством только свойства в). Пусть $z = z(u, v) = uv$, тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = vdu + udv.$$

В случае, если u и v являются функциями от других независимых переменных, то воспользуемся свойством инвариантности формы первого дифференциала (следствие 1). Свойство в) доказано.

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть задано направление $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, $|\bar{e}| = 1$, и $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ — направления векторов осей координат $Ox_1, \ldots, Ox_n$. Тогда, очевидно, если α_s есть угол между $\bar{k}_s$ и $\bar{e}$, то

$$e_s = (\bar{e}, \bar{k}_s) = |\bar{e}| \cdot |\bar{k}_s| \cos\alpha_s = \cos\alpha_s.$$

В силу этого определения числа $e_1, \ldots, e_n$ называются **направляющими косинусами** направления $\bar{e}$.

Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемая функция в точке $\bar{x} = \bar{a}$, и $\bar{e}$ — некоторое направление. Рассмотрим сложную функцию $h(t) = f(\bar{a}+t\bar{e})$. Она является функцией от одной переменной t, и в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции при $t = 0$ справедливо равенство

$$dh(t) = h'(0)dt = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot e_s \, dt.$$

Тогда имеем

$$h'(0) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot e_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot \cos \alpha_s.$$

Определение 1. *Эта величина* $h'(0)$ *называется* **производной функции** $f(\bar{x})$ **по направлению** $\bar{e}$ *в точке* $\bar{a}$. Обозначение:

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial e}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = h'(0).$$

Определение 2. *Вектор*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \nabla f$$

называется **градиентом функции** $f(\bar{x})$ *в точке* $\bar{x} = \bar{a}$ *и обозначается так:*

$$\nabla f = \operatorname{grad} f.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = (\bar{e}, \operatorname{grad} f) = (\bar{e}, \nabla f),$$

где

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

называется оператором “набла”.

Отметим некоторые свойства производной по направлению.

1^0. Максимальное значение производной функции $f(\bar{x})$ по направлению равно длине вектора градиента и достигается при $\bar{e} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

2^0. Производная по направлению равна нулю, если вектор градиента равен нулю или он ортогонален вектору направления.

3^0. Минимальное значение производной функции $f(\bar{x})$ по направлению равно $-|\operatorname{grad} f|$, если $\bar{e} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

Отсюда видно, что скорость возрастания функции в направлении градиента — наибольшая.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Для простоты изложения будем рассматривать функции двух переменных.

Определение 1. *Поверхностью P в $\mathbb{R}^3$ называется* **график всякой непрерывной функции** $z = f(x, y)$, *заданной в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Другими словами, поверхность P — это множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, где координата $z \in \mathbb{R}$ и точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ связаны соотношением $z = f(x, y)$.*

Напомним, что под областью понимают связное открытое множество.

Определение 2. *Говорят, что поверхности $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$* **касаются** *друг друга в точке (a, b, c), если $c = f_1(a, b) = f_2(a, b)$ и разность*

$$r(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$$

является величиной $o(|\bar{x} - \bar{a}|)$ при $|\bar{x} - \bar{a}| \to 0$.

График линейной функции $z = kx + ly + m$, $k, l, m \in \mathbb{R}$ является плоскостью в $\mathbb{R}^3$.

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in O(\bar{a}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ — дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a} = (a_1, a_2)$ и $z_0 = f(\bar{a})$. Тогда плоскость Π, задаваемая линейным уравнением вида*

$$z - z_0 = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_2}(x_2 - a_2),$$

касается поверхности $P: z = f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим плоскость Π как график линейной функции $g(\bar{x})$, где

$$g(\bar{x}) = z_0 + df(\bar{x}).$$

Поскольку функция $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$, имеем

$$f(\bar{x}) - g(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|) - z_0 - df(\bar{x}) = o(|\Delta\bar{x}|).$$

Следовательно, исходя из определения поверхности, Π и P касаются друг друга. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится понятие нормали к поверхности.

Определение 3. Нормалью *к поверхности $P: z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) называется прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0), параллельно вектору $(f'_x, f'_y, -1)$.*

Лекция 23

§ 6. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $f(\bar{x})$ имеет в некоторой ε-окрестности $O(\bar{a},\varepsilon)$ все первые частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}$, $s=1,\dots,n$. Эти частные производные сами являются функциями от n переменных и могут иметь частные производные, т.е. можно определить следующие величины

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}=f''_{x_s x_r}=\left(f'_{x_s}\right)'_{x_r}, \quad s,r=1,\dots,n.$$

Эти величины называются **частными производными второго порядка.** Если $s\neq r$, то они называются **смешанными производными.**

Имеют место следующие теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

Теорема 1 (теорема Шварца). *Пусть функция $f(\bar{x})$ в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}$ имеет смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, причем они непрерывны в точке $\bar{x}=\bar{a}$. Тогда в точке $\bar{x}=\bar{a}$ эти производные равны между собой, т.е.*

$$f''_{x_2 x_1}(\bar{a})=f''_{x_1 x_2}(\bar{a}).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $n=2$ и $f(\bar{x})=f(x_1,x_2)$. Положим

$$\Delta^2 f=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2),$$

$$\varphi(x)=f(x,a_2+h_2)-f(x,a_2).$$

Применяя дважды формулу Лагранжа конечных приращений, получим

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1\varphi'(a_1+\theta_1 h_1)=$$

$$=h_1\left(f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)-f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2)\right)=$$

$$=h_1 h_2 f''_{x_1 x_2}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+\theta_2 h_2).$$

В силу непрерывности функции $f''_{x_1 x_2}(x_1,x_2)$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ имеем

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1 h_2 (f''_{x_1 x_2}(a_1,a_2)+o(1)).$$

С другой стороны,

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=\psi(a_2+h_2)-\psi(a_2),$$

где $\psi(x)=f(a_1+h_1,x)-f(a_1,x)$.

Вновь применяя теорему Лагранжа, находим

$$\psi(a_2+h_2)-\psi(a_2)=h_2(f'_{x_2}(a_1+h_1,a_2+\theta'_2)-f'_{x_2}(a_1,a_2+\theta'_2))=$$

$$=h_1h_2f''_{x_2x_1}(a_1+\theta'_1h_1,a_2+\theta'_2h_2)=h_1h_2(f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)+o(1)).$$

Отсюда

$$h_1h_2(f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)+o(1))=h_1h_2(f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)+o(1)),$$

т.е. получаем справедливость равенства

$$f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2).$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (теорема Юнга). *Пусть функции $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ и $f'_{x_2}(x_1,x_2)$ определены в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}=(a_1,a_2)$ и дифференцируемы в точке $\bar{a}$. Тогда*

$$f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции

$$\Delta^2 f=f(a_1+h,a_2+h)-f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2+h)+f(a_1,a_2),$$

$$\varphi(x)=f(x,a_2+h)-f(x,a_2).$$

Имеем

$$\Delta^2 f=\varphi(a_1+h)-\varphi(a_1).$$

Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\Delta^2 f=h\varphi'(a_1+\theta_1 h)=h\left(f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2+h)-f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2)\right).$$

В силу того что функция $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ дифференцируема в точке $\bar{x}=\bar{a}$,

$$f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2+h)-f'_{x_1}(a_1,a_2)=\theta_1 hf''_{x_1x_1}(\bar{a})+hf_{x_1x_2}(\bar{a})+o(h),$$

$$f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h,a_2)-f'_{x_1}(a_1,a_2)=\theta_1 hf''_{x_1x_1}(\bar{a})+o(h).$$

Следовательно,

$$\Delta^2 f=h^2f''_{x_1x_2}(\bar{a})+o(h^2).$$

С другой стороны,

$$\Delta^2 f=\psi(a_2+h)-\psi(a_2),$$

где $\psi(y)=f(a_1+h,y)-f(a_1,y)$. Аналогично предыдущему получим

$$\Delta^2 f=h^2f''_{x_2x_1}(\bar{a})+o(h^2).$$

Таким образом,

$$f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2).$$

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е. *Теоремы Юнга и Шварца имеют место при* $n > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо зафиксировать все переменные, кроме x_r, x_s, и применить доказанные теоремы к получившимся функциям.

