$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, причем последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$.

Заметим теперь, что если у некоторой последовательности имеется предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n);$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x''_n).$$

Таким образом, пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, где $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, не зависят от выбора последовательности $\{x_n\}$. Обозначая их общее значение через A, согласно определению 2 будем иметь: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. □

Доказанная лемма естественным образом переносится и на случай односторонних пределов.

4.5. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИЙ

Существует другое определение предела функции, не использующее понятия предела последовательности и называемое *определением предела по Коши*.

Определение 4. *Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию*

$$|x - x_0| < \delta, \qquad x \neq x_0, \tag{4.3}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Предел функции в смысле определения Коши также обозначается

$$\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Используя логические символы, определение 4 можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,(\forall x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Вспоминая, что множество точек x, удовлетворяющих условию (4.3), называется *проколотой окрестностью* $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0,

а множество точек y, удовлетворяющих неравенству $|y-A|<\varepsilon$, называется просто *окрестностью* $U(A, \varepsilon)$ точка A, определение 4 можно перефразировать следующим образом.

Число A называется пределом функции f в точке x_0, если для любой окрестности $U(A, \varepsilon)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0, что (рис. 17)

$$f(\mathring{U}(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon). \tag{4.6}$$

Теорема 1. *Определения 2 и 4 предела функции в данной точке равносильны.*

Доказательство. 1. Пусть $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 2. Тогда функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta)$ точки x_0 и для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что выполняется и условие, стоящее в правой части формулы (4.5).

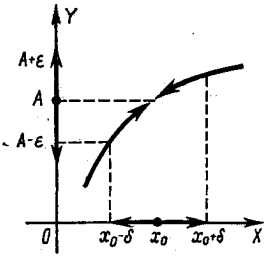

Рис. 17

Допустим, это не так, т. е. что

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x_\delta \neq x_0,\ |x_\delta - x_0| < \delta):\ |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon. \tag{4.7}$$

Иначе говоря, найдется такое $\varepsilon_0>0$, что для любого $\delta>0$, а значит, в частности, и для любого δ, $0<\delta<\delta_0$, существует такое x_δ (индекс δ у x подчеркивает зависимость x от выбора δ; ничего, конечно, не изменится, если индекс δ не писать), что для него $|x_\delta - x_0| < \delta$ и выполняется неравенство

$$|f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.8}$$

Будем последовательно выбирать $\delta = \frac{\delta_0}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, а соответствующие x_δ обозначать просто через x_n:

$$|x_n - x_0| < \frac{\delta_0}{n}, \quad x_n \neq x_0, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{4.9}$$

следовательно, в силу (4.8)

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4.10}$$

Очевидно, что из (4.9) вытекает, что $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако из условия (4.10) явствует, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Это противоречит определению 2 предела функции. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение. □

2. Пусть теперь $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения 4 предела функции. Покажем, что тогда функция f прежде всего определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. В самом деле, возьмем, например, $\varepsilon=1$. Для него согласно определению 4 существует такое $\delta_0>0$, что для всех $x\neq x_0$, $|x-x_0|<\delta_0$ выполняется условие $|f(x)-A|<1$ и, следовательно, в частности для всех таких значений x определена функция f. Таким образом, функция f заведомо определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$.

Возьмем

$$x_n\in\mathring{U}(x_0,\ \delta_0),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.11}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0. \tag{4.12}$$

Покажем, что если функция f удовлетворяет условиям определения 4, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A. \tag{4.13}$$

Проверим это. Зададим произвольно $\varepsilon>0$ и выберем для него $\delta>0$, которое удовлетворяет условиям (4.3) — (4.4). Для этого δ в силу условия (4.12) найдется такое $n_0\in N$, что для всех $n\geqslant n_0$, $n\in N$, будет выполняться неравенство $|x_n-x_0|<\delta$. Из условия же (4.11) следует, что для всех $n\in N$: $x_n\neq x_0$. Поэтому в силу (4.4) для всех $n\geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)-A|<\varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия (4.13). □

Предел функции, как было отмечено в п. 4.4, является локальным свойством функции в том смысле, что его существование для функции в данной точке, а если он существует, то и его значение не зависит от сужения функции на сколь угодно малой проколотой окрестности рассматриваемой точки. Это хорошо также видно и из определения 4: если задать произвольное $\delta_0>0$ и добавить в указанное определение дополнительное условие $\delta<\delta_0$, то получится равносильное исходному определение, так как если условия (4.3) — (4.4) выполняются для некоторого $\delta>0$, то они выполняются и для всех меньших положительных δ.

Для односторонних пределов функции в точке также можно дать новое определение.

Определение 5. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a,\ x_0)$ (соответственно на интервале $(x_0,\ b)$). Число B называется пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $x_0-\delta<x<x_0$ (соответственно условию $x_0<x<x_0+\delta$), выполняется неравенство $|f(x)-B|<\varepsilon$.*

Совершенно аналогично теореме 1 доказывается, что это определение эквивалентно исходному (см. определение 3 в п. 4.4).

Связь между односторонними пределами и двусторонним пределом устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Функция f имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как справа, так и слева и они равны. В этом случае их общее значение и является двусторонним пределом функции f в точке x_0.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0, это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тем самым, как для точек x таких, что $x_0 - \delta < x < x_0$, так и таких, что $x_0 < x < x_0 + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это, согласно определению 5, и означает, что число A является как пределом функции f слева, так и ее пределом справа в точке x_0:

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x + 0} f(x) \tag{4.14}$$

(обозначения см. в определении 3 в п. 4.4).

Обратно, пусть выполнены условия (4.14). Согласно определению предела функции слева и справа, отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, и для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если обозначить через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то очевидно, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, будет справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это и означает, что

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x). \quad \square$$

4.6. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Понятие предела функции можно обобщить для случая, когда аргумент функции или ее значения стремятся к бесконечности. Например, будем говорить, что $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x таких, что $x_0 < x < x_0 + \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Можно показать, что это определение равносильно следующему: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, если функция f определена в некотором интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, и для любой последовательности $x_n \in (x_0, x_0 + \delta)$ $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$.

Приведем еще один пример. Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A + 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x < -\delta$ выполняется неравенство $A \leqslant f(x) < A + \varepsilon$.

Нетрудно сформулировать равносильное определение в терминах пределов последовательностей.

Встречаются и различные другие подобные сочетания предельных значений аргументов и функций. Формулировка определения предела функции для каждого отдельного случая, хотя часто и удобна в конкретных ситуациях (поэтому ее нужно уметь делать), мало приспособлена к рассмотрению общих вопросов, так как требует проведения специальных доказательств, соответствующих данным определениям. Поэтому целесообразно ввести одно единое определение предела функции, конечного и бесконечного, в данной «точке».

Напомним, что окрестностью точки a называется всякий интервал вида $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$. Правосторонней окрестностью $U(x_0+0,\ \delta)$, точки x_0 называется полуинтервал вида $[x_0,\ x_0+\delta)$, а левосторонней $U(x_0-0,\ \delta)$ — полуинтервал $(x_0-\delta,\ x_0]$, $\delta>0$.

По аналогии с определением проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ в п. 4.4 определим проколотые окрестности для x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$:

$$\mathring{U}(x_0+0,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}(x_0,\ x_0+\delta)=U(x_0+0,\ \delta)\setminus\{x_0\},$$
$$\mathring{U}(x_0-0,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}(x_0-\delta,\ x_0)=U(x_0-0,\ \delta)\setminus\{x_0\},$$
$$\mathring{U}(\infty,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}\{x:\ |x|>\delta\}=U(\infty,\ \delta)\setminus\{+\infty\}\setminus\{-\infty\},$$
$$\mathring{U}(+\infty,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}\{x:\ x>\delta\}=U(+\infty,\ \delta)\setminus\{+\infty\},$$
$$\mathring{U}(-\infty,\ \delta)\overset{\text{def}}{=}\{x:\ x<-\delta\}=U(-\infty,\ \delta)\setminus\{-\infty\},\ \delta>0$$

Как видно из сформированного определения, проколотые окрестности любых элементов x_0, x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$ или $-\infty$ получаются из их обычных окрестностей посредством удаления из них соответствующих элементов. При этом оказывается, что во всех перечисленных случаях элементами проколотых окрестностей являются только действительные числа.

Для простоты формулировок здесь под термином «точка» будем понимать либо действительное число x_0, либо один из символов x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$. Под записью $x\neq a$, в случаях $a=x_0\pm 0$ будем понимать $x\neq x_0$ и считать, что $-\infty+0=-\infty$ и $+\infty-0=+\infty$. Для краткости иногда обычную и проколотую δ-окрестности точки a будем соответственно обозначать через $U(a)$ и $\mathring{U}(a)$.

Теперь можно сформулировать общее определение предела функции.

Определение 6. *Точка A называется пределом функции f в точке a и пишется $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если для любой окрестности $U(A,\ \varepsilon)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\ \delta)$ точки a, что $f(\mathring{U}(a,\ \delta))\subset U(A,\ \varepsilon)$.*

Заметим, что функция f, имеющая предел в точке a, определена в силу определения 6 в некоторой проколотой окрестности этой точки. Чтобы доказать ее существование, достаточно взять какое-либо конкретное $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 1$; тогда, если $\mathring{U}(a, \delta_0)$ — проколотая δ_0-окрестность, соответствующая $\varepsilon = 1$ согласно определению 6, то функция f и будет определена во всех точках этой проколотой окрестности. Мы уже встречались с подобным рассуждением в п. 4.5 при доказательстве эквивалентности определений 2 и 4 предела функции.

Нетрудно сформулировать определение предела функции в точке, равносильное определению 6, в терминах предела последовательности.

Определение 7. *Точка A называется пределом функции f в точке a, если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a и если для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Аналогично случаю $a = x_0 \in \boldsymbol{R}$ и конечного предела A, рассмотренному в п. 4.5, доказывается эквивалентность определений 6 и 7.

Для общего определения предела функции в точке справедливо обобщение леммы из п. 4.4 в следующем виде.

Лемма. *Для того чтобы функция f, определенная в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a имела в этой точке конечный или бесконечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющей своим пределом величину a, последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имела конечный или бесконечный предел.*

Необходимость сформулированного условия следует непосредственно из определения 7, а доказательство его достаточности получается буквальным повторением леммы п. 4.4, если только под встречающимися там пределами понимать конечные или бесконечные пределы.

В дальнейшем под пределом функции всегда понимается конечный предел, если не оговорено что-либо другое. При этом, если предел функции равен $A+0$ или $A-0$, где A — число: $A \in \boldsymbol{R}$, то этот предел также называется конечным.

Упражнения. 22. Доказать равносильность определений 6 и 7.

23. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \infty$.

