Лекция 10

§ 5. ТЕОРЕМА ДИНИ

Докажем теорему Дини, которая важна для прояснения сущности понятия равномерной сходимости.

Т е о р е м а 1 (признак Дини). *Пусть последовательность неотрицательных функций $p_n(x)$, непрерывных на отрезке $I = [a, b]$, сходится поточечно к нулю на этом отрезке, причем $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$ при всех $x \in I$ и при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда эта сходимость равномерная на отрезке I, т.е. $p_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду поточечной сходимости последовательности $p_n(x)$ к нулю для всякого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $x \in I$ можно указать номер $n = n(\varepsilon, x)$ такой, что $p_n(x) < \varepsilon/2$. Но так как $p_n(x)$ непрерывна, то у точки x найдется некоторая δ-окрестность, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, для всех точек y которой имеем $p_n(y) < \varepsilon$. Совокупность всех таких окрестностей полностью покрывает отрезок I, и в силу того, что он является компактом, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $O(\delta_1, x_1), \ldots, O(\delta_k, x_k)$. По построению каждому из чисел $x_1, \ldots, x_k$ соответствуют свои номера $n_1, \ldots, n_k$ и функция $p_{n_1}(y), \ldots, p_{n_k}(y)$ такие, что $0 \leq p_{n_s}(y) < \varepsilon$ при всех $y \in O(\delta_s, x_s)$. Положим $n_0 = \max_{1 \leq s \leq k} n_s$. Тогда имеем $0 \leq p_{n_0}(y) \leq$ $\leq p_{n_s}(y) < \varepsilon$ при любом $y \in O(\delta_{n_s}, x_{n_s})$ и $s = 1, \ldots, k$. Поскольку каждая точка y из отрезка I входит в некоторую такую окрестность, в каждой из них выполняется неравенство $0 \leq p_{n_0}(y) < \varepsilon$. Но тогда для всех $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ и одновременно для всех $y \in I$ имеем

$$|p_n(y)| < \varepsilon,$$

т.е. $p_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Если в теореме 1 в качестве $p_n(x)$ рассматривать последовательность остатков $r_n(x)$ функционального ряда $\sum a_n(x)$ с условием $a_n(x) \geq 0$, то вместе с доказанной ранее теоремой о сохранении непрерывности суммы ряда при его равномерной сходимости мы получим следующий критерий.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы сумма ряда, составленного из непрерывных и неотрицательных функций на отрезке $I = [a, b]$, была также непрерывна на I, необходимо и достаточно, чтобы ряд сходился равномерно на этом отрезке.*

Замечание. Для справедливости утверждения теоремы 1 существенно, что отрезок I является компактом. Если, например, в ее условии отрезок I заменить интервалом, то она уже не будет верной. Это подтверждает разобранный ранее пример ряда $\sum x(1-x)^n$, который не является равномерно сходящимся на интервале $(0,2)$.

§ 6. ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДА

Наша дальнейшая цель состоит в нахождении условий, обеспечивающих возможность почленного дифференцирования и интегрирования функциональных рядов. Понятие равномерной сходимости ряда и здесь играет главную роль.

Обратим внимание на то, что теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда означает, что

$$A(x_0)=\lim_{x\to x_0}A(x)=\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty}A_n(x))=\lim_{x\to x_0}\sum a_n(x)=$$

$$=\sum a_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}A_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0}A_n(x)).$$

Другими словами, эта теорема позволяет менять порядок выполнения двух последовательных предельных переходов вида $x\to x_0$ и $n\to\infty$. Далее будет доказано утверждение весьма общего вида, а пока отметим, что почленное дифференцирование, как и почленное интегрирование, тоже можно рассматривать как изменение порядка выполнения предельных переходов относительно двух баз множеств разного типа.

Рассмотрим вопрос о почленном интегрировании ряда.

Теорема 1. *Сумма $A(x)$ равномерно сходящегося на $I=[\alpha,\beta]$ ряда $\sum a_n(x)$, составленного из функций, интегрируемых на $[\alpha,\beta]$ по Риману, тоже является интегрируемой по Риману функцией, причем*

$$B=\int_\alpha^\beta A(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_\alpha^\beta a_n(x)dx=\sum_{n=1}^\infty b_n.$$

Доказательство. Согласно критерию Лебега интегрируемости функции по Риману мера множества T_n точек разрыва каждой из функций $a_n(x)$ равна нулю. Но тогда объединение T всех таких множеств, $T=\cup T_n$, также имеет лебегову меру нуль. Все остальные точки промежутка I будут общими точками непрерывности одновременно для всех функций $a_n(x)$. Поэтому в силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ сумма $A(x)$ этого ряда будет ограничена и в этих точках непрерывна. Другими словами, тогда лебегова мера точек разрыва ограниченной функции $A(x)$ тоже равна нулю и согласно критерию Лебега $A(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha, \beta]$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} A_n(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} r_n(x).$$

Но так как $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то $\sup\limits_{I} |r_n(x)| = \rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получим

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} A(x)\, dx - \int_{\alpha}^{\beta} A_n(x)\, dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |r_n(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} \rho_n\, dx = \rho_n(\beta - \alpha) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $(B - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k) \to 0$ при $n \to \infty$ и $B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Теорема 1 доказана.

Полученный результат позволяет весьма просто доказать первое правило почленного дифференцирования ряда.

Теорема 2. *Ряд $\sum a_n(x)$ можно почленно дифференцировать, если:*

1) он сходится в некоторой точке x_0 отрезка $I = [\alpha, \beta]$;

2) производные всех его слагаемых $a_n(x)$ существуют и непрерывны на I;

3) ряд $\sum a_n'(x)$, составленный из этих производных, равномерно сходится на отрезке I.

Точнее, имеем:

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = A_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} A(x)$;

2) $A'(x) = \sum a_n'(x)$.

Доказательство. Условия данной теоремы позволяют применить теорему 1 для почленного интегрирования ряда $\sum a_n'(x)$ на отрезке с концами x_0 и t при любом $t \in [\alpha, \beta]$. При этом с помощью формулы Ньютона – Лейбница получим

$$A(t) - A(x_0) = B(t) = \int_{x_0}^{t} A'(x)dx = \int_{x_0}^{t} \sum a_n'(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{t} a_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t) - a_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t).$$

Это равенство означает, что $A'(t) = B'(t) = \sum a'_n(t)$. Осталось показать, что ряд $\sum a_n(x)$ сходится равномерно на I. Имеем

$$\beta_n(t) = \int_{x_0}^{t} r'_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{t} \sum_{k=n+1}^{\infty} a'_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(t) - a_k(x_0)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n(t), \quad \beta_n(t) = B(t) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t).$$

Но $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, поэтому существует последовательность p_n с условием $p_n \to 0$ и $|r'_n(x)| \le p_n$ при всех достаточно больших $n > n_0$ и всех $x \in I$. Следовательно,

$$|\beta_n(t)| \le \int_{x_0}^{t} |r'_n(x)|\,dx \le \int_{x_0}^{t} p_n dx = p_n(t - x_0) \le p_n(\alpha - \beta).$$

Это значит, что $\beta_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n(t)$ сходится равномерно на I, а вместе с ним и ряд $\sum a_n(x)$ тоже равномерно сходится, так как

$$A(t) = \sum a_n(t) = \sum b_n(t) + \sum a_n(x_0),$$

где $\sum a_(x_0)$ — сходящийся числовой ряд. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть:*

1) ряд $\sum a_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in I = [\alpha, \beta]$;

2) ряд $\sum a'_n(x)$ равномерно сходится на I.

Тогда ряд $\sum a_n(x)$ тоже равномерно сходится на I, причем его сумма $A(x)$ имеет производную $A'(x)$, равную сумме ряда $\sum a'_n(x)$.

Заметим прежде всего, что здесь нельзя воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница, поскольку функции $a'_n(x)$ могут уже не интегрироваться по Риману и необходимо действовать по-иному.

Доказательство. Докажем сначала, что исходный ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на I. Для этого проверим выполнение для него критерия Коши. Точнее, мы будем рассматривать разность

$$\sum (a_n(x) - a_n(x_0)) = \sum h_n(x),$$

что допустимо, так как $\sum a_n(x) = \sum h_n(x) + \sum a_n(x_0)$, где числовой ряд $\sum a_n(x_0)$ сходится.

Применяя к отрезку ряда $\sum h_n(x)$ формулу конечных приращений Лагранжа, при некотором $t \in (x_0, x)$ будем иметь

$$T = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} h_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k(x) - a_k(x_0)) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (x - x_0) a_n'(t) \right|.$$

Но тогда по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ и при достаточно большом $n > n_0$ и любом $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$T \leq |x - x_0| \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n'(t) \right| < \varepsilon |x - x_0|.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, это означает, что условие критерия Коши для ряда $\sum h_n(x)$ тоже выполнено и он равномерно сходится вместе с рядом $\sum a_n(x)$.

Теперь необходимо показать, что его сумму $A(x)$ можно дифференцировать, причем производная суммы равна сумме производных во всякой точке x_1 отрезка $I = [\alpha, \beta]$. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta r_n(x)}{\Delta x} = D_n + R_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$ произвольно.

Снова применяя формулу конечных приращений, для величины R_n получаем оценку

$$|R_n| = \left| \frac{r_n(x) - r_n(x_1)}{x - x_1} \right| = \lim_{p \to \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1} \right| \leq$$

$$\leq \sup_p \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1} \right| \leq \sup_{\substack{t \in I \\ p \in N}} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k'(t) \right| = T_1.$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n'(x)$ величина T_1 при любом заданном значении $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $n > n_1(\varepsilon)$ становится меньше, чем ε. Поэтому при таких n имеем $|R_n| < \varepsilon$. Полагая $D(x) = \sum a_n'(x)$ и $d_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k'(x) = D(x) - A_n(x)$, при тех же n и всех $x \in I$, очевидно, имеем оценку

$$|d_n(x)| \leq T_1 < \varepsilon.$$

Далее, функция $A_n(x)$ дифференцируема при любом x, поэтому

$$D_n = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} = A_n'(x_1) + \gamma_n(x),$$

где $\gamma_n(x) \to 0$ при любом фиксированном n и $x \to x_1$.

Зафиксируем теперь какое-либо $n > n_0(\varepsilon)$, например $n = n_0(\varepsilon)+1$, и выберем число $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при данном n и всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\gamma_n(x) < \varepsilon$. Тогда для всех таких x имеем

$$\left|\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} - D(x_1)\right| = |D_n + R_n - D(x_1)| =$$

$$= |A_n'(x_1) + \gamma_n(x) + R_n - D(x_1)| = |\gamma_n(x) - d_n(x_1) + R_n| < 3\varepsilon,$$

а это значит, что $\Delta A(x)/\Delta x \to D(x_1)$ при $\Delta x \to 0$ или $A'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. Теорема 3 доказана полностью.

Лекция 11

§ 7. ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПО БАЗЕ МНОЖЕСТВ

Встречавшиеся ранее примеры равенства повторных пределов различных типов ясно подсказывают целесообразность выработки возможно более общего взгляда на этот вопрос. Здесь мы рассматриваем его в связи с еще одним понятием — понятием предела по совокупности двух баз. Нам потребуется ряд новых определений.

Определение 1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на декартовом произведении $X \times Y$ двух множеств X и Y, т.е. на множестве всех пар (x,y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Пусть на множестве X задана некоторая база B. Будем говорить, что* **функция $f(x,y)$ сходится к функции $g(y)$ по базе B равномерно на множестве** Y, *если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b(\varepsilon)$ независимо от $y \in Y$ справедливо неравенство $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. В этом случае будем писать:*

$$f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y).$$

Рассмотрим теперь базу $D = \{d\}$, заданную на множестве Y.