Определение. *Функция* $f(\bar{x})$ *называется* **дважды дифференцируемой в точке,** *если все первые производные дифференцируемы. Вообще, функция* $f(\bar{x})$ *называется* n **раз дифференцируема,** *если все частные производные* $(n-1)$*-го порядка являются дифференцируемыми функциями.*

Т е о р е м а 3 (достаточное условие дифференцируемости). *Для того чтобы функция* $f(\bar{x})$ *была* n *раз дифференцируема в точке, достаточно, чтобы все частные производные порядка* n *были непрерывны в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по индукции.

С л е д с т в и е (из теоремы Юнга). *Если функция* $f(\bar{x})$ *является* n *раз дифференцируемой, то смешанные частные производные до порядка* n *не зависят от порядка, в котором производится дифференцирование.*

Д о к а з а т е л ь с т в о получается индукцией из теоремы Юнга.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(\bar{x})$ дважды дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Зафиксируем приращение $d\bar{x} = \bar{h}$. Тогда получим новую функцию $g(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{h})$, определяемую выражением

$$g(\bar{x}) = df(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} h_s \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}.$$

Это дифференцируемая функция в точке $\bar{x} = \bar{a}$, и ее дифференциал равен

$$dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{a})}{\partial x_r} \cdot \Delta x_r,$$

т.е.

$$dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} h_s \Delta x_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s} \right) \bigg|_{\bar{x}=\bar{a}}$$

Положим теперь $h_s = \Delta x_s = dx_s$. Тогда получим

$$d^2 f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r} dx_s dx_r.$$

Это выражение называется **вторым дифференциалом функции** $f(\bar{x})$ **в точке** $\bar{x} = \bar{a}$. Аналогично определяется дифференциал $d^k f(\bar{x})$ порядка k:

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_s \ldots \partial x_r} dx_s \ldots dx_r.$$

Очевидно, это выражение можно символически записать так:

$$d^k f(\bar{x}) = \left(\sum_{s=1}^{n} dx_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right)^k f(\bar{a}),$$

где для получения развернутого выражения надо формально возвести выражение в скобках в степень как многочлен, считая символы dx_s, $\frac{\partial}{\partial x_s}$ как бы независимыми переменными, а затем к числителю выражения $\frac{\partial^k}{\partial x_s \ldots \partial x_r}$ справа приписать $f(\bar{a})$.

Отметим, что $d^r f(\bar{x})$ при $r \geq 2$, вообще говоря, не обладает свойством **инвариантности**, т.е. если, скажем, вместо dx_s в выражение для $d^2 f(\bar{x})$ подставить первые дифференциалы $d\varphi_s(\bar{t})$ функций $x_s = \varphi_s(\bar{t})$, то получится выражение, которое уже не будет вторым дифференциалом.

Действительно, если $h(\bar{t}) = f(\varphi(\bar{t}))$, то

$$d^2 h(\bar{t}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} d\varphi_s d\varphi_r + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 \varphi_s.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} d\varphi_s \right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) d\varphi_s + \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 \varphi_s.$$

Но если $\varphi_s(\bar{t})$ — линейные функции, т.е.

$$\varphi_s(\bar{t}) = \lambda_{0,s} + \lambda_{1,s} t_1 + \cdots + \lambda_{n,s} t_n,$$

то $d^2 \varphi_s = 0$ и инвариантность второго дифференциала все же имеет место. Аналогичное утверждение справедливо и для третьего дифференциала и т.д.

В силу этого, например, если $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ и $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$, то

$$d^r f(\bar{a} + t\bar{e})\big|_{t=0} = d^r g(t)\big|_{t=0} = g^{(r)}(0)(dt)^r,$$

т.е. функция $g(t)$ является r раз дифференцируемой.

Воспользуемся последним замечанием для вывода формулы Тейлора для функции от n переменных.

Т е о р е м а 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $f(\bar{x})$ дифференцируема k раз в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Тогда при $\bar{x}$, стремящемся к $\bar{a}$, справедлива следующая формула*

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + r(\bar{x}),$$

где

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{2!}\, d^2 f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{k!}\, d^k f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}, \quad r(\bar{x}) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод математической индукции по параметру k. При $k = 1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала функции. Предположим теперь, что $k > 1$.

Из условия теоремы вытекает, что функция $r(\bar{x})$ в некоторой окрестности U точки $\bar{x} = \bar{a}$ имеет все производные до порядка $(k-1)$ включительно. Кроме того, в точке $\bar{a}$ сама функция и все ее частные производные до k-го порядка включительно равны нулю.

Далее, пусть $\bar{x} \in U$ и $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$. Тогда имеем

$$r(\bar{x}) = r(\bar{x}) - r(\bar{a}) = r(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - r(\bar{a}) = D_1 + \cdots + D_n,$$

где при $s = 1, \ldots, n$ величины D_s определены равенствами

$$D_s = r(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_s + \Delta x_s, a_{s+1}, \ldots, a_n) -$$

$$-r(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_{s-1} + \Delta x_{s-1}, a_s, \ldots, a_n) = g(a_s + \Delta x_s) - g(a_s).$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа к каждой величине D_s, при некоторых ξ_s с условием $0 < \xi_s < 1$ получим

$$D_s = g'_{x_s}(a_s + \xi_s \Delta x_s)\Delta x_s = r'_{x_s}(\bar{a} + \bar{v}_s)\Delta x_s,$$

где $\bar{v}_s = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{s-1}, \xi_s \Delta x_s, 0, \ldots, 0)$. Следовательно,

$$r(\bar{x}) = r'_{x_1}(\bar{a} + \bar{v}_1)\Delta x_1 + \cdots + r'_{x_n}(\bar{a} + \bar{v}_n)\Delta x_n.$$

Заметим, что точка $\bar{a} + \bar{v}_s \in \dot{U}$ для каждого $s = 1, \ldots, n$. Поэтому к частным производным в правой части последнего равенства можно применить предположение индукции с заменой значения параметра k на $k - 1$. Тогда при всех s от 1 до n будем иметь

$$r'_{x_s}(\bar{a} + \bar{v}_s) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^{k-1}).$$

