4. Найдем сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}. \tag{37.61}$$

Радиус сходимости этого ряда равен единице; в этом легко убедиться, например, тем же способом, что и в случае ряда (37.60). Продифференцировав ряд (37.61) почленно:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n},$$

и использовав разложение логарифма (см. п. 37.6), получим:

$$xS'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad |x|<1,\quad \text{или}\quad S'(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Замечая, что $S(0)=0$, окончательно получим

$$S(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

Таким образом, здесь ответ выражается не в элементарных функциях.

Упражнения. 14. Разложить в степенной ряд функцию $(\arcsin x)^2$.

15. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

37.8. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

С помощью разложения логарифмической функции в степенной ряд можно легко найти формулу, описывающую асимптотическое поведение факториала $n!$ при $n\to\infty$. Она называется *формулой Стирлинга* *) и может быть записана в виде

$$n!\sim\frac{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}; \tag{37.62}$$

согласно определению асимптотического равенства для последовательностей (см. п. 23.3) это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}=1.$$

*) Дж. Стирлинг (1692—1770) — английский математик.

Из разложения

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leqslant 1,$$

следует, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Полагая здесь $x=\frac{1}{2n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, получим

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]\leqslant\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,$$

или, потенцируя и принимая во внимание, что функция $\ln x$ — монотонно возрастающая,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<e. \tag{37.63}$$

Положим

$$x_n\overset{\text{def}}{=}\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{37.64}$$

поскольку согласно (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}<1,$$

то последовательность $\{x_n\}$ убывает, и, кроме того, она ограничена снизу $x_n\geqslant 0$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}x_n\overset{\text{def}}{=}a.$$

Поэтому

$$x_n=a(1+\varepsilon_n), \tag{37.65}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Подставим (37.65) в (37.64):

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\varepsilon_n). \tag{37.66}$$

Для того чтобы получить формулу (37.62) осталось лишь показать, что $a=\sqrt{2\pi}$. По формуле Валлиса (см. (30.8) в п. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2, \tag{37.67}$$

а согласно (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Подставив это выражение в (37.67), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

откуда $a=\sqrt{2\pi}$. □

37.9*. ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вектор-функцию $f:[a, b]\to R^n$, где R^n — n-мерное векторное пространство. Как уже отмечалось, на вектор-функции обобщаются понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала и интеграла (см. § 15, п. 18.4 и п. 30.4), на которые переносятся многие свойства этих понятий, справедливые для числовых функций. Однако, далеко не для всех свойств это имеет место. Так, в п. 15.2 было показано, что утверждение, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа, уже не справедливо для вектор-функций. Поэтому не справедливо, конечно, и ее обобщение в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Покажем, что для вектор-функций справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема 10. *Пусть функция* $\boldsymbol{f}:(t_0+h, t_0-h)\to R^n$ *непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка* $n+1$ *включительно на интервале* (t_0-h, t_0+h), $h>0$. *Тогда для любого* $t\in(t_0-h, t_0+h)$ *справедлива формула*

$$\boldsymbol{f}(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)\,d\tau. \tag{37.68}$$

Следствие.

$$\left|\boldsymbol{f}(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right| \leqslant \frac{1}{n!}(t-t_0)^{n+1}\sup_{(t_0-h,\ t_0+h)}|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|,$$

$$t\in(t_0-h, t_0+h).$$

Доказательство теоремы. Прежде всего напомним, что если

$$f(t)=(f_1(t), \ldots, f_n(t)), \tag{37.69}$$

то

$$f'(t)=(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)), \quad t \in (t_0-h, t_0+h), \tag{37.70}$$

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau)\, d\tau=\left(\int_{t_0}^{t} f_1(\tau)\, d\tau, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_n(\tau)\, d\tau\right). \tag{37.71}$$

Из предположений теоремы следует, что каждая координатная функция f_i непрерывна на интервале (t_0-h, t_0+h) вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно, и поэтому для нее справедлива формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f_i(t)=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k+$$

$$+\frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)\, d\tau, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда в силу (37.70) и (37.71) и следует сразу справедливость формулы (37.68). □

Следствие вытекает из неравенства

$$\left|\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^n \boldsymbol{f}^{n+1}(\tau)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant |t-t_0|^n \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|\, d\tau\right| \leqslant |t-t_0|^n \sup_{(t_0-h,\ t_0+h)} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)| \left|\int_{t_0}^{t} d\tau\right| =$$

$$=|t-t_0|^{n+1} \sup_{(t_0-h,\ t_0+h)} |\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\tau)|. \ \square$$

Для вектор-функций справедлива формула Тейлора и с остаточным членом в форме Пеано: если функция $\boldsymbol{f}: (t_0-h, t_0+h) \to R^n$ имеет в точке t_0 производную порядка n, то

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k+o((t-t_0)^n).$$

Это также следует сразу из того, что для каждой координатной функции f_i, $i=1, 2, \ldots, n$, в предположениях теоремы имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки t_0 (см. п. 13.1).