Определение 2. *Если $f(x,y)$ сходится к $g(y)$ по базе B, а функция $g(y)$ сходится к l_1 по базе D, то число l_1 назовем* **повторным пределом** *функции $f(x,y)$ по базам B и D. Этот предел будем обозначать символом $\lim\limits_{D}\lim\limits_{B} f(x,y) = l_1$.*

Изменяя порядок выполнения предельных переходов, можно рассматривать еще один повторный предел, а именно, $\lim\limits_{B}\lim\limits_{D} f(x,y) = l_2$. Далее введем понятие двойного предела по базам B и D.

Определение 3. *Рассмотрим в качестве основного множества декартово произведение $X \times Y$, состоящее из всевозможных пар (x,y), где $x \in X$ и $y \in Y$, и рассмотрим определенную на нем базу H, составленную из всех возможных сочетаний h вида $h = b \times d$, где $b \in B$ и $d \in D$. Эту базу будем называть* **декартовым произведением баз** *B и D и обозначать: $H = B \times D$.*

Легко убедиться в том, что множество H действительно образует базу множеств. В самом деле: 1) каждый ее элемент $h = b \times d$, очевидно, не пуст и 2) пересечение любых двух ее элементов $h_1 \cap h_2 = (b_1 \times d_1) \cap (b_2 \times d_2)$ содержит некоторый третий элемент $h_3 = b_3 \times d_3$, где окончания $b_3 \in B$ и $d_3 \in D$ удовлетворяют условиям $b_3 \subset b_1 \cap b_2$ и $d_3 \subset d_1 \cap d_2$.

Т е о р е м а 1 (теорема о двойном и повторном пределах по базам множеств). *Пусть* $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} F_1(y)$ *и* $f(x,y) \xrightarrow{D} F_2(x)$. *Тогда существуют оба повторных предела:*

$$\lim_D \lim_B f(x,y) = l_1, \quad \lim_B \lim_D f(x,y) = l_2$$

и двойной предел по базе $H = B \times D$:

$$\lim_H f(x,y) = l_3,$$

причем $l_1 = l_2 = l_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Поскольку $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} F_1(y)$, существует окончание $b = b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b(\varepsilon)$ и при всех $y \in Y$ справедливо условие $|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/3$. Зафиксируем какое-либо $x = x_0 \in b(\varepsilon)$. В силу условия $f(x_0,y) \xrightarrow{D} F_2(x_0)$ найдется окончание $d = d(\varepsilon) \in D$, для всех точек y_1 и y_2 которого имеем $|f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)| < \varepsilon/3$. Но тогда при тех же y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$|F_1(y_1) - F_1(y_2)| =$$

$$= |(F_1(y_1) - f(x_0,y_1)) + (f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)) + (f(x_0,y_2) - F_1(y_2))| \le$$

$$\le |F_1(y_1) - f(x_0,y_1)| + |f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)| + |f(x_0,y_2) - F_1(y_2)| <$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

По критерию Коши отсюда следует, что при некотором l имеем $F_1(y) \xrightarrow{D} l$, т.е. $\lim\limits_D \lim\limits_B f(x,y) = l$. Теперь покажем, что $f(x,y) \xrightarrow{H} l$, где $H = B \times D$. Поскольку $F_1(y) \xrightarrow{D} l$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $d = d(\varepsilon) \in D$ с условием $|F_1(y) - l| < \varepsilon/2$ при всех $y \in d(\varepsilon)$. Далее, в силу того, что $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} F_1(y)$, найдется окончание $b(\varepsilon)$ с условием $|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/2$ при всех $x \in b(\varepsilon)$ и $y \in Y$. Возьмем теперь в качестве $h = h(\varepsilon) \in H$ окончание $h(\varepsilon) = b(\varepsilon) \times d(\varepsilon)$. Тогда для всех его элементов (x,y) имеем неравенство

$$|f(x,y) - l| \le |f(x,y) - F_1(y)| + |F_1(y) - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Это значит, что $f(x,y) \xrightarrow{H} l$.

Осталось доказать, что $F_2(x) \xrightarrow{B} l$. Для этого в неравенстве

$$|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/2,$$

справедливом при всех $(x,y) \in h(\varepsilon) = b(\varepsilon) \times d(\varepsilon)$, при каждом фиксированном x рассмотрим предел по базе D. Тогда получим

$$|F_2(x) - l| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Это и означает, что $F_2(x) \xrightarrow{B} l$. Теорема 1 доказана.

Профессор Т. П. Лукашенко обратил внимание на критерий существования и равенства повторных пределов по совокупности двух баз B и D, доказанный Р. А. Гордоном [32] в 1995 г. Это утверждение обобщает соответствующий критерий А. А. Маркова (1856 - 1922) для повторных рядов.

Т е о р е м а 2 (критерий существования повторных пределов по базам множеств). *Пусть на множестве $X = \{x\}$ задана база B, а на множестве $Y = \{y\}$ — база D. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную на декартовом произведении $X \times Y$ и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$f(x,y) \xrightarrow{B} g(y); \ f(x,y) \xrightarrow{D} h(x).$$

Тогда для того чтобы оба повторных предела $\lim\limits_D \lim\limits_B f(x,y) = \lim\limits_D g(y)$ и $\lim\limits_B \lim\limits_D f(x,y) = \lim\limits_B h(x)$ существовали и были равны между собой, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b(\varepsilon) \in B$ такое, что для каждой его точки x существует свое окончание $d = d_x(\varepsilon) \in D$, для всех точек y которого выполнено неравенство $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть оба повторных предела существуют и равны l. Тогда справедлива оценка

$$|f(x,y) - g(y)| = |(f(x,y) - h(x)) + (h(x) - l) + (l - g(y))| \leq$$

$$\leq |f(x,y) - h(x)| + |h(x) - l| + |l - g(y)|.$$

Так как оба повторных предела равны l, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся окончания $b \in B$ и $d \in D$ такие, что при всех $x \in b$ и при всех $y \in d$ имеем

$$|h(x) - l| < \varepsilon/3 \quad \text{и} \quad |g(y) - l| < \varepsilon/3.$$

Кроме того, при фиксированном $x \in b$ в силу условия $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ найдется окончание $d_1 \in D$, для всех точек y которого выполнено неравенство $|f(x,y) - h(x)| < \varepsilon/3$. Теперь в качестве искомого окончания $b(\varepsilon)$ возьмем окончание b, а в качестве $d_x(\varepsilon)$ возьмем некоторый элемент $d_0 \in D$, принадлежащий пересечению d и d_1, т.е. $d_x(\varepsilon) = d_0 \subset$

$d \cap d_1$. Тогда для всех точек $x \in b(\varepsilon)$ и всех $y \in d_x(\varepsilon)$ будут выполнены все три неравенства, откуда имеем

$$|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим окончание $b(\varepsilon) \in B$ из условия теоремы. Проверим выполнение критерия Коши для сходимости $g(y)$ по базе D. Для этого рассмотрим фиксированную вспомогательную точку $x \in b(\varepsilon)$ и соответствующее ей окончание $d_x(\varepsilon)$ базы D. Далее, в силу сходимости $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ из критерия Коши следует, что при данном x найдется окончание $d \in D$ такое, что для всех $y_1, y_2 \in d$ справедливо неравенство $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$. Возьмем теперь окончание $d_0 \subset d \cap d_x(\varepsilon)$. Для любых точек y_1 и y_2, принадлежащих окончанию $d_0 \in D$, величина $\Delta = |g(y_1) - g(y_2)|$ оценивается так:

$$\Delta \le |g(y_1) - f(x,y_1)| + |f(x,y_1) - f(x,y_2)| + |f(x,y_2) - g(y_2)| < 3\varepsilon.$$

Это и означает, что при некотором l имеет место сходимость $g(y) \xrightarrow{D} l$.

Осталось показать, что $h(x) \xrightarrow{B} l$. Для этого снова возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему окончание $b(\varepsilon) \in B$, и для каждой фиксированной точки $x \in b(\varepsilon)$ оценим величину $\Delta_1 = |h(x) - l|$. Из условий $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ и $g(y) \xrightarrow{D} l$ следует, что существует окончание $d \in D$ такое, что для всех $y \in d$ выполняется неравенство

$$|f(x,y) - h(x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |g(y) - l| < \varepsilon.$$

Возьмем вспомогательную точку $y \in d \cap d_x(\varepsilon)$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_1 = |h(x) - l| \le |h(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - g(y)| + |g(y) - l| < 3\varepsilon.$$

Другими словами, имеем $h(x) \xrightarrow{B} l$. Теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Если в формулировке теоремы 2 положить $d_x(\varepsilon) = Y$, то получится условие равномерной сходимости по базе B относительно множества Y. В этом случае утверждение теоремы 2 будет следствием теоремы 1. Таким образом, теорема 2 позволяет осуществлять перестановку предельных переходов при более слабых ограничениях. Однако при этом двойной предел в общем случае уже не существует, так что обе теоремы имеют свои сферы применения. Тем не менее если в условии теоремы 2 считать, что в качестве $d_x(\varepsilon)$ можно взять окончание $d(\varepsilon)$ одним и тем же вне зависимости от точки $x \in b(\varepsilon)$, то двойной предел существует и равен повторному.

Отметим также, что утверждение теоремы 2, являясь критерием существования и равенства повторных пределов, симметрично относительно двух рассматриваемых баз, в то время как в ее условие обе базы входят неравноправно. Это дает определенную свободу выбора при ее использовании.

Лекция 12

§ 8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Напомним, что степенной ряд — это ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = A(x)$, где x_0 — фиксированное вещественное число. Основные свойства степенных рядов практически не зависят от x_0, и поэтому часто считают, что $x_0 = 0$.

Примерами степенных рядов являются рассмотренные ранее ряды Тейлора. Оказывается, что всякий степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы. Рассмотрим вопросы, связанные с определением области сходимости степенного ряда.

Определение 1. *Число R называется* **радиусом сходимости степенного ряда** $\sum a_n(x-x_0)^n$, *если этот ряд сходится при всех x с условием $|x-x_0| < R$ и расходится при $|x-x_0| > R$.*

Корректность определения обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1 (теорема Коши – Адамара). *Пусть задан степенной ряд $\sum f_n(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$. Рассмотрим числовую последовательность $b_n = |a_n|^{1/n}$. Тогда:*

1) если b_n является неограниченной последовательностью, то этот ряд расходится при всех $x \neq x_0$;

2) если b_n ограничена и $l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то $R = 1/l$;

3) если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то данный ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$.

Напомним, что для всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы.

Доказательство. Для краткости записи будем считать, что число x_0 равно нулю. Для общего члена числового ряда имеем равенство

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| = b_n^n\,|x|^n = (b_n\,|x|)^n\,.$$

В случае 1) общий член $f_n(x)$ не стремится к нулю и потому ряд расходится. В случае 2) при фиксированном $|x| < 1/l$ и любом $n > n_0$, применяя признак сходимости Коши в предельной форме к ряду $\sum |f_n(x)|$, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(x)|^{1/n} = x\varlimsup_{n\to\infty} b_n < l/l = 1.$$

Это значит, что все $x < 1/l$ принадлежат области сходимости ряда. Если же $|x| > 1/l$, то легко видеть, что общий член ряда, как и в случае 1), не стремится к нулю и ряд тоже расходится.