Отсюда следует, что $r(\bar{x}) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^k)$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция* $f(\bar{x})$ *имеет* $(k+1)$*-й дифференциал для любого* $\bar{x} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$, *где* ε *— некоторое положительное число. Тогда для любой точки* $\bar{b} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$ *существует точка* $\bar{c} = \bar{a} + \theta(\bar{b} - \bar{a})$, $0 < \theta < 1$, *такая, что*

$$f(\bar{b}) = f(\bar{a}) + \sum_{s=1}^{k} \frac{d^s f(\bar{a})}{s!}\bigg|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\bigg|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(t) = f(\bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}))$. Тогда по формуле Тейлора для одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!},$$

где $0 < \theta < 1$ — некоторая постоянная. Поскольку справедливы равенства

$$g(0) = f(\bar{a}),\ g'(0) = df(\bar{a})|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}, \dots, g^{(k)}(0) = d^k f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}},$$

$$g^{(k+1)}(\theta) = d^{k+1} f(\bar{c})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}},$$

подставляя их в предыдущее соотношение, получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Замечание. Подчеркнем разницу в условиях существования формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа (теоремы 1 и 2). Она состоит в том, что в первом случае k-кратная дифференцируемость функции $f(x)$ предполагается только в точке $\bar{x} = \bar{a}$, в то время как во втором случае требуется $(k+1)$-кратная дифференцируемость ее в окрестности $O(\bar{a}, \varepsilon)$. Обратим внимание на то, что в случае функции одной переменной k-кратная дифференцируемость ее в точке $x = a$ обеспечивает $(k-1)$-кратную дифференцируемость в окрестности, в кратном же случае это условие дает существование в этой окрестности только частных производных до $(k-1)$-го порядка включительно.

Лекция 24

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение точки локального экстремума для функции многих переменных дословно совпадает с аналогичным понятием для функции одной переменной, и, вообще, для функций, определенных в любом метрическом пространстве, только ε-окрестность точки, в которой функция имеет экстремум, определяется соответствующей метрикой.

Определение 1. *Точка $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ называется* **точкой строгого локального максимума функции** $f(\bar{x})$, *если существует ε-окрестность $O(\bar{a}, \varepsilon)$ точки $\bar{a}$ такая, что для любой точки $\bar{x} \neq \bar{a}$ и $\bar{x} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$ имеем неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$;*

если $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — **точка нестрогого максимума;**

если $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — **точка строгого минимума;**

если $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — **точка нестрогого минимума.**

Строгие локальные максимумы и минимумы в точке называются **локальными экстремумами в точке,** *а нестрогие* — **нестрогими локальными экстремумами в точке.**

Т е о р е м а 1 (необходимое условие экстремума). *Если $\bar{a}$ — точка локального экстремума (нестрогого) функции $f(\bar{x})$ и существует дифференциал $df(\bar{x})$ ее в этой точке, то для любого приращения $\bar{\Delta} x$ имеем*

$$df(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} f(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}} = \bar{0}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно доказать, что при $s = 1, \ldots, n$ выполняются равенства

$$\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0.$$

Рассмотрим функцию $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e}_s)$, где $\bar{e}_s$ — направляющий вектор оси Ox_s. Тогда ясно, что $g(t)$ имеет в нуле точку локального экстремума, откуда $g'(0) = 0$. Но так как

$$\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_s} = g'(0) = 0,$$

то это доказывает утверждение теоремы 1.

Определение 2. *Точка $\bar{a}$, в которой градиент функции $f(\bar{x})$ обращается в $\bar{0}$, называется* **стационарной точкой функции** $f(\bar{x})$.

Заметим, что второй дифференциал $d^2 f(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ является квадратичной формой от n переменных $dx_1, \ldots, dx_n$.

Определение 3. *Стационарная точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ называется* **регулярной,** *если в этой точке существует второй дифференциал $d^2f(\bar{x})$, и он является невырожденной квадратичной формой от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, т.е. определитель матрицы этой квадратичной формы отличен от нуля.*

Перейдем теперь к выводу достаточного условия экстремума функции.

Т е о р е м а 2 (достаточное условие экстремума). *Пусть $\bar{a}$ есть регулярная стационарная точка функции $f(\bar{x})$, т.е. дифференциал этой функции в точке $\bar{a}$ обращается в нуль и существует второй дифференциал в этой точке с невырожденной квадратичной формой от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$. Тогда*

1) если в этой точке $d^2f(\bar{x})$ является положительно определенной квадратичной формой, то в точке $\bar{x} = \bar{a}$ функция $f(\bar{x})$ имеет локальный минимум;

2) если $d^2f(\bar{x})$ — отрицательно определена, то $\bar{a}$ — точка локального максимума;

3) если $d^2f(\bar{x})$ является неопределенной формой, то точка $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пункт 1). Обозначим через A матрицу квадратичной формы $d^2f(\bar{x})$ от переменных Δx_s, $s = 1, \ldots, n$, а через $S(\bar{a})$ — множество точек $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ с условием $|\Delta\bar{x}| = 1$.

Множество $S(\bar{a})$ ограничено и является замкнутым, так как совпадает со своей границей $\partial S(\bar{a})$, и поэтому содержит эту границу. Следовательно, $S(\bar{a})$ — компакт, а потому на множестве $S(\bar{a})$ второй дифференциал как функция от приращения $\Delta\bar{x}$ достигает своего минимума m, т.е. найдется вектор $\bar{e}_0$, $|\bar{e}_0| = 1$ такой, что

$$d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}=\bar{e}_0} = m > 0.$$

Заметим, что для любого вектора $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{x} = |\Delta\bar{x}|\bar{e}$, $|\bar{e}| = 1$, имеем

$$d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}} = |\Delta\bar{x}|^2\, d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{e}}.$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получим

$$\Delta f(\bar{x}) = df(\bar{a}) + \frac{1}{2}d^2f(\bar{a}) + o(|\Delta\bar{x}|^2) \geq \frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|^2 m(1 + o(1)),$$

т.е. найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для любой точки $\bar{x} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$ выполняется неравенство $\Delta f(\bar{x}) > 0$. Первый пункт рассмотрен.

Пункт 2) рассматривается аналогично. Перейдем к третьему пункту. В силу неопределенности квадратичной формы $d^2f(\bar{a})$ получим $m < 0 < M$, где

$$M = \sup_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2f(\bar{a}),\ m = \inf_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2f(\bar{a}),$$

причем величина M достигается на векторе $\bar{e}_1$, а величина m — на векторе $\bar{e}_2$. Тогда функция $g_1(t) = f(\bar{a}+t\bar{e}_1)$ при $t = 0$ имеет локальный максимум, а функция $g_2(t) = f(\bar{a}+t\bar{e}_2)$ — локальный минимум, а сама функция $f(\bar{x})$ в любой окрестности точки $\bar{a}$ принимает значения, как большие $f(\bar{a})$, так и меньшие $f(\bar{a})$, т.е. точка $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума. Теорема 2 доказана.

§ 9. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть заданы точка $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in \mathbb{R}^n$, некоторая ее ε-окрестность и множество точек, принадлежащих этой ε-окрестности и удовлетворяющих уравнению $f(\bar{x}, y) = 0$.