Если вектор-функция $\boldsymbol{f}: (t_0-h, t_0+h) \to R^n$ имеет в точке t_0 производные всех порядков и для любого $t \in (t_0-h, t_0+h)$

выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\left[\boldsymbol{f}(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right]=0,$$

то на интервале $(t_0-h,\ t_0+h)$ функция $\boldsymbol{f}$ раскладывается в степенной ряд с векторными коэффициентами

$$\boldsymbol{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n,$$

называемый ее *рядом Тейлора*.

37.10*. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Известно (см. п. 13.1), что если функция f определена в окрестности точки x_0 и n раз в ней дифференцируема, то существует такой многочлен $P_n(x)$ степени, не большей n, а именно многочлен Тейлора, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{37.72}$$

При этом

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{37.73}$$

Из (37.72) и (37.73) следует, что разность $f(x)-P_{n-1}(x)$ представима в виде

$$f(x)-P_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,$$

и, тем самым, имеет место асимптотическое равенство

$$f(x)-P_{n-1}(x)\sim\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\quad x\to x_0.$$

Таким образом, члены многочлена Тейлора $P_n(x)$ (ряда Тейлора, если функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0) можно последовательно определить как слагаемые вида $a_n(x-x_0)^n$, асимптотически равные разности $f(x)-P_{n-1}(x)$ при $x\to x_0$.

Аналогичным образом можно поступать и при изучении функции в бесконечности. Пусть для определенности функция f определена при $x\geqslant a$, и существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a_0. \tag{37.74}$$

а, следовательно $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_0]=0$.

Иногда возникает вопрос как именно разность $f(x)-a_0$ стремится к нулю, каков порядок убывания этой разности? Может

случиться, что существует такое число a_1, что

$$f(x)-a_0\sim\frac{a_1}{x},\quad x\to+\infty, \tag{37.75}$$

т. е. (см. теорему 1 в п. 8.3)

$$f(x)-a_0=\frac{a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+\infty, \tag{37.76}$$

откуда

$$x[f(x)-a_0]=a_1+x\,o(1/x),\quad x\to+\infty,$$

а поскольку в силу определения символа o $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,o(1/x)=0$, то

$$a_1=\lim_{x\to+\infty} x[f(x)-a_0]. \tag{37.77}$$

Наоборот, из (37.77) следует, что

$$x[f(x)-a_0]=a_1+\varepsilon(x),\qquad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0,$$

и, следовательно,

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}=a_0+\frac{a_1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to+\infty,$$

т. е. выполняется асимптотическое равенство (37.76). Если указанное a_1 найдено, то часто бывает нужно найти, как говорят, «следующий член асимптотического разложения» функции f, т. е. найти асимптотическое поведение разности $f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$. Эта разность согласно (37.76) представляет собой не что иное, как $o(1/x)$, $x\to+\infty$. Может случиться, что существует такое число a_2, что

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)\sim\frac{a_2}{x^2},$$

или, что то же

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)=\frac{a_2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),\quad x\to+\infty.$$

Это условие равносильно существованию предела

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}\right)\right]=a_2.$$

Вообще, если

$$S_{n-1}(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}},\quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{37.78}$$

— такой многочлен степени не большей $n-1$ относительно переменной $1/x$, что

$$f(x)-\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right)\sim\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}},\quad x\to+\infty,\ n=2,\ 3,\ \ldots,$$

то может случиться, что существует такая постоянная a_n, для которой имеет место асимптотическое равенство

$$f(x)-S_{n-1}(x)\sim\frac{a_n}{x^n},\quad x\to+\infty. \tag{37.79}$$

Это условие равносильно следующему:

$$f(x)-S_{n-1}(x)=\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to\infty, \tag{37.80}$$

которое, полагая

$$S_n(x)=S_{n-1}(x)+\frac{a_n}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}, \tag{37.81}$$

можно переписать в виде

$$f(x)-S_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right),\quad x\to+\infty, \tag{37.82}$$

или, что то же, в виде

$$\lim_{x\to+\infty} x^n[f(x)-S_n(x)]=0. \tag{37.83}$$

Как и выше, при $n=1$, легко показать, что условие (37.80) равносильно существованию конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty} x^n[f(x)-S_{n-1}(x)]=a_n. \tag{37.84}$$

Если указанные пределы a_n существуют для всех $n=0, 1, 2, \ldots$, то можно образовать ряд

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots \tag{37.85}$$

Ряды такого вида также можно назвать *степенными рядами*, точнее, степенными рядами по целым отрицательным степеням переменной x.