4.7. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a) = \mathring{U}(a, \delta_0)$ заданной точки a. Напомним, что под «точкой» понимается либо число x_0, либо один из символов x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

1°. *Если у функции в заданной точке существует конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция ограничена.*

Доказательство. Пусть у функции f существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Тогда согласно определению 6 для любого $\varepsilon>0$, в частности, для $\varepsilon=1$, существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a, что для всех $x\in\mathring{U}(a, \delta)$ имеет место $f(x)\in U(A, 1)$, т. е. выполняется неравенство $A-1<f(x)<A+1$. Это и означает ограниченность функции f на проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$. □

2°. *Если у функции в заданной точке существует конечный, не равный нулю предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция имеет тот же знак, что и указанный предел (в частности, она не равна нулю).*

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и для определенности $A>0$. Тогда согласно определению 6 для любого $\varepsilon>0$, в частности для $\varepsilon=A$ (в случае $A<0$ надо взять $\varepsilon=-A$) существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, что для всех $x\in\mathring{U}(a, \delta)$ имеет место $f(x)\in U(A, A)$, т. е. выполняется неравенство $A-A<f(x)<A+A$. В частности, $f(x)>0$. □

3°. *Если $f(x)=c$ — постоянная, $x\in\mathring{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.*

4°. *Если $f(x)\geqslant A$, $x\in\mathring{U}(a)$, и существует конечный или определенного знака бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geqslant A$.*

5°. *Если $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$, $x\in\mathring{U}(a)$ и существуют конечные или бесконечные определенного знака пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.*

6°. *Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то существуют и конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, а если $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то — и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x), \tag{4.15}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x), \tag{4.16}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{4.17}$$

Следствие. *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то для любого числа* $c\in\mathbf{R}$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x).$$

Заметим, что частное $f(x)/g(x)$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, конечно, может быть не определено на всей исходной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$. Однако, согласно свойству 2° из условия $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ следует, что существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, $0<\delta\leqslant\delta_0$, на которой $g(x)\neq 0$, и потому на ней имеет смысл частное $f(x)/g(x)$. Предполагается, что в формуле предела частного рассматривается сужение функций f и g на указанной проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$.

Свойства 3° — 6° могут быть доказаны одинаковым методом, основанным на соответствующих свойствах пределов последовательностей (см. п. 3.9).

Докажем, например, формулу (4.16). Пусть $A\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда, согласно определению 7 предела функции (см. п. 4.6), для любой последовательности $x_n\in\mathring{U}(a)$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, справедливы равенства

$$A = \lim_{n\to\infty} f(x_n),\quad B = \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Поэтому вспоминая, что предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов (см. п. 3.9), получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = AB$, причем этот предел не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$. Это согласно тому же определению 7 и означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x). \quad \square$$

4.8*. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ

Здесь будет доказана теорема, полезная при решении задач на нахождение пределов функций.

Теорема 3 (о замене переменной для пределов функций). *Пусть существуют конечные или бесконечные пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} F(y)$. *Пусть, кроме того, в некоторой проколотой окрестности точки* a *имеет место* $f(x)\neq b$, *тогда в точке* a *существует предел сложной функции* $F(f(x))$ и

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y). \tag{4.18}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существуют такие проколотые окрестности $\mathring{U}(a, \delta_0)$ и $\mathring{U}(b, \varepsilon)$, что функция f определена на $\mathring{U}(a, \delta_0)$ и при $x \in \mathring{U}(a, \delta_0)$

$$f(x) \neq b, \tag{4.19}$$

а функция F определена на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$.

Из существования предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ согласно определению 6 (см. п. 6) следует существование такой проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$, что

$$f(\mathring{U}(a, \delta)) \subset U(b, \varepsilon). \tag{4.20}$$

При этом можно выбрать $\delta \leqslant \delta_0$, ибо если условие (4.20) выполнено для некоторого $\delta > 0$, то оно выполнено и для всех меньших положительных δ. В силу условия (4.19) из (4.20) следует, что множество $f(\mathring{U}(a, \delta))$ принадлежит не только окрестности $U(b, \varepsilon)$, но и соответствующей проколотой:

$$f(\mathring{U}(a, \delta) \subset \mathring{U}(b, \varepsilon). \tag{4.21}$$

Поэтому для любого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ значение $f(x)$ принадлежит области определения функции F и, следовательно, для любого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ определена сложная функция $F(f(x))$ или, как говорят, композиция $F \circ f$.

Пусть, теперь, последовательность $x_n \in \mathring{U}(a, \delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ и пусть $y_n \overset{\text{def}}{=} f(x_n)$. Тогда в силу определения предела 7 (см. п. 4.6) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, а в силу (4.21) $y_n \in \mathring{U}(b, \varepsilon)$.

Поэтому согласно тому же определению 7 из существования предела $\lim\limits_{y \to b} F(y)$, который обозначим через A, следует, что

$$\lim_{n \to \infty} F(f(x_n)) = \lim_{n \to \infty} F(y_n) = A.$$

Поскольку это верно для любой указанной последовательности $\{x_n\}$, то это и означает, что $\lim\limits_{x \to a} F(f(x)) = A$. □

Замечание. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a, \delta)$ и отображает ее взаимно однозначно на проколотую окрестность $\mathring{U}(b, \varepsilon)$. Следовательно, на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$ определена однозначная обратная функция f^{-1}, причем при $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ имеет место неравенство $f(x) \neq b$, а при $y \in \mathring{U}(b, \varepsilon)$ соответственно, $f^{-1}(y) \neq a$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = a$.

Пусть, кроме того, на $\mathring{U}(b, \varepsilon)$ определена функция F, и потому на $\mathring{U}(a, \delta)$ определена композиция $F \cdot f$. Тогда предел $\lim\limits_{y \to b} F(y)$

существует в том и только том случае, когда существует предел $\lim\limits_{x\to a} F[f(x)]$, причем если они существуют, то равны между собой.

То, что из существования предела $\lim\limits_{y\to b} F(y)$ следует существование предела $\lim\limits_{x\to a} F(f(x))$, и их равенство составляет утверждение теоремы 3. Поэтому надо доказать только обратное утверждение. Оно при сделанных предположениях также вытекает из теоремы 3, примененной к композиции $(F\circ f)\circ f^{-1}$ функций f^{-1} и $F\circ f$.

Действительно, согласно этой теореме существует предел $\lim\limits_{y\to b}(F\circ f)(f^{-1}(y)) = \lim\limits_{x\to a}(F\circ f)(x)$, но $(F\circ f)\circ f^{-1} = F\circ(f\circ f^{-1}) = F$, тем самым существует предел $\lim\limits_{y\to b} F(y)$. □

4.9. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Все функции, рассматриваемые в этом пункте, определены на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a.

Определение 8. *Функция α называется бесконечно малой (бесконечно большой) при стремлении аргумента к точке a, если* $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \infty)$.

Бесконечно малые функции играют существенную роль, связанную, в частности, с тем, что общее понятие предела может быть сведено к понятию бесконечно малой.

Лемма. *Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен A тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где α бесконечно малая при стремлении аргумента к точке a.*

Действительно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то, полагая $\alpha(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - A$, получаем $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - A = A - A = 0$.

Наоборот, если $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A + \lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = A$. □

Теорема 4. *Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при стремлении аргумента к точке a, а также произведение бесконечно малой при стремлении аргумента к точке a на ограниченную функцию являются бесконечно малыми при стремлении аргумента к той же точке a.*

То, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой, непосредственно следует из свойства пределов в п. 4.7.

Доказательство же того, что произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой, очевидным образом проводится на основе определения 7 предела функции

с использованием соответствующего свойства бесконечно малых последовательностей (см. в п. 3.8 свойство II).

Упражнение 24. Доказать, что функция α, определенная и не равная нулю в некоторой проколотой окрестности точки a, тогда и только тогда является бесконечно малой при стремлении аргумента к точке a, когда функция $1/\alpha$ является бесконечно большой при стремлении аргумента к той же точке a.

То обстоятельство, что функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой и наоборот (см. упражнение 24), делает естественной следующую символическую запись, часто употребляющуюся для сокращения записи: для любого числа $a>0$ пишут

$$\frac{a}{+0}=+\infty,\quad \frac{a}{-0}=-\infty,\quad \frac{a}{0}=\infty,\quad \frac{a}{+\infty}=+0,\quad \frac{a}{-\infty}=-0,\quad \frac{a}{\infty}=0.$$

Отметим, что на бесконечно большие функции свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над пределами, непосредственно не переносятся. Однако некоторые аналогии имеют место.

Например, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, то и $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$. Однако о существовании какого-либо предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ здесь уже ничего утверждать нельзя. Можно показать, что позитивные утверждения о бесконечных пределах можно сделать в случаях, для которых в п. 2.5 были определены некоторые «арифметические операции» $c+\infty$ и $-\infty$.

4.10. ПРЕДЕЛЫ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 9. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется возрастающей (убывающей) на E, если для любых $x_1\in E$ и $x_2\in E$ таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (соответственно, неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$* *).

Если функция является возрастающей (убывающей) на множестве E, то говорят также, что она возрастает (убывает) на этом множестве.

Если функция f возрастает на множестве E, то функция $-f$, получающаяся из f изменением знака у всех ее значений, т. е. $(-f)(x)=-f(x)$, $x\in E$, является убывающей на E функций.

Возрастающие и убывающие на множестве E функции называются *монотонными* на этом множестве.

Теорема 5. *Пусть функция f возрастает на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда в точке $x=b$ существует предел*

*) Возрастающие (убывающие) функции называются также *неубывающими* (*невозрастающими*).

слева и

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,\,b)} f(x),$$

а в точке $x=a$ — предел справа и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{(a,\,b)} f(x).$$

Таким образом, если в условиях теоремы функция f ограничена сверху, то в точке $x=b$ существует конечный предел слева, а если f неограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$.

Аналогично, если функция f ограничена снизу, то в точке $x=a$ существует конечный предел справа, а если f не ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$.

Аналогичные утверждения справедливы и для убывающих функций, их можно получить, перейдя от функции f к функции $-f$.

Следствие. *Если функция f монотонна на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$, то в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы*

$$f(x_0-0) \text{ и } f(x_0+0). \tag{4.22}$$

Доказательство теоремы. Пусть $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{(a,\,b)} f(x)$ — верхняя грань конечная или бесконечная, равная $+\infty$. Возьмем какое-либо $\eta<\beta$. Тогда в силу определения верхней грани (см. свойство 2° в определении 6′ п. 2.8) существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f(\xi) > \eta. \tag{4.23}$$

Положим, что $\mathring{U}(b) \overset{\text{def}}{=} (\xi, b)$, т. е. $\mathring{U}(b)$ является односторонней проколотой окрестностью точки b *). Тогда для любого $x \in \mathring{U}(b)$, т. е. для любого такого x, что $\xi<x<b$ (рис. 18) в силу возрастания функции f, определения верхней грани и неравенства (4.23) получим:

$$\eta<f(\xi)\leqslant f(x)\leqslant\beta.$$

Итак, если $x \in \mathring{U}(b)$, то

$$\eta<f(x)\leqslant\beta. \tag{4.24}$$

Задание произвольного числа $\eta<\beta$ равносильно в данном случае заданию произвольной окрестности $U(\beta)$ точки β в следующем смысле. Именно, если β конечно, то, полагая $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \beta-\eta$, получаем, что условие (4.24) равносильно условию $f(x) \in U(\beta, \varepsilon)$,

*) В случае $b=+\infty$ проколотая окрестность $(\eta, +\infty)$ причисляется к односторонним проколотым окрестностям.

ибо $f(x) \leqslant \beta$. Если же $\beta = +\infty$, то условие (4.24) равносильно условию $f(x) \in U(+\infty, \eta)$.

