стве (36.15) при $p \to \infty$, тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и означает, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. □

В заключение отметим два свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1°. *Если последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно на множестве E сходятся соответственно к функциям f и g, то любая линейная комбинация $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\mu \in \boldsymbol{C}$, данных последовательностей также равномерно на этом множестве сходится к такой же линейной комбинации предельных функций, т. е. к $\lambda f + \mu g$.*

Доказательство. Если $\lambda = \mu = 0$, то утверждение очевидно. Пусть хоть одно из чисел λ или μ отлично от нуля, т. е. $|\lambda| + |\mu| > 0$. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу условий $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ и $g_n \underset{E}{\rightrightarrows} g$ существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняются неравенства

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$

а потому и неравенство

$$\begin{aligned} |[\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)] - [\lambda f(x) + \mu g(x)]| &\leqslant \\ \leqslant |\lambda| |f_n(x) - f(x)| + |\mu| |g_n(x) - g(x)| &< \\ < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно определению равномерной сходимости это и означает, что $\lambda f_n + \mu g_n \underset{E}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g$. □

2°. *Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, а функция g ограничена на этом множестве, то последовательность $\{gf_n\}$ также равномерно сходится на E к функции gf.*

Доказательство. Ограниченность функции g на множестве E означает, что существует такое $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant M$. В силу же равномерной сходимости на множестве E последовательности $\{f_n\}$ к функции f существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

а потому и неравенство

$$|g(x) f_n(x) - g(x) f(x)| = |g(x)| |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $gf_n \underset{E}{\rightrightarrows} gf$. □

36.3. РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Для рядов, естественно, также можно ввести понятие равномерной сходимости.

Определение. 6. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.16}$$

члены которого являются функциями, определенными на множестве E, называется равномерно сходящимся на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на E.

Таким образом, равномерная сходимость ряда (36.16) означает существование такой функции $s(x)$, что

$$s_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} s(x) \tag{36.17}$$

(здесь, как всегда $s_n(x)$ — частичная сумма порядка n ряда (36.16), $n=1, 2, \ldots$).

Поскольку из (36.17) следует, что $s_n(x) \to s(x)$ на E, то $s(x)$ является суммой ряда (36.16).

Положим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Тогда $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ и условие (36.17) для сходящегося на множестве E ряда можно переписать в эквивалентной форме:

$$r_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0, \tag{36.18}$$

откуда в силу эквивалентности определения 5 равномерной сходимости последовательности функций и условия (36.10) следует, что, *для того чтобы сходящийся на E ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |r_n(x)| = 0. \tag{36.19}$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда, в частности, вытекает, что начиная с некоторого номера верхние грани

$$\sup_{x\in E} |r_n(x)|$$

конечны, а условие (36.19) сводит понятие равномерной сходимости ряда к стремлению к нулю числовой последовательности этих верхних граней.

Укажем существенное свойство равномерно сходящихся рядов.

Теорема 3 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (36.16) *равномерно сходится на множестве E, то по-*

следовательность его членов $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно стремится к нулю на множестве* E, т. е.

$$u_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} 0.$$

Коротко это свойство выражается следующим образом: *у равномерно сходящегося ряда общий член равномерно стремится к нулю.*

Доказательство. Пусть ряд (36.16) равномерно сходится на множестве E. Обозначим его частичные суммы, как обычно, через $s_n(x)$, а его сумму — через $s(x)$, $x \in E$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon/2.$$

Поэтому для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ справедливо также неравенство

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x)| &= |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = \\ &= |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| \leqslant \\ &\leqslant |s_{n+1}(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и означает равномерную (на множестве E) сходимость к нулю последовательности членов равномерно сходящегося на этом множестве ряда. □

Отметим, что в силу условия (36.10) равномерное стремление к нулю общего члена ряда (36.16) означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} |u_n(x)| = 0.$$

С помощью теоремы 3 иногда удается установить, что рассматриваемый ряд не сходится равномерно. Так, ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ не сходится равномерно на интервале (0, 1), ибо, как это было показано в п. 36.2 (см. пример 2) последовательность x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, членов этого ряда не сходится равномерно к нулю на этом интервале. Отсюда, кстати, следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, где z — комплексное число, также не сходится равномерно в единичном круге $|z| < 1$, ибо он не сходится равномерно уже на подмножестве (0, 1) этого круга.

Часто бывает полезным следующий достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 4 (признак Вейерштрасса). *Пусть даны два ряда: функциональный* (36.16), *членами которого являются функции*

$u_n(x)$, определенные на множестве E, и числовой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \ n=1, 2, \ldots. \tag{36.20}$$

Если ряд (36.20) *сходится и для любого $x \in E$* выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \qquad n=1, 2, \ldots, \tag{36.21}$$

то ряд (36.16) абсолютно и равномерно сходится на множестве E.

Абсолютная сходимость ряда (36.16) на E в случае сходимости ряда (36.20) сразу следует по признаку сравнения из неравенства (36.21). Равномерная же сходимость этого ряда легко следует из теоремы 1 этого пункта. Мы, однако, приведем ее непосредственное доказательство.

Пусть $s(x)$ — сумма ряда (36.21) и $s_n(x)$ — его частичная сумма. В силу сходимости ряда (36.20) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon > 0$, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство (см. (35.10)) $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Но тогда для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in E$ для остатков $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ ряда (36.16) (по доказанному выше он абсолютно, а следовательно, и просто сходится, поэтому равенство $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ имеет смысл) будем иметь

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| = \left| \sum_{m=n}^{\infty} u_m(x) \right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon.$$

Это и означает согласно определению 5 равномерную сходимость ряда (36.16) на множестве E. □

Отметим, что ряд (26.20) называется рядом, мажорирующим ряд (36.16).

В качестве примера возьмем снова ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, члены которого образуют геометрическую прогрессию. Рассмотрим его в круге радиуса $r: |z| \leqslant r$, где $0 < r < 1$. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ с неотрицательными членами, образующими бесконечно убывающую геометрическую последовательность, сходится, а для членов данного функционального ряда справедлива оценка $|z^n| \leqslant r^n$, ибо $|z| \leqslant r$, то он по признаку Вейерштрасса равномерно сходится во всяком круге $|z| \leqslant r < 1$. Вместе с тем, как это было показано выше, этот ряд не сходится равномерно в круге $|z| < 1$.

Признак Вейерштрасса дает только достаточные условия равномерной сходимости ряда, которые отнюдь не являются необходимыми. Убедиться в этом для рядов, у которых с возрастанием

номеров членов чередуются их знаки совсем легко. Действительно, сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (как и всякий сходящийся числовой ряд) можно рассматривать как равномерно сходящийся, например, на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ ряд: его члены $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ суть функции постоянные на $\boldsymbol{R}$. Вместе с тем всякий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условию $|u_n| \leqslant a_n$, т. е. в данном случае условию $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, расходится по признаку сравнения. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится равномерно, а сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условиям признака Вейерштрасса, не существует.

Можно показать, что более того условия признака Вейерштрасса не являются необходимыми для равномерной сходимости даже рядов, все члены которых неотрицательны. Чтобы в этом убедиться, приведем пример равномерно сходящегося на отрезке [0, 1] ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с неотрицательными членами, для которого тоже не существует сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющего условию (36.21).

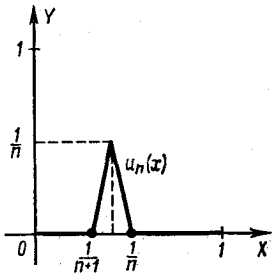

Рис. 140

Определим член ряда $u_n(x)$ следующим образом: $u_n(x) = 0$ на отрезках $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, и $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ и функция $u_n(x)$ линейна и непрерывна на каждом из отрезков $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$ и $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right]$. Ее график изображен на рис. 140.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке [0, 1]. Действительно, если $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — остаток этого ряда, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого $x \in [0, 1]$ среди его членов существует не более одного, для которого $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n+1$. При этом, оче-

видно,

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \text{поэтому} \quad 0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

и, следовательно, $r_n(x) \underset{[0,\,1]}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, т. е. рассматриваемый ряд равномерно сходится на отрезке [0, 1].

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой числовой ряд, что для всех $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, то

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,\,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Поскольку гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Таким образом, в рассмотренном случае числового ряда, удовлетворяющего, по отношению к функциональному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, условиям признака Вейерштрасса, заведомо нет.

Перейдем теперь к условиям равномерной сходимости ряда, являющимися одновременно необходимыми и достаточными.

Замечая, что

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{36.22}$$

из теоремы 2 получаем следующий критерий равномерной сходимости.

Теорема 5 (критерий Коши равномерной сходимости рядов). *Для того чтобы ряд* (36.16) *равномерно сходился на множестве* E, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$, *всех целых* $p \geqslant 0$ и всех $x \in E$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{36.23}$$

Очевидно, что из критерия Коши равномерной сходимости ряда еще раз (если в (36.23) положить $p = 0$) получается теорема 3, т. е. необходимое условие равномерной сходимости ряда (36.16).

Упражнение 3. Выяснить, может ли ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n и z — комплексные числа), у которого бесконечно много коэффициентов отличны от нуля, равномерно сходиться на всей комплексной плоскости.

Примеры. 1. Рассмотрим снова (см. п. 36.1) ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \tag{36.4}$$

и покажем, что, каково бы ни было число $r>0$, ряд (36.4) сходится равномерно в круге $|z|\leqslant r$.