Определение 5. *Пусть функция f определена при $x\geqslant a$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a_0$. Если существует ряд вида* (37.85), *частичные суммы* (37.78) *которого удовлетворяют условию* (37.79), *либо, что равносильно, одному из условий* (37 82) *или* (37.83), *то этот ряд называется асимптотическим рядом (или асимптотическим разложением) в смысле Пуанкаре*[*] *функции f при $x\to+\infty$.*

В этом случае пишут

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}. \tag{37.86}$$

Подчеркнем, что здесь знак $\sim$ означает не асимптотическое равенство в том смысле, как оно, например, понимается в фор-

[*] А. Пуанкаре (1854—1912) — французский математик.

муле (37.79), т. е. в смысле определения 3 п. 8. 2, а соответствие: ряд (37.85) соответствует функции f.

Как было отмечено, условие (37.80) равносильно условию (37.84), поэтому, если у функции f существует при $x \to +\infty$ асимптотический ряд (37.85), то его коэффициенты a_n, $n=1, 2\ldots$, могут быть последовательно найдены по формулам (37.84). При $n=0$ следует воспользоваться формулой (37.74). Отсюда следует, что если у функции имеется при $x \to +\infty$ асимптотический ряд, то он единственен и его коэффициенты выражаются по формулам (37.74) и (37.84).

Вспомним, что при разложении функции в степенной ряд также была доказана единственность степенного ряда, в который раскладывается функция, а именно было доказано его совпадение с ее рядом Тейлора. Однако, там было отмечено, что один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора разных функций. Подобная ситуация имеет место и для асимптотических рядов: один и тот же ряд вида (37.85) может оказаться асимптотическим рядом при $x \to +\infty$ разных функций. Например, нулевой ряд, т. е. ряд, все коэффициенты которого равны нулю,

$$a_n = 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

является при $x \to +\infty$ как асимптотическим рядом функции, равной нулю во всех точках числовой оси: $f_1(x)=0$, $-\infty < x < +\infty$, так и функции $f_2(x)=e^{-x}$, в чем легко убедиться, вычислив в этих случаях последовательно пределы (37.84).

В отличие от разложения функций в степенные ряды, при котором суммой степенного ряда является заданная функция, и, следовательно, рассматриваемый степенной ряд сходится, при построении асимптотического ряда функции может случиться, что полученный ряд не только не будет сходиться к данной функции, а будет вообще расходиться во всех точках. Тем не менее, асимптотический ряд (37.86) функции является полезным инструментом для ее изучения, в частности для вычисления ее значений. Это, очевидно, связано с тем, что частные суммы асимптотического ряда (37.86) функции в силу условия (37.82) достаточно хорошо приближают саму функцию, причем тем лучше, чем больше x.

Поясним сказанное на примере функции

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt, \quad x > 0. \tag{37.87}$$

Интегрируя n раз по частям, получим

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + \\ + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt. \tag{37.88}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{37.89}$$

является асимптотическим разложением функции (37.87). Действительно, если $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n = 1, 2, \ldots$,

т. е. $S_n(x)$ — частичные суммы ряда (37.89), то интегрируя по частям в силу (37.88) будем иметь:

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}} dt \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

т. е. выполняется условие (37.82).

Вместе с тем легко убедиться по признаку Даламбера, что ряд (37.89) расходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Действительно, полагая

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{|x|} = +\infty.$$

Итак, асимптотический ряд (37.89) функции (37.87) расходится во всех точках. Однако, несмотря на это значения функции (37.87) могут быть получены с большой степенью точности при помощи частичных сумм этого ряда.

Покажем, что если ряд (37.85) сходится к некоторой функции f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \geqslant a > 0, \tag{37.90}$$

то он является и асимптотическим рядом этой функции при $x \to +\infty$.