Таким образом, для любой окрестности $U(\beta)$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(b)$, что для любой точки $x \in \mathring{U}(b)$ имеет место $f(x) \in U(\beta)$. Это и означает, что

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \beta = \sup_{(a,\, b)} f(x).$$

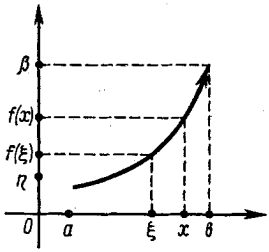

Рис. 18

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,\, b)} f(x)$. □

Доказательство следствия. Пусть для определенности функция f возрастает на интервале (a, b). Тогда какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, для всех $x' \in (a, x_0)$ и всех $x'' \in (x_0, b)$ будет справедливо неравенство $f(x') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x'')$, т. е. функция f ограничена сверху на интервале (a, x_0) и снизу на интервале (x_0, b) числом $f(x_0)$. Следовательно,

$$\sup_{(a,\, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{(x_0,\, b)} f(x).$$

В частности, указанные верхняя и нижняя грани конечны. Этим следствие доказано, так как согласно теореме

$$f(x_0 - 0) = \sup_{(a,\, x_0)} f(x),\ f(x_0 + 0) = \inf_{(x_0,\, b)} f(x). \ \square$$

4.11. КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Как и в случае предела последовательности, получим необходимое и достаточное условие того, что функция имеет предел в точке a, не используя самого значения предела, а в терминах лишь значений самой функции в проколотой окрестности точки a.

Теорема 6 (критерий Коши). *Для того чтобы функция f имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$ точки a, что для любых $x' \in \mathring{U}(a, \delta)$ и $x'' \in \mathring{U}(a, \delta)$ выполнялось бы неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \boldsymbol{R}$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $U(a, \delta)$ точки a такая, что для каждого $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.25}$$

Пусть $x' \in \mathring{U}(a, \delta)$ и $x'' \in \mathring{U}(a, \delta)$, тогда в силу (4.25) получим:

$$|f(x'')-f(x')| = |[f(x'')-A]+[A-f(x'')]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'')-A|+|f(x')-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \ \square$$

Доказательство достаточности. Пусть функция f такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, что для всех

$$x' \in \mathring{U}(a, \delta),\ x'' \in \mathring{U}(a, \delta) \tag{4.26}$$

выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')| < \varepsilon. \tag{4.27}$$

Прежде всего из этого условия следует, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a. Можно, например, взять $\varepsilon = 1$, тогда функция f и будет определена в соответствующей ему в силу сформулированного условия проколотой окрестности.

Проверим, что функция f имеет в точке a предел. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{4.28}$$

и произвольно зададим $\varepsilon > 0$. Для этого ε существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a, \delta)$, удовлетворяющая условиям (4.26) — (4.27). В силу условия (4.28) для соответствующей обычной окрестности $U(a, \delta)$ существует такое $n_0 \in N$, что при всех $n \geqslant n_0$, $n \in N$, имеет место $x_n \in U(a, \delta)$. Но $x_n \in \mathring{U}(a)$, следовательно, $x_n \neq a$, $n \in N$. Поэтому x_n принадлежат не только обычной окрестности $U(a, \delta)$, но и соответствующей проколотой: $x_n \in \mathring{U}(a, \delta)$, $n \geqslant n_0$. Отсюда в силу условий (4.26) — (4.27) для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$ получим:

$$|f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши для последовательностей и, следовательно, сходится (см. п. 3.7).

Таким образом, для каждой последовательности $x_n \in \mathring{U}(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условию (4.28) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Отсюда, как известно (см. лемму п. 4.6), следует существование конечного предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. $\square$

В случае, если $a = x_0$ является числом, то условие Коши можно перефразировать следующим образом.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условиям* $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

В случае же, когда $a = \infty$, условию Коши можно придать следующий вид.

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих неравенствам* $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Следует отметить, что эти два критерия существования предела функции, относящиеся к разным случаям и имеющие разную формулировку, благодаря удачно выбранной терминологии (понятию окрестности) получили единое доказательство.

Для случая односторонних пределов*) условие Коши можно перефразировать без терминов окрестности следующим образом: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η ($\eta < a$ *в случае предела слева и* $\eta > a$ *в случае предела справа*), *что для любых* x' *и* x'', *удовлетворяющих условию* $\eta < x' < a$, $\eta < x'' < a$, *или, соответственно, условию* $a < x' < \eta$, $a < x'' < \eta$, *выполняется неравенство* $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

§ 5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

5.1. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Функция* f, *определенная в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0, *называется непрерывной в этой точке* (*или, что то же, при* $x = x_0$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.1}$$

Подчеркнем, что если функция f непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции). В дальнейшем (см. п. 19.3) будет дано обобщение понятия непрерывности функции в точке, в котором не будет предполагаться, что функция определена в некоторой окрестности этой точки.

Согласно определению предела функции в точке в терминах последовательностей (см. п. 4.4) определение непрерывности функции в точке x_0 равносильно тому, что для любой последовательности $x_n \in U(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{5.2}$$

*) Мы, естественно, причисляем понятие предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ к понятию одностороннего предела.

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{5.3}$$

Понятие непрерывности функции, сформулированное в терминах последовательностей, отражает собой обстоятельство, обычно встречающееся на практике и состоящее в том, что при косвенном измерении некоторой величины y с помощью параметра x, от которого эта величина y непрерывно зависит: $y=f(x)$, мы имеем объективную уверенность, что чем точнее мы будем получать (вследствие каких-либо экспериментов, измерений или расчетов) последовательно значения x_n, $n=1, 2, \ldots$ аргумента x, тем точнее будут получаться и соответствующие значения $y_n = f(x_n)$ величины y.

Согласно же определению предела функции в точке на языке ε и δ (см. п. 4.5), условие (5.1) равносильно условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta, \tag{5.4}$$

выполняется неравенство (рис. 19)

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{5.5}$$

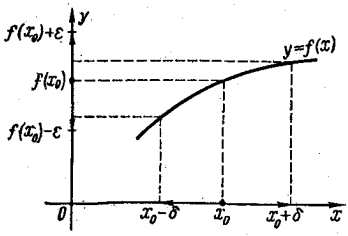

Рис. 19

Отметим, что в определении непрерывности (5.2) — (5.3) вместо проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, как это было при определении предела в п. 4.4, была взята обычная окрестность $U(x_0)$, а в определении непрерывности (5.4) — (5.5) было сделано равносильное изменение: отброшено условие $x \neq x_0$. Дело в том, что в случае, когда предел функции в точке равен значению функции в этой точке, определение предела оказывается равносильным, брать ли обычные или проколотые окрестности или, что то же самое, требовать или нет выполнения условия $x \neq x_0$. Например, в случае (5.4) — (5.5) добавление значения $x = x_0$ ничего не меняет, так как и условие (5.4) и условие (5.5) выполняются при $x = x_0$ для любого $\delta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$:

$$|x_0 - x_0| = 0 < \delta, \quad |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Упражнение 1. Доказать, что если в определении предела функции f в точке x_0 в смысле п. 4.4 заменить проколотую окрестность на обычную или в соответствующем определении п. 4.5 отбросить условие $x \neq x_0$, то получится определение, эквивалентное определению непрерывности функции f в точке x_0.

Например, доказать, если функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и если существует число A, обладающее свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то функция f непрерывна в точке x_0 и $A = f(x_0)$. Обратно, если функция f непрерывна в точке x_0,

т. е. имеет место (5.1), где предел понимается в смысле § 4 и, следовательно требуется, что $x \neq x_0$, то число $A = f(x_0)$ обладает вышеуказанным свойством.

Определение непрерывности функции f в точке x_0 можно еще перефразировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если, какова бы ни была заданная степень точности $\varepsilon > 0$ для значений функции, существует такая степень точности для аргумента $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что коль скоро мы выберем значение аргумента x, равное x_0 с точностью δ, т. е. удовлетворяющее неравенству (5.4), и возьмем в нем значение функции f, то мы получим значение $f(x_0)$ с заданной степенью точности, т. е. будет выполнено неравенство (5.5).

Как и в случае определения предела, определение непрерывности функции в точке можно дать на языке окрестностей (см. условия (4.6)).

Функция f непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U(x_0, \delta)$ имеем $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$; иначе говоря, если для любой окрестности $U(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что выполняется включение

$$f(U(x_0)) \subset U(y_0). \tag{5.6}$$

Наконец, перенося $f(x_0)$ в равенстве (5.1) в левую часть, внося $f(x_0)$ под знак предела и замечая, что обозначение $x \to x_0$ при пределе функции равносильно обозначению $x - x_0 \to 0$, получаем

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{5.7}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается Δx, а разность $f(x) - f(x_0)$ — *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначается Δy; таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{5.8}$$

В этих обозначениях равенство (5.7) перепишется в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.9}$$

т. е. говоря описательно, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению агрумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Примеры. 1. Функция $f(x) = c$, где c — постоянная, непрерывна на всей числовой прямой. В самом деле, для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеет место

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0). \ \square$$

2. Покажем, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0 \neq 0$. В самом деле,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)\,x_0},$$

откуда при $x_0 \neq 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x_0+\Delta x)\,x_0} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (x_0+\Delta x)\,x_0} = \frac{0}{x_0} = 0,$$

что и означает, согласно (5.9), непрерывность функции $f(x)=1/x$ в точке x_0.

3. Покажем, что функция $f(x)=|\operatorname{sign} x|$ (см. рис. 13) не является непрерывной в точке $x_0=0$. Действительно, $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1$, и этот предел не совпадает со значением $|\operatorname{sign} 0| = 0$.

Упражнения. 2. Выяснить, с какой степенью точности достаточно взять значение аргумента функции x^3 в данной точке x_0, чтобы получить значение функции с заданной степенью точности $\varepsilon > 0$.

3. Выяснить, будет ли функция

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывной в точке $x=0$.

Определение 2. *Пусть теперь функция f определена на интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$.*

Точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если функция f не определена в точке x_0, или если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Упражнение 4. Сформулировать в позитивном смысле определение точки разрыва функции.

Определение 3. *Если x_0 — точка разрыва функции f и существуют конечные пределы*

$$f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции f в точке x_0. Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва.

Последнее оправдано тем, что если в этом случае видоизменить или доопределить (если функция f была не определена в точке x_0) функцию f, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

Очевидно, что в точках разрыва второго рода по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не существует. (Здесь под пределом, как обычно, понимается лишь конечный предел.)

Упражнение 5. Сформулировать в позитивном смысле определение точки разрыва второго рода.

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 16) имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода, а функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ имеют разрывы второго рода. Всякая функция, монотонная на некотором интервале, может иметь только точки разрыва первого рода (см. следствие теоремы 5 п. 4.10).

Определение 4. *Пусть функция f определена на левосторонней окрестности точки x_0, т. е. на полуинтервале вида $(a, x_0]$. Функция f называется непрерывной слева в точке x_0, если* $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Пусть функция f определена на правосторонней окрестности точки x_0, т. е. на полуинтервале вида $[x_0, b)$. Функция f называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

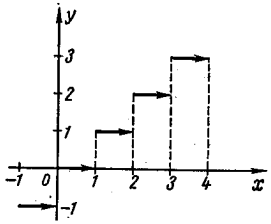

Рис. 20

Пример. Рассмотрим функцию, определенную на всей числовой оси и для каждого числа x равную наибольшему целому числу, меньшему или равному x. Эта функция имеет специальное обозначение $y = [x]$, читается «y является целой частью числа x» или «y равно entier x *)». Ее график изображен на рис. 20. Функция $[x]$ в точках $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ непрерывна справа и разрывна слева; во всех же других точках она непрерывна как справа, так и слева, таким образом, в частности, $[x]$ непрерывна справа во всех точках.

5.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

Теорема 1. *Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции cf (c — постоянное), $f+g$, fg, а если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то и функция f/g также непрерывны в точке x_0.*

Эта теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности и свойств пределов функций (см. п. 4.7). Докажем, например, непрерывность функции fg. Согласно свойству (4.16),

*) Entier — целый (франц.).

имеем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) g(x_0) \tag{5.10}$$

ибо пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ существуют и в силу непрерывности f и g в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Выполнение равенства (5.10) и означает наличие непрерывности функции fg в точке x_0. □

Теорема 2. *Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Короче, но менее точно: непрерывная функция от непрерывной функции является непрерывной функцией.