Как мы уже видели, ряд (36.4) сходится при любом комплексном z, в частности, при $z=r$, т. е. числовой ряд

$$1+r+\frac{r^2}{2!}+\ldots+\frac{r^n}{n!}+\ldots$$

сходится. Беря его в качестве ряда сравнения (36.20) для ряда (36.4), при $|z|\leqslant r$ имеем $\left|\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\frac{r^n}{n!}$. Поэтому наше утверждение о равномерной сходимости ряда (36.4) непосредственно следует из теоремы 4.

Покажем, что ряд (36.4) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости. Это следует из невыполнения в данном случае необходимого условия равномерной сходимости ряда (см. теорему 3). Действительно, при любом фиксированном n_0

$$\lim_{|z|\to\infty}|z^{n_0}/n_0!|=+\infty. \tag{36.24}$$

Поэтому, если задано $\varepsilon>0$, то, каково бы ни было $n_0>0$, в силу (36.24) можно подобрать z_0 так, чтобы

$$|z_0^{n_0}/n_0!|>\varepsilon,$$

т. е. $z^n/n!$ не стремится равномерно к нулю на всей комплексной плоскости.

2. Исследуем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)},\qquad -\infty<x<+\infty. \tag{36.25}$$

Прежде всего заметим, что

$$\left|\frac{x\sin nx}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}\right|\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}. \tag{36.26}$$

Далее, $1+nx^2\geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), поэтому

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\,(1+nx^2)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n\,(1+n^2)}}\leqslant\frac{1}{2n^{3/2}}. \tag{36.27}$$

*) Мы воспользовались здесь неравенством $2ab\leqslant a^2+b^2$, которое сразу получается из очевидного неравенства $(a-b)^2\geqslant 0$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса в силу неравенства (36.26) и (36.27) исходный ряд (36.25) равномерно сходится на всей действительной оси.

3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx. \tag{36.28}$$

Очевидно, $|e^{-n^5x^2} \sin nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Найдем максимум функции

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$$

при фиксированном n. Функция $v_n(x)$ четная, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $x \geqslant 0$ (почему?). Производная $v_n'(x) = n(1-2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ обращается в ноль в точке $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}$. Поскольку $v_n(x) \geqslant 0$ для всех x, $v_n(0) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$, то в точке x_0 функция $v_n(x)$ имеет максимум (почему?).

Поэтому

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,n^{3/2}} e^{-1/2} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

и так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (36.28) равномерно сходится на всей вещественной оси.

Метод, примененный для установления равномерной сходимости ряда (36.28) (исследование на экстремум модуля общего члена или его мажоранты методами дифференциального исчисления), является достаточно общим и часто применяется на практике. Этим методом можно было бы исследовать и равномерную сходимость ряда (36.25), однако примененный выше способ исследования этого ряда значительно быстрее приводит к цели.

4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}. \tag{36.29}$$

По признаку Лейбница (см. п. 35.5) он сходится при любом вещественном x и, как было отмечено там же, остаток ряда оценивается первым своим членом

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Из этого следует, что

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty,$$

т. е. ряд (36.29) равномерно сходится на всей действительной оси.

Покажем, что этот ряд не сходится абсолютно во всех точках. Действительно, выберем для данного числа x какое-либо натуральное n_x так, чтобы $x^2 \leqslant n_x$. Тогда для всех $n \geqslant n_x$ будет выполняться неравенство $x^2 \leqslant n$, а следовательно, и неравенство

$$\frac{1}{x^2+n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то в силу признака сравнения ряд (36.29) не сходится абсолютно.

Упражнение 4. Привести пример ряда, который абсолютно сходится во всех точках некоторого множества, но не сходится на этом множестве равномерно.

Указание. Полезно вспомнить пример 2 из п. 36.1.

Докажем теперь достаточный признак равномерной сходимости, применимый в отличие от признака Вейерштрасса и к не абсолютно сходящимся рядам. Он напоминает по своей формулировке признак Дирихле для сходимости числовых рядов (см. п. 35.13) и впервые встречается в работах Харди *.

Теорема 6. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x), \tag{36.30}$$

в котором функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *определены на множестве* E *и таковы, что*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in E$ *и равномерно стремится к нулю на* E;

2) *последовательность частичных сумм* $B_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

ограничена на множестве E.

Тогда ряд (36.30) *равномерно сходится на множестве* E.

Доказательство. В силу условия 2 теоремы существует такое $B>0$, что $|B_n(x)| \leqslant B$ для всех $x \in E$ и всех $n=1, 2, \ldots$ и поэтому

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

для всех $x \in E$, всех $n=2, 3, \ldots$, и всех целых $p \geqslant 0$. Из условия же 1 теоремы следует, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

* Г. Харди (1877—1947) — английский математик.

существует такой номер n_ε, что для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Теперь, применив неравенство Абеля (см. п. 35.13), получим, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 2B\left[|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right] < \varepsilon$$

для всех $x \in E$, всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и всех целых $p \geqslant 0$. Это и доказывает равномерную сходимость ряда (36.30). $\square$

В качестве примера на применение теоремы 6 рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Согласно теореме 6 этот ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Действительно, последовательность $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, в данном случае является числовой последовательностью, она монотонно убывает и стремится к нулю (а значит, и равномерно стремится к нулю), а суммы $\sum\limits_{k+1}^{\infty} \sin kx$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,\, b]} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} < +\infty$$

(см. п. 35.13), т. е. ограничены на любом указанном отрезке.

На всяком отрезке, содержащем точки вида $x = 2k\pi$, рассматриваемый ряд не сходится равномерно. В силу свойств синуса это достаточно доказать для отрезка $[0, \pi]$. Положим $x_n = \frac{1}{2n}$; тогда для всех $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ будем иметь $0 < kx_n \leqslant \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, в силу неравенства $\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < < \frac{\pi}{2}$ (см. (14.1)), получим

$$\frac{\sin kx_n}{k} = \frac{\sin kx_n}{kx_n}\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \qquad k = n+1, \ldots, 2n.$$

Отсюда

$$\frac{\sin (n+1)x_n}{n+1} + \frac{\sin (n+2)x_n}{n+2} + \ldots + \frac{\sin 2nx_n}{2n} > \underbrace{\frac{1}{\pi n} + \ldots + \frac{1}{\pi n}} = \frac{1}{\pi}.$$

Поэтому ни для какого $\varepsilon < \frac{1}{\pi}$ на отрезке $[0, \pi]$ не выполняется критерий Коши равномерной сходимости.

Заметим, что доказать равномерную сходимость рассматриваемого ряда на отрезке, не содержащем точек вида $x=2k\pi$ с помощью признака Вейерштрасса нельзя. Например, для отрезка $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеем

$$\max_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Поэтому не существует такого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ что $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant a_n$ на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ибо тогда $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Подобно случаю числовых рядов, применяя неравенство Абеля, можно получить еще один признак равномерной сходимости функциональных рядов, аналогичный признаку Абеля для числовых рядов. Он также впервые встречается в работах Харди.

Теорема 7. *Если*

1) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* E:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in E, \quad n=1, 2, \ldots,$$

и убывает или возрастает при каждом $x \in E$,

2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E, *то ряд* (36.30) *также равномерно сходится на* E.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$, всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Отсюда, в силу неравенства Абеля (см. 35.77) для всех номеров $n \geqslant n_\varepsilon$ всех целых $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ будет справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k}(x)\, b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши, это и означает равномерную сходимость ряда (36.30). □

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

На любом отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$, $m=0, \pm 1, \ldots$, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln \ln n}$ согласно теореме 6 равномерно сходится, а последовательность $\cos \frac{x}{n}$, $n=2, 3, \ldots$ ограничена и монотонно возрастает начиная с некоторого номера, причем можно выбрать такой номер, что начиная с этого номера эта последовательность будет возрастать во всех точках указанного отрезка. Поэтому на отрезке, не содержащем точек вида $2\pi m$; $m=0, \pm 1, \ldots$, рассматриваемый ряд равномерно сходится.

В заключение заметим, что из двух свойств равномерно сходящихся последовательностей, доказанных в конце п. 36.2, непосредственно следует справедливость соответствующих свойств для равномерно сходящихся рядов:

1°. *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходятся равномерно на множестве* E, *то для любых чисел* $\lambda \in \mathbf{C}$ *и* $\mu \in \mathbf{C}$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *также сходится равномерно на множестве* E.

2°. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E, *а функция* $g(x)$ *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) u_n(x)$ *также равномерно сходится на* E.

Упражнения. Исследовать на сходимость абсолютную сходимость и равномерную сходимость ряды:

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n$,

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+x^n)$.

(везде x — вещественное число)

36.4. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Мы видели, что сумма сходящегося ряда, все члены которого непрерывные функции, может и не быть непрерывной функцией. Следующая теорема содержит достаточные условия непрерывности суммы ряда.

Следует обратить внимание на то, что рассмотрение непрерывных на некотором множестве функций накладывает дополнительные ограничения на само множество — оно уже не может быть множеством произвольной природы (каковым до сих пор было множество E, на котором были заданы члены рассматриваемых рядов, элементы последовательностей и т. д.), а должно быть таким, что для функций, заданных на нем, определено понятие непрерывности. Когда речь пойдет о производных и интегралах, придется еще более сузить класс допустимых множеств E.

Теорема 8. *Если функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в точке x_0 множества $E \subset R^m$ *) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E, то его сумма $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в точке $x_0 \in E$. Докажем, что тогда функция $s(x)$ также непрерывна в этой точке.