В самом деле, пусть

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

и, следовательно,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Покажем, что

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x \to +\infty, \tag{37.91}$$

а потому, тем более, что

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \qquad x \to +\infty,$$

т. е. что

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \qquad x \to +\infty,$$

иначе говоря, что выполняется условие (37.82). Для этого рассмотрим функцию $F(t) \overset{\text{def}}{=} f(1/t)$, $0 < t \leqslant 1/a$. В силу (37.90) получим равенство

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

в котором ряд, стоящий в правой части сходится при $0 < t < 1/a$, откуда по теореме Абеля следует, что он сходится и при всех таких t, что $|t| < 1/a$. Если

$$r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \qquad |t| < 1/a,$$

то (см. лемму 1 в п. 37.3) $r_n(t) = O(t^{n+1})$, $t \to 0$. Выполнив здесь замену переменного $t = \frac{1}{x}$, получим (37.91).

В заключение отметим, что условие (37.82) разложения функции в степенной асимптотический ряд можно заменить другим, внешне более сильным, но по существу эквивалентным условием. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 3. *Для того чтобы ряд* (37.85) *являлся асимптотическим при* $x \to +\infty$ *для функции* f *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad x \to +\infty, \tag{37.92}$$
$$n = 1, 2, \ldots.$$

Достаточность этого условия очевидна, так как $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (напомним, что подобные равенства читаются только слева направо), а, следовательно, при выполнении условия (37.92) будет выполняться (37.82).

Наоборот, если выполнено условие (37.82):

$$f(x) - S_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \to +\infty,$$

то, поскольку $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ получим

$$f(x) - S_n(x) = \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \quad \square$$

37.11*. СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В этом пункте будут сформулированы и доказаны некоторые основные свойства разложений функций в асимптотические степенные ряды. В дальнейшем, в п. 54.6, будут рассмотрены более общие, не обязательно степенные, асимптотические ряды. Поскольку в настоящем пункте будут изучаться только асимптотические разложения функций при $x \to +\infty$ в степенные ряды вида (37.85), то мы будем их называть просто *асимптотическими разложениями*.

I. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.93}$$

то для любых чисел λ и μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

т. е. асимптотическое разложение линейной комбинации функций, имеющих асимптотическое разложение, равно такой же линейной комбинации асимптотических разложений этих функций.

Действительно, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.94}$$

то для любых чисел λ и μ:

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

II. *Если имеют место асимптотические разложения* (37.93), *то*

$$f(x)\,g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *т. е. асимптотическое разложение произведения функций, имеющих асимптотические разложения, равно произведению этих разложений, расположенных по возрастающим степеням* $1/x$.

В самом деле, если имеет место (37.94), то

$$f(x)\,g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) =$$

$$= a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

III. *Если*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.95}$$

и $a_0 \neq 0$, *то функция* $1/f(x)$ *также имеет асимптотическое разложение*

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty,$$

и коэффициент d_n *этого разложения выражается через коэффициенты* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *разложения* (37.95).

Действительно, из (37.95) следует (см. (37.74)), что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Далее, можно последовательно показать существование пределов (37.84) для функции $1/f(x)$, непосредственно вычисляя их. Например,

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0}\right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 + x\,o\left(\frac{1}{x}\right)}{a_0\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = -\frac{a_1}{a_0^2},$$

т. е. $d_1 = -a_1/a_0^2$.

Аналогично вычисляются $d_2, d_3, \ldots$. □

IV. *Если функция* f *непрерывна при* $x \geqslant a > 0$ *и имеет асимптотическое разложение, начинающееся с члена порядка* $\frac{1}{x^2}$,

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.96}$$

то

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)\,x^{n-1}}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.97}$$

т. е. в указанном случае асимптотические ряды можно почленно интегрировать.

Докажем это. Пусть

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \qquad R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x), \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Поскольку функции f и S_n непрерывны при $x \geqslant a$, то и функция R_n непрерывна при $x \geqslant a$. В силу (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \qquad x \to +\infty.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \geqslant a$, что для всех $x \geqslant x_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

Отсюда следует, во-первых, что интеграл $\int\limits_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, а поэтому и интеграл $\int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)\,dt$, $x \geqslant x_\varepsilon$, существуют, а во-вторых, что при $x \geqslant x_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left| x^{n-1} \int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)\,dt \right| \leqslant x^{n-1} \int\limits_{x}^{+\infty} |R_n(t)|\,dt \leqslant \varepsilon x^{n-1} \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1},$$

и, следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1} \int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)\,dt = 0. \tag{37.93}$$

Теперь, интегрируя равенство $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, получим

$$\int\limits_{x}^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)\,x^{k-1}} + \int\limits_{x}^{+\infty} R_n(t)\,dt. \tag{37.99}$$

В силу выполнения условия (37.98) равенство (37.99) и означает справедливость асимптотического разложения (37.97) (см. (37.83)). □