Определение 1. *Функция $\varphi(\bar{x})$, зависящая от $(n-1)$-й переменной $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$, называется* **неявной функцией,** *соответствующей уравнению $f(\bar{x}, y) = 0$, если для любой точки $\bar{x}$ из этой δ-окрестности имеет место равенство*

$$f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0.$$

Определение 2. *Функция $f(\bar{x})$ называется* **гладкой** *в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если для любой точки $\bar{x} \in \Omega$ она является дифференцируемой и ее частные производные непрерывны.*

Докажем теперь теорему о неявной функции.

Теорема (теорема о неявной функции). *Пусть:*

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ε-окрестности Ω точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$;

2) $f(a, b) = 0$;

3) для любой точки $(x, y) \in \Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями;

4) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} > 0$.

Тогда существует единственная функция $y = \varphi(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки a, такая, что:

1) $\varphi(a) = b$;

2) для любой точки x, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(x, \varphi(x)) = 0$; Более того, оказывается, что эта функция $\varphi(x)$ является гладкой, причем

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x, y)\big|_{y=\varphi(x)}}.$$

Доказательство. Так как $f'_y(x,y)$ — непрерывна на Ω и $f'_y(a,b)>0$, то существует замкнутый квадрат $K\subset\Omega$ с центром в точке (a,b) и со сторонами, параллельными осям координат, длины $2h$, внутри которого минимальное значение $f'_y(x,y)$ равно $m>0$. В силу того, что $f'_y(x,y)>0$, функция $f(a,y)$ возрастает. Далее, так как $f(a,b)=0$, то $f(a,b+h)>0$ и $f(a,b-h)<0$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ существует число $\delta>0$ такое, что для любого значения $x\in[a-\delta,a+\delta]$ имеем $f(x,b+h)>0$ и $f(x,b-h)<0$.

Отсюда следует, что на отрезке, соединяющем точки $A_1=A_1(x)= =(x,b-h)$ и $A_2=A_2(x)=(x,b+h)$, монотонная функция $g(y)=f(x,y)$ обращается в нуль только в одной точке y_x.

Каждой точке $x\in[a-\delta,a+\delta]$ поставим в соответствие точку y_x. Оно определяет функцию $y=\varphi(x)=y_x$, для которой

$$f(x,\varphi(x))=f(x,y_x)=0,$$

при этом из равенства $f(a,b)=0$ имеем $\varphi(a)=y_a=b$.

Функция $\varphi(x)$ и является искомой. Надо только доказать, что $y=\varphi(x)$ дифференцируема внутри интервала $(a-\delta,a+\delta)$, причем

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}.$$

Докажем сначала непрерывность $\varphi(x)$. Пусть точки x и x_0 принадлежат интервалу $(a-\delta,a+\delta)$. Покажем, что $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)\to 0$ при $\Delta x=x-x_0\to 0$. Положим

$$y=\varphi(x),y_0=\varphi(x_0),\Delta y=\Delta\varphi(x).$$

Имеем $f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$. Следовательно, для функции $g(t)= f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$ справедливы равенства $g(0)=g(1)=0$. Функция $g(t)$ при любом $t\in[0,1]$ имеет производную

$$g'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y.$$

По теореме Ролля существует число $\theta\in(0,1)$ такое, что $g'(\theta)=0$. Отсюда получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(\bar\xi)}{f'_y(\bar\xi)},$$

где $\bar\xi=(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$. Следовательно,

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\le\frac{M}{m},\ M=\max_K|f'_x(x,y)|,\ m=\min_K|f'_y(x,y)|>0,$$

т.е. величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — ограничена. Поэтому имеем, что $\Delta y = \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Кроме того, так как при $\Delta x \to 0$ имеем, что $\Delta y \to 0$, то $\bar{\xi} \to (x_0, y_0)$. Далее, в силу непрерывности частных производных f'_x и $f'_y > 0$ получим

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Случай $f'_y(x,y) < 0$ сводится к рассмотренному заменой функции f на $g = -f$.

2. График функции $y = \varphi(x)$ является частью линии уровня $z = 0$ для поверхности $z = f(x,y)$.

Следствие (общая теорема о неявной функции). *Пусть:*

1) функция $f(\bar{x}, y)$ непрерывна в некоторой ε-окрестности Ω точки $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in \mathbb{R}^2$;

2) $f(\bar{a}, b) = 0$;

3) для любой точки $(\bar{x}, y) \in \Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями;

4) $\frac{\partial f(\bar{a},b)}{\partial y} > 0$.

Тогда существует единственная функция $y = \varphi(\bar{x})$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$ такая, что:

1) $\varphi(\bar{a}) = b$;

2) для любой точки $\bar{x}$, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$;

3) функция $\varphi(\bar{x})$ является гладкой, причем

$$\varphi'_{x_s}(\bar{x}) = -\frac{f'_{x_s}(\bar{x},y)\big|_{y=\varphi(\bar{x})}}{f'_y(\bar{x},y)\big|_{y=\varphi(\bar{x})}}.$$

Доказательство, по существу, дословно совпадает с доказательством теоремы. Надо только вместо точек $(a, b \pm h)$ рассмотреть точки $(\bar{a}, b \pm h)$, а вместо интервала $(a - \delta, a + \delta)$ — шар $O(\bar{a}, \delta)$.

В качестве приложения предыдущей теоремы рассмотрим задачу об арифметических свойствах неявных функций, представимых степенными рядами. Приводимый здесь результат является частным случаем одной теоремы Эйзенштейна.

Теорема 2. *Пусть задано алгебраическое уравнение $F(x,y) = 0$ с целыми коэффициентами, причем $F(0,0) = 0$ и $F'_y(0,0) \neq 0$. Пусть также степенной ряд $y = y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является решением этого* *уравнения, т.е. $y = y(x)$ — алгебраическая функция. Пусть, далее, коэффициенты a_k, $k \geq 0$, — рациональные числа. Тогда существует такое целое число l, что при замене x на lx коэффициенты степенного ряда, получившегося из ряда $y = y(x)$, будут целыми числами, за исключением, быть может, a_0.*

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции существует единственная функция $y_0 = y_0(x)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y) = 0$ в некоторой окрестности точки $(0,0)$. Следовательно, эта функция совпадает со степенным рядом $y = y(x)$.

Запишем многочлен $F(x, y)$ в виде

$$F(x, y) = P_0 + P_1 y + \dots + P_m y^m,$$

где $P_0 = P_0(x), \dots, P_m = P_m(x)$ — многочлены от переменной x. Так как $F(0,0) = 0$, то $P_0(0) = 0$. Из условия $F'_y(0,0) \neq 0$ получим: $P_1(0) \neq 0$ Представим многочлены $P_0 = P_0(x), \dots, P_m = P_m(x)$ в следующей форме:

$P_0 = g_0 x + h_0 x^2 + \dots,$

$P_1 = g_1 + h_1 x + \dots,\ g_1 \neq 0,$

$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$

$P_m = g_m + h_m x + \dots .$

Положим теперь

$$\begin{cases} x = g_1^2 t, \\ y = g_1 u, \end{cases}$$

где t и u — новые переменные.