В случае 3) снова согласно признаку Коши при всех x имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|^{1/n} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 0 < 1,$$

т.е. ряд сходится. Теорема 1 доказана.

Замечание. Если $|x| = R$, то ряд $\sum f_n(x)$ в доказанной теореме может и сходиться и расходиться. Примером служит ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x},$$

для которого $R = 1$ и при $x = -1$ имеет место сходимость, а при $x = 1$ — расходимость.

Теорема 2. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$ и r — произвольное число с условием $0 < r < R$. Тогда на отрезке $[-r, r]$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно, а его сумма $A(x)$ непрерывна на нем.*

Доказательство. Точка $r_1 = (R + r)/2 < R$ принадлежит области сходимости ряда, поэтому при $x = r_1$ его общий член $a_n r_1^n$ ограничен, т.е. $|a_n| r_1^n < c$ при некотором $c > 0$ и всех n. В силу того, что $r < r_1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = \frac{c}{1 - r/r_1}.$$

Но тогда сходящийся ряд $\sum |a_n| r^2 < \infty$ будет мажорантой для $\sum a_n x^n$ на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, на этом отрезке ряд сходится абсолютно и равномерно.

При тех же условиях сумма $A(x)$ ряда $\sum a_n x^n$ является непрерывной функцией на отрезке $[-r, r]$, поскольку он сходится там равномерно и его члены непрерывны. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то на любом отрезке $[-r, r] \subset [-R, R]$ этот ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать на интервале сходимости.*

Доказательство. Формальное почленное дифференцирование степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дает ряд $x^{-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, а интегрирование его приводит к ряду $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+1}$. Для величин $|b_n|^{1/n}$ и $|c_n|^{1/n}$ в теореме Коши – Адамара имеем равенства

$$|b_n|^{1/n} = n^{1/n} |a_n|^{1/n}, \quad |c_n|^{1/n} = (n+1)^{-1/n} |a_n|^{1/n}.$$

Но так как $(n+1)^{-1/n} \to 1$ при $n \to \infty$, то по этой теореме радиусы сходимости всех трех рядов равны и ряды сходятся равномерно на любом отрезке вида $[-r, r]$, $r \le R$. Но тогда их можно почленно дифференцировать и интегрировать на этом интервале сходимости. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (теорема Абеля). *Пусть ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится в точке* $x = c > 0$. *Тогда его сумма* $A(x)$ *непрерывна на отрезке* $I = [0, c]$. *Если же число* $c < 0$, *то функция* $A(x)$ *непрерывна на отрезке* $[c, 0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $c > 0$. Представим общий член $a_n x^n$ этого ряда в виде

$$a_n x^n = \alpha_n(x)\beta_n(x),$$

где $\alpha_n(x) = a_n c^n$ и $\beta_n(x) = x^n/c^n$. Тогда к этому ряду на отрезке $I = [0, c]$ можно применить признак равномерной сходимости Абеля, так как:

1) ряд $\sum a_n c^n$ не зависит от x и поэтому сходится равномерно на отрезке I;

2) последовательность $\beta_n(x) = x^n/c^n$ монотонна и равномерно ограничена на I, так как $|x^n/c^n| \le 1$ при всех $x \in I$.

Но тогда сумма $A(x)$ этого ряда непрерывна на I. Случай $c < 0$ сводится к рассмотренному заменой $y = -x$. Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (выражение коэффициентов степенного ряда через значения производных его суммы в точке разложения). *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = A(x)$ *имеет положительный радиус сходимости* R. *Тогда* $a_0 = A(x_0)$ *и при всех* $n \ge 1$ *имеем равенства* $a_n = A^{(n)}(x_0)/n!$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3 равенство $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ можно почленно дифференцировать. Поэтому при $x = x_0$ имеем

$$A(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - x_0)^n = a_0,$$

$$A'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x_0 - x_0)^{n-1} = a_1 \cdot 1!,$$

$$A''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(x_0 - x_0)^{n-2} = a_2 \cdot 2!,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$A^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(x_0 - x_0)^{n-k} = a_k \cdot k!.$$

Отсюда и следует требуемое утверждение. Теорема 5 доказана.

Таким образом, степенной ряд $\sum a_n(x-x_0)^n$ с ненулевым радиусом сходимости всегда является разложением в точке $x = x_0$ в ряд Тейлора своей суммы $A(x)$. Представляет интерес вопрос о том, как связаны между собой радиусы сходимости двух тейлоровских разложений функции $A(x)$, взятые в различных точках x_0 и x_1. Здесь имеет место, например, следующая теорема.

Т е о р е м а 6. *Пусть $R_0 > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n(x-x_0)^n$. Рассмотрим другое разложение функции $A(x)$ в ряд Тейлора в точке x_1, где $|x_0 - x_1| = r < R_0$. Тогда, если $b_0, b_1, \ldots$ — его коэффициенты, а R_1 — радиус сходимости, то $R_1 \geq R_0 - r$ и $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$, если $|x - x_1| < R_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем для простоты считать, что $x_0 = 0$, и положим $x - x_1 = y$. Тогда $x - x_0 = x = y + x_1$, $|x_1| = |x_1 - x_0| = r$. Если $|y| < R_0 - r$, то $|y| + |x_1| < R_0 - r + r = R_0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|(|y| + |x_1|)^n$ сходится абсолютно. Но тогда повторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x_1^{n-k}$ тоже абсолютно сходится и его члены можно переставить произвольным образом. В силу этого имеем

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k b_k,$$

где $b_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_1^{n-k} = \frac{1}{k!}\left(\sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n x_1^{n-k}\right)$.

Тем самым мы установили, что разложение $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^k$ функции $A(x)$ в ряд Тейлора в точке x_1 с условием $|x_1 - x_0| = r < R_0$ сходится абсолютно к сумме $A(x)$ при всех $|y| < R_0 - r$. Теорема 6 доказана.

Введем следующее определение.

Определение 2. *Функция $A(x)$ называется* **аналитической в точке** $x = x_0$, *если в некоторой окрестности этой точки она может быть представлена степенным рядом, т.е. ее рядом Тейлора.*

Теорема 6 показывает, что в каждой точке внутри области сходимости степенного ряда его сумма $A(x)$ является аналитической функцией. Заметим еще, что внутренность области сходимости всегда является интервалом, возможно, бесконечного радиуса, так что говорят об интервале сходимости степенного ряда.

Возможно, что при разложении суммы $A(x)$ степенного ряда $\sum a_n(x-x_0)^n$ в какой-либо точке $x_1 \neq x_0$ из его области сходимости новый степенной ряд $\sum b_1(x-x_1)^n = A(x)$ будет иметь свой интервал сходимости, выходящий за пределы прежнего интервала. Рассмотрим, например, разложение вида

$$A(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x-1)/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2^2} - \ldots$$

Здесь разложение по степеням x имеет радиус сходимости $R_0 = 1$, а по степеням $(x-1)$ — радиус $R_1 = 2$.

Определение 3. *Метод распространения области определения аналитической функции путем ее разложения в степенной ряд в точке, не совпадающей с центром первоначальной области определения, называется* **принципом аналитического продолжения функции**.

Особую ценность этот принцип приобретает при рассмотрении степенных рядов от комплексного аргумента. Дело в том, что формальная подстановка комплексного числа $z = a+bi$ вместо вещественного x в степенной ряд $\sum a_n(x-x_0)^n$ позволяет естественным образом распространить область определения функции $A(x)$ на точки комплексной плоскости. Для этого достаточно ввести понятие сходимости ряда, составленного из комплексных чисел. Самый простой способ сделать это состоит в том, чтобы считать ряд $\sum(a_n + ib_n)$ сходящимся к комплексному числу $A + Bi$, если одновременно $\sum a_n$ сходится к A и $\sum b_n$ сходится к B. Можно очень просто показать, что для сходимости рядов с комплексными членами верен мажорантный признак Вейерштрасса. Но тогда если, например, ряд $\sum a_n x^n$ сходится при некотором $x = x_0 \neq 0$, то при всех r с условием $r < |x_0|$ ряд $\sum |a_n| \cdot r^n$ тоже сходится. А если $z = a + bi$ и $|z| = r$, то сходится и ряд $\sum a_n z^n$. Это значит, что область сходимости ряда $\sum a_n z^n$ содержит на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ круг радиуса $R = |x_0|$ с центром в нуле. Используя принцип аналитического продолжения, можно определить значения аналитической функции и в других точках комплексной плоскости. Важно, что указанная процедура, по существу, дает в некотором смысле однозначное продолжение. Такой способ позволяет однозначно продолжить на комплексную плоскость все элементарные функции. Например, оказывается, что при вещественных a и b имеем

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Аналитические функции на комплексной плоскости играют очень большую роль в математике. Связанные с ними проблемы составляют содержание обширной ее области — теории функций комплексного переменного, знакомство с которой входит в отдельный курс.

Задача. *Пусть $f(x)$ — функция, бесконечно дифференцируемая на интервале (a, b). Обозначим через k_n число решений уравнения $f^{(n)}(x) = 0$. Пусть $k_n < C$ при некотором C и всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что функция $f(x)$ является аналитической на интервале (a, b).*

Лекция 13

§ 9. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определение 1. *Рассмотрим числовую последовательность положительных чисел $\{b_n\}$. Формальное бесконечное произведение всех ее членов*

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n \cdots .$$

называется **бесконечным числовым произведением**, *или* **бесконечным произведением**, *или просто* **произведением.**

Бесконечное произведение обозначается так:

$$b_1 \cdot b_2 \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod b_n.$$

Определение 2. *Конечное произведение Π_n вида $\Pi_n = b_1 \cdots b_n$ называется* n**-м частичным произведением.**

Определение 3. *Если последовательность Π_n сходится к числу $\Pi \neq 0$ (т.е. $\Pi > 0$), то бесконечное произведение называется* **сходящимся** *(к числу Π). Если $\Pi = 0$, то это бесконечное произведение называется* **расходящимся к нулю,** *а если $\Pi \to +\infty$, то оно называется* **расходящимся к бесконечности.** *Если предела нет вообще, то оно называется просто* **расходящимся.**

Утверждение 1 (необходимый признак сходимости бесконечного произведения). *Если Πb_n сходится, то $b_n \to 1$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Если $\Pi_n \to \Pi \neq 0$, то

$$b_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \to \frac{\Pi}{\Pi} = 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Сходимость бесконечного произведения Πb_n влечет за собой сходимость ряда $\ln b_n$, и наоборот, причем*

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \ln b_n.$$

Доказательство. Имеем $\ln \Pi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln b_k$. Функция $y = \ln x$ устанавливает непрерывное взаимно однозначное соответствие между лучом $(0,+\infty)$ и всей вещественной осью $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$. Поэтому в силу положительности b_n для всех $n \in \mathbb{N}$ возможен переход к пределу в одной части равенства при сходимости другой его части, и при этом $\ln \Pi = \sum_{k=1}^{\infty} \ln b_k$. Сходимость к нулю левой части равенства эквивалентна сходимости к $-\infty$ правой его части. Утверждение доказано.

Замечание. Очевидно, что отбрасывание или добавление любого конечного числа ненулевых сомножителей не влияет на сходимость бесконечного произведения. Поэтому можно считать, что конечное число членов этого произведения могут быть и отрицательными.