V. *Если функция f раскладывается в асимптотический ряд*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty, \tag{37.100}$$

и если она имеет при $x \geqslant a$ непрерывную производную, которая также при $x \to +\infty$ раскладывается в асимптотический ряд, то этот ряд получается формальным почленным дифференцированием ряда (37.100)

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \qquad x \to +\infty. \tag{37.101}$$

В самом деле, пусть

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \qquad x \to +\infty. \tag{37.102}$$

По формуле Ньютона—Лейбница для любых $x \geqslant a$ и $y \geqslant a$

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,dt=\int_x^y\left[b_0+\frac{b_1}{t}+\left(f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right)\right]dt=$$

$$=b_0(y-x)+b_1\ln\frac{y}{x}+\int_x^y\left[f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right]dt. \qquad (37.103)$$

Согласно (37.102) $f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t\to+\infty$. Следовательно, интеграл

$$\int_x^{+\infty}\left[f'(t)-b_0-\frac{b_1}{t}\right]dt$$

сходится. В силу (37.100) существует конечный предел

$$\lim_{y\to+\infty} f(y)=a_0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $y\to+\infty$ в (37.103), убеждаемся в том, что существует конечный предел

$$\lim_{y\to+\infty}\left[b_0(y-x)+b_1\ln\frac{y}{x}\right],$$

Это возможно только в случае, когда $b_0=b_1=0$. Таким образом, равенство (37.103) в пределе перейдет в равенство

$$a_0-f(x)=\int_x^{+\infty} f'(t)\,dt;$$

при этом в силу условия $b_0=b_1=0$ из (37.102) имеем:

$$f'(x)\sim\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{b_n}{x^n}, \qquad x\to+\infty;$$

отсюда, интегрируя почленно в пределах от x до $+\infty$ согласно свойству IV, получим

$$a_0-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n+1}}{nx^n}, \qquad x\to+\infty.$$

Но из (37.100) следует, что

$$a_0-f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}.$$

Вспоминая, что разложение функции при $x\to+\infty$ в асимптотический степенной ряд единственно, из сравнения получившихся для функции $a_0-f(x)$ рядов найдем, что

$$b_{n+1}=-na_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots. \ \square$$

Замечание. Если непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant a$ функция f раскладывается при $x \to +\infty$ в асимптотический ряд, то ее производная может не иметь при $x \to +\infty$ асимптотического разложения. Тем самым требование существования асимптотического разложения у производной в предложении V является существенным. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $-\infty < x < +\infty$. Нетрудно с помощью формул (37.84) убедиться, что функция f при $x \to +\infty$ раскладывается в нулевой асимптотический ряд, т. е. ряд (37.85), у которого $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ее производная $f'(x) = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$ заведомо не имеет асимптотического разложения при $x \to +\infty$, так как она даже не имеет предела при $x \to +\infty$.

Упражнение 16. Доказать, что

а) $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots, \quad x \to +\infty;$$

б) $$\int_x^{+\infty} e^{x^2-t^2}\,dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7} + \ldots, \quad x \to +\infty.$$

§ 38*. КРАТНЫЕ РЯДЫ

38.1. КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе будут рассматриваться так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}, \tag{38.1}$$

где $u_{n_1 \ldots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря комплексные) занумерованные k индексами n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, каждый из которых независимо от другого пробегает натуральный ряд чисел: $n_i = 1, 2, \ldots$. Ряд (38.1) называется k-кратным рядом, а числа $u_{n_1 \ldots n_k}$ — его членами.

Определим четко эти понятия. Начнем с понятия кратной последовательности.

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество; k-кратной последовательностью элементов множества X называется отображение f: $\underbrace{N \times N \times \ldots \times N}_{k \text{ раз}} \to X$* ($N$, как всегда, обозначает множество натуральных чисел).

Элемент $x = f(n_1, \ldots, n_k)$, $n_1 \in N, \ldots, n_k \in N$, обозначается через $x_{n_1 \ldots n_k}$, а сама последовательность через $\{x_{n_1 \ldots n_k}\}$.

Однократная последовательность называется просто последовательностью.

Итак, элементы k-кратной последовательности «занумерованы» k натуральными индексами. Мы будем рассматривать числовые кратные последовательности, т. е. кратные последовательности, элементами которых являются комплексные, в частности действительные, числа. Для простоты обозначений ограничимся случаем $k=2$. Обобщение на случай произвольного натурального $k \in N$ делается безо всякого труда.