Следует обратить внимание на то, что в теореме утверждается непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0, а поскольку непрерывность функции в некоторой точке предполагает согласно определению 1 из п. 5.1, что функция определена в какой-то окрестности этой точки, то в теореме тем самым утверждается также, что функция $f[\varphi(x)]$ при сделанных предположениях определена в некоторой окрестности точки x_0.

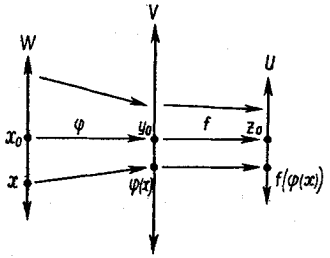

Рис. 21

Доказательство. Пусть $z_0 = f(y_0)$ и фиксирована произвольным образом окрестность $U(z_0)$ точки z_0. Тогда в силу непрерывности функции f в точке y_0 существует такая окрестность $V(y_0)$ точки y_0, что, если

$$y \in V(y_0), \tag{5.11}$$

то функция f определена в этой точке y и

$$f(y) \in U(z_0). \tag{5.12}$$

Далее, для полученной окрестности $V(y_0)$ в силу непрерывности функции φ в точке x_0 существует такая окрестность $W(x_0)$, что, если $x \in W(x_0)$, то функция φ определена в этой точке x и $\varphi(x) \in V(y_0)$.

Следовательно, для этой точки определена и функция $f[\varphi(x)]$, причем выполняется включение (5.11), где $y = \varphi(x)$, а значит и (5.12), которое для рассматриваемого случая имеет вид $f[\varphi(x)] \in U(z_0)$ (рис. 21). Это и означает непрерывность сложной функции $f \circ \varphi$ в точке x_0. □

Утверждение теоремы можно записать в виде формулы

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right], \tag{5.13}$$

из которой видно, что *операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.*

В самом деле, левая часть равенства (5.13) равна $f[\varphi(x_0)]$ согласно утверждению теоремы, правая часть также равна $f[\varphi(x_0)]$ в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0.

При отыскании пределов непрерывных функций теорему 2 удобно использовать еще в одном виде, в виде следующего правила.

Правило замены переменной для пределов непрерывных функций: пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y\to y_0} f(y), \quad y=\varphi(x).$$

Теорема 2 естественным образом переносится и на случай односторонней непрерывности (сформулируйте ее в этом случае).

Упражнения. 6. Доказать, что если для функции $x=\varphi(t)$ существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то в некоторой проколотой окрестности точки t_0 имеет смысл композиция $f[\varphi(t)]$ и существует

$$\lim_{t\to t_0} f[\varphi(t)] = f(x_0).$$

7. Сформулировать и доказать правила замены переменных для односторонних пределов функций.

§ 6. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ. ДОСТИЖЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Определение 1. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке.*

При этом под непрерывностью в точке a понимается непрерывность справа, а под непрерывностью в точке b — непрерывность слева.

Аналогично определяется и непрерывность функции на промежутке любого другого вида.

Будем говорить, что функция f, определенная на множестве E, достигает на нем своей верхней (нижней) грани $\beta=\sup\limits_E f$ ($\alpha=\inf\limits_E f$), если существует такая точка $x_0\in E$, что $f(x_0)=\beta$ ($f(x_0)=\alpha$).

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней грани и своей нижней грани.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x);$$

M, как и всякая верхняя грань непустого множества чисел, может быть либо конечной, либо бесконечной, равной $+\infty$. Покажем, что $M < +\infty$ и что существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = M$.

Выберем какую-либо последовательность таких чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.1}$$

Согласно определению верхней грани функции, для каждого a_n, $n = 1, 2, \ldots$, существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > a_n, \cdot n = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

С другой стороны, поскольку M — верхняя грань функции f, то для всех точек $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$f(x) \leqslant M. \tag{6.3}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п.3.6) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{6.4}$$

Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, то (почему?) и $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

Из неравенств (6.2) и (6.3) следует, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M. \tag{6.5}$$

Предел всякой подпоследовательности последовательности, имеющей конечный или бесконечный предел, равен пределу всей последовательности; поэтому из (6.1) имеем $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = M$. Переходя в (6.5) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{6.6}$$

С другой стороны, в силу непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ она непрерывна в точке x_0 этого отрезка и, следовательно, из (6.4) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{6.7}$$

Из (6.6) и (6.7) получаем $M = f(x_0)$.

Таким образом, доказано, что верхняя грань M функции f совпадает со значением функции в точке x_0 и, следовательно, конечна. Тем самым функция f ограничена сверху и ее верхняя грань достигается в точке $x_0 \in [a, b]$.

Аналогично доказывается, что непрерывная на отрезке функция ограничена снизу и достигает на нем своей нижней грани. □

Теорема, аналогичная теореме 1, несправедлива для промежутков, не являющихся отрезками; в этом легко убедиться, построив соответствующие примеры. Например, функция $y = 1/x$ непрерывна в каждой точке интервала (0; 1) и вместе с тем неограничена на нем; функция $y = x$ непрерывна на всей вещественной оси и неограничена на ней.

Отметим еще, что если функция f непрерывна не на отрезке, а на промежутке другого типа и даже, кроме того, ограничена на нем, она, вообще говоря, не имеет наибольшего и наименьшего значения. Например, функции $y = x$ на интервале (0; 1) и $y = \operatorname{arctg} x$ на всей вещественной прямой, хотя они непрерывны (непрерывность функции $y = \operatorname{arctg} x$ будет доказана в п. 7.3) и ограничены в указанных промежутках, не достигают своих верхних и нижних граней.

Упражнение 1. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда существует такое $c > 0$, что $f(x) > c$ для всех $x \in [a, b]$.

6.2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 2 (Больцано — Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = C$.*

Иначе говоря, *непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними значение.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) = A < B = f(b)$ и $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0) = C$ и, значит, искомая точка $\xi = x_0$ найдена, либо $f(x_0) \neq C$, и тогда на концах одного из полученных отрезков функция f принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C, точнее — на левом конце значение, меньшее C, на правом — большее.

Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т. д. В результате либо через конечное число шагов придем к искомой точке ξ, в которой $f(\xi) = C$, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, по длине стремящихся к нулю и таких, что

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.8}$$

Пусть ξ — общая точка всех отрезков $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \ldots$ (см. п. 2.10). Как мы знаем (см. (3.9)), $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому в силу непрерывности функции f

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.9}$$

Из (6.8) же получим (см. п. 3.3)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.10}$$

Из (6.9) и (6.10) следует, что $f(\xi) = C$. $\square$

Следствие 1. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

Это следствие — частный случай теоремы (рис. 22).

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \sup f$, $m = \inf f$. Тогда функция f принимает все значения из отрезка $[m, M]$ и только эти значения.*

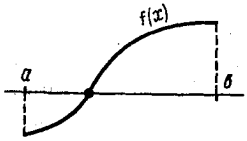

Рис. 22

Для доказательства заметим, что если

$$M = \sup_{[a,\, b]} f, \quad m = \inf_{[a,\, b]} f, \text{ то } m \leqslant f(x) \leqslant M$$

и, согласно теореме 1, существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Теперь рассматриваемое следствие непосредственно вытекает из теоремы 2, примененной к отрезку $[\alpha, \beta]$, если $\alpha \leqslant \beta$, или соответственно к отрезку $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$.

Таким образом, *множество всех значений функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке, представляет собой также отрезок.*

Отметим, что свойство непрерывных функций принимать все промежуточные значения справедливо для любого промежутка (конечного или бесконечного). Именно: если непрерывная на некотором промежутке функция принимает в двух его точках a и b, причем $a < b$, два каких-то значения, то она принимает и любое промежуточное. В самом деле, согласно теореме 2, рассматриваемая функция заведомо принимает указанное значение в некоторой точке отрезка $[a, b]$, который является частью исходного промежутка.

Замечание. Как в теореме 1, так и в теореме 2 было доказано существование точки на данном отрезке, в которой значение рассматриваемой непрерывной функции обладает определенным свойством (в первой теореме в этой точке достигается экстремальное значение, во второй — принимается заданное промежуточное значение). Однако между методами, примененными

для доказательства этих утверждений, имеется принципиальное различие. Метод доказательства теоремы 2 дает возможность не только доказать в общем случае существование указанной точки, но и фактически найти ее с любой заданной степенью точности для каждой конкретной функции: нужно разделить отрезок, на котором ищется точка, достаточное число раз пополам, выбирая каждый раз половину согласно правилу, указанному при доказательстве; концы получившегося отрезка и будут приближенными значениями указанной точки.

Метод же доказательства теоремы 1 не позволяет указать способ, с помощью которого для каждой непрерывной на отрезке функции можно было бы найти точки, в которых она принимает экстремальные значения. Это обусловлено тем, что доказательство этой теоремы основано на теореме Больцано — Вейерштрасса, утверждающей лишь возможность выделения из каждой ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности. Конкретного метода, или, как это принято говорить, *алгоритма*, для выделения из любой ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности не существует.

Заметим еще, что при использовании какого-либо алгоритма на практике важно, как быстро он приводит к цели. С этой точки зрения при приближенном решении уравнения $f(x)=0$ обычно применяется не метод последовательного деления отрезка пополам, а другие алгоритмы, быстрее приводящие к цели (см. Добавление в конце второго тома, § 60).

Задача 6. Доказать, что периодическая непрерывная на всей числовой оси функция, отличная от постоянной, имеет наименьший период. Привести пример периодической функции, определенной на всей числовой оси и отличной от постоянной, которая не имеет наименьшего периода.

6.3. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 2. *Функция f, определенная на числовом множестве E, называется строго возрастающей (строго убывающей), если для любых двух чисел $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Функция, строго возрастающая или строго убывающая, называется строго монотонной.

Если функция является строго возрастающей (убывающей) на множестве E, то будем также говорить, что она строго возрастает (убывает) на этом множестве.

Очевидно, что строго монотонная (возрастающая, убывающая) функция является и просто монотонной (соответственно возрастающей, убывающей) функцией в смысле определения 9 из п. 4.10.

Лемма 1. *Пусть функция f строго возрастает (убывает) на некотором множестве $X \subset \boldsymbol{R}$ и пусть Y — множество ее значений.*

Тогда обратная функция f^{-1} (см. п. 1.2) является однозначной строго возрастающей (убывающей) функцией на множестве Y.*

Доказательство. Пусть для определенности функции f строго возрастает на множестве X. Докажем, что обратная функция однозначна.

Допустим противное. Пусть существует такая точка $y \in Y$, что множество $f^{-1}(y)$ содержит по крайней мере две различных точки x_1 и x_2:

$$x_1 \in f^{-1}(y) \text{ и } x_2 \in f^{-1}(y), \ x_1 \neq x_2,$$

и, следовательно,

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.11}$$

Для двух чисел x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$ справедливо одно из двух неравенств: $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$; в первом случае в силу строгого монотонного возрастания функции f имеем $f(x_1) < f(x_2)$, а во втором $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. в обоих случаях равенство (6.11) не выполняется. Таким образом, для каждого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит в точности из одной точки, т. е. функция f^{-1} однозначна.