Сократим равенство $F(g_1^2 t, g_1 u)$ на g_1^2. Получим

$$G_0 t + H_0 t^2 + \dots + (1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots)u + (G_m + H_m t + \dots)u^m = 0,$$

где $G_0, H_0, \dots, G_1, H_1, \dots, G_m, H_m, \dots$ — целые числа.

Из последнего уравнения имеем

$$u = -\frac{G_0 t + H_0 t^2 + \dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} - \dots - \frac{G_m + H_m t + \dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} u^m.$$

Далее при $|z| < 1$ воспользуемся равенством

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots .$$

Тогда предыдущее выражение для величины u принимает вид:

$$u = (A_1 t + A_2 t^2 + \dots) + (B_0 + B_1 t + \dots)u^2 + \dots .$$

Будем искать функцию $u = u(t)$ в следующей форме:

$$u = m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3 + \dots .$$

Коэффициенты $m_1, m_2, m_3, \dots$ тогда определяются из равенств

$$m_1 = A_1,$$

$$m_2 = A_2 + B_0 m_1^2,$$

$$m_3 = A_3 + 2B_0 m_1 m_2 + B_1 m_1^2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad .$$

Отсюда следует, что числа m_1, m_2, m_3, ... — целые. Теорема 2 доказана.

В частности, из последней теоремы следует, что функции

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

не являются алгебраическими.

§ 10. СИСТЕМА НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим отображение

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})).$$

Пусть все функции $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ являются гладкими в ε-окрестности $O(\bar{a}, \varepsilon)$ точки $\bar{a}$. Тогда такое отображение называется **гладким.**

Определение 1. *Пусть функции $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ дифференцируемы в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Тогда матрица*

$$J = J_f = \left\| \frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_s} \right\|, \; k = 1, \ldots, m; \; s = 1, \ldots, n;$$

имеющая m строк и n столбцов, называется **матрицей Якоби отображения** $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$.

Строки матрицы Якоби представляют собой градиенты функций $f_k(\bar{x})$, $k = 1, \ldots, m$.

Пусть $m \leq n$. Рассмотрим какие-либо m различных столбцов матрицы J. Они образуют подматрицу $J(k_1, \ldots, k_m)$ порядка $m \times m$ матрицы J, где $k_1, \ldots, k_m$ — номера выбранных столбцов.

Определение 2. *Определитель H матрицы $J(k_1, \ldots, k_m)$ называется* **якобианом** *(одним из якобианов) отображения $f(\bar{x})$ и обозначается так:*

$$H = \frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})}.$$

Определение 3. *Дифференцируемое отображение $f(\bar{x})$ называется* **невырожденным в точке** $\bar{x} = \bar{a}$, *если один из якобианов этого отображения отличен от нуля.*

Это означает, что:

1) матрица J имеет максимальный ранг или

2) градиенты функций $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ — линейно независимы в этой точке.

Т е о р е м а (теорема о системе неявных функций). *Пусть $n = m + p$, $p > 0$, и пусть:*

1) отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — невырожденное в точке $(\bar{a}, \bar{b})$, где $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, и гладкое в некоторой окрестности $\Omega = O((\bar{a}, \bar{b}), \varepsilon)$ точки $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$;

2) $f(\bar{a},\bar{b}) = 0$;

3) $H(\bar{y}) = \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_m)} \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности $O(\bar{a},\delta) = \Omega_1 \subset \mathbb{R}^p$ точки $\bar{a}$ существует единственное гладкое отображение $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}),\dots,\varphi_m(\bar{x}))$, где $\bar{x} = (x_1,\dots,x_p)$, обладающее следующими свойствами:

1) $f(\bar{a},\varphi(\bar{a})) = 0$;

2) для всех $x \in \Omega_1$ имеем $f(\bar{x},\varphi(\bar{x})) = 0$;

3) $J_\varphi(\bar{x}) = -A^{-1}B$, *где* $A = J_f(\bar{y})$, $B = J_f(\bar{x})$.

Здесь A и B — две части матрицы Якоби J_f, отвечающие переменным $y_1,\dots,y_m$ и $x_1,\dots,x_p$ соответственно.

Другими словами, эта теорема утверждает, что система уравнений

$$f_k(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_m) = 0,\ k = 1,\dots,m,$$

разрешима относительно переменных $y_1,\dots,y_m$ как функций от переменных $(x_1,\dots,x_p)$ таким образом, что функции $y_1 = \varphi_1(\bar{x}),\dots,y_m = \varphi_m(\bar{x})$ удовлетворяют тождествам

$$f_k(\bar{x},\varphi(\bar{x})) \equiv 0\ \forall \bar{x} \in \Omega_1,$$

где Ω_1 — некоторая окрестность точки $\bar{a}$, причем:

а) $f(\bar{a},\varphi(\bar{a})) = 0$;

б) $f(\bar{x},\bar{y})$ является невырожденным гладким отображением в некоторой окрестности точки $(\bar{a},\bar{b})$ с условием

$$\frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_m)} \neq 0.$$

Замечания. 1. Матричное равенство п. 3 дает выражение для всех частных производных вида

$$\frac{\partial\varphi_k(\bar{x})}{\partial x_s},\ k = 1,\dots,m,\ s = 1,\dots,p.$$

2. Если $f(\bar{x})$ — линейное отображение, то утверждение теоремы есть простой факт из линейной алгебры о решениях системы линейных уравнений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим определитель Якоби $H(\bar{y})$ матрицы A. Разложим его по последнему столбцу. Получим:

$$H(\bar{y}) = H_1\frac{\partial f_1}{\partial y_m} + H_2\frac{\partial f_2}{\partial y_m} + \dots + H_m\frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Так как $H(\bar{y})$ не обращается в нуль в точке $(\bar{a},\bar{b})$, то по крайней мере один из миноров матрицы A не равен нулю. Без ограничения общности можно считать, что $H_1 \neq 0$.

Будем проводить доказательство методом математической индукции по числу уравнений m. При $m = 1$ утверждение теоремы доказано в предыдущем параграфе. Предположим, что теорема верна для $m - 1$ уравнения. Докажем ее для m уравнений.

Поскольку $H_1 \neq 0$, применяя предположение индукции к функциям $f_2(\bar{x}, \bar{y}), \ldots, f_m(\bar{x}, \bar{y})$, получим, что существуют функции

$$y_1 = \psi_1(\bar{x}, y_m), \ldots, y_{m-1} = \psi_{m-1}(\bar{x}, y_m),$$

удовлетворяющие условиям

$$f_k(\bar{x}, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}, y_m) = 0, \; k = 2, \ldots, m,$$

для любой точки $(\bar{x}, y_m)$ в некоторой окрестности Ω_0 точки $(\bar{a}, b_m)$.