Определение 2. *Число $a \in C$ называется пределом двойной последовательности $\{x_{mn}\}$ и пишется $a = \lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, выполняется неравенство $|x_{mn} - a| < \varepsilon$.*

Если двойная последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся*.

Определение 3. *Двойная последовательность называется последовательностью, стремящейся к $+\infty$, и пишется $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = +\infty$,* если для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое $n_\varepsilon \in N$, что для всех $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, выполняется неравенство $x_{mn} > \varepsilon$.*

Аналогично определяются бесконечные пределы $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = -\infty$ и $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} x_{mn} = \infty$.

Как обычно, под пределом (в данном случае двойной последовательности) понимается конечный предел, если не оговорено что-либо другое.

Определим теперь двойной ряд.

Определение 4. *Пусть задана двойная последовательность $\{u_{mn}\}$. Составим двойную числовую последовательность*

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl}. \tag{38.2}$$

Пара последовательностей $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ называется двойным рядом и обозначается через

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.3}$$

Элементы двойной последовательности $\{u_{mn}\}$ называются *членами ряда* (38.3), а элементы двойной последовательности $\{S_{mn}\}$ — *частичными суммами* этого ряда.

Определение 5. *Двойной ряд* (38.3) *называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится. Ее предел называется суммой ряда; причем, если*

$$\lim_{m,\, n \to \infty} S_{mn} = S, \tag{38.4}$$

то пишется

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Если конечного предела (38.4) *не существует, то ряд* (38.3) *называется расходящимся. Если существует один из бесконечных пределов*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn} = -\infty, \tag{38.5}$$

то соответственно пишется

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

Замечание. Содержательность определения ряда как пары последовательностей хорошо видна на примере кратных рядов. Например, если задана последовательность $\{u_{mn}\}$, то соответствующую ей последовательность «частичных сумм» можно задавать не только выше указанным способом (38.2), но и по другому. Наряду с суммами (38.2), определенными выше и называемыми прямоугольными (в них суммируются элементы u_{kl}, которым соответствуют точки $(k,\ l)$ плоскости xy, содержащиеся в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$) рассматриваются треугольные суммы $T_r = \sum\limits_{k+l \leqslant r} u_{kl}$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, (точка $(k,\ l)$ лежит в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant r$), сферические $S_r = \sum\limits_{k^2+l^2 \leqslant r^2} u_{kl}$, $r = 1,\ 2,\ \ldots$, (точка $(k,\ l)$ лежит в круге $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) и другие. Таким образом, для одной и той же последовательности $\{u_{mn}\}$ имеются разные последовательности частичных сумм, причем в случае сходимости одной из них другая не обязательно сходится. Поэтому естественно рассматривать каждую пару, состоящую из последовательности $\{u_{mn}\}$ членов ряда и каких-то его «частичных сумм», как самостоятельный ряд.

Отметим, что последовательности частичных сумм кратных рядов (например, частичных сумм T_r или S_r) в отличие от последовательностей частичных сумм однократных рядов не всегда однозначно определяют последовательность общих членов ряда.

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямоугольные частичные суммы S_{mn}.

На кратные ряды переносится ряд свойств обычных (однократных) рядов, например:

1°. *Если ряд* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn}$ *сходится и* S — *его сумма, то* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *для любого числа* λ.

2°. *Если ряды* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u'_{mn}=S'$ *и* $\sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} u''_{mn}=S''$ *сходятся, то*

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} (u'_{mn}+u''_{mn})=S'+S''.$$

Эти утверждения легко доказываются аналогично случаю однократных рядов (это предоставляется проделать читателю).

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

Теорема 1. *Если ряд* (38.3) *сходится, то*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} u_{mn}=0.$$

Это сразу следует из равенства

$$u_{mn}=S_{mn}-S_{m-1\ n}-S_{m\ n-1}+S_{m-1\ n-1}$$

и условия (38.4). □

Теорема 2. *Если все члены ряда* (38.3) *неотрицательны,*

$$u_{mn}\geqslant 0,\ m,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{38.6}$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм S_{mn}, *причем*

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn}=\sup_{m,n=1,\ 2,\ \ldots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

Доказательство. Если выполняется условие (38.6) и $m'\geqslant m$, $n'\geqslant n$, то $S_{m'n'}\geqslant S_{mn}$.

Далее, если $S=\sup\limits_{m,\ n=1,\ 2,\ \ldots} S_{mn}$ и $S'<S$, то в силу определения верхней грани существуют такие номера m_0 и n_0, что $S_{m_0n_0}>S'$.

