

4. Найдем сумму ряда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \quad (37.61)$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, например, тем же способом, что и в случае ряда (37.60). Продифференцировав ряд (37.61) почленно:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n},$$

и использовав разложение логарифма (см. п. 37.6), получим:

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1, \quad \text{или} \quad S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Замечая, что $S(0) = 0$, окончательно получим

$$S(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях.

Упражнения. 14. Разложить в степенной ряд функцию $(\arcsin x)^2$.

15. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

37.8. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

С помощью разложения логарифмической функции в степенной ряд можно легко найти формулу, описывающую асимптотическое поведение факториала $n!$ при $n \rightarrow \infty$. Она называется *формулой Стирлинга*^{*)} и может быть записана в виде

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}; \quad (37.62)$$

согласно определению асимптотического равенства для последовательностей (см. п. 23.3) это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

^{*)} Дж. Стирлинг (1692–1770) — английский математик.

Из разложения

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1,$$

следует, что

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \\ &= \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] \leq \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

или, потенцируя и принимая во внимание, что функция $\ln x$ — монотонно возрастающая,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} < e. \quad (37.63)$$

Положим

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}; \quad (37.64)$$

поскольку согласно (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} < 1,$$

то последовательность $\{x_n\}$ убывает, и, кроме того, она ограничена снизу $x_n \geq 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} a.$$

Поэтому

$$x_n = a(1 + \varepsilon_n), \quad (37.65)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Подставим (37.65) в (37.64):

$$n! = a \frac{n + \frac{1}{2}}{e^n} (1 + \varepsilon_n). \quad (37.66)$$

Для того чтобы получить формулу (37.62) осталось лишь показать, что $a = \sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса (см. (30.8) в п. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2, \quad (37.67)$$

а согласно (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} = a \sqrt{\frac{n}{2} \frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}}.$$

Подставив это выражение в (37.67), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \frac{n}{2} \frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

откуда $a = \sqrt{2\pi}$. \square

37.9*. ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛORA ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вектор-функцию $f : [a, b] \rightarrow R^n$, где R^n – n -мерное векторное пространство. Как уже отмечалось, на вектор-функции обобщаются понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала и интеграла (см. § 15, п. 18.4 и п. 30.4), на которые переносятся многие свойства этих понятий, справедливые для числовых функций. Однако, далеко не для всех свойств это имеет место. Так, в п. 15.2 было показано, что утверждение, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа, уже не справедливо для вектор-функций. Поэтому не справедливо, конечно, и ее обобщение в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Покажем, что для вектор-функций справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема 10. Пусть функция $f : (t_0 - h, t_0 + h) \rightarrow R^n$ непрерывна вместе со всеми ееими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$, $h > 0$. Тогда для любого $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ справедлива формула

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0) (t - t_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^n f^{(n+1)}(\tau) d\tau. \quad (37.68)$$

Следствие.

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0) (t - t_0)^k \right| \leq \frac{1}{n!} (t - t_0)^{n+1} \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)|, \\ t \in (t_0 - h, t_0 + h).$$

Доказательство теоремы. Прежде всего напомним, что если

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \quad (37.69)$$

то

$$\mathbf{f}'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \quad (37.70)$$

$$\int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau) d\tau = \left(\int_{t_0}^t f_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_0}^t f_n(\tau) d\tau \right). \quad (37.71)$$

Из предположений теоремы следует, что каждая координатная функция f_i непрерывна на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$ вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно, и поэтому для нее справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0) (t - t_0)^k + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (37.70) и (37.71) и следует сразу справедливость формулы (37.68). \square

Следствие вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_0}^t (t - \tau)^n \mathbf{f}^{n+1}(\tau) d\tau \right| \leqslant \\ &\leqslant |t - t_0|^n \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{f}^{(n+1)}(\tau)| d\tau \right| \leqslant |t - t_0|^n \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |\mathbf{f}^{(n+1)}(\tau)| \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| = \\ &= |t - t_0|^{n+1} \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |\mathbf{f}^{(n+1)}(\tau)|. \quad \square \end{aligned}$$

Для вектор-функций справедлива формула Тейлора и с остаточным членом в форме Пеано: если функция $\mathbf{f}: (t_0 - h, t_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет в точке t_0 производную порядка n , то

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \mathbf{f}^{(k)}(t_0) (t - t_0)^k + o((t - t_0)^n).$$

Это также следует сразу из того, что для каждой координатной функции f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в предположениях теоремы имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки t_0 (см. п. 13.1).

Если вектор-функция $\mathbf{f}: (t_0 - h, t_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет в точке t_0 производные всех порядков и для любого $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$

выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0) (t-t_0)^k \right] = 0,$$

то на интервале (t_0-h, t_0+h) функция f раскладывается в степенной ряд с векторными коэффициентами

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0) (t-t_0)^n,$$

называемый ее рядом Тейлора.

37.10*. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Известно (см. п. 13.1), что если функция f определена в окрестности точки x_0 и n раз в ней дифференцируема, то существует такой многочлен $P_n(x)$ степени, не большей n , а именно многочлен Тейлора, что

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (37.72)$$

При этом

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n. \quad (37.73)$$

Из (37.72) и (37.73) следует, что разность $f(x) - P_{n-1}(x)$ представима в виде

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

и, тем самым, имеет место асимптотическое равенство

$$f(x) - P_{n-1}(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0.$$

Таким образом, члены многочлена Тейлора $P_n(x)$ (ряда Тейлора, если функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0) можно последовательно определить как слагаемые вида $a_n(x-x_0)^n$, асимптотически равные разности $f(x) - P_{n-1}(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Аналогичным образом можно поступать и при изучении функции в бесконечности. Пусть для определенности функция f определена при $x \geq a$, и существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0. \quad (37.74)$$

а, следовательно $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a_0] = 0$.

Иногда возникает вопрос как именно разность $f(x) - a_0$ стремится к нулю, каков порядок убывания этой разности? Может

случиться, что существует такое число a_1 , что

$$f(x) - a_0 \sim \frac{a_1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.75)$$

т. е. (см. теорему 1 в п. 8.3)

$$f(x) - a_0 = \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.76)$$

откуда

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + x o(1/x), \quad x \rightarrow +\infty,$$

а поскольку в силу определения символа o $\lim_{x \rightarrow +\infty} x o(1/x) = 0$, то

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[f(x) - a_0]. \quad (37.77)$$

Наоборот, из (37.77) следует, что

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

и, следовательно,

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

т. е. выполняется асимптотическое равенство (37.76). Если указанное a_1 найдено, то часто бывает нужно найти, как говорят, «следующий член асимптотического разложения» функции f , т. е. найти асимптотическое поведение разности $f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$. Эта разность согласно (37.76) представляет собой не что иное, как $o(1/x)$, $x \rightarrow +\infty$. Может случиться, что существует такое число a_2 , что

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) \sim \frac{a_2}{x^2},$$

или, что то же

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) = \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Это условие равносильно существованию предела

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)] = a_2.$$

Вообще, если

$$S_{n-1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (37.78)$$

— такой многочлен степени не большей $n - 1$ относительно переменной $1/x$, что

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right) \sim \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad n = 2, 3, \dots,$$

то может случиться, что существует такая постоянная a_n , для которой имеет место асимптотическое равенство

$$f(x) - S_{n-1}(x) \sim \frac{a_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (37.79)$$

Это условие равносильно следующему:

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (37.80)$$

которое, полагая

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{a_n}{x^n} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k}, \quad (37.81)$$

можно переписать в виде

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.82)$$

или, что то же, в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n [f(x) - S_n(x)] = 0. \quad (37.83)$$

Как и выше, при $n=1$, легко показать, что условие (37.80) равносильно существованию конечного предела

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n [f(x) - S_{n-1}(x)] = a_n. \quad (37.84)$$

Если указанные пределы a_n существуют для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то можно образовать ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \quad (37.85)$$

Ряды такого вида также можно назвать *степенными рядами*, точнее, степенными рядами по целым отрицательным степеням переменной x .