Зафиксируем какое-либо $\varepsilon > 0$. Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\ x \in E.$$

Согласно условию теоремы,

$$s_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому существует такой номер n_ε, что

$$|s(x)-s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{36.31}$$

для всех $x \in E$ и всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и, в частности, для $n=n_\varepsilon$. Функция $s_{n_\varepsilon}(x)$ как сумма конечного числа непрерывных на E функций $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, непрерывна в точке $x_0 \in E$. Поэтому существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0)<\delta$,

$$|s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{36.32}$$

Теперь, заметив, что $s(x)-s(x_0)=[s(x)-s_{n_\varepsilon}(x)]+[s_{n_\varepsilon}(x)-s_{n_\varepsilon}(x_0)]+[s_{n_\varepsilon}(x_0)-s(x_0)]$

---

*) Здесь, как и везде, где не оговорено что-либо другое, рассматриваются комплекснозначные функции $u_n(x)$; понятие непрерывности для таких функций см. в п. 23. 3; R^m, как обычно, обозначает m-мерное евклидово пространство.

(рис. 141), из неравенства (36.31), взятого в точках x_0 и x, и неравенства (36.32) получим при $\rho(x, x_0) < \delta$ и $x \in E$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)| + |s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| + \\ + |s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0. □

В случае, если x_0 предельная точка множества E утверждению теоремы можно придать вид

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

и так как каждая функция $u(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывна в точке $x \in E$, то $u_n(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u_n(x)$, поэтому

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} u_n(x).$$

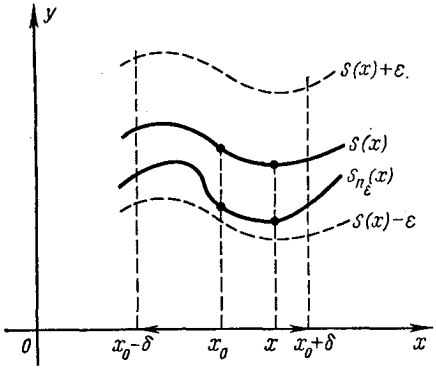

Рис. 141

Таким образом, в условиях теоремы 8 предел суммы ряда равен сумме пределов его членов, т. е. в рассматриваемом ряде допустим почленный переход к пределу.

Выше отмечалось, что каждой последовательности функций соответствует функциональный ряд, для которого она является последовательностью частичных сумм. При этом если данная последовательность равномерно сходится на некотором множестве, то и указанный ряд также, очевидно, равномерно сходится на этом множестве. Это обстоятельство позволяет перефразировать теоремы о равномерно сходящихся рядах в соответствующие теоремы о равномерно сходящихся последовательностях. Например, теорема 8 может быть перефразирована следующим образом.

Теорема 8′. *Если функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в точке $x_0 \in E \subset R^m$ и $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то f непрерывна в x_0.*

Это означает, что для точки $x_0 \in E$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f_n(x),$$

т. е. предельные переходы по n и по x можно переставлять.

Действительно, предел f последовательности f_n, $n=1, 2, \ldots$ является в силу теоремы 8′ непрерывной в точке $x_0 \in E$ функцией, а поэтому левая часть равенства равна $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0),$$

но и правая часть рассматриваемого равенства в силу непрерывности функций f_n также равна $f(x_0)$:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \quad \square$$

Задача 25 (теорема Дини *)). Пусть функции f_n, $n=1, 2 \ldots$ непрерывны и, монотонно убывая или монотонно возрастая, стремятся на компакте $E \subset R^m$ к функции f. Доказать, что для того чтобы функция f была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась на множестве E равномерно. Перефразировать этот результат для рядов.

Теперь перейдем к вопросу о почленном интегрировании и дифференцировании рядов. Поскольку производная и интеграл определялись только в действительной области, то, начиная отсюда и до конца параграфа, будем считать, что все рассматриваемые функции определены на промежутках действительной оси и принимают действительные значения.

Рассмотрим сначала пример, который убедит нас в том, что одной лишь сходимости функционального ряда недостаточно для того, чтобы интеграл от функции, равной его сумме, можно было найти почленным интегрированием. Иными словами, покажем, что даже если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$ сходятся, то равенство

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$$

может быть неверным, даже в том случае, когда все написанные интегралы существуют.

Перефразируем сначала это утверждение в терминах последовательностей. Если положить $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, то будем иметь

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \int\limits_a^b s(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n \to \infty} s_n(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right] dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b s_n(x)\,dx.$$

*) У. Дини (1845—1918) — итальянский математик.

Покажем, что равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx$$

справедливо не всегда, когда на отрезке $[a, b]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ и все рассматриваемые функции интегрируемы, т. е. что в этом случае не всегда можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Пусть $s_n(x)=nxe^{-nx^2}$, $n=1, 2, \ldots, 0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда $s_n(0)=0$ и при любом $x\neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=0$. Таким образом $s_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$ и, следовательно, интеграл от предельной функции, т. е. от нуля, также равен нулю. Однако

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx=n\int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}(1-e^{-n}).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 s_n(x)\,dx=\frac{1}{2}$, т. е. действительно, для рассмотренной последовательности $\{s_n(x)\}$ имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)\,dx\neq\int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx=0.$$

Если построить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, для которого последовательность $\{s_n(x)\}$ является последовательностью частичных сумм, т. е. положить

$$u_1(x)=s_1(x),\quad u_n(x)=s_{n-1}(x)-s_{n-1}(x),\qquad n=2, 3, \ldots,$$

то для этого ряда будем иметь

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx\neq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx.$$

Теорема 9. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

равномерно сходится на $[a, b]$. *Тогда какова бы ни была точка* $c\in[a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt \tag{36.34}$$

также равномерно сходится на $[a, b]$, *и если*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

то

$$\int_c^x s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\,dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.36}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)\,dt,$$

то видно, что она означает законность при условиях, перечисленных в теореме 9, *почленного интегрирования ряда.*

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (36.33), согласно теореме 8, функция $s(x)$ (см. (36.35)) непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому интегрируема на любом отрезке с концами в точках $c \in [a, b]$ и $x \in [a, b]$.

Покажем, что ряд (36.34) равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции

$$\sigma(x) = \int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right] dt = \int_c^x s(t)\,dt. \tag{36.37}$$

Пусть

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{и} \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Тогда для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$\left|\sigma(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_c^x u_k(t)\,dt\right| = \left|\int_c^x s(t)\,dt - \int_c^x \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right] dt\right| =$$

$$= \left|\int_c^x s(t)\,dt - \int_c^x s_n(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_c^x |s(t) - s_n(t)|\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_c^x |r_n(t)|\,dt\right| \leqslant \sup_{[a, b]} |r_n(t)| \left|\int_c^x dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x - c| \sup_{[a, b]} |r_n(t)| \leqslant (b - a) \sup_{[a, b]} |r_n(x)|. \tag{36.38}$$

Последовательность $\sup\limits_{[a, b]} |r_n(x)|$, $n = 1, 2, \ldots$ является числовой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (36.33) имеем

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[a, b]} |r_n(x)| = 0$$

(см. п. 36.3); поэтому из неравенства (36.38), согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности, следует, что последовательность частичных сумм ряда (36.34) равномерно сходится к функции (36.37), а это и означает равномерную сходимость ряда (36.34) к функции (36.37). Теорема и, в частности, формула (36.36) доказаны.

Перефразируем полученный результат для последовательностей функций.

Теорема 9′. *Если последовательность непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций* f_n, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно на этом отрезке сходится к функции* f, *то, какова бы ни была точка* $c \in [a, b]$,

$$\int_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{на} \quad [a, b],$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)\,dt = \int_c^x [\lim_{n\to\infty} f_n(t)]\,dt.$$

Упражнение 9. Показать, что если

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{при} \quad x = 1/2n, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \ \text{и} \ \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ и $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, то $f_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$, а $\lim\limits_{n\to 0} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании рядов.

Теорема 10. *Пусть функции* $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$ *и ряд, составленный из их производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $c \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Если эту формулу переписать в виде

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

то видно, что она означает законность при сделанных предположениях почленного дифференцирования ряда.

Доказательство. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.42}$$

В силу равномерной сходимости этого ряда его сумма является непрерывной функцией и его можно почленно интегрировать:

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

По теореме 9, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

— сходящийся. Сходится, по условию теоремы, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \tag{36.45}$$

а поэтому сходится и сумма рядов (36.44) и (36.45), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

Отсюда следует, что равенство (36.43) можно переписать в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c),$$

или, что то же (см. (36.40)), в виде

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

Функция, стоящая в левой части имеет производную по x, значит и функция $s(x)$ имеет производную. Дифференцируя равенство (36.47), получим (см. п. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

где функция $\sigma(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, ибо представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда (36.39), члены которого — непрерывные функции. Подставляя (36.42) в (36.48), и получим искомую формулу (36.41).

Остается лишь отметить, что из равенства (36.43) в силу доказанной сходимости рядов (36.44) и (36.45) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ (см. теорему 9), а $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ — числовой ряд, поэтому и их сумма, т. е. ряд (36.40), равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. □

Итак, если сходящийся ряд непрерывно дифференцируемых функций таков, что ряд, составленный из его производных равномерно сходится, то сумма ряда является дифференцируемой функцией и ее производная получается почленным дифференцированием ряда.