Подставим теперь $\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ в функцию $f_1(\bar{x}, \bar{y})$. Имеем:

$$f_1(\bar{x}, \psi(\bar{x}, y_m), \ldots, \psi_{m-1}(\bar{x}, y_m), y_m) = \Phi(\bar{x}, y_m).$$

Покажем, что $\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \neq 0$ в точке $(\bar{a}, b_m)$. Действительно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m},$$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$0 = \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Домножим первое уравнение на H_1, второе — на H_2 и т.д. Сложим получившиеся выражения. В результате будем иметь

$$H_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = H,$$

так как при $k \neq m$ справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{m} H_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} = 0,$$

а при $k = m$ эта сумма равна H.

Далее, поскольку H и H_1 не равны нулю,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{H}{H_1} \neq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции существует единственная функция $y_m = \varphi_m(\bar{x})$, такая, что $f_1(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv 0$ в некоторой окрестности Ω точки $\bar{a}$, где

$$\varphi_1(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}), \ldots, \varphi_{m-1}(\bar{x}) = \psi_{m-1}(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x})).$$

При $k = 2, \ldots, m$ в области Ω имеем $f_k(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv 0$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала при $k = 1, \ldots, m$ имеем

$$0 = df_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} d\varphi_1(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} d\varphi_m(\bar{x}).$$

В векторном виде это можно записать так:

$$Bd\bar{x} + Ad\varphi(\bar{x}) = 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

$$d\varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} d\varphi_1(\bar{x}) \\ \ldots \\ d\varphi_m(\bar{x}) \end{pmatrix}, d\bar{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \ldots \\ dx_m \end{pmatrix}.$$

Далее, имеет место равенство

$$d\varphi(\bar{x}) = J_\varphi(\bar{x}) d\bar{x},$$

где

$$J_\varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим

$$AJ_\varphi(\bar{x})d\bar{x} + Bd\bar{x} = 0, \text{ т.е. } (J_\varphi(\bar{x}) + A^{-1}B)d\bar{x} = 0.$$

Итак, линейное отображение переводит любой вектор $d\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ в нулевой вектор. Следовательно, это нулевое отображение и

$$J_\varphi(\bar{x}) + A^{-1}B = \bar{0}, \text{ т.е. } J_\varphi(\bar{x}) = -A^{-1}B.$$

Теорема доказана полностью.

С л е д с т в и е (теорема об обратном отображении). *Пусть гладкое отображение* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *в окрестности точки* $\bar{x} = \bar{a}$, *невырожденное в этой точке. Тогда существует обратное гладкое отображение* $\psi(\bar{y}) = \varphi^{-1}(\bar{y})$, *определенное в некоторой* δ*-окрестности точки* $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$, *т.е. такое отображение, что* $\psi(\varphi(\bar{x})) = \bar{x}$, *причем матрица Якоби* J_ψ *отображения* $\psi(\bar{y})$ *равна*

$$J_\psi = J_\varphi^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема является прямым следствием теоремы о системе неявных функций. Надо только записать равенство $\bar{y} - \varphi(\bar{x}) = 0$ в виде системы неявных функций

$$f_1(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_1(\bar{x}) - y_1 = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f_n(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_n(\bar{x}) - y_n = 0,$$

а затем по этой теореме выразить $\bar{x}$ через $\bar{y}$.

§ 11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 1. *Пусть* Ω *— область точек* $\mathbb{R}^n$, *на которой определены гладкие функции* $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x})$, $m < n$. *Тогда множество* $\Omega_1 \subset \Omega$ *решений системы уравнений* $\varphi(\bar{x}) = 0$, $k = 1, \dots, m$, *называется* **многообразием,** *порожденным функциями* $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. *Уравнение* $\varphi_k(\bar{x}) = 0$ *называется* **уравнением связи** *для многообразия* Ω_1.

Определение 2. *Точка* $\bar{a}$ *называется* **точкой условного локального максимума на многообразии** Ω, *если в некоторой окрестности точки* $\bar{a}$ *для любой точки* $\bar{x}$, *принадлежащей этой окрестности и многообразию* Ω, *справедливо неравенство* $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$.

Аналогично определяются точки условного локального минимума и экстремума.

Замечание. Если связи отсутствуют, то условный локальный экстремум называется **безусловным** экстремумом.

Определение 3. *Точка* $\bar{a}$ *функции* $f(\bar{x})$ *называется* **особой,** *если* $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$, *и* **неособой,** *если* $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$.

Определение 4. *Многообразие* Ω_1 *называется* **невырожденным,** *если для любой точки* $\bar{x} \in \Omega_1$ *векторы градиентов* $\Phi_s = \operatorname{grad} \varphi_s(\bar{x})$ *при* $s = 1, \dots, m$ *являются линейно независимыми.*

Т е о р е м а (необходимое условие условного экстремума). *Для того чтобы неособая точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ была бы точкой условного экстремума функции $f(\bar{x})$ на невырожденном многообразии Ω_1, необходимо, чтобы вектор $\bar{F} = \operatorname{grad} f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ выражался в виде линейной комбинации градиентов $\bar{\Phi}_1 = \operatorname{grad} \varphi_1(\bar{x}), \ldots, \bar{\Phi}_m = \operatorname{grad} \varphi_m(\bar{x})$ в этой точке, т.е. чтобы существовали вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что*

$$\bar{F} = \lambda_1 \bar{\Phi}_1 + \cdots + \lambda_m \bar{\Phi}_m.$$

Утверждение этой теоремы допускает следующую переформулировку для практического нахождения условного экстремума.

С л е д с т в и е (метод множителей Лагранжа). *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — независимые вещественные переменные. Рассмотрим функцию Лагранжа*

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) - \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) - \cdots - \lambda_m \varphi_m(\bar{x}).$$

Для того чтобы неособая точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ была бы точкой условного экстремума этой функции на невырожденном многообразии Ω_1, необходимо, чтобы при некотором $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$ имело место равенство

$$dL(\bar{x}, \lambda)\big|_{\bar{x}=\bar{a}, \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0} = 0,$$

т.е. чтобы все частные производные функции $L(\bar{x}, \bar{\lambda})$ по переменным x_s и λ_r обращались в нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Если мы приравняем к нулю частные производные по переменным λ_r, то получим уравнения связи. А если продифференцируем по x_s, $s = 1, \ldots, n$, то получим условие выражения градиента функции $f(\bar{x})$ в виде линейной комбинации градиентов функций $\varphi_r(\bar{x})$, что по теореме и является необходимым условием. Следствие доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Идея доказательства состоит в том, чтобы найти $n - m$ линейно независимых векторов $\bar{\alpha}_{m+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$ таких, что каждый из этих векторов одновременно перпендикулярен вектору $\bar{F}$ и векторам $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$. Отсюда будет следовать, что линейное пространство $\mathbb{L}$, состоящее из всевозможных линейных комбинаций этих векторов, обладает свойством $\bar{F} \perp \mathbb{L}$ и $\bar{\Phi}_k \perp \mathbb{L}$, $k = 1, \ldots, m$. Ортогональное дополнение пространства $\mathbb{L}$, т.е. пространство $\mathbb{L}^{\perp}$, состоящее из всех векторов $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, ортогональных к $\mathbb{L}$, содержит вектора $\bar{F}$ и $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$. Размерность пространства $\mathbb{L}^{\perp}$ равна $n-m$. Поскольку вектора $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$ — линейно независимы, они образуют базис $\mathbb{L}$. Следовательно, вектор $\bar{F}$ есть линейная комбинация векторов $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$.