Определение 5. Пусть функция f определена при $x \geq a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0$. Если существует ряд вида (37.85), частичные суммы (37.78) которого удовлетворяют условию (37.79), либо, что равносильно, одному из условий (37.82) или (37.83), то этот ряд называется асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) в смысле Пуанкаре*¹) функции f при $x \rightarrow +\infty$.

В этом случае пишут

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}. \quad (37.86)$$

Подчеркнем, что здесь знак \sim означает не асимптотическое равенство в том смысле, как оно, например, понимается в фор-

*¹ А. Пуанкаре (1854—1912) — французский математик.

мule (37.79), т. е. в смысле определения 3 п. 8. 2, а соответствие: ряд (37.85) соответствует функции f .

Как было отмечено, условие (37.80) равносильно условию (37.84), поэтому, если у функции f существует при $x \rightarrow +\infty$ асимптотический ряд (37.85), то его коэффициенты a_n , $n=1, 2, \dots$, могут быть последовательно найдены по формулам (37.84). При $n=0$ следует воспользоваться формулой (37.74). Отсюда следует, что если у функции имеется при $x \rightarrow +\infty$ асимптотический ряд, то он единственен и его коэффициенты выражаются по формулам (37.74) и (37.84).

Вспомним, что при разложении функции в степенной ряд также была доказана единственность степенного ряда, в который раскладывается функция, а именно было доказано его совпадение с ее рядом Тейлора. Однако, там было отмечено, что один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора разных функций. Подобная ситуация имеет место и для асимптотических рядов: один и тот же ряд вида (37.85) может оказаться асимптотическим рядом при $x \rightarrow +\infty$ разных функций. Например, нулевой ряд, т. е. ряд, все коэффициенты которого равны нулю,

$$a_n = 0, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

является при $x \rightarrow +\infty$ как асимптотическим рядом функции, равной нулю во всех точках числовой оси: $f_1(x) = 0$, $-\infty < x < +\infty$, так и функции $f_2(x) = e^{-x}$, в чем легко убедиться, вычислив в этих случаях последовательно пределы (37.84).

В отличие от разложения функций в степенные ряды, при котором суммой степенного ряда является заданная функция, и, следовательно, рассматриваемый степенной ряд сходится, при построении асимптотического ряда функции может случиться, что полученный ряд не только не будет сходиться к данной функции, а будет вообще расходиться во всех точках. Тем не менее, асимптотический ряд (37.86) функции является полезным инструментом для ее изучения, в частности для вычисления ее значений. Это, очевидно, связано с тем, что частные суммы асимптотического ряда (37.86) функции в силу условия (37.82) достаточно хорошо приближают саму функцию, причем тем лучше, чем больше x .

Поясним сказанное на примере функции

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t} dt, \quad x > 0. \quad (37.87)$$

Интегрируя n раз по частям, получим

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + \\ + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt. \quad (37.88)$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad (37.89)$$

является асимптотическим разложением функции (37.87). Действительно, если $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n = 1, 2, \dots$,

т. е. $S_n(x)$ — частичные суммы ряда (37.89), то интегрируя по частям в силу (37.88) будем иметь:

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}} dt \leq \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

т. е. выполняется условие (37.82).

Вместе с тем легко убедиться по признаку Даламбера, что ряд (37.89) расходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Действительно, полагая

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{|x|} = +\infty.$$

Итак, асимптотический ряд (37.89) функции (37.87) расходится во всех точках. Однако, несмотря на это значения функции (37.87) могут быть получены с большой степенью точности при помощи частичных сумм этого ряда.

Покажем, что если ряд (37.85) сходится к некоторой функции f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \geq a > 0, \quad (37.90)$$

то он является и асимптотическим рядом этой функции при $x \rightarrow +\infty$.

В самом деле, пусть

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

и, следовательно,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Покажем, что

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.91)$$

а потому, тем более, что

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

т. е. что

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

иначе говоря, что выполняется условие (37.82). Для этого рассмотрим функцию $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(1/t)$, $0 < t \leq 1/a$. В силу (37.90) получим равенство

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

в котором ряд, стоящий в правой части сходится при $0 < t < 1/a$, откуда по теореме Абеля следует, что он сходится и при всех таких t , что $|t| < 1/a$. Если

$$r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < 1/a,$$

то (см. лемму 1 в п. 37.3) $r_n(t) = O(t^{n+1})$, $t \rightarrow 0$. Выполнив здесь замену переменного $t = \frac{1}{x}$, получим (37.91).

В заключение отметим, что условие (37.82) разложения функции в степенной асимптотический ряд можно заменить другим, внешне более сильным, но по существу эквивалентным условием. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 3. Для того чтобы ряд (37.85) являлся асимптотическим при $x \rightarrow +\infty$ для функции f необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} f(x) - S_n(x) &= O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \\ n &= 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{37.92}$$

Достаточность этого условия очевидна, так как $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (напомним, что подобные равенства читаются только слева направо), а, следовательно, при выполнении условия (37.92) будет выполняться (37.82).

Наоборот, если выполнено условие (37.82):

$$f(x) - S_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, x \rightarrow +\infty,$$

то, поскольку $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ получим

$$f(x) - S_n(x) = \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \quad \square$$

37.11*. СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В этом пункте будут сформулированы и доказаны некоторые основные свойства разложений функций в асимптотические степенные ряды. В дальнейшем, в п. 54.6, будут рассмотрены более общие, не обязательно степенные, асимптотические ряды. Поскольку в настоящем пункте будут изучаться только асимптотические разложения функций при $x \rightarrow +\infty$ в степенные ряды вида (37.85), то мы будем их называть просто *асимптотическими разложениями*.

I. Если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.93)$$

то для любых чисел λ и μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

т. е. асимптотическое разложение линейной комбинации функций, имеющих асимптотическое разложение, равно такой же линейной комбинации асимптотических разложений этих функций.

Действительно, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.94)$$

то для любых чисел λ и μ :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad \square$$

II. Если имеют место асимптотические разложения (37.93), то

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$, *т. е. асимптотическое разложение произведения функций, имеющих асимптотические разложения, равно произведению этих разложений, расположенных по возрастающим степеням $1/x$.*

В самом деле, если имеет место (37.94), то

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = \\ &= a_0b_0 + \frac{a_0b_1 + a_1b_0}{x} + \dots + \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad \square \end{aligned}$$

III. Если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.95)$$

и $a_0 \neq 0$, то функция $1/f(x)$ также имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

и коэффициент d_n этого разложения выражается через коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n разложения (37.95).

Действительно, из (37.95) следует (см. (37.74)), что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Далее, можно последовательно показать существование пределов (37.84) для функции $1/f(x)$, непосредственно вычисляя их. Например,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0} \right) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + x o\left(\frac{1}{x}\right)}{a_0 \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)} = - \frac{a_1}{a_0^2}, \end{aligned}$$

т. е. $d_1 = -a_1/a_0^2$.