Положим $N=\max\{m_0,\ n_0\}$, тогда при $m\geqslant N$ и $n\geqslant N$

$$S_{mn}\geqslant S_{NN}\geqslant S_{m_0n_0}>S',$$

и так как $S_{mn}\leqslant S$, то $\lim\limits_{m,\ n,\ \to\infty} S_{mn}=S$, т. е. выполняется условие (38.7). □

Следствие. *В предположениях теоремы ряд* (38.3) *сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

Доказательство следствия очевидно.

Из двукратного ряда (38.3) можно формально образовать два так называемых повторных ряда. Для этого следует сначала произвести суммирование по одному индексу, зафиксировав другой, а затем произвести суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn},\quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{38.8}$$

Аналогично доказанной ранее теореме о повторных пределах (см. теорему 1 п. 19.2) доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если сходится двойной ряд* (38.3) *и для всех* $n=1, 2, \ldots$ *сходятся ряды* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, *то повторный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ *также сходится и его сумма равна сумме данного ряда* (38.3).

Определение 6. *Ряд* (38.3) *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. ряд*

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{38.9}$$

Теорема 4. *Если ряд* (38.3) *абсолютно сходится, то сходится и любой ряд (однократный, двукратный или повторный), полученный перестановкой членов данного ряда (в частности сходится и сам заданный ряд). При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда* (38.3).

Доказательство. Расположим члены ряда (38.3) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m-ю ее строку члены ряда с данным фиксированным первым номером m, расположенные по возрастанию второго индекса n:

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13}\ldots u_{1n}\ldots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23}\ldots u_{2n}\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{m3}\ldots u_{mn}\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & \cdots \\ 4 & 3 & 6 & \cdots \\ 9 & 8 & 7 & \cdots \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

Член ряда (38.3), получивший при такой нумерации номер k, обозначим v_k. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{38.10}$$

и покажем, что он абсолютно сходится, т. е. что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|. \tag{38.11}$$

Обозначим частичные суммы ряда (38.9) через S^*_{mn}, его сумму — через S^*, а частичные суммы ряда (38.11) — через S^*_k. Прежде всего заметим, что для любой суммы S^*_k найдутся такие номера m и n, что все члены ряда (38.11), входящие в сумму S^*_k войдут и в сумму S^*_{mn}, тогда

$$S^*_k \leqslant S^*_{mn} \leqslant S^*.$$

Отсюда и следует (см. п. 35.4) сходимость ряда (38.11).

Из абсолютной сходимости ряда (38.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (38.2), также сходится и его сумма равна сумме ряда (38.10) (см. п. 35.10). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u'_{mn}, \tag{38.12}$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (38.3), абсолютно сходится и что его сумма также равна S.

Абсолютная сходимость ряда (38.12) легко следует из абсолютной сходимости ряда (38.3), т. е. из сходимости ряда (38.9), и доказывается тем же приемом, которым была доказана абсолютная сходимость ряда (38.10). Докажем теперь, что сумма ряда (38.12) равна S. Обозначим его частичные суммы через S'_{mn}, а частичные суммы ряда (38.10) через S_k. Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (38.11) существует такой номер k_ε, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

тогда и подавно

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$. Положим

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

тогда, использовав (38.13) и (38.14), получим

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (38.12), в частности суммой самого ряда (38.3).

Покажем, наконец, что S является и суммой повторных рядов (38.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Следовательно, все ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

сходятся, и притом абсолютно.

Положим

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (38.13), а следовательно, и условие (38.14). Далее, подобно тому, как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ ряда (38.3) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (38.10), входящие в сумму S_k. Тогда при всех $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим (см. (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу (38.14) следует, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \quad \square$$

Упражнение 1. Обобщить критерий Коши сходимости однократных рядов на случай кратных рядов.

38.2. КРАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение 7. *Ряд вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x), \tag{38.16}$$

где функции $u_{n_1, \ldots n_k}(x)$ *определены на некотором множестве* E, *называется* k*-кратным функциональным рядом, а суммы вида*

$$S_{m_1 \ldots m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1 \ldots n_k}(x)$$

— его частичными суммами.

Определение 8. *Ряд* (38.16) *называется сходящимся на множестве* E, *если при каждом фиксированном* $x_0 \in E$ *сходится кратный числовой ряд*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1, \ldots, n_k}(x_0).$$

Если ряд (38.16) *сходится на* E, *то функция*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in E$$

называется его суммой.

На кратные функциональные ряды легко переносятся понятия равномерной сходимости ряда, критерий Коши для равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости и т. п. Мы не будем на этом останавливаться.