Поскольку из предпосылок этой теоремы следует равномерная сходимость ряда, то не ограничивая общности теоремы, ее можно перефразировать следующим образом.

Если ряд непрерывно дифференцируемых функций и ряд, составленный из их производных, равномерно сходятся, то сумма исходного ряда непрерывно дифференцируема и ее производная равна сумме производных членов данного ряда (т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

Перефразируем теперь теорему 10 для последовательностей.

Теорема 10′. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, а последовательность их производных f_n', $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда последовательность (36.49) равномерно сходится на $[a, b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Примеры применения этих теорем будут приведены в следующем параграфе.

Упражнения. 10. Будет ли справедливым равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\,dx=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}x^n\right)dx?$$

Можно ли это установить с помощью теоремы 9?

11. Построить пример равномерно сходящейся на отрезке последовательности непрерывно дифференцируемых функций, предел которой также является непрерывно дифференцируемой функцией, однако производные членов последовательности не сходятся к производной предельной функции.

§ 37. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

37.1. РАДИУС СХОДИМОСТИ И КРУГ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Определение 1. *Функциональные ряды вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{37.1}$$

где a_n и z_0 — заданные комплексные числа, а z — комплексное переменное, называются степенными рядами. Числа

$$a_n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

называются коэффициентами степенного ряда (37.1).

Предполагая, что коэффициенты ряда и число z_0 фиксированы, будем исследовать поведение ряда (37.1) при различных z.

Если в ряде (37.1) выполнить замену переменного, положив $\zeta=z-z_0$, то получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n. \tag{37.2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (37.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (37.2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (37.2), употребляя, правда, как правило, для обозначения переменной букву z, а не ζ.

Теорема 1 (Абель). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

сходится при $z=z_0\neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом z, для которого $|z|<|z_0|$.

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$

сходится. Тогда его n-й член $a_n z_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. п. 35.2), и поэтому последовательность $\{a_n z_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу этого для n-го члена ряда (37.2) получается оценка

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Если $|z| < |z_0|$ (рис. 142), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, являясь суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, сходится. Поэтому по признаку сравнения (см. п. 35.5) сходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, а это означает абсолютную сходимость ряда (37.3) при $|z| < |z_0|$. □

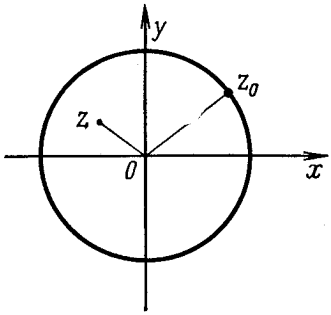

Рис. 142

Следствие 1. *Если степенной ряд (37.3) расходится при $z = z_0$, то он расходится и при всяком z, для которого $|z| > |z_0|$.*

Действительно, если $|z| > |z_0|$ и ряд (37.4) расходится, то расходится и ряд (37.3), так как если бы он сходился, то в силу доказанного сходился бы и ряд (37.4).

Определение 2. *Пусть задан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Если R — неотрицательное число или $+\infty$, обладает тем свойством, что при всех z, для которых $|z| < R$, ряд (37.3) сходится, а при всех z, для которых $|z| > R$, ряд (37.3) расходится, то оно называется радиусом сходимости степенного ряда (37.3).*

Множество точек z, для которых $|z| < R$, называется кругом сходимости ряда (3.3).

Теорема 2. *У всякого степенного ряда (37.3) существует радиус сходимости R. В круге сходимости, т. е. при любом z, для которого $|z| < R$, ряд (37.3) сходится абсолютно. На любом круге $|z| \leqslant r$, где r фиксировано и $r < R$ ряд (37.3) сходится равномерно.*

Доказательство. Разобьем все действительные числа на два класса: к классу A отнесем все неположительные числа и

те из положительных $x>0$ (если такие существуют), для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а к классу B отнесем все остальные.

Если класс B не пуст, то это разбиение является сечением во множестве действительных чисел (см. п. 2.1). В самом деле, класс A всегда не пуст, так как содержит все неположительные числа. Каждое действительное число заведомо попадает в один из классов A или B, поскольку после определения класса A к классу B отнесены все остальные числа. Наконец, если $x \in A$, $y \in B$, то либо $x \leqslant 0$, тогда в силу того, что всегда $y>0$, получим $x<y$ либо $x>0$, тогда согласно теореме Абеля $x<y$. Таким образом, все условия, определяющие сечение в области действительных чисел, выполнены.

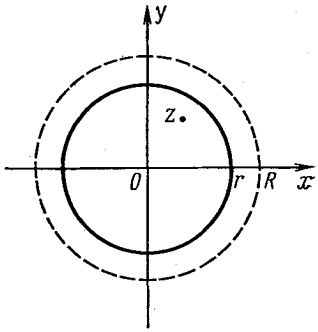

Рис. 143

Обозначим через R число, которое производит это сечение. В случае когда множество B пусто, по определению, положим $R=+\infty$. Величина R является радиусом сходимости ряда (37.3). В самом деле, пусть зафиксировано некоторое z, для которого $|z|<R$. Возьмем действительное x_0 такое, что $|z|<x_0<R$. В силу определения величины R получим $x_0 \in A$, поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{37.5}$$

сходится. Отсюда, по теореме Абеля, следует, что в зафиксированной точке z, $|z|<R$, ряд (37.3) сходится, и притом абсолютно.

Если $|z|>R$, то выберем вещественное x_0 так, что $R<x_0<|z|$; тогда $x_0 \in B$ и, следовательно, ряд (37.5) расходится. В силу следствия из теоремы Абеля отсюда следует, что в этом случае ряд (37.3) расходится.

Если теперь $0<r<R$, то, по доказанному, ряд (37.3) при $z=r$ абсолютно сходится, т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

А так как для любой точки z круга $|z| \leqslant r$ (рис. 143)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса (см. п. 36.3), на этом круге ряд (37.3) сходится равномерно. □

Таким образом, областью сходимости всякого степенного ряда является всегда «круг» *) исключая, быть может, некоторое множество его граничных точек. В граничных же точках круга сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться (см. ниже-следующие примеры).

Подчеркнем, что радиус сходимости степенного ряда (37.3) обладает следующим свойством: для каждого числа z, такого, что $|z|<R$, указанный ряд абсолютно сходится, а для каждого z такого, что $|z|>R$, он просто, а следовательно, и подавно абсолютно расходится (расходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда). Это следует, очевидно, из определения радиуса сходимости и теоремы 2.

Члены степенного ряда являются непрерывными функциями и, как было показано, на всяком круге, лежащем вместе со своей границей внутри круга сходимости, степенной ряд сходится равномерно, а поэтому его сумма непрерывна на всяком указанном круге. Очевидно, что для любой точки z круга сходимости, $|z|<R$, можно подобрать круг, содержащий эту точку и лежащий вместе с границей в круге сходимости (достаточно взять его радиус r таким, что $|z|<r<R$), поэтому *степенной ряд непрерывен в каждой точке своего круга сходимости* $|z|<R$ (подчеркнем, что здесь речь идет об открытом круге).

Рассмотрим теперь случай, когда степенной ряд сходится в точке $z=R$, лежащей на границе его круга сходимости. Отметим, что случай $z=-R$ может быть сведен к случаю $z=R$ простой заменой переменного $\zeta=-z$.

Теорема 3 (Абель). *Если R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и этот ряд сходится при $z=R$, то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$.

Следствие. *Если степенной ряд (37.3) сходится при $z=R$, то его сумма непрерывна на отрезке* $[0,R]$.

Это утверждение обычно называется *второй теоремой Абеля* о степенных рядах.

Доказательство. Пусть $0\leqslant x\leqslant R$. Представим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$. Поскольку члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ не зависят от x, то его сходимость означает и его равномерную сходимость. Последовательность же $\{(x/R)^n\}$ ограничена на отрезке $[0, R]$, ее члены неотрицательны: $0\leqslant\left(\frac{x}{R}\right)^n\leqslant 1$ и она

*) Слово «круг» написано в кавычках, так как в случае $R=+\infty$ «круг» означает всю плоскость.

монотонно убывает в каждой точке (при $x=R$ она не строго убывает, точнее, является стационарной). Поэтому в силу признака Абеля равномерной сходимости рядов (см. теорему 7 в п. 36.3) ряд (37.3) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. □

Следствие вытекает из того, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является также непрерывной функцией.

Все сказанное с помощью преобразования типа $z=\zeta-\zeta_0$ (ζ — новая переменная, ζ_0 — фиксировано) переносится и на общие степенные ряды вида (37.1). В частности, областью сходимости такого ряда всегда является круг вида $|z-z_0|<R$, конечно, как и выше, с точностью до его граничных точек.

Этот круг называется кругом сходимости ряда (37.1), а R — его радиусом сходимости.

Примеры. 1. Радиус сходимости R ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,z^n$ равен нулю, т. е. этот ряд сходится только при $z=0$*).

Действительно, исследуя абсолютную сходимость этого ряда по признаку Даламбера, при любом $z\neq 0$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(n+1)!\,z^{n+1}|}{|n!\,z^n|}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|z|=+\infty.$$

Таким образом, рассматриваемый ряд не сходится абсолютно при любом $z\neq 0$; отсюда, в силу следствия из теоремы Абеля, он расходится при любом $z\neq 0$.

2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, ибо, как мы видели (см. п. 36.1), этот ряд сходится при любом z.

3. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.6}$$

сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|\geqslant 1$. Поэтому ее радиус сходимости $R=1$. Отметим, что во всех точках границы круга сходимости, т. е. во всех точках окружности $|z|=1$, ряд (37.6) расходится, так как для общего члена ряда имеем $|z^n|=1$ и, следовательно, он не стремится к нулю при $n\to\infty$.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2} \tag{37.7}$$

*) При $z=0$, очевидно, сходится любой ряд вида (37.3).

сходится при $|z|\leqslant 1$, ибо при выполнении этого условия $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|<$ $<\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

При $|z|>1$ ряд (37.7) расходится, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=+\infty$*), т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Радиус сходимости ряда (37.7), как и ряда (37.6), равен единице, однако в каждой точке границы круга сходимости ряд (37.7), в отличие от ряда (37. 6), сходится.

5. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

имеет радиус сходимости $R=1$.

Действительно, применив признак Даламбера для определения z, при которых ряд абсолютно сходится (соответственно, расходится), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z^{n+1}/(n+1)|}{|z^n/n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|z|$$

и, следовательно, при $|z|<1$ данный ряд сходится, причем абсолютно, а при $|z|>1$ он расходится. При $z=1$ получается расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $z=-1$ сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (см. п. 35.3 и 35.9). Таким образом, в этом примере на границе круга сходимости есть точки, в которых ряд сходится, и есть точки, в которых он расходится.

Из рассмотренных примеров (см. также п. 36.1) видно, что иногда радиус сходимости R степенного ряда находится с помощью признака Даламбера сходимости рядов с положительными членами (см. теорему 8 в п. 35.6). Действительно, справедливо следующее утверждение: *если существует предел (конечный или бесконечный)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *то*

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{37.8}$$

---

*) Действительно, легко, например, с помощью правила Лопиталя убедиться, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|z|^x}{x^2}=+\infty$ (см. пример 2 в п. 12.2).

В самом деле, если число R определено этой формулой и $|z|<R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|z|}{R}<1,$$

и поэтому ряд (37.3) для такого z сходится (и притом абсолютно).

Если же $|z|>R$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$, и, следовательно, ряд (37.3) абсолютно расходится. Таким образом, R действительно является радиусом сходимости ряда (37.3).

Аналогичным образом можно найти величину радиуса сходимости R и с помощью признака Коши (см. теорему 9 в п. 35.6), если только существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. В этом случае

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{37.8'}$$

Действительно, если число R задается этой формулой и если $|z|<R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|z|}{R}<1$$

и потому ряд (37.3) сходится. Если же $|z|>R$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=\frac{|z|}{R}>1$$

и, следовательно, ряд (37.3) абсолютно не сходится.

Таким образом, R является радиусом сходимости ряда (37.3).

Затруднения при применении такого метода определения радиуса сходимости степенного ряда могут возникнуть, например, уже в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю. В этом случае можно попробовать применить указанный метод, предварительно перенумеровав подряд все члены ряда с отличными от нуля коэффициентами (отчего его сходимость и сумма в случае, если он сходится, не изменяются).

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется определить радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\quad \text{где}\quad a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если}\quad n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\\ 0, & \text{если}\quad n=0,\ 2,\ 4,\ \ldots.\end{cases}$$

Признак Даламбера неприменим для определения сходимости этого ряда, ибо отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет смысла для четных номеров n. Не дает ответа здесь и признак Коши, поскольку

нетрудно проверить, что здесь предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. Однако если положить $b_k=\frac{1}{2k+1}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и записать данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

то, исследовав абсолютную сходимость этого ряда с помощью признака Даламбера, получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|b_{k+1}z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|} = |z|^2 \lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k+3} = |z|^2.$$

Отсюда следует, что рассматриваемый ряд абсолютно сходится, когда $|z^2|<1$, т. е. когда $|z|<1$, и абсолютно расходится, когда $|z|>1$. Таким образом, радиус сходимости этого степенного ряда равен 1.

Подчеркнем, что с помощью признака Даламбера и признака Коши можно найти радиус сходимости не для произвольного степенного ряда, а лишь для такого, у которого существуют указанные выше пределы (быть может, после новой нумерации членов).

Упражнения. Определить радиусы сходимости рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

37.2*. ФОРМУЛА КОШИ — АДАМАРА ДЛЯ РАДИУСА СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Найдем теперь формулу для определения радиуса сходимости произвольного степенного ряда через его коэффициенты в общем случае.

Теорема 4. *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \tag{37.3}$$

тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\ ^{*)}. \tag{37.9}$$

) О верхнем пределе (см. в п. 3.12).

Формула (37.9) называется *формулой Коши — Адамара* *).

Доказательство. Положим $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Рассмотрим сначала случай $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае ряд (37.3) сходится при любом z. Возьмем какое-либо $z \neq 0$ и такое ε, что $0 < \varepsilon < 1$. Тогда (см. теорему 10 п. 3.12*) существует такое N_1, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|} \text{ для всех } n \geqslant N_1, \text{ т. е.}$$

$$|a_n||z|^n < \varepsilon^n \text{ для всех } n \geqslant N_1.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что ряд (37.3) абсолютно, а значит, и просто сходится при данном z, а так как z было произвольно, то это означает, что $R = +\infty$.

Возьмем другой крайний случай: пусть $\rho = +\infty$. Покажем, что в этом случае ряд (37.3) расходится при любом $z \neq 0$. Действительно, если $\rho = +\infty$, то существует последовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$, натурального ряда такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Поэтому, каково бы ни было $z \neq 0$, существует такой номер k, что при $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \text{ т. е. } |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1.$$

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю n-го члена, поэтому при данном $z \neq 0$ ряд расходится, а так как $z \neq 0$ было произвольно, то это означает, что $R = 0$.

Пусть теперь $0 < \rho < +\infty$. Покажем, что при всяком z таком, что $|z| < \frac{1}{\rho}$ ряд (37.3) сходится. Выберем $\varepsilon > 0$, так, чтобы $|z| < \frac{1}{\rho+\varepsilon}$ **), тогда число q, определяемое равенством $q = (p+\varepsilon) \times |z|$, будет удовлетворять неравенству $q < 1$. Согласно свойству верхнего предела, существует такой номер N_1, что при $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

поэтому при $n \geqslant N_1$

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} < |z|(\rho+\varepsilon) = q, \text{ т. е. } |a_n z^n| < q^n, \ 0 < q < 1,$$

---

*) Ж. Адамар (1865—1963) — французский математик.

**) Для этого достаточно взять $\varepsilon < \frac{1}{|z| - \rho}$.

и по признаку сравнения ряд (37.3) при рассматриваемом z абсолютно, а значит, и просто сходится.

Покажем теперь, что ряд (37.3) при всяком z таком, что $|z|>\frac{1}{\rho}$, расходится. Выберем $\varepsilon>0$, так, чтобы

$$|z|>\frac{1}{\rho-\varepsilon}>0, \tag{37.10}$$

тогда $|z|(\rho-\varepsilon)>1$. Согласно свойству верхнего предела (см. теорему 10 п. 3.12*), существует подпоследовательность n_k, $k=1, 2, \ldots$, натуральных чисел такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\rho-\varepsilon, \quad k=1, 2, \ldots.$$

Из этого в силу (37.10) следует, что

$$|z|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>|z|(\rho-\varepsilon)>1$$

и, следовательно,

$$|a_{n_k}z^{n_k}|>1,$$

т. е. в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости ряда — стремление к нулю его n-го члена, и поэтому для рассматриваемого z ряд (37.3) расходится.

Таким образом, ряд (37.3) сходится, если $|z|<\frac{1}{\rho}$, и расходится, если $|z|>\frac{1}{\rho}$, а это и означает, что $R=\frac{1}{\rho}$. □

37.3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение 3. *Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если существует такое $R>0$, что в круге $|z-z_0|<R$ она представима степенным рядом вида* (37.1), *т. е. существуют такие комплексные числа a_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, что*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad |z-z_0|<R. \tag{37.11}$$

Сумма, разность и произведение аналитических в точке функций снова является аналитической в этой точке функцией (почему?).

Лемма 1. *Если R — радиус сходимости ряда* (37.11), *$R>0$ и*

$$r_n(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

— остаток ряда (37.11), *то*

$$r_n(z)=O((z-z_0)^{n+1}) \quad \text{при} \quad z\to z_0, \tag{37.12}$$

и, следовательно,

$$r_n(z) = o((z-z_0)^n) \quad \textit{при} \quad z \to z_0. \tag{37.13}$$

Доказательство. Если $|z-z_0|<R$, то

$$r_n(z) = (z-z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n+1},$$

и ряд, получившийся после вынесения множителя $(z-z_0)^{n+1}$, сходится. Поэтому функция $\varphi(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n-1}$, как сумма степенного ряда, непрерывна в круге $|z-z_0|<R$.

Если теперь $0<r<R$, то функция $\varphi(z)$, будучи непрерывной на замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant r$, будет и ограничена на нем, т. е. найдется такая постоянная $M>0$, что (см. п. 23.3) при $|z-z_0|\leqslant \leqslant r$ выполняется неравенство $|\varphi(z)|\leqslant M$. Поскольку $r_n(z) = (z-z_0)^{n+1}\varphi(z)$, то при $|z-z_0|\leqslant r$ получим:

$$|r_n(z)| = |z-z_0|^{n+1}|\varphi(z)| \leqslant M|z-z_0|^{n+1},$$

а это и означает (37.12). Условие (37.13) непосредственно следует из (37.12). □

Теорема 5. *Представление аналитической в точке z_0 функции $f(z)$ в виде степенного ряда* (37.11) *единственно, т. е. если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R, \quad R>0, \tag{37.14}$$

то

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Из равенства (37.14) при $n=0$ в силу формулы (37.12) следует, что при $z \to z_0$

$$a_0 + O(z-z_0) = b_0 + O(z-z_0).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получим $a_0 = b_0$.