Аналогично вычисляются d_2, d_3, \dots \square

IV. Если функция f непрерывна при $x \geq a > 0$ и имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена порядка $\frac{1}{x^2}$,

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.96)$$

то

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.97)$$

т. е. в указанном случае асимптотические ряды можно почленно интегрировать.

Докажем это. Пусть

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{x^k}, \quad R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Поскольку функции f и S_n непрерывны при $x \geq a$, то и функция R_n непрерывна при $x \geq a$. В силу (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \geq a$, что для всех $x \geq x_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

Отсюда следует, во-первых, что интеграл $\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t) dt$, а поэтому и интеграл $\int_x^{+\infty} R_n(t) dt$, $x \geq x_\varepsilon$, существуют, а во-вторых, что при $x \geq x_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left| x^{n-1} \int_x^{+\infty} R_n(t) dt \right| \leq x^{n-1} \int_x^{+\infty} |R_n(t)| dt \leq \varepsilon x^{n-1} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1},$$

и, следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-1} \int_x^{+\infty} R_n(t) dt = 0. \quad (37.93)$$

Теперь, интегрируя равенство $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, получим

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + \int_x^{+\infty} R_n(t) dt. \quad (37.99)$$

В силу выполнения условия (37.98) равенство (37.99) и означает справедливость асимптотического разложения (37.97) (см. (37.83)). \square

V. Если функция f раскладывается в асимптотический ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (37.100)$$

и если она имеет при $x \geq a$ непрерывную производную, которая также при $x \rightarrow +\infty$ раскладывается в асимптотический ряд, то этот ряд получается формальным почленным дифференцированием ряда (37.100)

$$f'(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (37.101)$$

В самом деле, пусть

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (37.102)$$

По формуле Ньютона — Лейбница для любых $x \geq a$ и $y \geq a$

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_x^y f'(t) dt = \int_x^y \left[b_0 + \frac{b_1}{t} + \left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right) \right] dt = \\ &= b_0(y-x) + b_1 \ln \frac{y}{x} + \int_x^y \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right] dt. \end{aligned} \quad (37.103)$$

Согласно (37.102) $f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_x^{+\infty} \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right] dt$$

сходится. В силу (37.100) существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = a_0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $y \rightarrow +\infty$ в (37.103), убеждаемся в том, что существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left[b_0(y-x) + b_1 \ln \frac{y}{x} \right],$$

Это возможно только в случае, когда $b_0 = b_1 = 0$. Таким образом, равенство (37.103) в пределе перейдет в равенство

$$a_0 - f(x) = \int_x^{+\infty} f'(t) dt;$$

при этом в силу условия $b_0 = b_1 = 0$ из (37.102) имеем:

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty;$$

отсюда, интегрируя почленно в пределах от x до $+\infty$ согласно свойству IV, получим

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{nx^n}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Но из (37.100) следует, что

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

Вспоминая, что разложение функции при $x \rightarrow +\infty$ в асимптотический степенной ряд единственно, из сравнения получившихся для функции $a_0 - f(x)$ рядов найдем, что

$$b_{n+1} = -na_n, \quad n = 1, 2, \dots. \quad \square$$

Замечание. Если непрерывно дифференцируемая при $x \geq a$ функция f раскладывается при $x \rightarrow +\infty$ в асимптотический ряд, то ее производная может не иметь при $x \rightarrow +\infty$ асимптотического разложения. Тем самым требование существования асимптотического разложения у производной в предложении V является существенным. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $-\infty < x < +\infty$. Нетрудно с помощью формул (37.84) убедиться, что функция f при $x \rightarrow +\infty$ раскладывается в нулевой асимптотический ряд, т. е. ряд (37.85), у которого $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ее производная $f'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$ заведомо не имеет асимптотического разложения при $x \rightarrow +\infty$, так как она даже не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$.

Упражнение 16. Доказать, что

$$a) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots, \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$b) \int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2} dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \dots, \quad x \rightarrow +\infty.$$

§ 38*. КРАТНЫЕ РЯДЫ

38.1. КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе будут рассматриваться так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1 \dots n_k}, \quad (38.1)$$

где $u_{n_1 \dots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря комплексные) занумерованные k индексами n_i , $i = 1, 2, \dots, k$, каждый из которых независимо от другого пробегает натуральный ряд чисел: $n_i = 1, 2, \dots$. Ряд (38.1) называется k -кратным рядом, а числа $u_{n_1 \dots n_k}$ — его членами.

Определим четко эти понятия. Начнем с понятия кратной последовательности.

Определение 1. Пусть X — некоторое множество; k -кратной последовательностью элементов множества X называется отображение $f: \underbrace{N \times N \times \dots \times N}_{k \text{ раз}} \rightarrow X$ (N , как всегда, обозначает множество натуральных чисел).

Элемент $x = f(n_1, \dots, n_k)$, $n_1 \in N, \dots, n_k \in N$, обозначается через $x_{n_1 \dots n_k}$, а сама последовательность через $\{x_{n_1 \dots n_k}\}$.

Однократная последовательность называется просто последовательностью.

Итак, элементы k -кратной последовательности «занумерованы» k натуральными индексами. Мы будем рассматривать числовые кратные последовательности, т. е. кратные последовательности, элементами которых являются комплексные, в частности действительные, числа. Для простоты обозначений ограничимся случаем $k=2$. Обобщение на случай произвольного натурального $k \in N$ делается безо всякого труда.

Определение 2. Число $a \in C$ называется пределом двойной последовательности $\{x_{mn}\}$ и пишется $a = \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $n_\epsilon \in N$, что для всех $m \geq n_\epsilon$, $n \geq n_\epsilon$, $m \in N$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_{mn} - a| < \epsilon$.

Если двойная последовательность имеет предел, то она называется сходящейся.

Определение 3. Двойная последовательность называется последовательностью, стремящейся к $+\infty$, и пишется $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = +\infty$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $n_\epsilon \in N$, что для всех $m \geq n_\epsilon$, $n \geq n_\epsilon$, $m \in N$, $n \in N$, выполняется неравенство $x_{mn} > \epsilon$.

Аналогично определяются бесконечные пределы $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = -\infty$ и $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = \infty$.

Как обычно, под пределом (в данном случае двойной последовательности) понимается конечный предел, если не оговорено что-либо другое.

Определим теперь двойной ряд.

Определение 4. Пусть задана двойная последовательность $\{u_{mn}\}$. Составим двойную числовую последовательность

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n u_{kl}. \quad (38.2)$$

Пара последовательностей $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ называется двойным рядом и обозначается через

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}. \quad (38.3)$$

Элементы двойной последовательности $\{u_{mn}\}$ называются членами ряда (38.3), а элементы двойной последовательности $\{S_{mn}\}$ — частичными суммами этого ряда.