Упражнение 2. Определив понятие равномерной сходимости двойного ряда, доказать, что, если ряд (38.16) сходится равномерно и если его члены являются непрерывными функциями на множестве $E \subset R^n$, то и сумма ряда (38.16) является непрерывной на множестве E функцией.

Определение 9. *Ряды вида*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k} (x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

где $c_{n_1 \ldots n_k}$ *— комплексные числа, называются кратными степенными рядами.*

Хотя, как это видно из предыдущего, многие утверждения, справедливые для однократных рядов, обобщаются и на кратные ряды, последние имеют и много своих специфических особенностей, существенно отличающих их от однократных рядов.

В качестве примера приведем двойной степенной ряд с действительными коэффициентами, который, рассматриваемый в вещественной области, сходится лишь в двух точках плоскости, а именно в точках (0; 0) и (1; 1). Таким образом, аналога теоремы Абеля для степенных рядов (см. п. 37.1), во всяком случае в прямом смысле, для двойных рядов нет. Этот пример показывает опасность использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,\ n=0}^{\infty} c_{mn}x^m y^n, \tag{38.17}$$

где, $c_{00}=0$, $c_{0n}=c_{n0}=n!$, $n=1, 2, \ldots$; $c_{1m}=c_{m1}=-m!$, $m=1, 2, \ldots$; $c_{mn}=0$, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$.
Его частичные суммы имеют вид

$$S_{mn}(x,\ y)=(1-y)\sum_{k=1}^{m} k!x^k+y+(1-x)\sum_{l=2}^{n} l!y^l. \tag{38.18}$$

Очевидно, что $S_{mn}(0,\ 0)=0$ и $S_{mn}(1,\ 1)=1$, m, $n=1, 2, \ldots$, и потому ряд (38.17) сходится в точках (0, 0) и (1, 1).

Заметим теперь, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$$

равен нулю (см. пример 1 в п. 37.1), при этом его частичные суммы

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} k!\,z^k,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

при вещественных $z>0$, очевидно, стремятся к $+\infty$.

Покажем, что при $z<0$ его четные частичные суммы $S_{2n}(z)$ также стремятся к $+\infty$. Действительно, объединив при $z<0$ попарно соседние члены, получим:

$$S_{2n}(z)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z|-1).$$

Далее заметим, что при любом фиксированном $z\neq 0$ для номеров $k>\frac{1}{|z|}$ выполняется неравенство

$$(2k-1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z|-1)>(2k-1)!\,|z|^{2k-1}$$

и что при $z\neq 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)!\,z^{2k-1}$$

расходится (это, например, легко доказывается тем же способом, каким доказывалась при $z \neq 0$, расходимость ряда в примере 1 п. 37.1) и, следовательно, при $z > 0$ его сумма равна $+\infty$, поэтому и

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(z) = +\infty, \quad z \neq 0.$$

Из сказанного и из равенства (38.18) следует, что, если $(x, y) \neq (0, 0)$ или $(x, y) \neq (1, 1)$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно подобрать такие номера m и n, что

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

А это и означает, что ряд (38.17) для указанных (x, y) расходится.

Упражнения. 3. Число S назовем суммой ряда $\sum\limits_{m,\, n=1}^{\infty} u_{m,\, n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров m и n, удовлетворяющих условию $m+n > N$, выполняется неравенство $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Выяснить, эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1.

4. Число S назовем суммой ряда $\sum\limits_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ пар индексов m, n членов данного ряда, что, каково бы ни было другое конечное множество $\mathfrak{N}$ пар индексов членов этого ряда, содержащее множество $\mathfrak{N}_\varepsilon : \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{(m,\, n) \in \mathfrak{N}} u_{mn} - S \right| < \varepsilon.$$

Выяснить эквивалентно или нет это определение определению 5 п. 38.1 и определению, сформулированному в предыдущем упражнении.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава вторая

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Глава третья

Интегральное исчисление функций одной переменной

Глава четвертая

Ряды

Лев Дмитриевич Кудрявцев

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Зав. редакцией литературы по физике и математике *Е. С. Гридасова.* Научный редактор *Н. М. Флайшер.* Младшие редакторы *С. А. Доровских, Н. П. Майкова, Т. Т. Шатилова.* Художественный редактор *В. И. Пономаренко.* Технический редактор *Р. С. Родичева.* Корректор *Г. И. Кострикова.*

ИБ № 2854

Изд. № ФМ-653а. Сдано в набор 28.07.80. Подп. в печать 26.12.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 43 усл. печ. л. 43,25 усл. кр.-отт. 38,81 уч.-изд. л. Тираж 80 000 экз. Зак. № 1450. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15.