Определение 4. *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *называется* **абсолютно сходящимся,** *если абсолютно сходится ряд* $\sum \ln b_k$. *Это означает сходимость ряда* $\sum |\ln b_n|$. *Сходящееся бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *не являющееся абсолютно сходящимся, называется* **условно сходящимся.**

Из предыдущего утверждения и теоремы о сходимости абсолютно сходящегося ряда непосредственно вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Абсолютно сходящееся произведение всегда сходится в обычном смысле.*

Поскольку мы считаем, что $b_n > 0$ при всех n, числа b_n обычно представляют в виде $b_n = 1 + a_n$, где $a_n > -1$. Тогда имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Т е о р е м а 2 (критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения). *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum |a_n|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $1 + a_n \to 1$ при $n \to \infty$, то $a_n \to 0$. Однако

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1, \quad \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} \to 1.$$

Следовательно, при достаточно большом $n > n_0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} < \frac{3}{2}.$$

Если, например, сходится ряд $\sum |\ln(1+a_n)|$, то он будет мажорантой для ряда $\sum |a_n|/2$, а если сходится ряд $\sum |a_n|$, то он является мажорантой для ряда $\sum 2|\ln(1+a_n)|/3$. Но это означает, что ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |\ln(1+a_n)|$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема 2 доказана.

Следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если при достаточно большом $n > n_0$ все числа a_n имеют один и тот же знак, то сходимость произведения $\prod(1+a_n)$ эквивалентна сходимости ряда $\sum a_n$.*

Доказательство. Поскольку и сходимость ряда, и сходимость произведения влечет за собой соотношения

$$a_n \to 0, \quad \ln(1+a_n) \to 0, \quad \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

отсюда следует, что при достаточно большом $n > n_0$ величина $\ln(1+a_n)$ сохраняет знак вместе с a_n. Это означает, что сходимость рядов $\sum a_n$, $\sum \ln(1+a_n)$ и произведения $\Pi(1+a_n)$ эквивалентна их абсолютной сходимости. Теперь, применяя теорему 2, получаем требуемое утверждение.

Рассмотрим некоторые примеры бесконечных произведений.

Пример 1. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(s)$. По определению имеем

$$\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n},$$

где $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ — любое вещественное число (или даже комплексное число, если определение 3 распространить на комплексные числа), γ — постоянная Эйлера,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0,577\ldots .$$

Бесконечное произведение, через которое определяется гамма-функция Эйлера, сходится абсолютно при любом $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, так как при достаточно большом $n > n_0$ в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа справедлива оценка

$$|\ln b_n| = \left|\ln\left(\left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n}\right)\right| = \left|\frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right| < \frac{s^2}{n^2},$$

и сходящийся ряд $\sum s^2/n^2$ является мажорантой для ряда $\sum |\ln b_n|$.

Утверждение 4 (формула Эйлера). *Имеет место следующая формула:*

$$\Gamma(s) = s^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/n)^s (1+s/n)^{-1}.$$

Доказательство. Уже доказано, что бесконечное произведение в определении гамма-функции сходится абсолютно в любой точке своей области определения. Поэтому из определения гамма-функции имеем

$$\Gamma(s) = s^{-1} \lim_{m\to\infty} e^{-s(1+1/2+\cdots+1/m-\ln m)} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} =$$

$$= s^{-1} \lim_{m\to\infty} m^s \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} = s^{-1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} =$$

$$= s^{-1} \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{m} \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right) \left(1+\frac{1}{m}\right)^{-s} =$$

$$= s^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5 (функциональное уравнение для гамма-функции Эйлера $\Gamma(s)$). *Справедлива следующая формула:*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1.$$

Доказательство. По формуле Эйлера имеем, что $\Gamma(1) = 1$, а также

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \frac{s}{s+1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^{s+1}}{(1+1/n)^s} \frac{1+s/n}{1+(s+1)/n} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{n+s}{n+s+1} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{2\cdot 3\ldots(m+1)}{1\cdot 2\ldots m} \frac{(1+s)\ldots(m+s)}{(2+s)\ldots(m+1+s)} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} (s+1)\frac{m+1}{m+1+s} = s.$$

Отсюда следует, что $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Утверждение доказано.

Из утверждения 5 непосредственно получаем такое следствие.

С л е д с т в и е. *Для натуральных чисел n имеем* $\Gamma(n+1) = n!$.

Далее будет доказано, что при $s > 0$ имеет место формула интегрального представления для $\Gamma(s)$ вида

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Пример 2. При всех вещественных x следующее бесконечное произведение сходится:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

Это равенство мы докажем позднее, а сходимость вытекает из утверждения 3.

Пример 3. Бесконечное произведение для дзета-функции Римана. При $s > 1$ функция $\zeta(s)$ определена сходящимся рядом $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ — последовательно занумерованные простые числа натурального ряда.

Утверждение 6 (формула Эйлера бесконечного произведения дзета - функции Римана $\zeta(s)$). *При $s > 1$ имеет место следующая формула:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\Pi_k = \prod_{m=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_m^s}\right)^{-1} = \prod_{m=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_m^s} + \frac{1}{p_m^{2s}} + \ldots\right).$$

Раскрывая скобки, согласно неравенству $p_k > k$, справедливому при всех $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\Pi_k > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\Pi_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m^s},$$

где a_m — некоторая подпоследовательность натуральных чисел, которая не содержит повторений в силу однозначности разложения натурального числа на простые сомножители. Отсюда имеем неравенства

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m^s} > \Pi_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем требуемый результат. Утверждение доказано.

При $s = 1$ справедлива оценка

$$\Pi_k = \prod_{m=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_m^2} + \ldots) > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k},$$

поэтому произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k})^{-1}$ расходится к $+\infty$, а вместе с ним расходятся ряды $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{p_k})$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$.

§ 10. БЕСКОНЕЧНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Понятие определителя бесконечного порядка возникает в связи с изучением систем из бесконечного числа линейных уравнений от бесконечного количества неизвестных. Потребность в рассмотрении таких систем уравнений и таких определителей впервые возникла при исследовании задачи об определении движения перигелия лунной орбиты, которое провел Г. Хилл. Позже, в 1886 г. А. Пуанкаре дал строгое математическое обоснование метода Хилла. Еще одно приложение метода бесконечных определителей дано в работах Е. Фредгольма в 1903 г. при исследовании линейных интегральных уравнений.

Пусть b_{mn} — двойная последовательность вещественных чисел. Обозначим через $D_m = \|B_m\|$ определитель квадратной матрицы $B_m = (b_{kl})$, где индексы k и l пробегают значения от 1 до m. В этой матрице число b_{kl} находится на пересечении строки с номером k и столбца с номером l. Главную диагональ этой матрицы образуют числа b_{kk}, где $k = 1, \ldots, m$. Обозначим через B бесконечную матрицу $\|b_{mn}\|$, где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$.

Определение 1. *Если последовательность определителей D_m сходится к числу D при $m \to \infty$, то будем говорить, что бесконечный определитель $D = \|B\|$ матрицы B* **сходится** *к числу D или что он равен D.*

Если последовательность D_m расходится, то этот определитель будем называть **расходящимся.**

Определители D_m будем называть **частичными определителями** бесконечного определителя D. Введем новые обозначения. Для диагональных элементов матрицы B положим $b_{nn} = 1 + a_{nn}$. Если же $m \neq n$, то будем считать, что $a_{mn} = b_{mn}$.

Определение 2. Мажорантой Пуанкаре *бесконечного определителя D назовем бесконечное произведение P вида*

$$P = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \right)$$

при условии, что все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходятся и само произведение P тоже сходится.

Определение 3. *Конечное произведение* P_m *вида*

$$P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} |a_{kl}|\right)$$

называется **мажорантой Пуанкаре** *определителя* D_m.

Теорема 1 (лемма Пуанкаре). *При всех* $m \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки:*

1) $|D_m| \le P_m$;

2)$|D_{m+1} - D_m| \le P_{m+1} - P_m$.

Доказательство. 1. Определитель D_m состоит из $m!$ слагаемых вида

$$(-1)^{c(\sigma)} b_{1l_1} \cdot \ldots \cdot b_{ml_m}.$$

Здесь $c(\sigma)$ — функция четности подстановки $\sigma = (l_1, \ldots, l_m)$, $c(\sigma) = 0$ для четной и $c(\sigma) = 1$ для нечетной подстановки σ. Следовательно,

$$|D_m| = \sum_{\sigma} |b_{1l_1} \cdots b_{ml_m}| \le \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{m} |b_{kl}|\right) \le$$

$$\le \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} |a_{kl}|\right) = P_m.$$

Утверждение 1 доказано.

2. Разложим определитель D_{m+1} по элементам последней строки. Получим

$$D_{m+1} = a_{m+1,1} A_{m+1,1} + \cdots + a_{m+1,m} A_{m+1,m} + (1 + a_{m+1,m+1}) D_m.$$

Здесь $A_{m+1,k}$ — алгебраические дополнения в матрице B_{m+1} к элементам $a_{m+1,k}$ ее последней строки

$$A_{m+1,l} = (-1)^{m+1+l} \begin{vmatrix} 1 + a_{1,1} & \ldots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \ldots & a_{1,m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,l-1} & a_{m,l+1} & \ldots & a_{m,m+1} \end{vmatrix}.$$

Как и выше (при доказательстве п. 1), имеем

$$|A_{m+1,l}| \le \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \ne l}}^{m+1} |b_{k,n}|\right) \le \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{n=1}^{m+1} |a_{k,n}|\right) = Q_m.$$

Заметим, что $Q_m \ge P_m > 0$ и $P_{m+1} = Q_m(1 + \sum\limits_{l=1}^{m+1} |a_{m,l}|)$. Поэтому

$$|D_{m+1} - D_m| \le$$

$$\le |a_{m+1,1}| \cdot |A_{m+1,1}| + \cdots + |a_{m+1,m}| \cdot |A_{m+1,m}| + |a_{m+1,m+1}| \cdot |D_m| \le$$

$$\le Q_m(|a_{m+1,1}| + \cdots + |a_{m+1,m}| + |a_{m+1,m+1}|) = P_{m+1} - Q_m = P_{m+1} - P_m.$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (теорема Пуанкаре). *Бесконечный определитель сходится, если абсолютно сходятся бесконечное произведение его диагональных элементов и двойной ряд, составленный из его недиагональных элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $b_{m,m} = 1 + a_{m,m}$, то абсолютная сходимость $\prod\limits_{m=1}^{\infty} b_{m,m}$ произведения диагональных элементов эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{m,m}|$. Кроме этого, по условию сходится и двойной ряд $\sum\limits_{m\neq n} |a_{m,n}|$.

Но тогда сходится и бесконечное произведение P, где

$$P = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|\right),$$

так как его сходимость обеспечена сходимостью повторного ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|$. Представим значение определителя D матрицы B в виде суммы ряда:

$$D = D_1 + (D_2 - D_1) + (D_3 - D_2) + \cdots = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} d_n.$$

Согласно теореме 1 при всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|d_{n+1}| = |D_{n+1} - D_n| \leq P_{n+1} - P_n = p_{n+1},$$

где P_n — мажоранты Пуанкаре определителя D_n и $P_n \leq P$. Отсюда следует, что сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{n+1} = P - P_1$ является мажорантой для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_{n+1}$, и поэтому сходится последний ряд, а также и последовательность его частичных сумм D_n. Но это и означает сходимость бесконечного определителя D. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место и для бесконечного определителя D матрицы B вида $B = (b_{m,n})$, где $-\infty < m, n < +\infty$. Здесь частичные определители D_m и матрицы B_m имеют вид

$$D_m = \|B_m\|, \quad B_m = (b_{k,l}), \quad -m < k, l < m.$$

Задача. *Доказать теорему Коха о том, что необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости определителя D вида*

$$D = \lim_{m\to\infty} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_m \\ 0 & 0 & \dots & \beta_m & 1 \end{vmatrix}$$

является абсолютная сходимость ряда $\sum \alpha_n\beta_n$. При этом абсолютная сходимость определителя D означает сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |D_{m+1}-D_m|$.