Заметим, что на самом деле $\mathbb{L}$ состоит из всех векторов, лежащих в каждой из касательных плоскостей к поверхностям $\varphi_s(\bar{x}) = 0$, $s = 1, \ldots, m$, в точке $\bar{x} = \bar{a}$.

Итак, осталось указать векторы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-m} \in \mathbb{L}^{\perp}$. Их мы будем выбирать следующим образом. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0.$$

По теореме о системе неявных функций в некоторой ε-окрестности точки $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ существует m гладких функций $\psi_1(\bar{z}), \ldots, \psi_m(\bar{z})$, где $\bar{z} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ таких, что

$$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}), \ldots, \psi_m(\bar{z}), \bar{z}) \equiv 0,$$

а также

$$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0), \bar{z}_0) \equiv 0, (\psi_1(\bar{z}_0), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0), \bar{z}_0) = \bar{a}.$$

Пусть $\bar{e}_r$ — направляющий вектор оси Ox_r, $r = m+1, \ldots, n$. Рассмотрим функции

$$h_{k,r}(t) = \varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \bar{z}_0 + t\bar{e}_r) = 0,$$

где $k = 1, \ldots, m$, а также функцию

$$h_{0,r}(t) = f(\psi_1(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \bar{z}_0 + t\bar{e}_r).$$

В точке $t = 0$ производные всех функций равны нулю: у первой, ..., m-й — потому, что они есть тождественно равные нулю функции, а у функции $h_{0,r}(t)$ — потому, что точка $t = 0$ должна быть точкой локального экстремума этой функции.

Вычисляя $h'_{k,r}(t)\Big|_{t=0}$ по теореме о производной сложной функции, получим

$$h'_{k,r}(t)\big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_r},$$

$$h'_{0,r}(t)\big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r},$$

где $k = 1, \ldots, m$; $r = m+1, \ldots, n$; т.е. имеем

$$h'_{k,r}(t)\big|_{t=0} = (\bar{\Phi}_k, \bar{\alpha}_r) = 0, \quad h'_{0,r}(t)\big|_{t=0} = (\bar{F}, \alpha_r) = 0,$$

причем

$$\bar{\alpha}_r = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r}, \ldots, \frac{\partial\psi_m}{\partial x_r}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0\right),$$

число 1 находится на $m + r$-м месте.

Таким образом, все векторы $\bar{\alpha}_{m+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n$ перпендикулярны каждому из векторов $\bar{F}, \bar{\Phi}_1, \ldots \bar{\Phi}_m$, при этом, очевидно, векторы $\bar{\Phi}_1, \ldots \bar{\Phi}_m$ в силу невырожденности многообразия Ω_1 будут линейно независимы. Теорема доказана.

§ 12. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. МАТРИЦА ЯКОБИ

Покажем, что матрица Якоби отображения $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ обладает некоторым важным свойством, аналогичным свойству производной функции.

Определение 1. *Пусть отображение $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определено в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{0}$. Тогда будем говорить, что $\alpha(\bar{x})$ есть* **o-малое от длины вектора** *$\bar{x}$, и обозначать это так:*

$$\alpha(\bar{x}) = o(|\bar{x}|), \quad \text{если} \quad \lim_{\bar{x}\to 0} \frac{|\alpha(\bar{x})|}{|\bar{x}|} = 0.$$

Определение 2. *Линейное отображение $l(\Delta\bar{x})$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ называется* **дифференциалом отображения** *$f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$, если*

$$\Delta f(\bar{x}) = l(\Delta\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|).$$

Обозначение: $l(\Delta\bar{x}) \equiv df(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{h}=\Delta\bar{x}}$. Если существует дифференциал отображения в точке, то оно называется **дифференцируемым** в этой точке. Дифференциал отображения можно определить следующим равенством:

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to 0} \frac{|\Delta f(\bar{x}) - df(\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|} = 0.$$

Утверждение 1. *Если дифференциал отображения существует, то он определен однозначно.*

Доказательство. Пусть $l_1(\Delta\bar{x})$ и $l_2(\Delta\bar{x})$ — дифференциалы отображения $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Положим $l(\Delta\bar{x}) = l_1(\Delta\bar{x}) - l_2(\Delta\bar{x})$.

Из неравенства треугольника имеем

$$|l(\Delta\bar{x})| \le |\Delta f(\bar{x}) - l_1(\Delta\bar{x})| + |\Delta f(\bar{x}) - l_2(\Delta\bar{x})|.$$

В силу определения дифференциала отображения отсюда получим

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to 0} \frac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|} = 0.$$

Далее, поскольку отображение $l(\Delta\bar{x})$ — линейно, для любого приращения $\Delta\bar{x}$ будем иметь

$$\frac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|} = \lim_{t\to 0}\frac{|l(t\Delta\bar{x})|}{|t\Delta\bar{x}|} = 0.$$

Таким образом, отображение $l(\Delta\bar{x})$ переводит все линейное пространство в нулевой вектор. Следовательно, отображение $l(\Delta\bar{x})$ — нулевое, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемое отображение. Тогда имеет место равенство*

$$\Delta f(\bar{x}) = J_f(\bar{a})\cdot\Delta\bar{x} + o(|\Delta x|),$$

где выражение $J_f(\bar{a})\cdot\Delta\bar{x}$ понимается как умножение матрицы Якоби $J_f(\bar{a})$ на вектор $\Delta\bar{x}$.

Доказательство очевидно.

Приведем еще несколько свойств дифференциала отображения, которые непосредственно выводятся из его определения.

1^0. Дифференциал $df(\bar{x})$ отображения $f(\bar{x})$ существует тогда и только тогда, когда существуют все дифференциалы $df_k(\bar{x})$ функций $f_k(\bar{x})$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),\ldots,f_m(\bar{x}).)$

2^0. Если отображение $\bar{y} = g(\bar{x})$ дифференцируемо в точке $\bar{a}$, а отображение $f(\bar{y})$ дифференцируемо в точке $\bar{b} = g(\bar{a})$, и образ некоторой окрестности точки $\bar{a}$ при отображении g содержится в некоторой окрестности точки $\bar{b}$, то отображение $h(\bar{x}) = f(g(\bar{x}))$ дифференцируемо и

$$J_h(\bar{x}) = J_f(g(\bar{x}))\cdot J_g(\bar{x}).$$

3^0. Отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, которое является гладким в некотором шаре $O(\bar{a},\varepsilon)$, $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$, заведомо будет дифференцируемым во всем шаре $O(\bar{a},\varepsilon)$.

ЧАСТЬ III
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

В последнее время в преподавании университетского курса математики наметился отход от излишней абстрактности изложения в сторону его содержательности. До известной степени это перекликается с представлениями математиков прошлого. Прекрасным примером сочетания четкости изложения с конкретностью и идейной ясностью является учебник Ш.Ж. ла Валле-Пуссена "Курс анализа бесконечно малых" (Л.; М., 1933), который во многом служил для нас образцом.

