так как два других слагаемых, очевидно, стремятся к нулю. Вместе с тем предел функции $\cos\frac{1}{\xi}$ при стремлении аргумента к нулю не существует! Где ошибка?

Задача 7 (Дарбу *)). Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке, то ее производная, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное.

§ 12. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ПО ПРАВИЛУ ЛОПИТАЛЯ

Во многих случаях отыскание предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке (числу или к одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$) выполняемое путем формальной подстановки соответствующего значения вместо аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, приводит к выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 или 1^∞. Они называются *неопределенностями*, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о нахождении его значения, если он существует. В этом случае вычисление предела называется также «*раскрытием неопределенности*».

Наряду с основным приемом, нахождения пределов функции — методом выделения главной части, существуют и другие способы отыскания пределов. Некоторые из них, носящие общее название *правил Лопиталя* **), мы изложим в этом параграфе.

12.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВИДА 0/0

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, таковы, что:*

1) $f(a)=g(a)=0$;

2) *существуют производные (правосторонние) $f'(a)$ и $g'(a)$ причем $g'(a)\neq 0$.*

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Применим метод выделения главной части. В силу условия 2 имеем (см. п. 9.2).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),$$
$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Отсюда, согласно условию 1, получим, что

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a),$$

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

**) Г. Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

а поэтому

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(a)+\frac{o(x-a)}{x-a}}{g'(a)+\frac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(x)}. \quad \square$$

В теореме 1 предполагалось существование производных в точке a. Докажем теперь теорему, близкую по содержанию к предыдущей, в которой, однако, не будет предполагаться существование производных $f'(a)$ и $g'(a)$.

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:*

1) *дифференцируемы на интервале (a, b);*

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$;

3) $g'(x)\neq 0$ *для всех* $x\in(a, b)$;

4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел* $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы функции f и g не определены в точке a; доопределим их, положив $f(a)=g(a)=0$. Теперь f и g непрерывны в точке a и удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем значении (см. п. 11.2) на любом отрезке $[a, x]$, где $a<x<b$. Поэтому для каждого x, $a<x<b$, существует такое $\xi=\xi(x)\in(a, x)$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{12.1}$$

причем $\lim\limits_{x\to a+0}\xi(x)=a$.

Поэтому, если существует $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$, то из правила замены переменного для пределов функций следует, что существует и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k$. Теперь из (12.1) получаем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k. \quad \square$$

Теоремы 1 и 2 остаются верными с естественными видоизменениями, как в случае левостороннего, так и двустороннего предела.

Теорема 3. *Пусть функции f и g:*

1) *дифференцируемы при* $x>c$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x > c$;

4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c > 0$ (если $c < 0$, то в качестве нового значения c возьмем, например, $c = 1$).

Выполним замену переменного $x = \frac{1}{t}$. Функции $\varphi(t) = f(1/t)$ и $\psi(t) = g(1/t)$ определены на интервале $(0, 1/c)$; если $x \to +\infty$, то $t \to +0$ и наоборот. На интервале $(0, 1/c)$ существуют производные

$$\varphi'(t) = -f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} \quad \text{и} \quad \psi'(t) = -g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$

где штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу.

Из сказанного и условий теоремы следует, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют на интервале $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ условиям 1, 2 и 3 теоремы 2. Покажем еще, что из существования предела $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, который обозначим через k, следует существование предела $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ и равенство его k, т. е. что выполняется и условие 4 теоремы 2. Действительно, используя полученные выражения для производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, находим

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \to +0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Теперь из теоремы 2, примененной к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, следует, что $\lim\limits_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k$. Но

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $x = \frac{1}{t}$, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k. \quad \square$$

Эта теорема остается верной с соответствующим видоизменением, и при $x \to -\infty$.

12.2. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВИДА ∞/∞

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:*
1) *дифференцируемы на интервале (a, b);*
2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;
3) $g'(x)\neq 0$ *на* (a, b);
4) *существует конечный или бесконечный, равный* $+\infty$ *или* $-\infty$, *предел*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.2}$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть сначала предел (12.2) конечен; обозначим его через k:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Покажем, что и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Для этого выберем точки x_0 и x так, чтобы $a<x<x_0<b$. Тогда на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g будут удовлетворять условиям теоремы Коши. Поэтому согласно этой теореме существует такая точка $\xi\in(x, x_0)$, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(Очевидно, точка ξ зависит от выбора точек x и x_0, т. е. $\xi=\xi(x, x_0)$). Найдем из этой формулы отношение $f(x)/g(x)$. Переписав ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

получим

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.3}$$

Как бы ни выбирать при заданном x_0 точку ξ так, чтобы выполнялось неравенство $a<\xi=\xi(x, x_0)<x_0$, в силу условия 4) теоремы будем иметь

$$\lim_{x_0\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k,$$

а при фиксированном x_0 в силу условия 2) теоремы получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}=1.$$

Однако, в правой части формулы (12.3) нельзя просто воспользоваться теоремой о пределе произведения функций, так как пределы стоящих там сомножителей берутся при разных условиях: в одном случае точка x_0 стремится к точке a, а в другом — точка x_0 фиксирована, а к точке a стремится точка x. Тем не менее каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда можно выбрать x_0 так, чтобы отношение $f'(\xi)/g'(\xi)$ было столь близко к числу k для всех $\xi\in(a, x_0)$, а затем выбрать такое $\delta>0$, чтобы отношение $\dfrac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}$ было столь близко к 1 для всех $x\in(a, a+\delta)$, что в результате для всех указанных x выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon.$$

Собственно говоря, теорема в случае конечного предела (12.2) доказана, и на этом месте можно поставить знак $\square$.