В заключение дадим еще одно определение, обобщающее понятие мажоранты Пуанкаре.

Определение 4. *Пусть $A_n(x)$ — функциональная последовательность, а B_n – числовая последовательность, причем $B_n \to B$ при $n \to \infty$. Пусть также при всех $n \in \mathbb{N}$ для каждого $x \in D$ справедливо неравенство $|A_{n+1}(x) - A_n(x)| \le B_{n+1} - B_n$. Тогда числовая последовательность B_n называется* **мажорантой** *для последовательности функций $A_n(x)$ на множестве D.*

Очевидно, что последовательность $A_n(x)$, имеющая на множестве D мажоранту B_n, равномерно сходится на этом множестве.

§ 11. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТЕОРЕМА АРЦЕЛА

Докажем теорему Арцела, важную главным образом для приложений за пределами основного курса математического анализа.

Определение 1. *Множество функций M называется* **равностепенно непрерывным** *на отрезке $I = [a,b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой функции $f(x) \in M$ и любых x_1 и x_2 с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ справедливо неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (теорема Арцела). *Если бесконечное множество функций M равномерно ограничено на отрезке I и равностепенно непрерывно на нем, то из всякой последовательности функций $f_n(x) \in M$ можно выбрать подпоследовательность $f_{n_k}(x)$, равномерно сходящуюся на I к некоторой непрерывной на I функции $f_0(x)$, не обязательно принадлежащей M.*

Доказательство. Будем для простоты считать, что $I = [0,1]$. Идея доказательства состоит в замене с допустимой ошибкой произвольной точки x при использовании критерия Коши на близкую к ней двоично-рациональную точку с возможно меньшим знаменателем.

Занумеруем множество $\{x_n\}$ всех двоично-рациональных чисел $a/2^k$ этого отрезка в порядке возрастания показателя степени k при его различных значениях и в порядке возрастания числителя дроби a при равных значениях знаменателя дроби 2^k. Таким образом, имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1/4$, $x_5 = 3/4, \dots, x_{2^k+1} = (2^k - 1)/2^k$, $x_{2^k+2} = 1/2^{k+1}, \dots$. Рассмотрим теперь множество чисел $B_1 = \{f_k(x_1)\}$, где $f_n(x)$ — исходная последовательность функций, $f_n(x) \in M$. Множество B_1 ограничено в силу условий, наложенных на M, и по теореме Больцано – Вейерштрасса из последовательности B_1 можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $f_{n_m}(x_1)$.

Рассмотрим последовательность номеров $n_1, \dots, n_m, \dots$ получившейся последовательности и образуем первую вспомогательную подпоследовательность функций $G_1 = \{g_{1,m}(x)\}$, полагая $g_{1,m}(x) = f_{n_m}(x)$. Тогда будем иметь, что последовательность $g_{1,m}(x_1) = f_{n_m}(x_1)$ сходится к некоторому значению y_1.

Далее образуем по тому же правилу подпоследовательность функций $G_2 = \{g_{2,1}(x), \dots, g_{2,m}(x), \dots\}$, используя в предыдущих рассуждениях последовательность $g_{1,m}(x)$ вместо $f_n(x)$ и точку x_2 вместо x_1. В результате получим, что $g_{2,m}(x)$ — подпоследовательность для $\{g_{1,m}(x)\}$ и $g_{2,m}(x_2) \to y_2$ при $m \to \infty$. Многократно повторяя этот процесс, получим подпоследовательности $G_3 = \{g_{3,m}(x)\}$, $G_4 = \{g_{4,m}(x)\}$ и т.д., причем тогда $g_{k,m}(x_k) \to y_k$ при $m \to \infty$ и последовательность $g_{k,m}(x)$ будет подпоследовательностью относительно $g_{k-1,m}(x)$ при всех $k \geq 2$.

Рассмотрим теперь "диагональную" последовательность функций $\{h_n(x)\}$, где $h_n(x) = g_{n,n}(x)$. По построению, начиная с номера $n = k$, все функции $h_n(x)$ при $n \geq k$ образуют подпоследовательность последовательности G_k, поскольку $h_n(x) = g_{n,n}(x) \in G_n \subset G_{n-1} \subset \dots \subset G_k$. Отсюда следует, что при любом k и $n \geq k$ числовая последовательность $h_n(x_k)$ является подпоследовательностью для $g_n(x_k)$, и поэтому $h_n(x_k) \to y_k$ при $n \to \infty$.

Покажем, наконец, что последовательность функций $h_n(x)$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех m и $n > n_0$ одновременно для всех $x \in I$ выполнено неравенство $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Для этого, используя равностепенную непрерывность множества функций M, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon/3)$ такое, что при всех x_1 и $x_2 \in I$ с условием $|x_2 - x_1| < \delta$ и для любой функции $f(x) \in M$ имеем $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/3$. Выберем число k из условия $\delta/2 \leq 2^{-k} < \delta$ и перенумеруем все двоично-рациональные точки $x_1, \dots, x_{2^k+1}$ со знаменателями, не превосходящими 2^k, в порядке возрастания их величин. Если $z_1, \dots, z_{2^k+1}$ — их новая нумерация, то

$z_{s+1} - z_s = 2^{-k} < \delta$ при всех $s = 1, \ldots, 2^k + 1$. По построению любая из числовых последовательностей $\{h(z_s)\}$ сходится, и поэтому для нее найдется номер n_s такой, что при всех n и $m > n_s$ имеем

$$|h_m(z_s) - h_n(z_s)| < \varepsilon/3.$$

Теперь в качестве $n_0(\varepsilon)$ выберем номер $n_0(\varepsilon) = \max\limits_{s \leq 2^k = 1} n_s$ и покажем, что он удовлетворяет требуемым условиям. Действительно, пусть $x \in \in [0, 1]$ и z_t — ближайшее к нему число из множества $z_1, \ldots, z_{2^k+1}$. Ясно, что $|x - z_t| < 2^{-k} < \delta$, откуда вытекает, что $|h_k(x) - h_k(z_t)| < \varepsilon/3$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Окончательно при всех m и $n > n_0(\varepsilon) \geq n_t$ имеем

$$|h_m(x) - h_n(x)| \leq |h_m(x) - h_m(z_t)| + |h_m(z_t) - h_n(z_t)| + |h_n(z_t) - h_n(x)| <$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Это значит, что по критерию Коши последовательность $h_n(x)$ сходится равномерно на I. Теорема 1 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 1 можно рассматривать как достаточное условие компактности некоторого множества в пространстве $C[0, 1]$ всех функций, непрерывных на отрезке $I = [0, 1]$. Можно показать, что это условие является и необходимым для замкнутого множества функций, но здесь мы этого вопроса касаться не будем.

Глава XVII
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Лекция 15

§ 1. СОБСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Изучение интегралов, зависящих от параметра, или параметрических интегралов, составляет вторую большую тему третьего семестра, охватывающую элементарную теорию собственных и несобственных интегралов. Сначала рассмотрим собственные интегралы от функций, зависящих от одного числового параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ задана на прямоугольнике $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки вида $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$. Другими словами, Π есть множество точек $\{(x,y)\}$ координатной плоскости xOy, удовлетворяющее условиям $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Будем считать, что при любом фиксированном $y \in I_2$ функция $g(x) = g_y(x) = f(x,y)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Определение 1. *Интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx = \varphi(y)$ *называется* **интегралом, зависящим от параметра** y. *Отрезок* $I_2 = [c,d]$ *в этом случае будем называть* **множеством значений параметра** y.

Разумеется, вместо I_2 в качестве множества значений параметра y может выступать любое подмножество M вещественной оси Oy, и в этом случае будем сохранять введенную выше терминологию. Помимо отрезка I_2, чаще всего в качестве такого множества мы будем рассматривать интервалы, открытые и замкнутые лучи, проколотые окрестности точек или саму вещественную прямую $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки, $I_1 = [a,b], I_2 = [c,d]$, то функция*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

непрерывна на отрезке I_2.

Доказательство. Поскольку прямоугольник Π является компактом, функция $f(x,y)$, непрерывная на нем, является равномерно непрерывной на Π. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых точках (x_1, y_1) и $(x_2, y_2) \in \Pi$ справедливо неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольно некоторую точку y_0 на I_2. Тогда для любого y из ее проколотой δ-окрестности на оси Oy и любого $x \in I_1 = [a, b]$ для разности $r(x) = r(x, y, y_0) = f(x, y) - f(x, y_0)$ имеем оценку

$$|r(x)| = |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon,$$

поскольку расстояние $\rho(A, B)$ между точками $A = (x, y)$ и $B = (x, y_0)$, равное $|y - y_0|$, не превышает δ. Интегрируя $r(x)$ по отрезку I, получим

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| = \left|\int_a^b r(x)\, dx\right| \le \int_a^b |r(x)|\, dx < \varepsilon(b - a).$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $\varphi(y) \to \varphi(y_0)$ при $y \to y_0$, т.е. $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y = y_0$, и так как точка y_0 выбрана произвольно, то $\varphi(y)$ непрерывна на I_2. Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема допускает следующее простое обобщение.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны на $I_2 = [c, d]$ и удовлетворяют неравенствам $a \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y) \le b$. Тогда в условиях теоремы 1 функция $h(y)$, где*

$$h(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

тоже непрерывна на I_2.

Прежде чем доказывать теорему 2, заметим, что функцию $h(y)$ тоже можно рассматривать как параметрический интеграл, поскольку

$$h(y) = \int_a^b f_1(x, y) dx,$$

где $f_1(x, y) = f(x, y)$ при $\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$ и $f_1(x, y) = 0$ в противном случае.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова рассмотрим произвольную точку y_0 отрезка I_2. Для приращения $\Delta h(y_0) = h(y) - h(y_0)$ функции $h(y)$ в этой точке имеем соотношения

$$\Delta h(y_0) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx - \int_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x, y_0)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} (f(x,y) - f(x,y_0))\, dx + \left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)\, dx - \int\limits_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)\, dx \right) =$$

$$= r_1(y) + r_2(y).$$

Оценим величины $r_1(y)$ и $r_2(y)$ в предположении, что $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Имеем

$$|r_1(y)| \le \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} |f(x,y) - f(x,y_0)|\, dx \le \varepsilon |\varphi_2(y) - \varphi_1(y)| \le \varepsilon(b-a).$$

Далее если $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)|$, то для величины $r_2(y)$ получим оценки

$$|r_2(y)| = \left| \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y_0)} f(x,y_0)\, dx + \int\limits_{\varphi_2(y_0)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)\, dx \right| \le$$

$$\le M \left| \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y_0)} dx \right| + M \left| \int\limits_{\varphi_2(y_0)}^{\varphi_2(y)} dx \right| = M|\Delta\varphi_1(y_0)| + M|\Delta\varphi_2(y_0)|.$$

Поскольку функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны на I_2, при достаточно малом $|\Delta y_0| = |y - y_0| < \delta_1(\varepsilon)$ выполнены неравенства $|\Delta\varphi_1(y_0)| < \varepsilon$ и $|\Delta\varphi_2(y_0)| < \varepsilon$. Положим $\delta_0(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$. Тогда при всех y с условием $|y - y_0| < \delta_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|\Delta h(y_0)| \le |r_1(y)| + |r_2(y)| < \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon M = \varepsilon(b - a + 2M).$$

Но так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что функция $h(y)$ непрерывна в точке $y = y_0 \in I_2$, а также и на всем отрезке I_2.