Определение 5. Двойной ряд (38.3) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится. Ее предел называется суммой ряда; причем, если

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = S, \quad (38.4)$$

то пишется

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Если конечного предела (38.4) не существует, то ряд (38.3) называется расходящимся. Если существует один из бесконечных пределов

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = -\infty, \quad (38.5)$$

то соответственно пишется

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

З а м е ч а н и е. Содержательность определения ряда как пары последовательностей хорошо видна на примере кратных рядов. Например, если задана последовательность $\{u_{mn}\}$, то соответствующую ей последовательность «частичных сумм» можно задавать не только выше указанным способом (38.2), но и по другому. Наряду с суммами (38.2), определенными выше и называемыми прямоугольными (в них суммируются элементы u_{kl} , которым соответствуют точки (k, l) плоскости xy , содержащиеся в прямоугольнике $0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n$) рассматриваются треугольные суммы $T_r = \sum_{k+l \leq r} u_{kl}, r = 1, 2, \dots$, (точка (k, l) лежит в треугольнике $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq r$), сферические $S_r = \sum_{k^2+l^2 \leq r^2} u_{kl}, r = 1, 2, \dots$, (точка (k, l) лежит в круге $x^2 + y^2 \leq r^2$) и другие. Таким образом, для одной и той же последовательности $\{u_{mn}\}$ имеются разные последовательности частичных сумм, причем в случае сходимости одной из них другая не обязательно сходится. Поэтому естественно рассматривать каждую пару, состоящую из последовательности $\{u_{mn}\}$ членов ряда и каких-то его «частичных сумм», как самостоятельный ряд.

Отметим, что последовательности частичных сумм кратных рядов (например, частичных сумм T_r или S_r) в отличие от последовательностей частичных сумм однократных рядов не всегда однозначно определяют последовательность общих членов ряда.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямоугольные частичные суммы S_{mn} .

На кратные ряды переносится ряд свойств обычных (однократных) рядов, например:

1°. Если ряд $\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}$ сходится и S — его сумма, то

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S \text{ для любого числа } \lambda.$$

2°. Если ряды $\sum_{m, n=1}^{\infty} u'_{mn} = S'$ и $\sum_{m, n=1}^{\infty} u''_{mn} = S''$ сходятся, то

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} (u'_{mn} + u''_{mn}) = S' + S''.$$

Эти утверждения легко доказываются аналогично случаю однократных рядов (это предоставляется проделать читателю).

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

Теорема 1. Если ряд (38.3) сходится, то

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} u_{mn} = 0.$$

Это сразу следует из равенства

$$u_{mn} = S_{mn} - S_{m-1, n} - S_{m, n-1} + S_{m-1, n-1}$$

и условия (38.4). \square

Теорема 2. Если все члены ряда (38.3) неотрицательны,

$$u_{mn} \geq 0, m, n = 1, 2, \dots, \quad (38.6)$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм S_{mn} , причем

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sup_{m, n = 1, 2, \dots} S_{mn}. \quad (38.7)$$

Доказательство. Если выполняется условие (38.6) и $m' \geq m, n' \geq n$, то $S_{m'n'} \geq S_{mn}$.

Далее, если $S = \sup_{m, n = 1, 2, \dots} S_{mn}$ и $S' < S$, то в силу определения верхней грани существуют такие номера m_0 и n_0 , что $S_{m_0 n_0} > S'$.

Положим $N = \max \{m_0, n_0\}$, тогда при $m \geq N$ и $n \geq N$

$$S_{mn} \geq S_{NN} \geq S_{m_0 n_0} > S',$$

и так как $S_{mn} \leq S$, то $\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$, т. е. выполняется условие (38.7). \square

Следствие. В предположениях теоремы ряд (38.3) сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.

Доказательство следствия очевидно.

Из двукратного ряда (38.3) можно формально образовать два так называемых повторных ряда. Для этого следует сначала произвести суммирование по одному индексу, зафиксировав другой, а затем произвести суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}. \quad (38.8)$$

Аналогично доказанной ранее теореме о повторных пределах (см. теорему 1 п. 19.2) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Если сходится двойной ряд (38.3) и для всех $n = 1, 2, \dots$ сходятся ряды $\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, то повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ также сходится и его сумма равна сумме данного ряда (38.3).

Определение 6. Ряд (38.3) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. ряд

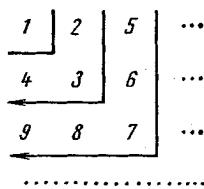
$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \quad (38.9)$$

Теорема 4. Если ряд (38.3) абсолютно сходится, то сходится и любой ряд (однократный, двукратный или повторный), полученный перестановкой членов данного ряда (в частности сходится и сам заданный ряд). При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда (38.3).

Доказательство. Расположим члены ряда (38.3) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m -ю ее строку члены ряда с данным фиксированным первым номером m , расположенные по возрастанию второго индекса n :

$$\begin{array}{cccccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \dots & u_{mn} & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \end{array}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме:



Член ряда (38.3), получивший при такой нумерации номер k , обозначим v_k . Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad (38.10)$$

и покажем, что он абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \quad (38.11)$$

Обозначим частичные суммы ряда (38.9) через S_{mn}^* , его сумму — через S^* , а частичные суммы ряда (38.11) — через S_k^* . Прежде всего заметим, что для любой суммы S_k^* найдутся такие номера m и n , что все члены ряда (38.11), входящие в сумму S_k^* войдут и в сумму S_{mn}^* , тогда

$$S_k^* \leq S_{mn}^* \leq S^*.$$

Отсюда и следует (см. п. 35.4) сходимость ряда (38.11).

Из абсолютной сходимости ряда (38.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (38.2), также сходится и его сумма равна сумме ряда (38.10) (см. п. 35.10). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn}, \quad (38.12)$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (38.3), абсолютно сходится и что его сумма также равна S .

Абсолютная сходимость ряда (38.12) легко следует из абсолютной сходимости ряда (38.3), т. е. из сходимости ряда (38.9), и доказывается тем же приемом, которым была доказана абсолютная сходимость ряда (38.10). Докажем теперь, что сумма ряда (38.12) равна S . Обозначим его частичные суммы через S'_{mn} , а частичные суммы ряда (38.10) через S_k . Пусть фиксирано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (38.11) существует такой номер k_ε , что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (38.13)$$

тогда и подавно

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (38.14)$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_{k_ε} . Пусть $m \geq N_\varepsilon$ и $n \geq N_\varepsilon$. Положим

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

тогда, используя (38.13) и (38.14), получим

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (38.12), в частности суммой самого ряда (38.3).

Покажем, наконец, что S является и суммой повторных рядов (38.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Следовательно, все ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходятся, и притом абсолютно.

Положим

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \quad (38.15)$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (38.13), а следовательно, и условие (38.14). Далее, подобно тому, как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.3) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_k . Тогда при всех $m \geq N_\varepsilon$ и $n \geq N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leq \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим (см. (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^n u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу (38.14) следует, что при $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n u_i - S \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \quad \square$$

Упражнение 1. Обобщить критерий Коши сходимости однократных рядов на случай кратных рядов.

38.2. КРАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение 7. Ряд вида

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1, \dots, n_k}(x), \quad (38.16)$$

где функции $u_{n_1, \dots, n_k}(x)$ определены на некотором множестве E , называется k -кратным функциональным рядом, а суммы вида

$$S_{m_1 \dots m_k}(x) = \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{m_1, \dots, m_k} u_{n_1 \dots n_k}(x)$$

— его частичными суммами.

Определение 8. Ряд (38.16) называется сходящимся на множестве E , если при каждом фиксированном $x_0 \in E$ сходится кратный числовой ряд

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1, \dots, n_k}(x_0).$$

Если ряд (38.16) сходится на E , то функция

$$S(x) = \sum_{n_1, \dots, n_k=1}^{\infty} u_{n_1 \dots n_k}(x), \quad x \in E$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

Упражнение 2: Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что, если ряд (38.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $E \subset R^n$, то и сумма ряда (38.16) является непрерывной на множестве E функцией.