Эта часть книги охватывает материал, излагаемый в третьем семестре, в рамках курса математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. Как мы отмечали в предисловии к первой части, замысел этого учебника предполагает соединение краткости изложения, свойственной конспекту лекций, с доступностью и полнотой учебника. С другой стороны, наша концепция курса включает в себя выделение роли понятия предельного перехода во всевозможных его проявлениях как фундаментальный принцип изложения предмета. Следует также отметить, что материал третьего семестра несет в себе наиболее существенные элементы всего курса математического анализа, связанные с одновременным рассмотрением и перестановкой порядка выполнения нескольких предельных переходов в сочетании с понятием двойного предела.

Здесь мы рассматриваем такие приложения общей теории, как бесконечные произведения и бесконечные определители, основы теории эйлеровских интегралов, задача Кеплера о движении двух тел и функции Бесселя, формула Лагранжа для обратной функции, обобщающая формулу Тейлора, формула суммирования Пуассона и вычисление точного значения суммы Гаусса. Другое приложение теории — это изложение асимптотических методов Лапласа и стационарной фазы, являющихся, как известно, вещественной интерпретацией метода перевала в теории функций комплексного переменного. Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что лекции, в которых излагается материал приложений, как правило, превосходят по объему отдельные лекции, содержащие теоретические основы курса. Заметим еще, что выбор приложений обусловлен нашим стремлением привить студентам определенный математический вкус и любовь к предмету.

Глава XV
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекция 1

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ. КРИТЕРИЙ КОШИ

Эта часть курса математического анализа охватывает три большие темы, а именно:

1) числовые и функциональные ряды;

2) интегралы, зависящие от параметра;

3) ряды и интегралы Фурье.

Заметим, что третья тема при формальном подходе должна быть отнесена к двум первым, однако ввиду особой важности и специфических особенностей ее традиционно выделяют в самостоятельный раздел. Изложение материала начинается с числовых рядов.

Понятие числового ряда вскользь рассматривалось еще в первом семестре при изложении темы о числовых последовательностях. Теперь остановимся на этом вопросе более детально.

Напомним основные определения.

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}$ — произвольная числовая последовательность.* **Числовым рядом** *или просто* **рядом** *называется формальная бесконечная сумма S вида*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Обычно используется следующая сокращенная запись:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

или просто $\sum a_n$.

Здесь натуральный параметр n в знаке суммы определяет номер члена последовательности. При фиксированном n соответствующий ее член a_n называется n-м **членом ряда**. В то же время символ a_n, рассматриваемый как функция своего номера, называется **общим членом ряда**. Вместо буквы n можно, разумеется, использовать любую другую букву, обозначающую переменную, принимающую натуральные значения.

Рассмотрим теперь новую последовательность s_n, задаваемую равенством

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Определение 2. *Последовательность s_n называется* **последовательностью частичных (или частных) сумм** *ряда $\sum a_n$, а ее n-й член называется n*-**й частичной суммой** *этого ряда.*

Определение 3. *Если последовательность s_n частичных сумм ряда $\sum a_n$ сходится к числу s, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд $\sum a_n$ называется* **сходящимся** *(к s), а число s — его* **суммой.** *В этом случае пишут:*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Если же последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела, то говорят, что ряд $\sum a_n$ **расходится.**

В основном нас будут интересовать сходящиеся ряды.

Определение 4. *Если ряд $\sum a_n$ сходится к числу s, то последовательность $r_n = s - s_n$ называется* **остаточным членом** *или* **остатком** *ряда.*

Заметим, что так как $s_n \to s$ при $n \to \infty$, то $r_n \to s - s = 0$ при $n \to \infty$.

Несколько модифицируем введенные определения и обозначения. Если в числовой последовательности a_n отбросить несколько начальных членов, например, в количестве $m > 0$, то оставшиеся члены $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ в совокупности можно снова рассматривать как некую новую последовательность b_n, задаваемую равенством $b_n = a_{m+n}$.

Рассматривая b_n как общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, для его частичных сумм s_n' получим равенство

$$s_n' = b_1 + \dots + b_n = a_{m+1} + \dots + a_{m+n} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = s_{m+n} - s_n.$$

Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ как формальную бесконечную сумму можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, бесконечную сумму $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ тоже можно рассматривать как ряд.

Далее будем рассматривать также формальные ряды вида $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{n_s}$, где n_s — какая-либо последовательность натуральных чисел, и исследовать их на сходимость.

Утверждение 1. *Остаточный член r_n ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ можно представить в виде ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ в том смысле, что:*

1) его сумма равна r_n, когда исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) это представление понимается как формальное равенство, когда оба ряда расходятся;

3) другие случаи не имеют места.

Доказательство начнем с п.3. При $k \geq 1$ для частичных сумм s'_k ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ и s_{k+n} ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет место равенство $s'_k = s_{k+n} - s_n$.

Ясно, что при фиксированном n сходимость и расходимость последовательностей s'_k и s_{k+n} имеют место одновременно, что и означает справедливость утверждения п. 3.

В случае 1, т.е. когда оба ряда сходятся, можно перейти к пределу при $k \to \infty$ в равенстве $s'_k = s_{k+n} - s_n$. Тогда получим

$$s' = \lim_{k\to\infty} s'_k = \lim_{k\to\infty} s_{k+n} - s_n = s - s_n = r_n;$$

тем самым утверждение п. 1 доказано.

Относительно утверждения п. 2 следует заметить, что формальное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}$$

можно рассматривать как определение одной из возможных операций над формальными числовыми рядами. При введении подобных операций необходимо только требовать, чтобы правые и левые части равенств переходили бы в равенство между числами в случае наличия сходимости хотя бы для одной из частей равенства, что действительно имеет место в нашем случае. Доказательство утверждения 1 закончено.

Примеры. **1.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, и его сумма равна 1. Действительно, имеем

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

при $n \to \infty$, т.е. $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

2. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии вида

$$a + aq + \dots + aq^n + \dots, \quad \text{при} \quad a \neq 0.$$

В случае $q = 1$ имеем $s_n = na$, и ряд расходится. При $q \neq 1$ справедливо равенство

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a(1 + q + \dots + q^{n-1}) =$$

$$= \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Известно, что $q^n \to 0$ при $|q| < 1$ и $\{q^n\}$ расходится при $|q| \geq 1$.

Таким образом, указанный ряд сходится к сумме $s = \frac{a}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1, a \neq 0$.

3. Гармонический ряд $\sum 1/n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n + \dots$ расходится, а ряд $\sum 1/n^\alpha = 1 + 1/2^\alpha + \dots + 1/n^\alpha + \dots$ сходится при $\alpha > 1$.

Заметим прежде всего, что расходимость ряда есть расходимость последовательности его частичных сумм, т.е. надо доказать, что $s_n = 1 + \dots + 1/n$ расходится. Для этого достаточно показать, что эта последовательность не ограничена.

При $n = 2^k$ имеем

$$s_n = s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{k}{2} > \frac{k}{2}.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было число $M > 0$, всегда найдется номер $n = 2^k$, такой, что $s_n > k/2 > M$. Для этого достаточно выбрать натуральное число k большим, чем $2M$. Другими словами,