Теорема 2 доказана.

Следует заметить, что приведенное выше доказательство теоремы 1 фактически состоит из вывода следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки вида $I_1 = [a,b]$ и $I_2 = [c,d]$ и если функция $g(x) = g_y(x) = f(x,y)$, то при любом $y_0 \in I_2$ имеем*

$$g_y(x) \underset{I_1}{\rightrightarrows} g_0(x) = f(x,y_0) \quad \textit{при} \quad y \to y_0.$$

Утверждение 2. *Пусть для некоторого $y_0 \in [c,d]$ при $y \to y_0$ имеет место равномерная сходимость $f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$. Кроме того, в некоторой окрестности точки y_0 существует параметрический интеграл вида $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Тогда при $y \to y_0$ существует предел*

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 1 (правило Лейбница). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки, $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$. Пусть частная производная $f'_y(x,y)$ существует и непрерывна на Π. Тогда функция $g(y)$, где*

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$

является дифференцируемой на I_2, причем

$$g'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку $y \in I_2$. При любом $h \neq 0$ с условием $y+h \in I_2$ можем записать равенство

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx.$$

Подынтегральная функция в правой части этого равенства непрерывна по x, и поэтому она интегрируема по Риману. Применяя к ней формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta h)dx, \quad 0<\theta<1.$$

Ввиду непрерывности $f'_y(x,y)$ на П и на основании утверждения 1 § 1 имеем

$$f'_y(x, y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Наконец, используя утверждение 2 § 1, приходим к равенству

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (обобщенное правило Лейбница). *В условиях теоремы 1 будем считать, что $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на I_2 и $a \le \alpha(y), \beta(y) \le b$. Тогда имеет место формула*

$$g'(y) = \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)'_y =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, как и выше, $h \ne 0$ и точки $y, y+h \in I_2$. Рассмотрим выражение $d(h)$, где

$$d(h) = \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x,y+h)dx - \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right).$$

Используя стандартные обозначения $\Delta\alpha = \alpha(y+h)-\alpha(y)$, $\Delta\beta = \beta(y+h)-\beta(y)$, $\Delta f = f(x,y+h)-f(x,y)$, его можно записать в виде

$$d(h) = h^{-1}\int_\alpha^\beta (f(x,y+h)-f(x,y))dx +$$

$$+h^{-1}\int_{\alpha+\Delta\alpha}^{\alpha} f(x,y+h)dx + h^{-1}\int_\beta^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+h)dx =$$

$$= A_1 + A_2 + A_3.$$

Дословно повторяя рассуждения теоремы 1, для интеграла A_1 при $h \to 0$ будем иметь

$$A_1 \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'_y(x,y)dx.$$

Далее, применяя теорему о среднем для интегралов A_2 и A_3 и используя непрерывность функции $f(x,y)$, получим

$$A_2 = -\frac{\Delta\alpha}{h} f(\alpha + \theta_1\Delta\alpha, y+h), \quad A_3 = \frac{\Delta\beta}{h} f(\beta + \theta_2\Delta\beta, y+h).$$

Отсюда при $h \to 0$ имеем

$$A_2 \to -\alpha'(y)f(\alpha(y),y), \quad A_3 \to \beta'(y)f(\beta(y),y).$$

Теорема 2 доказана.

Пояснение к доказательству теоремы 1. Проведем более подробно обоснование возможности предельного перехода

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta h)\,dx = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx,$$

опираясь на условие равномерной сходимости

$$f'_y(x,y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y) \qquad \text{при} \quad h \to 0, \qquad \text{где} \qquad I_1 = [a,b].$$

Как известно, интеграл по отрезку I_1 от функции $F(x,h) = f'_y(x,y+\theta h)$ есть предел интегральных сумм

$$\sigma(T) = \sigma_F(T) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,h)\Delta x_k.$$

Здесь предел берется по базе $\Delta_T \to 0$, определенной на основном множестве A, образованном всеми размеченными разбиениями $\{T\}$ отрезка $I_1 = [a,b]$. При этом точки $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ образуют разбиение, а точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ лежат соответственно на отрезках $[x_0,x_1], \dots, [x_{n-1},x_n]$ и образуют его разметку, величины же $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ равны длинам соответствующих отрезков. Функция $\sigma_F(T)$ определена на множестве A, а величина Δ_T равна $\max\limits_k \Delta x_k$, и, наконец, окончания b_δ, $\delta > 0$, базы $\Delta_T \to 0$ состоят из всех размеченных разбиений T с условием $\Delta_T < \delta$.

Важно подчеркнуть, что если при некотором $\varepsilon > 0$ и всех $x \in I_1$ имеем

$$|F(x,h) - F(x,0)| = |f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)| < \varepsilon,$$

то $|\sigma_{F(x,h)}(T) - \sigma_{F(x,0)}(T)| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что если при $h \to 0$ выполнено условие

$$f'_y(x, y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y),$$

то и при $h \to 0$ также имеем

$$\sigma_{F(x,y)}(T) \underset{A}{\rightrightarrows} \sigma_{F(x,0)}(T).$$

Но тогда оба повторных предела существуют и равны между собой, т.е. существует предел

$$l = \lim_{h\to 0}\lim_{\Delta_T\to 0}\sigma_{F(x,h)}(T) = \lim_{\Delta_T\to 0}\lim_{h\to 0}\sigma_{F(x,h)}(T).$$

При этом имеем

$$\lim_{\Delta_T\to 0}\sigma_{F(x,h)}(T) = \int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx,$$

$$\lim_{h\to 0} f'_y(x, y+\theta h) = f'_y(x,y),$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx,$$

что и утверждалось выше.

С другой стороны, аналогичное утверждение прямо доказано нами в теореме 1 § 1 на основе использования равномерной непрерывности подынтегральной функции. Точно так же мы могли бы рассуждать и в данном случае.

Т е о р е м а 3. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике* $\Pi = I_1 \times I_2$, *где* $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$, *то оба повторных интеграла*

$$H = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \quad \text{и} \quad G = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

существуют и равны между собой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(t,y)$, где

$$g(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx, \quad t\in[a,b], \quad y\in[c,d].$$

Покажем, что эта функция непрерывна на П по совокупности переменных (t, y). Действительно,

$$|\Delta g| = |g(t+\Delta t, y+\Delta y) - g(t,y)| = \left| \int\limits_a^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx - \int\limits_a^t f(x,y)dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_a^t (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx \right| + \left| \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx \right| \leq$$

$$\leq (b-a)\max_{x\in I_1} |\Delta_y f(x,y)| + c|\Delta t|,$$

где $c = \max\limits_{(x,y)\in \Pi} |f(x,y)|$.

Поскольку функция $f(x,y)$ непрерывна, $\max\limits_{x\in I_1} \Delta_y f(x,y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Следовательно, $\Delta g \to 0$ при $(\Delta y, \Delta t) \to (0,0)$, т.е. $g(x,t)$ непрерывна на П.

Далее, $g_t'(t,y) = f(t,y)$, поэтому по теореме 1 для функции

$$G(t) = \int\limits_c^d g(t,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)dt$$

имеем

$$G(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_c^d g(t,y)dy = \int\limits_c^d g_t'(x,y)dy = \int\limits_c^d f(t,y)dy = h(t).$$

С другой стороны, функция $h(t) = \int\limits_c^d f(t,y)dy$ тоже непрерывна, поэтому по формуле Ньютона – Лейбница

$$h(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_a^t h(x)dx = H'(t),$$

где $H(t) = \int\limits_a^t h(x)dx = \int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$.

Следовательно, $h(t) = H'(t) = G'(t)$. Кроме того, очевидно, что $G(0) = H(0) = 0$, поэтому при всех $t \in I_2$ имеет место равенство $G(t) = H(t)$. В частности, при $t = b$ имеем $G = G(b) = H(b) = H$.

Теорема 3 доказана.

Лекция 16

§ 3. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Дадим приложение обобщенного правила Лейбница (теорема 2 § 2) к выводу формулы Лагранжа с остаточным членом в интегральной форме. Этой формуле Лагранж посвятил две знаменитые работы, опубликованные в *Memoires de l'Academie de Berlin* (1768) и *Note* (1798, XI). Здесь мы приводим доказательство ее, предложенное Е.И.Золотаревым.

Теорема (формула Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ имеет n непрерывных производных для всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть некоторая функция $x = x(u,t)$ будет решением уравнения*

$$u - x + tf(x) = 0.$$

Тогда для любой функции $F(y)$, имеющей n непрерывных производных, справедлива формула

$$F(x(u,t)) = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} \frac{d^{k-1}(F'(u)f^k(u))}{du^{k-1}} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \left(\int_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^n \, dx \right)}{du^n}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$S_k = S_k(u) = \int\limits_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^k dx.$$

Продифференцируем ее по параметру u. Из теоремы 2 получим

$$\frac{dS_k}{du} = kS_{k-1} - t^k F'(u) f^k(u),$$

т.е.

$$S_{k-1} = \frac{t^k}{k} F'(u) f^k(u) + \frac{1}{k} \frac{dS_k}{du}.$$

Продифференцируем последнее равенство $k-1$ раз. Имеем

$$\frac{d^{k-1} S_{k-1}}{du^{k-1}} = \frac{t^k}{k} \frac{d^{k-1}(F'(u) f^k(u))}{du^{k-1}} + \frac{1}{k} \frac{d^k S_k}{du^k}.$$

Перепишем это равенство при $k = 1, \ldots, n$. Получим

$$S_0 = tF'(u)f(u) + \frac{dS_1}{du},$$

$$\frac{dS_1}{du} = \frac{t^2}{2}\frac{d(F'(u)f^2(u))}{du} + \frac{1}{2}\frac{d^2S_2}{du^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{n-1}S_{n-1}}{du^{n-1}} = \frac{t^n}{n}\frac{d^{n-1}(F'(u)f^n(u))}{du^{n-1}} + \frac{1}{n}\frac{d^nS_n}{du^n}.$$

Подставим последнее выражение в предпоследнее и так далее до первого выражения. Будем иметь

$$S_0 = tF'(u)f(u) + \frac{t^2}{2!}\frac{d(F'(u)f^2(u))}{du} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}(F'(u)f^n(u))}{du^{n-1}} + \frac{1}{n!}\frac{d^nS_n}{du^n}.$$

Кроме того, для S_0 справедливо равенство

$$S_0 = \int\limits_u^{x(u)} F'(x)dx = F(x(u)) - F(u).$$

Подставим эту формулу в предыдущее выражение. Получим сформулированное в теореме утверждение

$$F(x(u)) = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}(F'(u)f^k(u))}{du^{n-1}} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!}\frac{d^nS_n}{du^n} = \frac{1}{n!}\frac{d^n\left(\int_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^n\, dx\right)}{du^n}.$$

Теорема доказана.

Приведем два частных случая формулы Лагранжа.

1. В случае когда выполнено тождественное равенство $f(x) \equiv 1$, формула Лагранжа превращается в формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

2. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда функция $x = x(u)$ является решением уравнения Кеплера

$$x - t\sin x = u,$$

где t — эксцентриситет эллиптической орбиты в задаче двух тел.