Определение 9. Ряды вида

$$\sum_{n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} c_{n_1 \dots n_k} (x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \dots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1 \dots n_k}$ — комплексные числа, называются кратными степенными рядами.

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд с действительными коэффициентами, который, рассматриваемый в вещественной области, сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках $(0; 0)$ и $(1; 1)$. Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \quad (38.17)$$

где, $c_{00} = 0$, $c_{0n} = c_{n0} = n!$, $n = 1, 2, \dots$; $c_{1m} = c_{m1} = -m!$, $m = 1, 2, \dots$; $c_{mn} = 0$, $m \geq 2, n \geq 2$.

Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x, y) = (1-y) \sum_{k=1}^m k! x^k + y + (1-x) \sum_{l=2}^n l! y^l. \quad (38.18)$$

Очевидно, что $S_{mn}(0, 0) = 0$ и $S_{mn}(1, 1) = 1$, $m, n = 1, 2, \dots$, и потому ряд (38.17) сходится в точках $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

равен нулю (см. пример 1 в п. 37.1), при этом его частичные суммы

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n k! z^k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при вещественных $z > 0$, очевидно, стремятся к $+\infty$.

Покажем, что при $z < 0$ его четные частичные суммы $S_{2n}(z)$ также стремятся к $+\infty$. Действительно, объединив при $z < 0$ попарно соседние члены, получим:

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=1}^n (2k-1)! |z|^{2k-1} (2k|z|-1).$$

Далее заметим, что при любом фиксированном $z \neq 0$ для номеров $k > \frac{1}{|z|}$ выполняется неравенство

$$(2k-1)! |z|^{2k-1} (2k|z|-1) > (2k-1)! |z|^{2k-1}$$

и что при $z \neq 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)! z^{2k-1}$$

расходится (это, например, легко доказывается тем же способом, каким доказывалась при $z \neq 0$, расходимость ряда в примере 1 п. 37.1) и, следовательно, при $z > 0$ его сумма равна $+\infty$, поэтому и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}(z) = +\infty, z \neq 0.$$

Из сказанного и из равенства (38.18) следует, что, если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно подобрать такие номера m и n , что

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

А это и означает, что ряд (38.17) для указанных (x, y) расходится.

Упражнение 3. Число S назовем суммой ряда $\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех номеров m и n , удовлетворяющих условию $m+n > N$, выполняется неравенство $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Выяснить, эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1.

4. Число S назовем суммой ряда $\sum_{m, n=1}^{\infty} u_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_{\varepsilon} = \{(m, n)\}$ пар индексов m, n членов данного ряда, что, каково бы ни было другое конечное множество \mathfrak{N} пар индексов членов этого ряда, содержащее множество $\mathfrak{N}_{\varepsilon}$: $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_{\varepsilon}$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{(m, n) \in \mathfrak{N}} u_{mn} - S \right| < \varepsilon.$$

Выяснить эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1 и определению, сформулированному в предыдущем упражнении.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель Н. (Abel N.) 582, 585, 621, 624
Адамар Ж. (Hadamard J.) 629
Архимед (Αρχιμήδης) 43, 511
- Бернулли Я. (Bernoulli J.) 74
Больцано Б. (Bolzano B.) 63, 123, 297,
Бонне О. (Bonnet O.) 481
Борель Э. (Borel E.) 314
Безу Э. (Bézout E.) 400
- Валлис Дж. (Wallis J.) 478
Вейерштрас К. (Weierstrass C.) 63,
121, 297, 333, 603, 609
- Гамильтон У. (Hamilton W.) 365
Гейне Г. (Heine E.) 97
Гёльдер О. (Hölder O.) 465, 565
Гульдин П. (Goulden P.) 510
- Даламбер Ж. (D'Alambert J.) 558, 559,
577, 578
Дарбу Г. (Darboux G.) 201, 443, 444,
445, 446, 447, 492
- Дедекинд Р. (Dedekind R.) 19, 591
Декарт Р. (Descartes R.) 247
Дини У. (Dini U.) 615
Дирихле Л. (Dirichlet Lejeune P. G.)
92, 326, 443, 534, 582, 583, 609
- Дю Буа Реймон П. (Du Bois Raymond P.) 591
- Евклид (Εὐκλείδης) 317, 405
Жордан К. (Jordan C.) 309
- Кантор Г. (Cantor G.) 44, 85, 336, 340
Коши О. (Cauchy A. L.) 65, 66, 113, 115,
123, 199, 213, 289, 319, 333, 530,
551, 560, 578, 600, 606, 629, 638
- Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 196, 197,
199, 200, 213, 638
- Лежандр А. (Legendre A.) 437
Лейбниц (Leibniz v. G. W.) 186, 471,
472, 517, 567, 650
- Лопиталь Г. (de L'Hospital G.) 201,
208
- Маклорен К. (MacLaurin C.) 212, 216
Минковский Г. (Minkowski H.) 465,
565
- Муавр А. (Moivre A.) 392
- Ньютона И. (Newton I.) 471, 472; 517
- Остроградский М. В. 417, 419
- Пeano Дж. (Peano J. G.) 12, 212
Пуанкаре А. (Poincaré H.) 657
- Риман Б. (Riemann B.) 439, 445, 447,
492, 580
- Ролль М. (Rolle M.) 194, 199
Рош Э. (Roche E. A.) 213
- Стирлинг Дж. (Stirling J.) 651
- Тейлор Б. (Taylor B.) 212, 214, 216, 218,
636, 637, 638, 640, 641, 646, 655
- Ферма П. (Fermat P.) 192
Френе Ж. (Frenet J. F.) 281
Френель О. (Fresnel A. J.) 543
- Харди Г. (Hardy G. H.) 609.
- Чебышев П. Л. 428
- Шварц Г. (Schwarz H. A.) 289, 319
Шлемильх О. (Schlömilch O.) 213
- Эйлер Л. (Euler L.) 424, 587, 644

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля неравенство 582
— преобразование 582
— признак 585
— теорема о сходимости степенного ряда 621, 624
Архимеда свойство действительных чисел 43
Архимеда спираль 511
Асимптота 236, 243
Асимптотическое равенство 146, 397
— разложение 661—664
Асимптотический ряд 657
Астроида 286, 501, 511

Безу теорема 400
Базис стандартный пространства 317
Бернулли неравенство 74
Биективное отображение (биекция) 10
Больцано—Вейерштрасса теорема 63, 297
Бонне теорема 481

Валлиса формула 478
Вейерштрасса признак равномерной сходимости 603, 609
— теорема 121, 332
Вектор-функция 248, 320, 481, 653
Верхняя (нижняя) грань множества 38, 40, 42, 60, 90
Взаимно-однозначное отображение или соответствие (инъекция) 9, 78, 83
Винтовая линия 272

Гамильтона символ (набла) 365
Гельдера неравенство 465, 565
Гейне—Бореля лемма 314
Градиент функции 362, 364
Граница множества 306

График функции 8, 92, 239, 242, 321
Гульдина теорема 510

Даламбера признак 559, 578
Дарбу интегралы (верхний и нижний)
446
— суммы 443, 444, 445
Двоичная запись чисел 81
Дедекинда принцип 19
— признак 591
Декарта лист 247
Десятичная дробь 77, 78
Десятичное приближение 77
Диаметр множества 340
Дини теорема 615
Дирихле признак 534, 583, 609
— функция 92, 326, 443
Дифференциал функций 159, 161, 165, 177, 190, 251, 343, 345, 346, 350, 356, 362
Дифференциальный бином 426
Длина вектора 317
— кривой 268
Допустимое преобразование параметра 258
Дробь рациональная 95, 406, 410
Дуга кривой 263
Дю Буа Реймона признак 591
е (число) 62, 141, 159, 589
Евклида алгоритм 405
Евклидово пространство 317