Докажем теперь, что функция f^{-1} строго возрастает на множестве Y. Пусть

$$y_1 < y_2, \ y_1 \in Y, \ y_2 \in Y \tag{6.12}$$

и пусть $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Следовательно, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Для любых двух чисел x_1 и x_2 справедливо одно из трех соотношений: либо $x_1 > x_2$, либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 < x_2$. Если $x_1 > x_2$ или $x_1 = x_2$, то соответственно было бы $y_1 > y_2$ (в силу строго монотонного возрастания функции f) или $y_1 = y_2$ (в силу однозначности), что противоречило бы неравенству (6.12). Таким образом, из неравенства (6.12) следует, что $x_1 < x_2$, а это и означает строгое возрастание функции f^{-1} на множестве Y.

В случае строго убывающей на множестве функции f доказательство можно либо провести аналогичным образом, либо свести к уже рассмотренному случаю рассмотрением функции $-f$, ибо когда функция f строго убывает на множестве X, функция $-f$ строго возрастает на этом множестве. □

Теорема 3. *Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$ (рис.23).*

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для строго возрастающих функций. Пусть $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Покажем, что областью определения обратной функции f^{-1} является сегмент $[c, d]$, или, что то же, $[c, d]$ является множеством значений функции f. В самом деле, из монотонного возрастания функции f следует, что $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, т. е. что $f(x) \in [c, d]$ для любого $x \in [a, b]$. С другой стороны, каково бы ни было $y \in [c, d]$, т. е. $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, согласно теореме 2

существует такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$. Таким образом, все значения заданной функции f лежат на отрезке $[c, d]$, и каждая точка этого отрезка является значением функции f в некоторой точке. Это и означает, что отрезок $[c, d]$ является множеством значений функции f.

Отметим, что это утверждение следует также и из следствия 2 теоремы 2, если заметить, что в данном случае

$$c = \min_{[a, b]} f(x), \quad d = \max_{[a, b]} f(x).$$

В силу леммы функция f^{-1} однозначна и строго возрастает на отрезке $[c, d]$.

Покажем, наконец, что функция f^{-1} непрерывна на $[c, d]$. Пусть $y_0 \in [c, d]$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Пусть $c < y_0 < d$, т. е. y_0 — внутренняя точка отрезка $[c, d]$, тогда в силу строгого возрастания функции f^{-1} и $a < x_0 < b$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать (почему?), что ε таково, что

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \qquad (6.13)$$

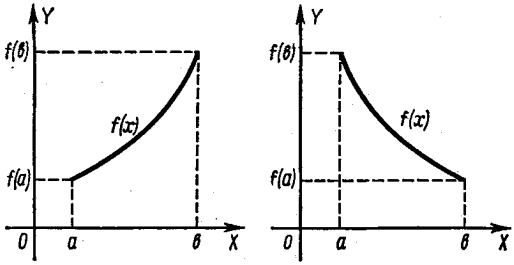

Рис. 23

Пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Тогда из условия (6.13) в силу строгого возрастания функции f следует, что

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (рис. 24). Если теперь выбрать y так, что $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, то тем более

$$y_1 < y < y_2,$$

и, следовательно, в силу строгого возрастания функции f^{-1} справедливо неравенство

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

Таким образом, для $\varepsilon > 0$ указано такое $\delta > 0$, что для всех $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция f^{-1} непрерывна в точке y_0. Если теперь $y_0 = c$ или $y_0 = d$, то аналогичными рассуждениями доказывается, что функция f^{-1} непрерывна справа в точке c и непрерывна слева в точке d.

Теорема для строго возрастающих функций доказана полностью.

Напомним, что функция f строго убывает тогда и только тогда, когда функция $-f$ строго возрастает, поэтому справедливость теоремы для строго убывающих функций следует из рассмотренного случая. □

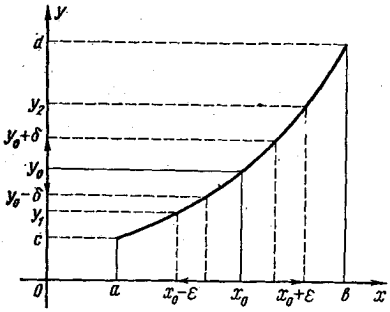

Рис. 24

Рассмотрим теперь случай функции, определенной на интервале.

Теорема 4. *Пусть функция f определена, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) и пусть*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на интервале (конечном или бесконечном) с концами c и d (рис. 25).

При этом в случае, когда $a = -\infty$ под $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ понимается предел $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, а в случае $b = +\infty$ под пределом $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$ — предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности функция f строго возрастает в интервале (a, b). Покажем, что в этом случае множеством ее значений является интервал (c, d). Действительно, согласно теореме о пределах монотонных функций (см. п. 4.10) имеем: $c = \inf\limits_{(a, b)} f$, $d = \sup\limits_{(a, b)} f$ и, следовательно, для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $c \leqslant f(x) \leqslant d$. Более того, для всех $x \in (a, b)$ выполняются еще неравенства $f(x) \neq c$, $f(x) \neq d$. В самом деле, если бы, например, существовало такое x_0, что $a < x_0 < b$ и $f(x_0) = c$ (это, очевидно, возможно только тогда, когда нижняя грань c конечна), то при $a < x < x_0$ выполнялось бы неравенство $f(x) < f(x_0) = c$, что противоречило бы тому, что $c = \inf f$. Итак, для всех $x \in (a, b)$ выполняются неравенства $c < f(x) < d$. С другой стороны, поскольку $c = \inf\limits_{(a, b)} f$, $d = \sup\limits_{(a, b)} f$, то для любого y, $c < y < d$, существуют такие $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$, что $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ удовлетворяют неравенствам

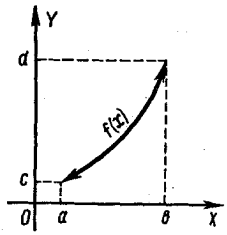

Рис. 25

$$c < y_1 < y < y_2 < d.$$

Отсюда следует, что $x_1 < x_2$ *), и поскольку $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$, то по теореме Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывных функций существует такая точка $x \in [x_1, x_2]$, что $f(x) = y$. Таким образом, для любой точки $y \in (c, d)$ существует такая точка $x \in (a, b)$, что $f(x) = y$.

Тем самым доказано, что действительно множеством значений функции f, или, что то же, множеством определения обратной функции f^{-1}, является интервал (c, d). То, что функция f^{-1} однозначна и строго монотонно возрастает в интервале (c, d), следует из леммы. Ее непрерывность доказывается дословным повторением доказательства непрерывности обратной функции в предыдущей теореме. Наконец, как и выше, теорема для строго монотонно убывающей функции следует из уже доказанной теоремы о строго монотонно возрастающей функции с помощью рассмотрения функции $-f$. □

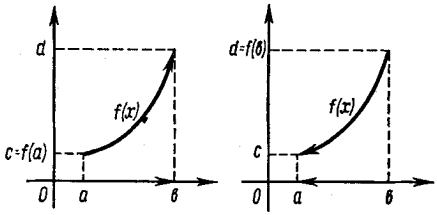

Рис. 26

Замечание. Аналогичным образом доказывается, что если функция строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, или на $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, то обратная функция определена, строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[c, d)$, где $c = f(a)$, $d = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, соответственно на $(c, d]$, где $c = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $d = f(b)$ (рис. 26).

Случай строго убывающей на полуинтервале функции $f(x)$ можно свести к случаю строго возрастающей, рассмотрев функцию $-f(x)$.

Пример. При любом целом положительном n степенная функция $y = x^n$ строго возрастает и непрерывна на положительной полуоси $x \geqslant 0$.

Действительно, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то, перемножая n раз эти неравенства, получим $x_1^n < x_2^n$, т. е. функция $y = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, строго монотонно возрастает. Для доказательства непрерывности функции $y = x^n$ заметим, что функция $y = f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Действительно в этом случае $y_0 = f(x_0) = x_0$, поэтому $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Следовательно, если задано $\varepsilon > 0$, то, беря $\delta = \varepsilon$, получим, что из условия $|\Delta x| < \delta$ следует $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Это и означает непрерывность функции $y = x$ в точке $x = x_0$. Функция же $y = x^n$ является произведением n

*) Случай $x_1 \geqslant x_2$ невозможен, так как тогда бы в силу возрастания функции f выполнялось бы неравенство $y_1 \geqslant y_2$.

одинаковых функций $f(x)=x$ и потому (см. п. 5.2) также непрерывна во всех точках $x \in R$.

Из того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, очевидно, следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $n=1, 2, \ldots$. Кроме того, в нуле функция $y=x^n$ обращается в ноль. Поэтому, согласно замечанию к теореме 4, множеством значений степенной функции $y=x^n$ при $x \geqslant 0$ является неотрицательная полуось $y \geqslant 0$.

Обратной функцией для функции $y^n=x$ является корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n=1, 2, \ldots$. Согласно теореме 4 и в силу доказанных свойств степенной функции $y=x^n$, корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n=1, 2, \ldots$, определен для любого неотрицательного y.

Таким образом, из доказанных теорем следует, в частности, *существование и единственность положительного корня n-й степени из любого положительного числа.*

Замечание. Из рассмотренного примера следует еще раз, что любой промежуток содержит иррациональные числа (см. следствие 2 из теоремы 8 в п. 3.11). Покажем сначала, что число $\sqrt{2}$ (существование которого вытекает из рассмотренного выше примера) является иррациональным. Допустим противное: пусть существует рациональное число, равное квадратному корню из двух. Запишем это число в виде несократимой дроби p/q (p и q — взаимно простые натуральные числа):

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}.$$

Тогда $p^2=2q^2$ и, следовательно, число p делится на 2. Действительно, если бы p было нечетным, т. е. $p=2k+1$, $k \in N$, то $p^2=(2k+1)^2=4k^2+2k+1$ также было бы нечетным, и равенство $p^2=2q^2$ не имело бы места. Итак, $p=2k$; но тогда $4k^2=2q^2$, или $q^2=2k^2$. Отсюда, как и выше, следует, что q — четное число. Четность чисел $p=q$ противоречит предположению о несократимости дроби p/q.

Из доказанного, очевидно, следует, что всякое число вида $m\sqrt{2}/n$, m и n — натуральные, также иррационально. В самом деле, если бы оно было рациональным $\frac{m\sqrt{2}}{n}=\frac{p}{q}$, то и $\sqrt{2}$ оказалось бы рациональным числом: $\sqrt{2}=\frac{np}{mq}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что всякий интервал содержит иррациональное число (сравните с п. 3.11) и притом вида $m\sqrt{2}/n$, m и n — целые.

Действительно, пусть $0 \leqslant a < b$. Выберем так натуральное n, чтобы

$$\sqrt{2}/n < b-a,$$

а затем натуральное m так, чтобы

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Тогда $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Если же $a < b \leqslant 0$, то в силу доказанного существуют такие целые m и n, что

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

а поэтому

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

В случае $a < 0 < b$ согласно доказанному существуют такие целые m и n, что $a < 0 < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. МНОГОЧЛЕНЫ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Любой многочлен непрерывен в каждой точке.*

В самом деле, функция $y = c$, где c — постоянная, непрерывна, что показано в примере 1 п. 5.1.

Функции вида $y = x^n$ также непрерывны для каждого фиксированного $n \in N$ в любой точке x. Это показано в п. 6.3 (см. приведенный там пример).

Всякий же многочлен получается из функций вида $y = c$ и $y = x^n$ с помощью сложения и умножения и поэтому является непрерывной функцией в каждой точке (см. п. 5.2).

Теорема 2. *Всякая рациональная функция $P(x)/Q(x)$, ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна во всех точках, в которых ее знаменатель не обращается в ноль.*

Это непосредственно следует из того, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в каждой точке и частное непрерывных функций также непрерывно во всех точках, где делитель не обращается в нуль (см. п. 5.2).