Для функции $R(x) = 1 - t\cos x$ Лаплас получил разложение в ряд Лагранжа

$$R(x(u)) = 1 - t\cos u + t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}(\sin u)^{k+1}}{du^{k-1}}$$

и, по существу, установил его сходимость при $t < 0,662\ldots$

В заключение отметим, что о богатстве содержания понятия ряда Лагранжа позволяют судить исследования этого ряда, которые провели Эйлер, Ламберт, Лаплас, Бюрман, Пфафф, Шлемильх, Гейне, Коши, Якоби, дю Буа Раймон, Руше, П. Л. Чебышёв, Е. И. Золотарев, Ю. В. Сохоцкий, П. А. Некрасов. Исследования по вопросам сходимости обобщений ряда Лагранжа актуальны и сегодня.

Лекция 17

§ 4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПО ГЕЙНЕ

Понятие равномерной сходимости функции по базе множеств является обобщением классического понятия равномерной сходимости и опирается в своей основе на понятие предела функции по Коши. В математическом анализе используется и другой тип определения предела — предела по Гейне, как обычного, так и равномерного. Оба определения равномерной сходимости — по Коши и по Гейне — эквивалентны, и каждое из них оказывается более предпочтительным в своей сфере применения. Ввиду удобства использования обоих этих определений в различных ситуациях, мы докажем теорему об эквивалентности понятий равномерной сходимости по Коши и по Гейне в общем случае сходимости по базе множеств.

Нам потребуется несколько новых определений.

Определение 1. *Пусть B — некоторая база, определенная на основном множестве X, и для любых ее окончаний b_1 и b_2 имеем или $b_1 \subset b_2$, или $b_2 \subset b_1$. Назовем последовательность $\{x_n\}, x_n \in \in X$,* **фундаментальной по базе** *B, если вне любого окончания b содержится лишь конечное число членов этой последовательности.*

Определение 2. *Фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ мы будем называть* **монотонной по базе** *B, если для любого окончания b условие $x_n \in b$ влечет за собой включение $x_{n+1} \in b$.*

Далее будем считать, что рассматриваемая база множеств B обладает хотя бы одной фундаментальной монотонной последовательностью. Кроме того, полагаем, что пересечение всех окончаний базы B пусто.

Рассмотрим, наконец, функцию $f(x)$, определенную на некотором окончании b базы множеств B.

Определение 3. *Число l называется* **пределом по Гейне** *функции $f(x)$ по базе B, если для всякой монотонной по базе B последовательности $\{x_n\}$ имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

В этом случае пишем $Hm - \lim\limits_{B} f(x) = l$.

Имеет место теорема об эквивалентности определений предела по Гейне и в обычном смысле, т.е. по Коши. Приведем ее формулировку (см. ч. I, лекция 30).

Т е о р е м а 1. *Для существования предела $Hm - \lim\limits_{B} f(x)$ необходимо и достаточно существования $\lim\limits_{B} f(x)$ по Коши. При этом имеем*

$$Hm\text{-}\lim_{B} f(x) = \lim_{B} f(x).$$

Для того чтобы подчеркнуть, что $\lim_B f(x)$ есть обобщение предела по Коши, будем также писать

$$\lim_B f(x) = C\text{-}\lim_B f(x).$$

Доказательство этой теоремы опирается на две следующие леммы, имеющие самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B. Тогда найдутся ее подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$ и соответствующая ей последовательность окончаний $\{b_k \in B\}$ такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $b_{k+1} \subset b_k, y_k \in b_k$, но $y_k \notin b_{k+1}$.*

Определение 4. *Последовательность окончаний $\{b_k\}$ из леммы 1 будем называть* **основной последовательностью окончаний**.

Ее члены обозначим символом $\bar{b}_k$.

Лемма 2. *Для любого окончания $b \in B$ найдется член $\bar{b}_k$ последовательности основных окончаний, для которого имеем $\bar{b}_k \subset b$.*

Введенные выше понятия позволяют по-новому подойти и к общему определению равномерной сходимости. Для этого определим на декартовом произведении $X \times Y$ двух множеств X и Y функцию $f(x,y)$ и будем считать, что на множестве X задана база B.

Определение 5. *Функция $f(x,y)$* **сходится к функции** *$g(y)$* **по базе** *B* **равномерно на множестве** *Y, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b(\varepsilon)$ независимо от $y \in Y$ справедливо неравенство $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$.*

В этом случае пишем $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$.

Определение 6. *Будем говорить, что функция $f(x,y)$* **сходится по Гейне к функции** *$g(y)$* **равномерно на** *Y, если для любой последовательности $\{x_n\}$, монотонной по базе B, функциональная последовательность $f_n(y) = f(x_n, y)$ сходится к $g(y)$ равномерно на множестве Y.*

В этом случае пишем $f(x,y) \underset{Y}{\overset{(B)Hm}{\rightrightarrows}} g(y)$.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Теперь мы можем перейти к теореме об эквивалентности понятий равномерной сходимости по Коши и по Гейне.

Теорема 1. *1. Если функция $f(x,y)$ сходится по Гейне к $g(y)$ по базе B равномерно на множестве Y, то тогда имеем $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$.*

2. Если $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$, то $f(x,y) \underset{Y}{\overset{(B)_{Hm}}{\rightrightarrows}} g(y)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала утверждение 1. Будем рассуждать от противного. Допустим, что $f(x,y) \underset{Y}{\overset{(B)_{Hm}}{\rightrightarrows}} g(y)$ для любой монотонной по базе B последовательности $\{x_n\}$, но равномерная сходимость $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$ не имеет места. Последнее условие означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого окончания $b \in B$ найдутся точки $x_b \in b$ и $y_b \in Y$ такие, что $|f(x_b,y_b)-g(y_b)| \geq \varepsilon$. Возьмем сначала в качестве такого b окончание $\bar{b}_1$ из основной последовательности окончаний и обозначим через x_1 и y_1 соответствующие ему точки $x_{\bar{b}_1}$ и $y_{\bar{b}_1}$. Точка x_1 не может принадлежать сразу всем окончаниям b, так как их пересечение пусто. Поэтому найдется $b \in B$ с условием $x_1 \notin b$. По лемме 2 найдется число k_1 такое, что $\bar{b}_{k_1} \subset b$, и для него также имеем $x_1 \notin \bar{b}_{k_1}$. Теперь в качестве x_2 и y_2 возьмем точки $x_2 = x_{\bar{b}_{k_1}} \in \bar{b}_{k_1}$ и $y_2 = y_{\bar{b}_{k_1}} \in Y$ и повторим указанную процедуру снова и снова. Таким образом мы получим последовательность точек x_n и y_n, для которых справедливо неравенство $|f(x_n,y_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность x_n является монотонной по базе B. Для этого установим сначала ее фундаментальность. Заметим, что последовательность натуральных чисел k_n монотонно возрастает. Но всякое окончание $b_0 \in B$ по лемме 2 § 2 содержит некоторое $\bar{b}_{k_0}$, а при $k_n > k_0$ имеем $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n} \subset \bar{b}_{k_0} \subset b_0$, значит, вне b_0 лежит не более k_0 точек из последовательности $\{x_n\}$, т.е. она фундаментальна.

Чтобы доказать монотонность x_n, заметим, что $x_n \notin \bar{b}_{k_n}$, а $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n}$. Но если для некоторого $b_0 \neq \bar{b}_{k_n}$ мы имеем условие $x_n \in b_0$, то из двух допустимых включений $b_0 \subset \bar{b}_{k_n}$ или $b_0 \supset \bar{b}_{k_n}$ может иметь место именно второе, так как иначе $x_0 \in b_0 \subset \bar{b}_{k_n}$, т.е. $x_n \in \bar{b}_{k_n}$, что неверно. Но тогда $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n} \subset b_0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ монотонна.

Итак, мы построили монотонную последовательность точек $x_n \in X$ такую, что при соответствующих $y_n \in Y$ справедливо неравенство $|f(x_n,y_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Это значит, что равномерная сходимость функциональной последовательности $f_n(y) = f(x_n,y)$ к функции $g(y)$ при $n \to \infty$ не имеет места, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, утверждение 1 доказано.

Рассмотрим утверждение 2. Поскольку $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$, при любом $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b = b(\varepsilon) \in B$, такое, что при всех $y \in Y$ и при всех $x \in b(\varepsilon)$ имеем $|f(x,y)-g(y)| < \varepsilon$. Пусть теперь $\{x_n\}$ — любая монотонная последовательность по базе B. Тогда вне $b(\varepsilon)$ лежит лишь конечное множество точек x_n и при достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$

имеем, что $x_n \in b(\varepsilon)$, откуда при тех же n имеем $|f(x_n, y) - g(y)| < \varepsilon$, а это значит, что $f(x_n, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(y)$ при $n \to \infty$.

Утверждение 2 и теорема 1 полностью доказаны.

В заключение подчеркнем, что в теореме 1 на базу B мы накладываем следующие ограничения:

1) каждое окончание b базы B непусто, но пересечение всех окончаний пусто;

2) для любых двух окончаний b_1 и b_2 имеем либо включение $b_1 \subset b_2$, либо включение $b_1 \supset b_2$;

3) существует хотя бы одна монотонная по базе B последовательность.

На первый взгляд может показаться, что эти ограничения весьма обременительны, особенно условие 2, которое ужесточает обычное условие, указывающее на существование $b_3 \subset b_1 \cap b_2$. Но это не совсем так, поскольку вместо базы B практически всегда можно рассматривать базу B_0, эквивалентную B в том смысле, что существование предела по базе B влечет за собой сходимость по B_0, и наоборот. При этом все три сформулированных выше условия для базы B_0 уже будут выполнены. К примеру, в случае прямого произведения баз $H = B \times D$, где B и D есть базы $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$, в качестве соответствующего H_0 можно взять базу, составленную из окончаний вида $h = \{(x, y) | x > a, y > a\}$.

Для полноты изложения приведем еще обобщение критерия Коши равномерной сходимости функций по базе множеств.

Т е о р е м а 2 (критерий Коши для равномерной сходимости функции). *Для того чтобы функция $f(x, y)$, определенная на множестве $X \times Y$, сходилась к некоторой функции $g(y)$ по базе B, заданной на множестве X, равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось окончание $b = b(\varepsilon)$ базы B такое, что для любых его точек x_1 и x_2 и любого $y \in Y$ выполнялось бы условие*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если

$$f(x, y) \overset{B}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} g(y),$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b(\varepsilon)$ такое, что для всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$|f(x, y) - g(y)| < \varepsilon/2.$$

Тогда для любых x_1 и $x_2 \in b(\varepsilon)$ и любого $y \in Y$ имеем

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \le |f(x_1, y) - g(y)| + |g(y) - f(x_2, y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Достаточность. Зафиксируем произвольную точку $y \in Y$. Тогда функция $h(x) = h_y(x) = f(x,y)$ удовлетворяет обычному критерию Коши для сходимости по базе. Следовательно, существует число $g = g(y)$ такое, что $h(x) \xrightarrow{B} g$, т.е. имеет место поточечная сходимость

$$h(x) = h_y(x) = f(x,y) \xrightarrow{B} g(y),$$

где $g(y)$ — некоторая функция, определенная на множестве Y. Покажем, что данная сходимость является равномерной на Y. Действительно, рассмотрим окончание $b(\varepsilon)$ с условием, что при любых x_1 и $x_2 \in b(\varepsilon)$ и при любом $y \in Y$ выполняется условие

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon/2.$$

В этом неравенстве при фиксированном y перейдем к пределу по базе B применительно к переменной x_2. Тогда получим

$$|f(x_1, y) - g(y)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Последнее неравенство выполняется при любом $x_1 \in b(\varepsilon)$ и при любом $y \in Y$. Это означает, что

$$f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y).$$

Теорема 2 полностью доказана.

В заключение в качестве прямого следствия теоремы 2 приведем прямую формулировку критерия Коши отсутствия равномерной сходимости на множестве Y для функции $f(x,y)$ по базе B, заданной на множестве X.