Жордана теорема 309
Замена переменной 108, 121, 384, 474
Замыкание множества 302
Изоморфизм 30, 82

- Интеграл абсолютно сходящийся, 530
 — неопределенный 379
 — несобственный 512
 — определенный 440
 Интегралы табличные 383
 — эллиптические 437, 501
 Интегральный признак к сходимости рядов 561
 Интегрирование подстановкой 385
 — по частям 387, 477
 Интервал 34
 — выпуклости вверх (вниз) 231
 — сходимости ряда 634
 Инъекция 9
- Кантора теорема о несчетности действительных чисел** 85
 — — о равномерной непрерывности 336, 340
 Кардиоида 287, 497
 Касательная 164, 265, 361
 Колебание функции на множестве 340, 341
 Компакт 309, 315
 Компактности свойство 63
 Композиция функций 11, 94
 Контур 256
 Координаты полярные 286
 Корень из числа 23, 130, 392
 — многочлена 399, 400
 Коши—Адамара формула 629
 — критерий 66, 113, 530, 551, 600, 606
 — признак 560, 578
 — теорема о среднем 199
 — форма остаточного члена формулы Тейлора 213, 638
 — Шварца неравенство 289, 319
 Кратность корня 400
 Кривая 255, 260, 263, 307
 — гладкая 266
 — кусочно-гладкая 266
 — ориентированная 262
 — параметрически заданная 259, 262
 — плоская 256, 273
 — спрямляемая 268
 Кривизна кривой 278
 Кривизны радиус 279
- центр 283
 Круг сходимости степенного ряда 622
- Лагранжа теорема** 196
 — форма остаточного члена в формуле Тейлора 213, 638
 — формула 197, 200
 Лейбница признак 567
 — формула 186
 Лемниската 511
 Линейность интеграла 454
 Логарифмическая спираль 502
 Ломаная 267
 Лопитали правило 201, 202, 204
- Мажоранта** 526
 Маклорена формула 212, 216
 Максимальный элемент числового множества 36
 Минимальный элемент числового множества 37
 Минковского неравенство 465, 565
 Многочлен (полином) 95, 131, 214
 Множество замкнутое 302
 — линейно связное 308
 — неограниченное 35—37
 — несчетное 84
 — ограниченное 35—37
 — открытое 299
 — пустое 6
 — счетное 83
 Множества равномощные 82
 Модуль действительного числа 29
 — комплексного числа 390
 — непрерывности 337
 Морфизм 8
- Набла (символ Гамильтона)** 365
 Наибольшее значение функции 91
 Наименьшее значение функции 91
 Неопределенности 201, 204, 219, 220
 Непрерывность действительных чисел 18, 30, 31, 44
 Неравенство треугольника 317
 Нормаль главная 281
 — к кривой 281
 Носитель кривой 261

- точки кривой 261
- Ньютона—Лейбница формула 471, 472, 517
- Область** 308, 309
- выпуклая 309
- замкнутая 309
- определения функции 8, 91
- Образ** 10
- Общий делитель** 403
- — наибольший 403
- Окрестность** точки 34, 96, 291, 293, 301
- — проколотая 96, 323
- Окружность** соприкасающаяся 287
- Остаток** ряда 547, 593
- Остроградского метод** 419
- Отображение** 8
 - взаимно-однозначное (инъекция) 9
 - отрезка 255
- Отрезок** 5, 34
- Пара** 8
 - упорядоченная 8
- Пeanо** аксиомы 12
- форма остаточного члена формулы Тейлора 212
- Первообразная** 378, 474, 482
- Период** 645
- Площадь** (мера) открытого множества 485
 - поверхности вращения 505
- Подпоследовательность** 58, 295
- Покрытие** множества 311
- Поле** 27
- Поле** действительных чисел 29, 31
 - комплексных чисел 395
 - упорядоченное 29
- Полнота** действительных чисел 31
- Полуинтервал** 34
- Полукубическая парабола** 234, 285
- Последовательность** 12, 48, 295, 327, 396, 591, 665
 - бесконечно большая 53, 553
 - — малая 67—68, 397
 - кратная 665
 - монотонная 61
- ограниченная 59, 297, 592
- стремящаяся к бесконечности 298, 666
- сходящаяся 49, 54, 295, 592, 595
- фундаментальная 65
- Последовательности** одного порядка 397
- эквивалентные 397
- Предел** вектор-функции 249
- последовательности 49, 50, 51, 53, 54, 87, 88, 295, 303
- функции 97—106, 249, 322, 323, 441
- Представление** кривой 257, 258, 260, 263
- Признак** сравнения 524, 555
- сходимости ряда, интегральный 561-562
- Принцип** вложенных отрезков 43
- Произведение** множеств 8
- последовательностей 68
- ряда на число 548
- Производная** 157, 184, 186
 - бесконечная 157
 - вектор-функции 251
 - логарифмическая 181
 - обратной функции 173, 188
 - параметрически заданной функции 189
 - по направлению 363
 - сложной функции 175, 188, 367
 - функции, заданной неявно 180
 - частная 341
 - — смешанная 370
- Промежуток** 34
- Прообраз** 9, 10
- Пространство** *n*-мерное 289, 317
- Равномерная** непрерывность 334
- Радиус** сходимости степенного ряда 622, 632, 634
- Разбиение** отрезка 267, 438
- Расстояние** 288, 289, 306
- Расширенное** множество действительных чисел 33
- Римана** интегральная сумма 439, 445
 - теорема о перестановке членов ряда 580

- Ролля теорема 194
 Ряд 545
 — гармонический 551, 587
 — знакопеременный 567
 — кратный 668, 672
 — Лейбница 650
 — степенной 621, 624
 — суммируемый 590
 — сходящийся 592, 666, 672
 — — абсолютнo 569, 592, 669
 — — равномерно 602
 — Тейлора 636, 637, 640, 655
 — функциональный 591
- Сечение 17
 Символ всеобщности 13
 — существования 13
 Скалярное произведение векторов 317
 Скорость вращения вектор-функции 276
 Соответствие (отображение) 7, 8
 Степень многочлена 399
 — числа 23, 133
 Стирлинга формула 651
 Сужение функции 10
 Сумма кривых 263
 — (объединение) множеств 6
 — последовательностей 67
 Сумма ряда 546, 666
 — — частичная 547, 592, 666
 — — — прямоугольная 667
 — — — сферическая 667
 — — — треугольная 667
 — рядов 549
 Суперпозиция функций 11, 94
 Сюръекция 9
- Тейлора многочлен 212, 214
 — ряд 636, 637, 640, 655
 — формула 212, 216, 218, 637, 638, 646
 Точка 20
 — возрастания (убывания) функции 225
 — кривой 256, 261
 — — кратная 256, 261
 — — неособая 266
- — особая 266
 — максимума (минимума) функции 222, 227
 — множества внутренняя 299
 — — граничная 306
 — — изолированная 302
 — — предельная 302
 — перегиба 234
 — прикосновения множества 303
 — разрыва функции 118, 119
 — устранимого разрыва 118
 — экстремума 222
 — n -мерного пространства 288
- Ферма теорема 192
 Френе формула 281
 Френеля интегралы 543
 Функции гиперболические 182, 183
 — одного порядка 145
 — тригонометрические 139
 Функция 7, 8, 11, 89
 — аналитическая 630, 635
 — бесконечно большая 110
 — — малая 110, 149
 — векторная 248
 — возрастающая (убывающая) 111, 125, 221
 — выпуклая вверх (вниз) 230, 231, 232
 — дифференцируемая 159, 163, 185, 344, 348, 372, 477
 — заданная параметрически 189
 — интегрируемая 439, 512
 — кусочно-непрерывная 463
 — кусочно-непрерывно дифференцируемая 477
 — логарифмическая 137
 — многозначная (однозначная) 11
 — непрерывная в точке 115, 119, 131, 162, 327, 330, 398, 468, 469
 — — на множестве 121, 328, 332, 469
 — непрерывно дифференцируемая 185, 348, 372
 — неявная 94
 — обратная 126, 130
 — ограниченная 90, 145
 — периодическая 14, 645
 — показательная 134—136, 159