Пусть уже доказано, что

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

тогда в силу (37.12) и (37.14)

$$a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + O((z-z_0)^{n+1}) = \\ = b_0 + b_1(z-z_0) + \ldots + b_n(z-z_0)^n + O((z-z_0)^{n+1}).$$

Уничтожая одинаковые члены в обеих частях этого равенства и деля обе его части на $(z-z_0)^n$, будем иметь

$$a_n + O(z-z_0) = b_n + O(z-z_0), \quad z \to z_0.$$

Отсюда в пределе при $z \to z_0$ получим, что $a_n = b_n$ (ср. с теоремой 2 в п. 13.2). □

Может случиться, что лишь рассмотрение ряда в области комплексных чисел может объяснить величину его радиуса сходимости. Например, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

являющийся суммой геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$, сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geqslant 1$. Его сумма на интервале $(-1;\ 1)$ равна $\frac{1}{1+x^2}$. Функция $\frac{1}{1+x^2}$ определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси, поэтому непонятно, почему, раскладывая ее в ряд,

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

мы получаем ряд, сходящийся только при $|x|<1$. Это делается совершенно естественным, если рассмотреть эту функцию в области комплексных чисел, поскольку функция $\frac{1}{1+z^2}$ имеет «особую точку» при $z=i$ (в этой точке функция не определена и при приближении к ней стремится к бесконечности), т. е. как раз на границе круга $|z|\leqslant 1$.

37.4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В настоящем пункте будут в основном изучаться степенные ряды с действительными членами. Однако предварительно докажем одну лемму, справедливую для степенных рядов в комплексной области,

Лемма 2. *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}, \tag{37.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{37.17}$$

равны.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (37.15), R_1 — радиус сходимости ряда (37.16), а R_2 — радиус сходимости ряда (37.17). Из неравенств

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant |z|\,|a_n z^n| \leqslant |z^2|\,|n a_n z^{n-1}|, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

и теоремы сравнения (см. теорему 6 в п. 35.5) следует, что если в некоторой точке z сходится ряд (37.17), то в этой точке сходится и ряд (37.16), и если в некоторой точке z сходится ряд (37.16), то в той же точке сходится и ряд (37.15). Отсюда следует, что

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{37.18}$$

Покажем теперь, что

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{37.19}$$

Пусть ряд (37.16) сходится в точке z_0 и $0 < |z_0| < R_1$. Выберем такое действительное число r, чтобы $|z_0| < r < R_1$. Тогда при $n = 1, 2, \ldots$ получим

$$\left| n a_n z_0^{n-1} \right| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} \left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \left| \frac{z_0}{r} \right|^{n+1}. \tag{37.20}$$

В силу сходимости ряда (37.16) при $z = r$ общий член этого ряда при $z = r$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| = 0.$$

Следовательно, последовательность $\left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right|$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена, т. е. существует такое $M > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \leqslant M.$$

Положив $q = \left| \frac{z_0}{r} \right|$, из (37.20) получим неравенство

$$\left| n a_n z_0^{n-1} \right| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Поскольку ряд с общим членом $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} M q^{n+1}$ сходится (в этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера), то при $z = z_0$ сходится и ряд (37.17). Неравенство (37.19) доказано. Из неравенств (37.18) и (37.19) следует, что

$$R = R_1 = R_2. \ \square$$

Замечание. Утверждение леммы может быть доказано несколько проще, если использовать формулу Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда (см. п. 37.2*). Мы не стали этого делать, так как приведенное доказательство также не сложно, а поскольку оно не использует формулы Коши — Адамара, то пункт 37.2* можно пропустить при первом чтении (на что и указывает звездочка при его номере).

В дальнейшем в этом параграфе везде, где не оговорено противное, будем предполагать, что коэффициенты всех рассматриваемых рядов действительны и что переменные z и z_0 также действительны (в этом случае будем их обозначать x и x_0). Правда, все рассматриваемые ниже свойства степенных рядов переносятся в определенном смысле и на степенные ряды в комплексной области, однако для осуществления этого нам пришлось бы обобщить понятие производной и интеграла на функции комплексного аргумента, а это не входит в задачу настоящего курса.

Итак, мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{37.21}$$

где a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, x и x_0 действительны. Если R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z-x_0)$, где z — комплексное число, т. е. ряда с теми же коэффициентами, что и у ряда (37.21), но рассматриваемого в комплексной области, то, очевидно, ряд (37.21) сходится, если $|x-x_0|<R$ и расходится, если $|x-x_0|>R$.

В этом случае R по-прежнему называется *радиусом сходимости ряда* (37.21), а интервал $(x_0-R,\ x_0+R)$ — *его интервалом сходимости*.

Теорема 6. *Если R — радиус сходимости степенного ряда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{37.22}$$

$R>0$, *то*

1) *функция f имеет в интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$ производные всех порядков, которые находятся из ряда* (37.22) *почленным дифференцированием*;

2) *для любого $x \in (x_0-R,\ x_0+R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

т. е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3) *степенные ряды, получающиеся из ряда* (37.22) *в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд* (37.22).

Доказательство. В силу леммы, доказанной в начале этого пункта, радиусы сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},$$

получающегося из ряда (37.22) почленным дифференцированием, и ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

получающегося из того же ряда почленным интегрированием, имеют тот же радиус сходимости что и ряд (37.22) (чтобы в этом убедиться, достаточно сделать замену переменного $x-x_0=z$).

Поскольку всякий степенной ряд вида (37.22) с радиусом сходимости R равномерно сходится на отрезке $[x_0-r,\ x_0+r]$, $0<r<R$ (см. теорему 2 в п. 37.1), то утверждение теоремы о возможности почленного дифференцирования и интегрирования вещественных степенных рядов непосредственно следует из соответствующих теорем о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов, доказанных в пункте 36.4. □

Заметим, что, например, возможность почленного интегрирования степенного ряда (37.22) внутри интервала сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)$ сразу вытекает (см. теорему 9 в п. 36.4) из того, что степенной ряд равномерно сходится на всяком отрезке $[x_0-r,\ x_0+r]$, $0<r<R$. Отсюда следует, что при почленном интегрировании радиус сходимости степенного ряда не уменьшается. Доказанная теорема содержит более полное утверждение, что указанный радиус сходимости, кроме того, и не увеличивается, т. е. остается прежним.

Теорема 7. *Если функция f аналитическая в точке x_0, т. е. представима в окрестности этой точки рядом* (37.22) *с радиусом сходимости $R>0$, то*

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{37.23}$$

т. е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Доказательство. Продифференцировав n раз обе части равенства (37.22), получим (см. теорему 6):

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n+(n+1)n\ldots 2n_{n+1}(x-x_0)+$$
$$+(n+2)(n+1)\ldots 3a_{n+2}(x-x_0)^2+\ldots$$

Отсюда при $x=x_0$ и получается формула (37.23). □

Заметим, что из доказанной теоремы следует еще раз свойство единственности разложения функции в степенной ряд (правда, на этот раз в силу сделанных ограничений только в действительной области, ср. с п. 37.3).

37.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ЗАПИСИ ОСТАТОЧНОГО ЧИСЛА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Определение 4. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{37.24}$$

называется рядом Тейлора функции f в точке x_0.

При $x_0=0$ ряд (37.24) называется также рядом Маклорена функции $f(x)$.

Как мы знаем, всякая аналитическая в точке x_0 функция бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности этой точки и равна в этой окрестности сумме своего ряда Тейлора. Оказывается, что обратное, вообще говоря, неверно: существуют функции, бесконечно дифференцируемые, но не аналитические и, значит, не представимые своим рядом Тейлора.

Примером такой функции является функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{для } x\neq 0, \\ 0 & \text{для } x=0. \end{cases} \tag{37.25}$$

При $x\neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков, которые легко вычисляются:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},\quad f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2}+\frac{4}{x^6}e^{-1/x^2},$$

и вообще

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где $P_n(1/x)$ — многочлен некоторой степени относительно $1/x$ (n — порядковый номер, а не степень многочлена), т. е. $f^{(n)}(x)$ есть линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2},\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{37.26}$$

Это легко проверяется по индукции. Сделав замену переменного $t=\frac{1}{x^2}$, найдем, применив правило Лопиталя, предел модуля выражения (37.26) при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{m/2}}{e^t}=0.$$

Отсюда следует, что и предел выражения (37.26) при $x\to 0$ также равен нулю и что при любом $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=\lim_{x\to 0}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}=0. \tag{37.27}$$

Из формулы (37.27) при $n=0$ и $n=1$ следует, что функция f непрерывна в точке $x=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$, поэтому (см. следствие 3 из теоремы 3 п. 11.2) $f'(0)$ существует и $f'(0)=0$. По индукции легко убедиться подобным же образом, что $f^{(n)}(0)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, все члены ряда Тейлора функции (37.25) в точке $x_0=0$ равны нулю, поэтому его сумма при всех x также равна нулю и, следовательно, не совпадает с самой функцией f. Заметим еще, что, согласно теореме 5 п. 37.3, функция (37.25) не может быть разложена ни в какой степенной ряд (так как если бы это было возможно, то он оказался бы рядом Тейлора), а это и означает, что она не является аналитической.