Теорема 3 (критерий отсутствия равномерной сходимости). *Пусть $(x,y) \in X \times Y$. Для того чтобы равномерная сходимость функции $f(x,y)$ на множестве Y по базе B, заданной на X, не имела места, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$ для любого окончания $b \in B$ существовала пара точек $x_1 \in b$ и $x_2 \in b$ и точка $y \in Y$ с условием*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \geq \varepsilon.$$

Замечание. И в теореме 2, и в теореме 3 из двух возможных определений равномерной сходимости, по Коши и по Гейне, рассматривается первое определение. Если же опираться на второе определение, которое, как было показано выше, ему эквивалентно, то тогда вопрос по существу сводится к критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, доказанному ранее в §3 гл. XVI.

Лекция 18

§ 6. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Дальнейшее развитие теории интегралов, зависящих от параметра, приводит к рассмотрению несобственных интегралов, которые составляют ее наиболее существенную часть. Из двух типов таких интегралов сосредоточим свое внимание главным образом на интегралах первого рода. Интегралов второго рода коснемся лишь вскользь, поскольку их теория не имеет принципиальных отличий от интегралов первого рода.

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, заданную на множесве $I\times Y$, где I — промежуток вида $[a,+\infty)$, а Y — некоторое множество вещественных чисел, т.е. $Y\subset\mathbb{R}$. Допустим, что при любом фиксированном $y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на любом конечном отрезке вида $[a,b]$ и существует несобственный интеграл первого рода от этой функции по переменной $x\in I=[a,+\infty)$. Тогда этот интеграл сам представляет собой некоторую функцию от y, заданную на Y равенством

$$g(y)=\int\limits_a^\infty f(x,y)dx.$$

Определение 1. *Функция $g(y)$, представленная в указанном выше виде, называется* **несобственным интегралом первого рода,** *зависящим от параметра $y\in Y$.*

Замечание. Вместо несобственных интегралов по промежутку вида $[a,+\infty)$ можно, разумеется, рассматривать интегралы по промежуткам вида $(-\infty,b]$ или по всей вещественной прямой $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Все эти случаи сводятся к рассмотренному точно так же, как это делалось при изучении обычных несобственных интегралов. Например, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,\quad y\in Y,$$

достаточно представить в виде суммы интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x,y)\,dx+\int\limits_{0}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

и сходимость этой суммы понимать как сходимость каждого из двух ее слагаемых. Первое слагаемое сводится ко второму заменой переменной

x на $-x$. Кроме того, можно, конечно, рассматривать и формальные несобственные параметрические интегралы и при этом ставить вопрос об области их сходимости Y. Подобного рода вопросы разобраны при рассмотрении функциональных рядов, поэтому мы им много внимания уделять не будем, иногда, однако, будем пользоваться аналогичной терминологией.

Примеры. 1. При $y > 1$ справедливо равенство

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^y} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^y} = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^{1-y}}{1-y}\Big|_1^t = \frac{1}{1-y}.$$

2. При $y > 0$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{xy}d(xy) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Определение 2. *Интеграл* $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *называется* **равномерно сходящимся по параметру** y **на множестве** Y, $\{y\} = Y$, *если*

$$\int_a^t f(x,y)dx = F(y,t) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(y) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Другими словами, это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ *существует* $t = t_0(\varepsilon)$ *такое, что при всех* $t > t_0(\varepsilon)$ *и всех* $y \in Y$ *имеем*

$$\left|\int_a^t f(x,y)dx - g(y)\right| < \varepsilon,$$

где $g(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$.

Исходя из общей теоремы сформулируем критерий Коши конкретно для равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема 1. *Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода* $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *на множестве* Y *состоит в том, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало* $T = T(\varepsilon)$ *такое, что при всех* $t_2 > t_1 > T$ *и любом* $y \in Y$ *выполнялось бы неравенство*

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Приведем также прямую формулировку критерия отсутствия равномерной сходимости несобственного параметрического интеграла.

Т е о р е м а 1А. *Равномерная сходимость несобственного интеграла*

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

на множестве Y не имеет места, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $T \in \mathbb{R}$ найдутся числа t_1 и $t_2 > T$ и $y \in Y$ такие, что

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \geq \varepsilon.$$

Определение 3. *Если интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится и при всех $x > a$ и $y \in Y$ имеем $|f(x,y)| \leq g(x)$, то функция $g(x)$ называется* **мажорантой** *для $f(x,y)$* на $\Pi = I \times Y$.

Т е о р е м а 2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода). *Интеграл $J = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если функция $f(x,y)$ имеет мажоранту $g(x)$* на $\Pi = X \times Y$, где $X = [a, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся критерием Коши. Поскольку интеграл $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится, при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $T = T(\varepsilon)$ такое, что при всех $t_2 > t_1 > T$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Но тогда при всех $y \in Y$ имеем

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x,y)|dx \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Отсюда согласно критерию Коши заключаем, что интеграл J сходится равномерно на Y. Теорема доказана.

Пример. При $s \geq s_0 > 1$ интеграл $\int\limits_1^\infty x^{-s}dx$ сходится равномерно на множестве $s \geq s_0$, поскольку он имеет мажоранту $g(x) = x^{-s_0}$.

Теорема 3 (признаки Абеля и Дирихле для равномерной сходимости параметрических несобственных интегралов первого рода). *Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $\Pi = X \times Y$, где $X = [a,+\infty)$, $Y = [c,d]$ и $f(x,y) = \alpha(x,y)\beta(x,y)$. Пусть $\beta(x,y)$ монотонна по x при любом фиксированном $y \in Y$.*

(А) (признак Абеля). *Пусть, кроме того:*

1) интеграл $\int\limits_a^\infty \alpha(x,y)dx$ сходится равномерно по y на Y;

2) функция $\beta(x,y)$ ограничена на $\Pi = X \times Y$, т.е. $|\beta(x,y)| < c$ при некотором вещественном числе $c > 0$ и всех $(x,y) \in \Pi$.

Тогда интеграл $J = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

(Д) (признак Дирихле). *Пусть вместо условий (А) имеем:*

1) при некотором $c > 0$ и всех $t > a$, $y \in Y$ имеет место неравенство

$$\left|\int_a^t \alpha(x,y)dx\right| < c;$$

2) функция $\beta(x,y)$ равномерно на Y сходится к нулю при $x \to 0$.

Тогда, как и в случае (А), интеграл J сходится равномерно на Y.

Доказательство. Эта теорема как по своей формулировке, так и по доказательству похожа на соответствующие утверждения из теории рядов. По существу, все отличие сводится к замене использования преобразования Абеля на применение второй теоремы о среднем значении интеграла.

Для доказательства снова воспользуемся критерием Коши. Применяя вторую теорему о среднем, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx = \beta(t_1,y)\int_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx + \beta(t_2,y)\int_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx,$$

где t_3 — некоторая точка отрезка $[t_1,t_2]$.

Теперь в случае (А) в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty \alpha(x,y)dx$ при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших $t_2 > t_1 > t_0(\varepsilon)$ имеем $\left|\int\limits_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| < \varepsilon$ и $\left|\int\limits_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right| < \varepsilon$, откуда

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right| \leq |\beta(t_1,y)|\left|\int_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| + |\beta(t_2,y)|\left|\int_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right| \leq$$

$$\le c\varepsilon + c\varepsilon = 2c\varepsilon,$$

поскольку $|\beta(x,y)| < c$ при всех x и y.

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ это влечет за собой равномерную сходимость интеграла J и справедливость утверждения (А).

В случае (Д) интегралы от функции $\alpha(x,y)$ ограничены числом c и $\beta(x,y)$ стремится к нулю равномерно по y, поэтому при всяком $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $t_2 > t_1 > t_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|\beta(x,y)| < \varepsilon$, откуда с учетом предыдущей формулы имеем

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right| \le c\varepsilon + c\varepsilon = 2c\varepsilon,$$

что влечет за собой справедливость утверждения (Д). Теорема доказана.

Лекция 19

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Докажем теорему о переходе к пределу функции в точке под знаком несобственного интеграла.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ задана на множестве $P = X \times Y$, где $X = (a,+\infty)$, $Y = [b,c]$, Пусть, далее, выполнены следующие условия:*

1) при некотором $y_0 \in Y$ и при любом $t \in X$ на промежутке $E = E_t = [a,t]$ имеет место равномерная сходимость

$$f(x,y) \underset{E_t}{\rightrightarrows} g(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0;$$

2) несобственный интеграл $h(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда:

а) функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке E_t;

б) интеграл $J = \int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится;

в) существует предел $l = \lim\limits_{y\to y_0} h(y)$;

г) имеет место равенство

$$l = \lim_{y\to y_0} h(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty g(x)dx = J.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную монотонную числовую последовательность $y_n \in Y$ с условием $y_n \to y_0$. Тогда в силу условия 1) для функциональной последовательности $g_n(x) = f(x,y_n)$ при $n \to \infty$ справедливо соотношение $g_n(x) \underset{E_t}{\rightrightarrows} g(x)$, где $E_t = [a,t]$ и $t \geq a$ — любое фиксированное число. Далее, из теоремы 1 §6 гл. XVI об интеграле от функциональной последовательности вытекает, что функция $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ интегрируема на E_t, причем

$$\int\limits_a^t f(x,y_n)\,dx = \int\limits_a^t g_n(x)\,dx = Q_{t,n} \to Q_t = \int\limits_a^t g(x)\,dx,$$

где величины $Q_{t,n}$ и Q_t определяются последним равенством.

В силу условия 2) при $t \to +\infty$ имеем $Q_{t,n} \underset{\mathbb{N}}{\rightrightarrows} Q_n$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t(\varepsilon) \geq a$ такое, что при всех $t > t_0$ и при всех натуральных n справедливо неравенство $|Q_{t,n} - Q_n| < \varepsilon$. Следовательно, по теореме о двойном и повторном пределах по базам (§6 гл. XVI) существуют и равны оба повторных предела, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to+\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to+\infty} \lim_{n\to\infty} Q_{t,n}.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to+\infty} Q_{t,n} = \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f(x, y_n)\, dx = \lim_{n\to\infty} h(y_n) = l,$$

а также

$$\lim_{t\to+\infty} \lim_{n\to\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to+\infty} \int_a^\infty g(x)\, dx = J,$$

откуда $l = J$. В силу произвольности выбора последовательности y_n отсюда вытекает утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее свойство непрерывности несобственных параметрических интегралов.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $P = X \times Y$, где $X = (a, +\infty), Y = [b, c]$, и пусть интеграл*

$$h(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

равномерно сходится на Y.

Тогда функция $h(y)$ непрерывна на Y.

Доказательство. Непрерывность $h(y)$ в каждой фиксированной точке $y_0 \in Y$ означает, что $h(y) \to h(y_0)$ при $y \to y_0$. Для доказательства этого соотношения воспользуемся теоремой 1. Очевидно, ее условие 2) выполнено. Далее, из непрерывности $f(x, y)$ на P следует ее равномерная непрерывность на $P_t = [a, t] \times [c, d]$ при любом $t \geq a$. В свою очередь, отсюда имеем, что

$$f(x, y) \underset{[a,t]}{\rightrightarrows} f(x, y_0) \quad \text{при} \quad y \to y_0,$$

т.е. условие 1) теоремы 1 выполнено, а это означает, что при $y \to y_0$

$$h(y) \to \int_a^\infty f(x, y_0)\, dx = h(x_0).$$

Теорема 2 доказана.