-
- равномерно непрерывная 334, 335, 336
 - стремящаяся к нулю 349
 - рациональная 95, 131, 421
 - сложная 94, 120, 330, 351, 353, 354
 - степенная 138
 - строго монотонная 125
 - трансцендентная 96
 - четная 14
 - элементарная 332
 - Цепная линия 499
 - Циклоида 189
 - Числа действительные (вещественные)
 - 15, 16, 20, 31, 78, 79, 80, 85
 - иррациональные 15, 23, 86
 - комплексные 15, 389, 394
 - натуральные 12, 15, 43
 - отрицательные 15
 - рациональные 15, 23, 83
 - целые 23
 - Число существенно комплексное 390
 - Шлемильха—Роша форма остаточного члена 213
 - Эволюта кривой 283
 - Эйлера подстановки 424
 - постоянная 587
 - формулы 644
 - Эквивалентность отображений отрезка 259
 - функций 146, 152
 - Экстремум 222—229
 - Эллипс 501

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Г л а в а п е р в а я	
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	
§ 1. Множества и функции. Логические символы	5
1.1. Множества. Операции над множествами	5
1.2.* Функции	8
1.3.* Конечные множества и натуральные числа. Последовательности	11
1.4. Логические символы	13
§ 2. Действительные числа. Числовые множества	15
2.1. Свойства действительных чисел	15
2.2.* Свойства сложения и умножения	20
2.3.* Свойство упорядоченности	27
2.4.* Свойство непрерывности действительных чисел	30
2.5. Расширенная числовая прямая	33
2.6. Промежутки действительных чисел. Окрестности	33
2.7. Ограниченные и неограниченные множества	35
2.8. Верхняя и нижняя грани числовых множеств	37
2.9. Свойства Архимеда	43
2.10. Принцип вложенных отрезков	44
§ 3. Предел последовательности	48
3.1. Определение предела последовательности	48
3.2. Бесконечные пределы	53
3.3. Простейшие свойства предела последовательности	55
3.4. Ограниченнность сходящихся последовательностей	59
3.5. Монотонные последовательности	60
3.6. Теорема Больцано—Вейерштрасса	63
3.7. Критерий Коши сходимости последовательности	65
3.8. Бесконечно малые последовательности	67
3.9. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями	69
3.10. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями	76
3.11.* Счетность рациональных чисел. Несчетность действительных чисел	82
3.12.* Верхний и нижний пределы последовательностей	86
§ 4. Функции и их пределы	89
4.1. Действительные функции	89
4.2. Способы задания функций	91
4.3. Элементарные функции и их классификация	95
4.4. Первое определение предела функции	96
4.5. Второе определение предела функции	101

4.6. Обобщение понятия предела функции	104
4.7. Свойства пределов функций	106
4.8.* Замена переменной при вычислении пределов	108
4.9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	110
4.10. Пределы монотонных функций	111
4.11. Критерий Коши существования предела функции	113
 § 5. Непрерывность функции в точке	115
5.1. Точки непрерывности и точки разрыва функций	115
5.2. Свойства функций непрерывных в точке	119
 § 6. Свойства непрерывных функций	121
6.1. Ограниченнность непрерывных функций. Достижение экстремальных значений	121
6.2. Промежуточные значения непрерывных функций	123
6.3. Обратные функции	125
 § 7. Непрерывность элементарных функций	131
7.1. Многочлены и дробно-рациональные функции	131
7.2. Показательная, логарифмическая и степенная функции	132
7.3. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции	139
 § 8. Сравнение функций. Вычисление пределов	140
8.1. Некоторые замечательные пределы	140
8.2. Сравнение функций	144
8.3. Эквивалентные функции	151
8.4. Метод выделения главной части функции и его применение к вычислению пределов	153
 § 9. Производная и дифференциал	157
9.1. Определение производной	157
9.2. Дифференциал функции	159
9.3. Геометрический смысл производной и дифференциала	163
9.4. Физический смысл производной и дифференциала	167
9.5. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями	170
9.6. Производная обратной функции	173
9.7. Производная и дифференциал сложной функции	175
9.8. Гиперболические функции и их производные	182
 § 10. Производные и дифференциалы высших порядков	184
10.1. Производные высших порядков	184
10.2. Высшие производные суммы и произведения функций	186
10.3. Производные высших порядков от сложных функций, от обратных функций и от функций, заданных параметрически	188
10.4. Дифференциалы высших порядков	190
 § 11. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций	192
11.1. Теорема Ферма	192
11.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях	194

§ 12. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопитала	201
12.1. Неопределенности вида $0/0$	201
12.2. Неопределенности вида ∞/∞	204
§ 13. Формула Тейлора	210
13.1. Вывод формулы Тейлора	210
13.2. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функций в окрестности данной точки	213
13.3. Примеры разложения по формуле Тейлора	216
13.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части)	218
§ 14. Исследование поведения функций	221
14.1. Признак монотонности функции	221
14.2. Отыскание наибольших и наименьших значений функций	222
14.3. Выпуклость и точки перегиба	230
14.4. Асимптоты	236
14.5. Построение графиков функций	239
§ 15. Вектор-функция	248
15.1. Понятие предела и непрерывности для вектор-функции	248
15.2. Производная и дифференциал вектор-функции	251
§ 16. Длина дуги кривой	255
16.1. Понятие кривой	255
16.2* Параметрически заданные кривые	258
16.3. Ориентация кривой. Дуга кривой. Сумма кривых. Невязное задание кривых	262
16.4. Касательная к кривой. Геометрический смысл производной вектор-функции	264
16.5. Длина дуги кривой	267
16.6. Плоские кривые	273
16.7. Физический смысл производной вектор-функции	274
§ 17. Кривизна кривой	275
17.1. Две леммы. Радиальная и трансверсальная составляющие скорости	275
17.2. Определение кривизны кривой и ее вычисление	278
17.3. Главная нормаль. Соприкасающаяся плоскость	281
17.4. Центр кривизны и эволюта кривой	283
17.5. Формулы для кривизны и эволюты плоской кривой	283
Г л а в а в т о р а я	
Дифференциальное исчисление функций многих переменных	
§ 18. Множества на плоскости и в пространстве	288
18.1. Окрестности точек. Предели последовательностей точек	288
18.2. Различные типы множеств	299
18.3. Компакты	309
18.4. Многомерные векторные пространства	315
§ 19. Предел и непрерывность функций многих переменных	320
19.1. Функции многих переменных	320
19.2. Предел функции	322
19.3. Непрерывность функций	327
19.4. Непрерывность композиции непрерывных функций	330
19.5. Теоремы о функциях, непрерывных на множествах	332
19.6. Равномерная непрерывность функций. Модуль непрерывности	334