Упражнения. 6. Можно ли разложить функцию $f(x)=e^{-1/x}$, $x>0$, на отрезке $[0, 1]$ в ряд Маклорена.

7. Пусть

$$\theta(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x\geqslant 0, \\ -1 & \text{при } x<0. \end{cases}$$

Доказать, что функцию $\theta(x)\,e^{-1/x^2}$ можно так доопределить при $x=0$, что в результате получится бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси функция.

Заметим, что если функция раскладывается в некоторой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единственен (см. теорему 5 или теорему 7) и является ее рядом Тейлора. Однако, один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора для разных функций. Так степенной ряд с нулевыми коэффициентами, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0\,x^n$, является как рядом Тейлора функции тождественно равной нулю на всей числовой оси: $f(x)=0$, $x\in R$, так и рядом Тейлора функции (37.25) в точке $x=0$.

Возникает вопрос: когда ряд Тейлора (37.24) функции $f(x)$ на некотором интервале сходится к $f(x)$? Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции f (см. п. 13.1):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x), \tag{37.28}$$

которая справедлива при любом $n=0, 1, 2, \ldots$. В этой формуле $r_n(x)$ обозначает остаточный член формулы Тейлора, а не остаток ряда Тейлора, так как с остатком ряда нельзя оперировать до тех пор, пока не будет установлено, что ряд сходится — лишь в этом случае можно будет утверждать, что остаточный член формулы Тейлора совпадает с остатком ряда Тейлора. Полагая

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

перепишем формулу (37.28) в виде

$$f(x)=s_n(x)+r_n(x), \tag{37.29}$$

где $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда Тейлора. Отсюда видно, что, для того чтобы функция f равнялась на рассматриваемом интервале сумме своего ряда Тейлора, т. е. чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы *для всех x из этого интервала ее остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю*,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{37.30}$$

Если это имеет место, то из формулы (37.29) следует, что остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ является также и суммой n-го остатка ряда Тейлора (37.24).

Теорема 8. *Пусть функция f определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, $h>0$. Тогда остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора* (37.29) *для всех $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$ можно записать в следующих трех видах*:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{37.31}$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{37.32}$$

где ξ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, и

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \tag{37.33}$$

где $0<\theta<1$.

Формула (37.31) *называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, формула* (37.32) — *в форме Лагранжа, а* (37.33) — *в форме Коши.*

Доказательство. Из основной теоремы дифференциального и интегрального исчисления (см. п. 29.3, теорему 4) имеем

$$f(x)=f(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=f(x_0)-\int\limits_{x_0}^{x}f'(t)\,d(x-t).$$

Проинтегрировав по частям интеграл в правой части, получим

$$f(x)=f(x_0)+[-f'(t)(x-t)]_{x_0}^{x}+\int\limits_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \qquad (37.34)$$

Проинтегрируем по частям последний член еще раз:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt=-\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m=$$

$$=-\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt=$$

$$=\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

и подставим это выражение в (37.34):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

В результате получилась формула (37.34), в которой m заменено на $m+1$.

Таким образом, формула (37.34) доказана методом индукции для всех $m \leqslant n$. При $m=n$ ее остаточный член имеет вид (37.31).

Применим теперь первую интегральную теорему о среднем значении к интегралу (37.31), вынося за знак интеграла «среднее значение» производной $f^{(n+1)}$ (см. следствие из теоремы 1 в п. 28.2):

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит на интервале с концами в точке x_0 и x.

Формула (37.32) доказана.

Если же применить интегральную теорему о среднем к интегралу (37.31), вынеся за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции (см. п. 28.2), то получим

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \qquad (37.35)$$

где ξ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е.

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Подставив это выражение в (37.35), получим формулу (37.33). □

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Теорема 9. *Пусть функция f и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{37.36}$$

Тогда на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \tag{37.37}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, каково бы ни было число a,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{37.38}$$

Действительно, пусть n_0 такое, что $\frac{|a|}{n_0} < \frac{1}{2}$. Тогда при всех $n \geqslant n_0$ $\frac{|a|}{n} < \frac{1}{2}$, и поэтому

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a}{n_0 + 1} \cdot \frac{a}{n_0 + 2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - n_0},$$

где правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда и следует равенство (37.38). Это равенство следует и непосредственно из того, что выражение $a^n/n!$ является — общим членом сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ (см. (36.4)). Для того чтобы доказать формулу (37.37), достаточно убедиться (см. (37.30)), что

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \tag{37.39}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора функции f. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (37.32)). Из неравенства (37.36) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$. Поскольку в силу (37.38)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

то при $|x - x_0| < h$ выполняется условие (37.39). □

Упражнение 8. Заменим в теореме 8 условие ограниченности производных $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ условием их ограниченности только в точке x_0, т. е. пусть существует такое $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x_0)| \leq M$. Тогда, очевидно, ряд (37.37) сходится и при том абсолютно на всем интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, ибо $\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right| \leq \frac{M(x-x_0)^n}{n!}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ сходится при всех x см. ряд (36.4)). Следует ли отсюда утверждение теоремы 9?

37.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Прежде всего найдем разложение в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x) = e^x$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$ то для любого фиксированного $h > 0$ при всех $x \in (-h, h)$ и всех $n = 0, 1, \ldots$

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h.$$

Таким образом, условия теоремы 9 выполнены ($x_0 = 0$), поэтому функция e^x раскладывае ся в ряд Тейлора (37.34) на любом конечном интервале, а значит и на всей действительной оси. Поскольку в данном случае $f^{(n)}(0) = 1$, то это разложение имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Напомним, что в п. 36.1 было установлено, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости *). Мы видим теперь, что для действительных $z = x$ его сумма равна e^x. В случае существенно комплексных z его сумму по аналогии обозначают e^z; таким образом формула

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{37.41}$$

для комплексных z является определением функции e^z.

*) Это следует, согласно теореме Абеля, и из доказанной нами сходимости ряда (37.40) на всей действительной оси.

Данное определение естественно, во-первых, потому, что в случае действительного $z=x$ эта функция совпадает с показательной функцией e^x, а во-вторых, потому, что функция e^z сохраняет ряд характерных свойств функции e^x. Покажем, например, что

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2} \tag{37.42}$$

для любых комплексных z_1 и z_2.

Мы знаем, что ряд (37.41) абсолютно сходится, поэтому ряды

$$e^{z_1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!},\quad e^{z_2}=\sum_{m=}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!}$$

можно почленно перемножить (см. п. 35.10), причем, поскольку получающийся при этом ряд также абсолютно сходится, его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения $z_1^n z_2^m$ с одинаковой суммой $n+m$, и расположим эти группы членов по возрастанию $n+m$:

$$e^{z_1}e^{z_2}=\sum_{n+m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+m}\frac{z_1^{(n+m-k)}}{(n+m-k)!}\cdot\frac{z_2^k}{k!}=$$

$$=\sum_{n+m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m)!}\sum_{k=0}^{n+m}\frac{(n+m)!}{(n+m-k)!\,k!}z_1^{n+m-k}z_2^k=$$

$$=\sum_{n+m=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!}=e^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряд $\operatorname{sh}x$ и $\operatorname{ch}x$. Заменив в формуле (37.40) x на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получим

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{37.43}$$

Складывая и вычитая равенства (37.40) и (37.43), а затем деля их на два, получим

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.44}$$

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.45}$$

В правых частях этих формул в силу единственности разложения функций в степенные ряды стоят ряды Тейлора функций $\operatorname{ch}x$ и $\operatorname{sh}x$.

Поскольку функция e^z определена теперь для всех комплексных z, то на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, положив

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Определенные таким образом $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ для комплексных z раскладываются в степенные ряды (37.44) и (37.45), сходящиеся на всей комплексной плоскости (под x в них в этом случае понимается комплексное число).

3. Разложение в ряд $\sin x$ и $\cos x$. Формулы Эйлера. Если $f(x)=\sin x$, то $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 3 п. 10.1), поэтому $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$ для всех действительных x. Согласно теореме 9, отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей действительной оси. Вспоминая формулу Тейлора для синуса (см. п. 13.3), получим ряд Тейлора для $\sin x$:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.46}$$

Рассуждая аналогично и вспоминая формулу Тейлора для косинуса (см. п. 13.3), получим и для него ряд Тейлора

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.47}$$

также сходящийся на всей действительной оси.

В силу теоремы Абеля (см. п. 37.1) ряды, стоящие в правых частях формул (37.46) и (37.47), сходятся также и при любом комплексном x; это позволяет распространить синус и косинус на комплексные значения аргумента, положив для любого комплексного z

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.48}$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.49}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной функцией и тригонометрическими. Заменим в ряде (37.41) z сначала на iz, а затем на $-iz$;

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n z^n}{n!}, \quad e^{-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{37.50}$$

Замечая теперь, что

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 4k, \\ i & \text{при} \quad n = 4k+1, \\ -1 & \text{при} \quad n = 4k+2, \\ -i & \text{при} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

и, следовательно, $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, из (37.50) будем иметь

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сравнив эти формулы с (37.48) и (37.49), получим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.51}$$

Из них непосредственно следует также формула

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}. \tag{37.52}$$

Конечно, эти формулы справедливы, в частности, и для действительных z.