Эту теорему весьма удобно использовать при нахождении пределов рациональных функций. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Для этого нужно сначала произвести, если, конечно, это возможно, сокращение дроби $P(x)/Q(x)$ на множитель $(x - x_0)^n$ с наибольшим возможным показателем $n \geqslant 1$. Если получившуюся рациональную дробь обозначить $P_1(x)/Q_1(x)$, то (см. п. 4.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Если $Q_1(x_0) \neq 0$, то, в силу теоремы 2, этот предел равен просто $P_1(x_0)/Q_1(x_0)$, если же $Q_1(x_0)=0$ (и, значит, $P_1(x_0) \neq 0$, ибо в противном случае дробь $P_1(x)/Q_1(x)$ можно было бы сократить на $(x-x_0)$), то этот предел равен ∞.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1} = \infty$.

7.2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

Напомним свойства степени a^r, где $a>0$, r — рациональное число: $r=p/q$, p и q — целые, $q \neq 0$.

1°. Пусть $r_1 < r_2$. Если $a>1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, а если $a<1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2°. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$.

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4°. $(ab)^r = a^r b^r$.

Здесь везде r, r_1 и r_2 — рациональные числа. Вспомним еще, что $a^0=1$. Из свойства 2° следует, что $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$; откуда

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

Далее, из свойства 1° и из (7.1) вытекает, что $a^r > 0$ для любого рационального r. Действительно, если $r>0$ и $a \geqslant 1$, то в силу 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. Отсюда, согласно (7.1), имеем

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

Аналогично доказывается неравенство $a^r > 0$ при $a<1$.

Определим теперь степень a^x для любого действительного x и $a>0$. Предварительно напомним, что (см. в п. 3.9 пример 3, формулы (3.20) и (3.21))

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1. \tag{7.2}$$

Лемма. *Пусть $a>0$. Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех рациональных чисел h, удовлетворяющих условию $|h|<\delta$, выполняется неравенство $|a^h-1|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала $a>1$. Из (7.2) следует, что для каждого фиксированного $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число n_ε, что

$$|a^{1/n_\varepsilon}-1|<\varepsilon \text{ и } |a^{-1/n_\varepsilon}-1|<\varepsilon, \tag{7.3}$$

следовательно (см. свойство 1° степени),

$$1-\varepsilon<a^{-1/n_\varepsilon}<a^{1/n_\varepsilon}<1+\varepsilon. \tag{7.4}$$

Если h — рациональное число и $|h|<\frac{1}{n_\varepsilon}$, т. е. $-\frac{1}{n_\varepsilon}<h<\frac{1}{n_\varepsilon}$, то $a^{-1/n_\varepsilon}<a^h<a^{1/n_\varepsilon}$ и, значит, $1-\varepsilon<a^h<1+\varepsilon$. Таким образом, если h рационально и $|h|<\delta$, где $\delta=\frac{1}{n_\varepsilon}$, то $|a^h-1|<\varepsilon$. Для $a>1$ лемма доказана.

Для $a<1$ она доказывается аналогично, только соответствующие неравенства, согласно свойству 1° степени a^r при $a<1$, надо заменить обратными. При $a=1$ лемма очевидна. □

Определим теперь степень a^x для любого действительного x.

Определение 1. *Пусть $a>0$, а x — произвольное действительное число. Пусть, далее, $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x (для любого $x\in\boldsymbol{R}$ такая последовательность всегда существует, см.* следствие леммы 1 в п. 3.10). Положим по определению

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}. \tag{7.5}$$

Это определение корректно в том смысле, что указанный предел всегда существует и не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к числу $x\in\boldsymbol{R}$.

Докажем это. Пусть последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится к числу x. Покажем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши (см. п. 3.7) и, значит, является сходящейся последовательностью. Для этого необходимо оценить разность

$$|a^{r_n}-a^{r_m}|=a^{r_m}|a^{r_n-r_m}-1|. \tag{7.6}$$

Последовательность $\{r_n\}$ сходится и, следовательно, ограничена (см. п. 3.4), поэтому существует такое число A, которое без ограничения общности можно считать рациональным (почему?), что $-A<r_n<A$. Отсюда в случае $a\geqslant 1$ имеем $a^{-A}\leqslant a^{r_n}\leqslant a^A$, а в случае $a<1$ — соответственно $a^{-A}>a^{r_n}>a^A$, $n=1, 2, \ldots$, поэтому при любом $a>0$ существует такое число B, что

$$a^{r_n}\leqslant B,\ n=1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

($B=a^A$ при $a\geqslant 1$ и $B=a^{-A}$ при $a<1$), т. е. последовательность $\{a^{r_n}\}$ ограничена сверху числом B.

Далее, по лемме для любого фиксированного $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих условию $|r|<\delta$, выполнено неравенство

$$|a^r-1|<\frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

Из сходимости же последовательности $\{r_n\}$ в силу критерия Коши (см. п. 3.7) следует, что для найденного $\delta > 0$ существует такой номер n_δ, что для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ выполняется неравенство $|r_n - r_m| < \delta$ и, значит, в силу (7.8) неравенство

$$\left| a^{r_n - r_m} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

Из (7.6), (7.7) и (7.9) вытекает, что для всех $n \geqslant n_\delta$ и $m \geqslant n_\delta$ справедливо неравенство $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$, откуда в силу критерия Коши следует, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ сходится.

Пусть теперь $\{r'_n\}$ — другая последовательность, сходящаяся к x. Покажем, что последовательности $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{r'_n}\}$ сходятся к одному и тому же пределу.

Составим новую последовательность:

$$r''_n = \begin{cases} r_k, & \text{если } n = 2k - 1, \\ r'_k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7.10}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n \to \infty} r''_n = x$, поэтому в силу доказанного существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r''_n}$. Предел же любой сходящейся последовательности совпадает с пределом любой ее подпоследовательности, поэтому

$$\lim_{n \to \infty} a^{r'_n} = \lim_{n \to \infty} a^{r''_n} = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}. \tag{7.11}$$

Корректность определения a^x доказана.

Определение 1 естественно в том смысле, что в случае, когда x является рациональным числом r, то степень a^x совпадает со значением a^r в ранее известном смысле. В самом деле, если $x = r$ — рациональное число, то в качестве последовательности рациональных чисел r_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к $x = r$, можно взять $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда согласно определению 1

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} a^r = a^r.$$

Определение 2. *Пусть задано некоторое число $a > 0$. Функция a^x, определенная для всех $x \in \boldsymbol{R}$, называется показательной функцией с основанием a.*

Согласно определению $1^x = 1$ для всех действительных x. Поэтому случай $a = 1$ не представляет интереса для изучения, и в дальнейшем мы не будем его рассматривать.

Теорема 3. *Показательная функция a^x $(a > 0)$ обладает следующими свойствами.*

1°. *При $a > 1$ она строго возрастает, а при $a < 1$ — строго убывает на всей числовой оси.*

2°. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ *для любых действительных* x *и* y.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$ *для любых действительных* x *и* y.

4°. *Она непрерывна в каждой точке числовой оси.*

Доказательство свойства 1°. Пусть для определенности $a > 1$ и $x < y$. Существуют (почему?) такие рациональные числа r' и r'', что $x < r' < r'' < y$. Выберем какие-либо последовательности рациональных чисел $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$ и чтобы $r'_n < r' < r'' < r''_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n};$$

перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a^x \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

Таким образом, если $x < y$, то $a^x < a^y$, что и означает строгое возрастание функции a^x при $a > 1$.

Случай $a < 1$ рассматривается аналогичным образом.

Доказательство свойства 2°. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ — такие последовательности рациональных чисел, что $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = y$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} (r'_n + r''_n) = x + y$ (см. п. 3.9). Тогда в силу определения показательной функции

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{r'_n} a^{r''_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^x a^y.$$

Прежде чем переходить к доказательству следующих свойств, заметим, что из свойства 2° следует, что для любого действительного x справедливо равенство $a^x a^{-x} = a^0 = 1$; поэтому $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Доказательство свойства 4° *). В силу уже доказанной строгой монотонности функции a^x утверждение леммы настоящего пункта справедливо (вместе с доказательством) не только для рациональных, но и для всех действительных h. А именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех вещественных чисел h, удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, выполняется неравенство $|a^h - 1| < \varepsilon$.

Пусть x фиксировано, $y = a^x$, $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Согласно сказанному, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|a^{\Delta x} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}, \text{ **)}$$

*) Свойство 3° будет доказано после доказательства свойства 4°.

**) Отметим, что $a^x > 0$ при любом действительном x. Это вытекает из свойств 1° и 2°, сформулированных в теореме 3, и из того, что $a^0 = 1$ (ср. со свойствами a^r при рациональных показателях r).

следовательно, для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, справедливо неравенство $|\Delta y| = a^x |a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon$, что и означает непрерывность функции a^x в точке x.

Доказательство свойства 3°. Пусть сначала $y = p$ — целое положительное число; тогда применив p раз свойство 2°, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \ldots a^x}_{p \text{ раз}} = \overbrace{a^{x+x+\ldots x}}^{p \text{ раз}} = a^{xp}. \tag{7.13}$$

Пусть, далее, $y = \frac{1}{q}$, где q — целое положительное число. Покажем, что $(a^x)^{1/q} = a^{x/q}$, т. е. что $a^{x/q}$ является корнем q-й степени из числа a^x. Для этого, согласно определению корня, надо доказать, что $\left(a^{\frac{x}{q}}\right)^q = a^x$; это следует из равенства (7.13).

Пусть теперь $y = \frac{p}{q}$, p и q натуральные, тогда, согласно уже доказанному,

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q}.$$

Если же $y = -\frac{p}{q}$, то

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{xp/q}} = a^{-xp/q}.$$

Наконец, очевидно, что $(a^x)^0 = 1 = a^0$. Таким образом доказано, что для любого действительного x и любого рационального r

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{7.14}$$

Пусть теперь задано еще одно действительное число y. Рассмотрим произвольную последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к y. Тогда в силу (7.14) для всех $n = 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}. \tag{7.15}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$, то согласно доказанной выше непрерывности функции a^x

$$\lim_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}. \tag{7.16}$$

С другой стороны, в силу определения показательной функции

$$\lim_{n\to\infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{7.17}$$

Переходя к пределу в равенстве (7.15) при $n \to \infty$, из (7.16) и (7.17) получим рассматриваемое свойство для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$. $\boxed{\cdot}$

Упражнение 1. Доказать, что $(ab)^x = a^x b^x$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых $a > 0$, $b > 0$ и каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

Пусть a — положительное число, неравное единице. Из элементарной математики известно, что операция, обратная возведению в степень и ставящая в соответствие данному числу $x>0$ такое число y, что $a^y=x$ (если, конечно, указанное y существует), называется логарифмированием по основанию a. Число y называется логарифмом числа x по основанию a и обозначается через $\log_a x$. Таким образом по определению

$$a^{\log_a x}=x \qquad (a>0,\ a\neq 1).$$

При $a=e$ логарифм числа x обозначается $\ln x$ и называется натуральным логарифмом числа x.

Определение 3. *Функция, ставящая в соответствие каждому числу x его логарифм $\log_a x$ по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$), если этот логарифм существует, называется логарифмической функцией $y=\log_a x$.*

Теорема 4. *Функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, определена для всех $x>0$ и является на этом множестве строго монотонной (возрастающей при $a>1$ и убывающей при $a<1$) непрерывной функцией. Она имеет следующие свойства:*

1°) $\log_a x_1x_2=\log_a x_1+\log_a x_2$, $x_1>0$, $x_2>0$;

2°) $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$, $x>0$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

Доказательство. Надо прежде всего доказать, что множеством значений функции $y=a^x$ является множество всех положительных чисел. При $a>1$ в силу непрерывности и строго монотонного возрастания функции $y=a^x$ это означает (см. п. 4.8), что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=0. \tag{7.18}$$

При этом, поскольку пределы (7.18) (конечные или бесконечные) существуют (см. п. 4.10), достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=+\infty$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}=0\right)$ хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$, которая стремится к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$).