§ 20. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных	341
20.1. Частные производные и частные дифференциалы	341
20.2. Дифференцируемость функций в точке	344
20.3. Дифференцирование сложной функции	351
20.4. Инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных. Правила вычисления дифференциалов	354
20.5. Геометрический смысл частных производных и полного дифференциала	360
20.6. Градиент функции	362
20.7. Производная по направлению	363
20.8. Пример исследования функций двух переменных	367
§ 21. Частные производные и дифференциалы высших порядков	369
21.1. Частные производные высших порядков	369
21.2. Дифференциалы высших порядков	373

Г л а в а т р е т ъ я

Интегральное исчисление функций одной переменной

§ 22. Определение и свойства неопределенного интеграла	378
22.1. Первообразная и неопределенный интеграл	378
22.2. Табличные интегралы	382
22.3. Интегрирование подстановкой (замена переменной)	384
22.4. Интегрирование по частям	387
§ 23. Некоторые сведения о комплексных числах и многочленах	389
23.1. Комплексные числа	389
23.2*. Формальная теория комплексных чисел	395
23.3. Некоторые понятия анализа в области комплексных чисел	396
23.4. Разложение многочленов на множители	399
23.5*. Наибольший общий делитель многочленов	402
23.6. Разложение правильных рациональных дробей на элементарные	406
§ 24. Интегрирование рациональных дробей	412
24.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей	412
24.2. Общий случай	414
24.3*. Метод Остроградского	416
§ 25. Интегрирование некоторых иррациональностей	421
25.1. Предварительные замечания	421
25.2. Интегралы вида $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^r, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^s \right] dx$	422
25.3. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$. Подстановки Эйлера	424
25.4. Интегралы от дифференциального бинома	426
25.5. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	429
§ 26. Интегрирование некоторых трансцендентных функций	431
26.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$	431

26.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$	433
26.3. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$	434
26.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям	434
26.5. Интегралы вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$	436
26.6. Замечания об интегралах, не выраждающихся через элементарные функции	436
§ 27. Определенный интеграл	438
27.1. Определение интеграла по Риману	438
27.2. Ограниченностъ интегрируемой функции	442
27.3. Верхние и нижние суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу	443
27.4. Необходимые и достаточные условия интегрируемости	446
27.5. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций	448
§ 28. Свойства интегрируемых функций	450
28.1. Свойства определенного интеграла	450
28.2. Первая теорема о среднем значении для определенного интеграла	459
28.3. Интегрируемость кусочно-непрерывных функций	463
28.4*. Интегральные неравенства Гельдера*) и Минковского**)	465
§ 29. Определенный интеграл с переменным верхним пределом	467
29.1. Непрерывность интеграла по верхнему пределу	467
29.2. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу. Существование первообразной у непрерывной функции	468
29.3. Формула Ньютона — Лейбница	471
§ 30. Формулы замены переменной в интеграле и интегрирования по частям	474
30.1. Замена переменной	474
30.2. Интегрирование по частям	476
30.3* Вторая теорема о среднем значении для определенного интеграла	479
30.4. Интегралы от вектор-функций	481
§ 31. Мера плоских открытых множеств	483
31.1. Определение меры (площади) открытых множеств	483
31.2. Свойства меры открытых множеств	486
§ 32. Некоторые геометрические и физические приложения определенного интеграла	491
32.1. Вычисление площадей	491
32.2. Объем тел вращения	497
32.3. Вычисление длины кривой	499
32.4. Площадь поверхности вращения	504
32.5. Работа силы	507
32.6. Вычисление статических моментов и центра тяжести кривой	508
§ 33. Несобственные интегралы	511
33.1. Определение несобственных интегралов	511
33.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов	517

33.3.	Несобственные интегралы от неотрицательных функций	522
33.4.	Критерий Коши сходимости несобственных интегралов	529
33.5.	Абсолютно сходящиеся интегралы	530
33.6.	Исследование сходимости интегралов	534
§ 34*.	Асимптотическое поведение интегралов с переменными пределами интегрирования	539

Г л а в а ч е т в е р т а я

Ряды

§ 35.	Числовые ряды	545
35.1.	Определение ряда и его сходимость	545
35.2.	Свойства сходящихся рядов	548
35.3.	Критерий Коши сходимости ряда	550
35.4.	Ряды с неотрицательными членами	553
35.5.	Признак сравнения для рядов с неотрицательными членами	555
35.6.	Метод выделения главной части члена ряда	555
35.7.	Признаки Даламбера и Коши для рядов с неотрицательными членами	558
35.8*.	Интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами	561
35.9.	Неравенства Гёльдера и Минковского для конечных и бесконечных сумм	565
35.10.	Знакопеременные ряды	567
35.11.	Абсолютно сходящиеся ряды. Применение абсолютно сходящихся рядов к исследованию сходимости произвольных рядов	569
35.12.	Признаки Даламбера и Коши для произвольных числовых рядов	577
35.13.	Сходящиеся ряды, не сходящиеся абсолютно. Теорема Римана и Абеля	578
35.14*.	Преобразование Абеля. Признаки сходимости рядов Дирихле и Абеля	582
35.15.	Асимптотическое поведение остатков сходящихся рядов и роста частичных сумм некоторых расходящихся рядов	586
	О суммируемости рядов методом средних арифметических	589
§ 36.	Функциональные последовательности и ряды	591
36.1.	Сходимость функциональных последовательностей и рядов	591
36.2.	Равномерная сходимость функциональных последовательностей	595
36.3.	Равномерно сходящиеся функциональные ряды	602
36.4.	Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей	612
§ 37.	Степенные ряды	621
37.1.	Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда	621
37.2*.	Формула Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда	628
37.3.	Аналитические функции	630
37.4.	Действительные аналитические функции	632
37.5.	Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного числа формулы Тейлора	636
37.6.	Разложение элементарных функций в ряд Тейлора	641
37.7.	Разложение в степенные ряды и суммирование их методом почлененного дифференцирования и интегрирования	648

37.8. Формула Стирлинга	651
37.9*. Формула и ряд Тейлора для многомерных вектор-функций	653
37.10*. Асимптотические степенные ряды	655
37.11*. Свойства асимптотических степенных рядов	661
§ 38*. Кратные ряды	665
38.1. Кратные числовые ряды	665
38.2. Кратные функциональные ряды	672
Именной указатель	675
Предметный указатель	676

Лев Дмитриевич Кудрявцев
КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Зав. редакцией литературы по физике и математике *Е. С. Гридаусова*. Научный редактор *Н. М. Флайшер*. Младшие редакторы *С. А. Доровских, Н. П. Майкова, Т. Т. Шатилова*. Художественный редактор *В. И. Пономаренко*. Технический редактор *Р. С. Родичева*. Корректор *Г. И. Кострикова*.

ИБ № 2854

Изд. № ФМ-653а. Сдано в набор 28.07.80. Подп. в печать 26.12.80. Формат 60×90^{1/6}. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 43 усл. печ. л. 43,25 усл. кр.-отт. 38,81 уч.-изд. л. Тираж 80 000 экз. Зак. № 1450. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.