Формулы (37.51) и (37.52) называются *формулами Эйлера*. Отметим два простых их применения.

Если в формуле (37.52) $z = \varphi$ — действительное число, то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Поэтому комплексное число с модулем r и аргументом φ

$$r = z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Положив здесь $z = -1$ и, следовательно, $\varphi = \pi$, получим

$$e^{i\pi} = -1$$

— связь между числами e, π и i!

Напомним, что числа π, e и i возникли в математике по совершенно разным и далеким друг от друга поводам: число π — как отношение длины окружности к диаметру, e — как такое основание показательной функции, при котором производная функция совпадает с самой функцией, а мнимая единица i была введена для того, чтобы каждое квадратное уравнение имело решение.

Легко находятся с помощью формул Эйлера модуль и аргумент числа e^z, где $z = x + iy$. Действительно (см. (37.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

т. е. $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Синус и косинус в комплексной области обладают многими свойствами, которыми они обладают и в действительной области, однако далеко не всеми; появляются и новые свойства.

Упражнения. Доказать, что при любом комплексном z:

9. $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$.

10. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

11. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.

12. Доказать, что для всех $z \in C$ справедливо неравенство $e^z \neq 0$.

13. Пусть $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sin z}{\cos z}$. Доказать, что для всех $z \in C$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} z \neq \pm i$. Указание. Выразить $\operatorname{tg} z$ через показательную функцию e^z.

Покажем, что абсолютные величины синуса и косинуса в комплексной области могут превышать единицу и, более того, не ограничены по абсолютной величине.

Заменим в рядах (37.48) и (37.49) z на iz:

$$\sin iz = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Сравнив получившиеся ряды с рядами (37.44) и (37.45) (при $x = z$), получим

$$i \operatorname{sh} z = \sin iz, \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

В частности, при действительном $z = y$

$$|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{и} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y,$$

откуда и видно, что на мнимой оси функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены по абсолютной величине.

В качестве свойства нового типа, появляющегося у показательной функции e^z в комплексной области, укажем еще на ее периодичность *). Именно, докажем, что функция e^z имеет период $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z, \quad z = x + iy.$$

4. Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$. Формула Тейлора для $\ln(1+x)$ имеет вид (см. п. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в формуле Лагранжа. Заметив, что

$$[\ln(1+x)]^{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

*) Если функция f определена на некотором множестве чисел (вообще говоря, комплексных) E, то, число $T \in C$ называется ее *периодом*, если для каждого $x \in E$ имеем $x \pm T \in E$ и $f(x+T) = f(x)$. Функция, имеющая период, называется *периодической*.

получим

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\quad 0<\theta<1.$$

Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то $0<\frac{1}{1+\theta x}\leqslant 1$ и поэтому $|r_n(x)|<\frac{1}{n+1}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{37.53}$$

Если же $-1<x<0$, то целесообразно записать остаточный член $r_n(x)$ в форме Коши:

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}.$$

В этом случае

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}=\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}<1$$

ибо в числителе дроби $\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}$ из единицы вычитается большее число чем в знаменателе; кроме того

$$\frac{1}{1+\theta x}=\frac{1}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|},$$

поэтому

$$|r_n(x)|\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\cdot\frac{1}{|1+\theta x|}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

откуда при $-1<x<0$ также получаем (37.53).

Таким образом,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{37.54}$$

для всех $x\in(-1;\ 1]$.

При $x=-1$ ряд, стоящий в правой части равенства (37.54), отличается от гармонического ряда лишь множителем -1 и потому расходится. Расходится он также и при всех x таких, что $|x|>1$, ибо в этом случае n-й член ряда (37.54) не стремится к нулю, более того (см. п. 12.2),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|=+\infty.$$

5. Разложение в ряд бинома $(1+x)^\alpha$. Формула Тейлора для биномиальной функции имеет вид (см. п. 13.3)

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x). \tag{37.55}$$

Рассмотрим соответствующий ряд (называемый биномиальным рядом с показателем α):

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{37.56}$$

Если α — неотрицательное целое, то ряд (37.56) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля, и, следовательно, сходится при всех x.

Рассмотрим теперь случай, когда α не является неотрицательным целым. В этом случае в ряде (37.56) все члены отличны от нуля при $x\neq 0$.

Для исследования абсолютной сходимости ряда (37.56) используем признак Даламбера. Иначе говоря, применим признак Даламбера к ряду с n-м членом:

$$u_n=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right|.$$

Замечая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right|=|x|$, получаем, что ряд (37.56) абсолютно, а значит, и просто сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Однако из одного лишь факта сходимости биномиального ряда (37.56) при $|x|<1$ нельзя еще сделать заключение о том, что его сумма равна $(1+x)^\alpha$. Для этого надо доказать, что в формуле (37.55) $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Замечая, что

$$[(1+x)^\alpha]^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы (37.55) в форме Коши:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

(θ зависит от x и от n). Положим

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},\quad C_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

тогда

$$r_n(x)=A_n(x)B_n(x)C_n(x).$$

Очевидно, $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $\alpha-1$ и, следовательно, в силу доказанной выше сходимости биномиального ряда при $|x|<1$

$$\lim_{n\to\infty}A_n(x)=0,\quad |x|<1.$$

Далее, из того, что $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$, следует, что значения $|B_n(x)|$ заключены между величинами

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1},$$

не зависящими от θ, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x\in(-1,\ 1)$ ограничена. Наконец,

$$|C_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right|^n\leqslant\left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|^n<1.$$

Из установленных свойств $A_n(x)$, $B_n(x)$ и $C_n(x)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \qquad |x|<1.$$

Таким образом, для любого $x\in(-1;\ 1)$ справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Задача 26. Доказать, что 1) в точке $x=1$ при $\alpha>-1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha\leqslant-1$ — расходится;

2) в точке $x=-1$ при $\alpha\geqslant0$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $\alpha<0$ — расходится.

При этом каждый раз, когда биномиальный ряд (37.56) сходится, его сумма равна $(1+x)^\alpha$.

37.7. РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И СУММИРОВАНИЕ ИХ МЕТОДОМ ПОЧЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Дифференцируя или интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды. Так, например, интегрируя формулу геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\ldots+(-1)^n t^n+\ldots \tag{37.57}$$

в пределах от 0 до x, $|x|<1$ (что законно, ибо ряд (37.57) равномерно сходится на отрезке с концами в точках 0 и x при $|x|<1$), получим известную уже формулу (37.54):

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Раньше эта формула была доказана на полуинтервале $(-1;\ 1]$, а теперь только для интервала $(-1;\ 1)$. Однако в силу второй теоремы Абеля о степенных рядах (п. 37.1) из справедливости формулы (37.54) на интервале $(-1;\ 1)$ сразу следует ее справедливость и при $x=1$. Действительно, ряд в правой части этой

формулы сходится при $x=1$ и, следовательно, его сумма непрерывна в этой точке (см. теорему 3 в п. 37.1), функция $\ln(1+x)$ также непрерывна при $x=1$, поэтому в обеих частях равенства (37.54) (если известно, что оно справедливо на интервале $(-1;\ 1)$) можно перейти к пределу при $x\to 1-0$ и тем самым доказать его справедливость и при $x=1$:

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

В результате дифференцирования или интегрирования заданного степенного ряда, иногда удается получить ряд, сумма которого уже известна; это позволяет вычислить и сумму исходного степенного ряда.

Примеры. 1. Найдем разложение функции $\arcsin x$ в ряд. Замечая, что

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

разложим $(\arcsin x)'$ в ряд по формуле разложения степени бинома (см. п. 37.6):

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}. \qquad (37.58)$$

Радиус сходимости получившегося ряда равен единице (см. там же). Интегрируя ряд (37.58) от 0 до x, $|x|<1$, получим:

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Разложим функцию $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд и с помощью него найдем числовой ряд, сумма которого равна π.

Поступая при $|x|<1$ аналогично примеру 1, имеем:

$$\operatorname{arctg} x=\int_1^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (37.59)$$

Заметим, что полученный ряд при $x=\pm 1$ по признаку Лейбница (см. п. 35.9, теорему 11) сходится, ибо сходится знакопеременный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} x$ непрерывна при $x=\pm 1$, то согласно второй теореме Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1, теорема 3) сумма ряда (37.59), являясь непрерывной функцией

на отрезке $[-1, 1]$ и совпадая с $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1, +1)$, совпадает с ним и в концевых точках $x=\pm 1$. Иначе говоря, разложение (37.59) справедливо для отрезка $[-1, +1]$. Беря в этом разложении, например, $x=1$ и замечая, что $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, получим

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Этот ряд называется *рядом Лейбница*.

Отметим, что арктангенс определен на всей действительной числовой оси, в частности и вне отрезка $[-1, 1]$. Однако его разложение в степенной ряд (37.59) справедливо только на этом отрезке. Вне этого отрезка ряд (37.59) расходится, в чем легко убедиться, найдя его радиус сходимости, например, по формуле (37.8′). Анализ этого явления проводится в теории функций комплексного переменного.

3. Найдем сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \tag{37.60}$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице. В этом легко убедиться, например, по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{nx}\right|=|x|.$$

Следовательно, ряд (37.60) абсолютно сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Из (37.60) следует, что

$$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x|<1.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно от 0 до x, $|x|<1$:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}.$$

и затем продифференцируем получившееся тождество:

$$\frac{S(x)}{x}=\frac{d}{dx}\,\frac{x}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

В результате получаем

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$$