Покажем, что при $a>1$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n=+\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a^{-n}=0. \tag{7.19}$$

Так как $\alpha=a-1>0$, то, раскладывая $(1+\alpha)^n$ по биномиальной формуле Ньютона и отбрасывая все члены (которые положительны), кроме первых двух, получаем

$$a^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\ldots>n\alpha,$$

(ср. с леммой п. *3.9*) и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$; отсюда

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} a^n}=0.$$

Таким образом, равенства (7.19) доказаны.

Если теперь $a<1$, то $b=\frac{1}{a}>1$ и

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{b^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x}=+\infty.$$

Из доказанного следует (см. п. 6.3 и теорему 4 этого параграфа), что как в случае $a>1$, так и в случае $a<1$ множеством значений функции a^x, а значит, и областью определения обратной функции $y=\log_a x$ является полупрямая $(0, +\infty)$. Этим, в частности, доказано существование логарифма любого положительного числа. Остальные утверждения теоремы 4 непосредственно следуют из теоремы 4 п. 6.3 и теоремы 3 настоящего параграфа.

Например, покажем, как свойство 1° вытекает из свойств показательной функции, указанных в теореме 3. Положим

$$y_1=\log_a x_1,\quad y_2=\log_a x_2,$$

согласно определению логарифма это означает, что

$$x_1=a^{y_1},\quad x_2=a^{y_2}.$$

Отсюда (см. свойство 1° показательной функции в теореме 3) имеем

$$x_1x_2=a^{y_1}a^{y_2}=a^{y_1+y_2},$$

и, следовательно, снова по определению логарифма,

$$\log_a x_1x_2=y_1+y_2=\log_a x_1+\log_a x_2. \square$$

Определение 4. *Пусть задано действительное число α. Функция x^α, определенная для всех $x>0$, называется степенной функцией с показателем α.*

Теорема 5. *Степенная функция x^α непрерывна при всех $x>0$.*

Действительно, из определения логарифма имеем $x=e^{\ln x}$, а поэтому $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, т. е. x^α есть композиция показательной функции e^u и логарифмической функции, умноженной на постоянную: $u=\alpha\ln x$. Показательная и логарифмическая функции непрерывны (см. теоремы 3 и 4), поэтому в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций (см. п. 5.2) функция x^α также непрерывна. $\square$

При рассмотрении функции $y=x^\alpha$ предполагалось, что $x>0$, так как при $x\leqslant 0$ выражение x^α имеет смысл не для всех α в области действительных чисел. Однако если α рационально и x^α имеет смысл при $x<0$ $\left(\text{например, } x^2,\ \frac{1}{x^3},\ \sqrt[5]{x}\right)$, то функция $y=x^\alpha$ будет при $\alpha>0$ непрерывной на всей действительной оси, а при $\alpha<0$ — на всей действительной оси, кроме точки $x=0$.

При $x\neq 0$ это непосредственно следует из теоремы 5, так как функция $y=x^\alpha$, если она определена и для всех $x<0$, будет

всегда четной или нечетной, а если четная или нечетная функция непрерывна при $x>0$, то она непрерывна и при $x<0$ (почему?). Если же в точке $x=0$ четная или нечетная функция непрерывна справа и равна нулю, то она просто непрерывна в этой точке (почему?). Этот случай имеет место при $\alpha>0$

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}=0=0^{\alpha},$$

ибо $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ и (см. теорему 4) $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, поэтому в этом случае функция x^{α} непрерывна и при $x=0$.

7.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Перейдем к вопросу о непрерывности тригонометрических функций. При этом не будем приводить строгих аналитических определений этих функций (как это было сделано выше с показательной функцией), а используем их геометрическое определение, известное из элементарной математики. Всюду в дальнейшем x — действительное число, а под $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ будем подразумевать значение соответствующей тригонометрической функции от угла, радианная мера которого равна x.

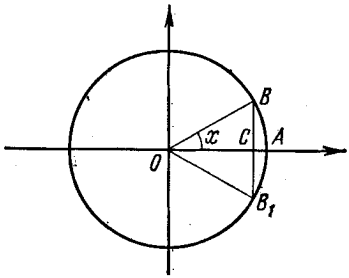

Рис. 27

Лемма 3. *При любом действительном x справедливо неравенство*

$$|\sin x|\leqslant|x|.$$

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, с радиусом OA, а радиус OB_1 симметричен радиусу OB относительно OA (рис. 27).

Опустим из точки B перпендикуляр BC на радиус OA. Тогда $BC=R\sin x$, и так как $BC=CB_1$, будем иметь $BB_1=2R\sin x$. Как известно, длина дуги BAB_1 равна $2Rx$. Длина отрезка, соединяющего две точки, не превышает длины дуги окружности, соединяющей те же точки, значит, $2R\sin x\leqslant 2Rx$, т. е. $\sin x\leqslant x$.

Если теперь $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0$, то $0<-x\leqslant\frac{\pi}{2}$, и поэтому, в силу доказанного, $\sin(-x)\leqslant -x$, но в этом случае $\sin(-x)=|\sin x|$ и $-x=|x|$, следовательно, $|\sin x|\leqslant|x|$. Таким образом, если $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $|\sin x|\leqslant|x|$. Если же $|x|>\frac{\pi}{2}$, то $|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}<$ $<|x|$. □

Теорема 6. *Функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$ *непрерывны на всей действительной оси.*

Следствие. *Функции* $y=\operatorname{tg} x$ *и* $y=\operatorname{ctg} x$ *непрерывны при всех* x, *при которых* $\cos x$, *соответственно* $\sin x$, *не обращаются в ноль.*

Доказательство. Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, $|\cos\alpha|\leqslant 1$ при любом α и в силу леммы $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\Delta x|$, то

$$|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant|\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x)-\cos x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant|\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x\to 0$ левые части неравенства также стремятся к нулю. Это и означает непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Непрерывность $\operatorname{tg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ в точках, в которых знаменатели не обращаются в ноль, следует из непрерывности $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о частном непрерывных функций (см. п. 5.2).

Теорема 7. *Обратные тригонометрические функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ *и* $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны в области их определения.*

Это сразу следует из теорем 3 и 4 в § 6 и из непрерывности и строгой монотонности функций $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos x$ на отрезке $[0, \pi]$, $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0, \pi)$.

§ 8. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

8.1. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

В этом пункте вычисляются пределы, которые неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

Лемма 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0<x<\frac{\pi}{2}$, с радиусом OA. Соединим точки A и B отрезком и восставим из точки A перпендикуляр к радиусу OA до пересечения в точке C с продолжением радиуса OB (рис. 28). Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}R^2\sin x$, площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}R^2x$, а площадь треугольника AOC равна $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x$. Треугольник AOB является частью сектора AOB, который в свою очередь является частью

треугольника AOC; поэтому

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg} x, \text{ откуда } \sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

следовательно,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или, заменяя величины им обратными

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{8.2}$$

Заметим, что в силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ неравенство (8.2) справедливо и при $-\pi/2 < x < 0$.

Так как функция $\cos x$ непрерывна и $\cos 0 = 1$, то из (8.2) при $x \to 0$ следует (см. п. 4.7) равенство (8.1). □

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{8.3}$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

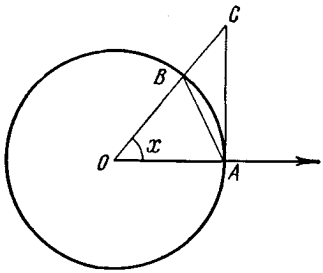

Рис. 28

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1. \tag{8.4}$$

Функция $y = \sin x$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, поэтому обратная функция $x = \arcsin y$ также строго монотонна и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку $\sin 0 = 0$, то записи $x \to 0$ и $y \to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 8*). Чтобы вычислить предел (8.4), применим правило замены переменного для пределов непрерывных функций (см. теорему 2 в п. 5.2). Положив $x = \sin y$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

Следствие 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{8.5}$$

Это равенство получается аналогично предыдущему из (8.3).

Лемма 2.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{8.6}$$

Ранее (см. п. 3.5) было доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \tag{8.7}$$

где $n=1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, такой, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k=+\infty, \tag{8.8}$$

имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e. \tag{8.9}$$

В самом деле, пусть задано $\varepsilon>0$; из (8.7) вытекает, что существует такое n_ε, что при $n\geqslant n_\varepsilon$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon, \tag{8.10}$$

а из условия (8.8) следует, что существует такое k_ε, что $n_k\geqslant n_\varepsilon$ при $k\geqslant k_\varepsilon$; поэтому в силу (8.10) $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon$ при $k\geqslant k_\varepsilon$, что и означает выполнение равенства (8.9).

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=+0$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} x_k=0 \text{ и } x_k>0. \tag{8.11}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}=e$. При этом без ограничения общности можно считать, что $x_k<1$, $k=1, 2, \ldots$ (почему?). Для всякого x_k найдется такое натуральное n_k, что $n_k+1>\frac{1}{x^k}\geqslant n_k$ и, следовательно, $\frac{1}{n_k+1}<x_k\leqslant\frac{1}{n_k}$, причем в силу (18.11) $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=+\infty$. Поэтому имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{1/x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{8.12}$$

Замечая, что в силу (8.9)

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=e$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e$$

и переходя к пределу в неравенстве (8.12) при $k \to \infty$, получим

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = e.$$

Поскольку $\{x_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям (8.11), то тем самым доказано, что

$$\lim_{x \to +0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.13}$$

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = -0$, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0, \quad x_k < 0. \tag{8.14}$$

Положим $y_k = -x_k$, тогда $y_k > 0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = 0$, причем без ограничения общности можно считать, что $y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1 - y_k)^{-1/y_k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k \to \infty} (1 + z_k)^{\frac{1}{z_k} + 1},$$

где

$$z_k = \frac{y_k}{1 - y_k} > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} z_k = 0,$$

и в силу уже доказанного равенства (8.13)

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k \to \infty} (1 + z_k)^{1/z_k} \lim_{k \to \infty} (1 + z_k) = e.$$

Но $\{x_k\}$ была произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (8.14), поэтому

$$\lim_{x \to -0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.15}$$

Таким образом, функция $(1 + x)^{1/x}$, $x \neq 0$ имеет в точке 0 пределы слева и справа, равные одному и тому же числу e. Поэтому существует и ее двусторонний предел при $x \to 0$, также равный e (см. п. 4.5). □

Следствие 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{8.16}$$

и, в частности, при $a = e$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1.$$

В самом деле, используя непрерывность логарифмической функции (см. теорему 4 из § 7), непрерывность суперпозиции функций (см. п. 5.2) и равенство (8.6), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{8.17}$$

В частности, если $a=e$, *то*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{8.18}$$

Функция $y=a^x-1$ строго монотонна и непрерывна на всей вещественной оси, поэтому обратная функция $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ также строго монотонна и непрерывна при $y>-1$. Поскольку при $x=0$ имеем также и $y=0$, то обозначения $x\to 0$ и $y\to 0$ эквивалентны (см. замечание в конце п. 4.8*). Применим для вычисления предела (8.17) правило замены переменного (см. теорему 2 п. 5.2). Положив $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\,\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a.$$

8.2. СРАВНЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Все рассматриваемые в этом параграфе функции определены на некоторой фиксированной проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 расширенной числовой прямой: $x_0\in\overline{\boldsymbol{R}}$, причем эта окрестность может быть и односторонней. Поэтому каждый раз не будет оговариваться, что $x\in\mathring{U}(x_0)$.

Как мы уже знаем, сумма, разность и произведение бесконечно малых функций являются также бесконечно малыми функциями; этого нельзя, вообще говоря, сказать об их частном: деление одной бесконечно малой на другую может привести к разнообразным случаям, как это показывают нижеприведенные примеры бесконечно малых при $x\to 0$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Пусть, например, $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^2$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}x=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Если же $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=2x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=2$, а если $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x\sin\frac{1}{x}$, то предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не существует.

Определение 1. *Если для двух функций f и g существуют такая проколотая окрестность $\mathring{V}(x_0)$ и постоянная $c>0$, что для всех $x \in \mathring{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$, то функция f называется ограниченной по сравнению с функцией g на $\mathring{V}(x_0)$ и пишется*

$$f(x)=O(g(x)), \quad x \to x_0$$

(читается: $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0).

Подчеркнем, что запись $x \to x_0$ имеет здесь другой, чем обычно, смысл: она только указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки x_0; ни о каком пределе здесь речи нет.

Лемма 3. *Если $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)=k$,* то $f(x)=O(g(x))$, $x \to x_0$.

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)=k$, согласно свойству 1° из п. 4.7, следует существование такой проколотой окрестности $\mathring{V}(x_0)$ точки x_0, что функция φ на ней ограничена, т. е. имеется такая постоянная $c>0$, что для всех $x \in \mathring{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \leqslant c$, а следовательно, и неравенство $|f(x)|=|\varphi(x)||g(x)| \leqslant c|g(x)|$. Это и означает, что $f(x)=O(g(x))$, $x \to x_0$. $\square$

Примеры. $\frac{1}{x}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$, ибо $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ при $|x| \leqslant 1$; $\frac{1}{x^2}=O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$, ибо $\frac{1}{x^2}<\left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x| \geqslant 1$. Запись $f(x)=O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, например $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}=O(1)$ при $x \to 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}=2$, и, значит, функция $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x=0$.

Определение 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f=O(g)$ и $g=O(f)$ при $x \to x_0$, то они называются функциями одного порядка при $x \to x_0$; это записывается в виде*

$$f(x) \asymp g(x), \quad x \to x_0.$$

Это понятие наиболее содержательно в том случае, когда функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$. Например, функции $\alpha=x$ и $\alpha=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, ибо

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{1}{\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant \frac{1}{2-\left|\sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|2+\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 2+\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 3.$$

Лемма 4. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$, *то* $f(x)\asymp g(x)$, $x\to x_0$.

Доказательство. Положим $\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k$. Следовательно, по лемме 3, $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, существует такая проколотая окрестность $\mathring{V}(x_0)$ точки x_0, что для всех $x\in\mathring{V}(x_0)$ имеем $f(x)/g(x)\neq 0$ (см. свойство 2 в п. 4.7), а следовательно, и $f(x)\neq 0$. Для $x\in\mathring{V}(x_0)$ положим $\psi(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{g(x)}{f(x)}$ тогда $g(x)=\psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\frac{1}{k}$. Поэтому, согласно лемме 3, $g(x)=O(f(x))$, $x\to x_0$. □

В качестве примера возьмем функции $f(x)=3x^2$ и $g(x)=\sin x^2$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}\lim\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{3}$ (см. (8.1)), поэтому, согласно доказанному, функции $3x^2$ и $\sin x^2$ одного порядка при $x\to 0$.

Определение 3. *Функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются эквивалентными при* $x\to x_0$, *если в некоторой проколотой окрестности* $\mathring{U}(x_0)$ *точки* x_0 *определена такая функция* $\varphi(x)$, *что*

$$f(x)=\varphi(x)g(x) \tag{8.20}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1. \tag{8.21}$$

Отметим, что в силу свойства (8.21) найдется проколотая окрестность $\mathring{V}(x_0)$ точки x_0, на которой $\varphi(x)\neq 0$. Полагая $\psi(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, $x\in\mathring{V}(x_0)$, видим, что условия (8.20) и (8.21) для указанной проколотой окрестности равносильны условиям

$$g(x)=\psi(x)f(x),\quad \lim_{x\to x_0}\psi(x)=1,$$

т. е. как говорят, эквивалентность двух функций обладает свойством симметричности.

Функции $f(x)$ и $g(x)$, эквивалентные при $x\to x_0$, называются также *асимптотически равными* при $x\to x_0$. *Асимптотическое равенство* (эквивалентность) функций обозначается символом $\sim$:

$$f(x)\sim g(x)\quad\text{при}\quad x\to x_0. \tag{8.22}$$

Из сказанного выше следует, что если $f\sim g$ при $x\to x_0$, то и $g\sim f$ при $x\to x_0$.

Примеры. 1. $\frac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ при $x \to 0$. Действительно, полагая $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}$, получим

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi(x)\, x^2 \text{ и } \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^4} = 1.$$

2. $\frac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$ при $x \to \infty$. В самом деле, если $\varphi(x) = \frac{x^4}{1+x^4}$, то

$$\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x)\, x^2 \text{ и } \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1.$$

Если в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условия (8.20) и (8.21) эквивалентны соотношению

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

и, следовательно, условию

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; тогда, очевидно, для функции $\varphi(x)$ выполняются условия (8.20) и (8.21). Если

$$f \sim g \text{ и } g \sim h \text{ при } x \to x_0, \tag{8.23}$$

то

$$f \sim h \quad \text{при} \quad x \to x_0. \tag{8.24}$$

В самом деле, из условий (8.23) следует, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0

$$f(x) = \varphi(x)\, g(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \psi(x)\, h(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$ и, следовательно,

$$f(x) = \varphi(x)\, \psi(x)\, h(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\, \psi(x) = 1$, т. е. выполняется асимптотическое равенство (8.24).

Из результатов п. 8.1 следует, что при $x \to 0$ справедлива следующая эквивалентность бесконечно малых:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Из этой эквивалентности следуют и более общие соотношения, которые сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 4. *Если функция $u(x)$ такова, что*

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \tag{8.25}$$

то при $x \to x_0$

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \sim \ln[1+u(x)] \sim e^{u(x)}-1. \qquad (8.26)$$

Доказательство. Покажем, например, что

$$\sin u(x) \sim u(x) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \qquad (8.27)$$

Пусть функция $u(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Положим (считая $x \neq x_0$ принадлежащими этой окрестности)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)}, & \text{если } u(x) \neq 0, \\ 1, & \text{если } u(x) = 0. \end{cases} \qquad (8.28)$$

Покажем, что

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \qquad (8.29)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

(здесь u — независимое переменное), существует такое число $\eta = \eta(\varepsilon)$, что при $|u| < \eta$, $u \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin u}{u} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Для указанного $\eta > 0$ в силу (8.25) существует такое число $\delta = \delta(\eta)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|u(x)| < \eta$. Следовательно, если $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ и $u(x) \neq 0$, то

$$\left| \frac{\sin u(x)}{u(x)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, если $0 < |x - x_0| < \delta$, и $u(x) \neq 0$, то

$$|\varphi(x) - 1| < \varepsilon. \qquad (8.30)$$

Если же $0 < |x - x_0| < \delta$ и $u(x) = 0$, то согласно (8.28) имеем $\varphi(x) = 1$ и, следовательно, неравенство (8.30) очевидно также выполняется.

Равенство (8.29) доказано, а так как из (8.28) следует, что $\sin u(x) = \varphi(x)\, u(x)$ для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, то доказана справедливость асимптотического равенства (8.27). Аналогично доказываются и остальные асимптотические формулы (8.26). □

Определение 4. *Если в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$, *где* $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, *то функция* α *назы-*

вается бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to x_0$ и пишется $\alpha = o(f)$, $x \to x_0$ (читается «α есть о малое от f при x, стремящемся к x_0»).

В силу этого определения запись «$\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$» означает просто, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Если $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то условие

$$\alpha = \varepsilon f, \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon = 0,$$

можно переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{f} = 0.$$

Таким образом, под $o(f)$ при $x \to x_0$ ($f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$) подразумевается любая функция такая, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(f)}{f} = 0.$$

В случае, когда $f(x)$ бесконечно мала при $x \to x_0$, то говорят, что $\alpha = o(f)$ при $x \to x_0$ является *бесконечно малой более высокого порядка, чем f.*

Например, $x^3 = o(\sin x^2)$ при $x \to 0$, ибо

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Подобным образом $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ и $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Отметим, что если $f = o(g)$ при $x \to x_0$, то и подавно $f = O(g)$ при $x \to x_0$. В самом деле, пусть $f = \varepsilon g$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$. Тогда функция $\varepsilon = \varepsilon(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (см. п. 4.7): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$, $x \neq x_0$ и, значит, $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$ в указанной проколотой окрестности, а это означает, что $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Собирая вместе введенные в этом пункте основные понятия, получим: пусть в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ точки x_0

$$f(x) = \varphi(x) g(x),$$

тогда

если функция $\varphi(x)$ ограничена на U, то $f(x) = O(g(x))$;
если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, то $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;
если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.

Упражнение 1. Пусть $\beta = O(\alpha^2)$ при $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. Доказать, что тогда $\beta = o(\alpha)$ при $x \to x_0$.

При использовании равенств с символами O и o следует иметь в виду, что они не являются равенствами в обычном смысле этого слова. Так, если

$$\alpha_1 = o(\beta) \text{ при } x \to x_0, \quad \alpha_2 = o(\beta) \text{ при } x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать отсюда заключение, что $\alpha_1 = \alpha_2$, как это было бы в случае обычных равенств. Например, $x^3 = o(x)$ и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x^2 \neq x^3$.

Аналогично, если

$$f + O(f) = g + O(f) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то было бы ошибкой сделать заключение, что $f = g$.

Дело в том, что один и тот же символ $O(f)$ или $o(f)$ может обозначать разные конкретные функции. Это обстоятельство связано с тем, что при определении символов $O(f)$ и $o(f)$ мы по существу ввели целые классы функций, обладающих определенными свойствами (класс функций, ограниченных в некоторой окрестности точки x_0 по сравнению с функцией f и класс функций, бесконечно малых по сравнению с $f(x)$ при $x \to x_0$) и было бы правильнее писать не $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, а соответственно $\alpha \in O(f)$ и $\alpha \in o(f)$. Однако это привело бы к существенному усложнению вычислений с формулами, в которых встречаются символы O и o. Поэтому мы сохраним прежнюю запись $\alpha = O(f)$ и $\alpha = o(f)$, но будем всегда читать эти равенства, в соответствии с приведенными выше определениями, только в одну сторону: слева направо (если, конечно, не оговорено что-либо другое). Например, запись

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0$$

означает, что функция α является бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to x_0$, но отнюдь не то, что всякая бесконечно малая по сравнению с f функция равна α.

В качестве примера на обращение с этими символами докажем равенство

$$o(cf) = o(f), \tag{8.31}$$

где c — постоянная.

Согласно сказанному, надо показать, что если $g = o(cf)$, то $g = o(f)$. Действительно, если $g = o(cf)$, то $g = \varepsilon cf$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Положим $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, тогда $g = \varepsilon_1 f$, где, очевидно, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ и, значит, $g = o(f)$. $\square$

В заключение отметим, что сказанное об использовании символов o и O не исключает, конечно, того, что отдельные формулы с этими символами могут оказаться справедливыми не только при чтении слева направо, но и справа налево; так, формула (8.31) при $c \neq 0$ верна и при чтении справа налево.