Для полноты изложения сделаем некоторые разъяснения отдельных этапов доказательства, которые, впрочем, каждый, кто достаточно хорошо овладел предшествующим материалом, легко может провести самостоятельно.

Прежде всего, производилось деление на $f(x)$ и $g(x)$. Для обоснования этого надо показать, что для соответствующих значений справедливы неравенства $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$. Конечно, эти неравенства не имеют места, вообще говоря, при любом выборе точки $x\in(a, b)$, но они справедливы для всех x, достаточно близких к точке a. В самом деле, в силу условия 2) теоремы существует такое $\delta_1>0$, что для всех $x\in(a, a+\delta_1)$ выполняются неравенства $|f(x)|>0$, $|g(x)|>0$. Поэтому, если выбрать x_0 так, что $a<x_0<a+\delta_1$, то x будет также удовлетворять этому неравенству, т. е. $a<x<a+\delta_1$, и, следовательно, деление на $f(x)$ и $g(x)$ будет заведомо возможно.

Далее производилось деление на $1-f(x_0)/f(x)$. Это также возможно для всех x достаточно близких к точке a. Действительно, в силу условия $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ существует такое δ_2, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_2$, справедливо неравенство $|f(x)|>|f(x_0)|$, а поэтому и неравенство $1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}\neq 0$. При этом выберем δ_2 так, чтобы $\delta_2<\delta_1$ — это всегда возможно.

Таким образом, формула (12.3) заведомо справедлива для всех таких x и x_0, что $a<x<x_0<a+\delta_2$.

Далее, для заданного $\varepsilon>0$ в силу существования конечного предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k,$$

найдется такое $\delta_3>0$, что для всех $x\in(a,\ a+\delta_3)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-k\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.4}$$

при этом выберем δ_3 еще и так, чтобы $\delta_3<\delta_1$, а выбор x_0 подчиним условию $a<x_0<a+\delta_3$.

Положим теперь,

$$\alpha_1\overset{\text{def}}{=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-k,\quad x<\xi<x_0. \tag{12.5}$$

Точка ξ, а потому и функция α_1, зависят от точек x_0 и x, однако при сделанном их выборе, т. е. при

$$a<x<x_0<a+\delta_3,$$

будем иметь $a<\xi<a+\delta_3$, и, следовательно, в силу неравенства (12.4) будет выполняться неравенство

$$|\alpha_1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Положим далее

$$\alpha_2(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}-1. \tag{12.7}$$

Очевидно, в силу условия 2) теоремы имеем

$$\lim_{x\to a+0}\alpha_2(x)=0. \tag{12.8}$$

Из (12.3), (12.5) и (12.7) следует, что

$$f(x)/g(x)=(k+\alpha_1)(1+\alpha_2(x))=k+\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Выберем теперь δ_ε, $0<\delta_\varepsilon<\delta_3$, так, чтобы при $a<x<a+\delta_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$(|k|+|\alpha_1|)\,|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.10}$$

для чего в силу (12.6) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2(|k|+\varepsilon)}.$$

Это возможно в силу (12.8).

Из неравенств (12.6) и (12.10) следует, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$|\alpha_1+(k+\alpha_1)\alpha_2(x)|\leqslant|\alpha_1|+(|k|+|\alpha_1|)|\alpha_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

и потому из (12.9) следует, что $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right|<\varepsilon$ при $a<x<a+\delta_\varepsilon$. Это и означает существование предела

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Так раскрываются на «языке неравенств» сделанные выше высказывания о выборе достаточно близких значений x_0 и x к точке a, обеспечивающих нужную близость отношения $f(x)/g(x)$ к числу k.

Рассмотрим теперь случай бесконечного предела.

Пусть $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$. Тогда в некоторой окрестности точки a имеем $f'(x)\neq 0$ (почему?) и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$. Поэтому, согласно доказанному выше, $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Но нужно доказать более сильное утверждение, а именно — что этот предел равен $+\infty$. Покажем это. Поскольку, согласно предположению, $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty$ при $x\to a+0$, то существует такое $\eta_1>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\eta_1$, будем иметь

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>0.$$

Далее, зафиксируем x_0, $a<x_0<a+\eta_1$, так как нам придется снова использовать формулу (12.3).

Наконец, выберем η_2, $0<\eta_2<x_0-a$, так, чтобы для всех $x\in(a,\ a+\eta_2)$ имели место неравенства $|f(x)|>|f(x_0)|$, $|g(x)|>|g(x_0)|$, вследствие чего

$$1-\frac{f(x_0)}{f(x)}>0,\quad 1-\frac{g(x_0)}{g(x)}>0. \tag{12.11}$$

Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $a<x<a+\eta_2$, выполняются неравенства (12.11),

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>0,\quad \text{где}\quad x<\xi=\xi(x)<x_0,$$

и справедлива формула (12.3). Из нее следует, что для всех указанных x

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Из доказанного выше утверждения $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ следует теперь, что $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Аналогично рассматривается случай

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty. \ \square$$

Теорема 4 вместе с ее доказательством остается в силе с естественными видоизменениями, и при $x \to a-0$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, а также в случае двусторонних пределов.

Можно показать, что при выполнении условий 1, 2 и 3, входящих в любую из теорем 2, 3 или 4, не может существовать предел $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ без существования одного из двух «знакоопределенных» бесконечных пределов $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Задача 8. Доказать, что если выполнены условия 1, 2 и 3 теоремы 4 и $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то либо $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, либо $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Примеры. 1. Найдем $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Замечая, что

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ и } \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0,$$

получаем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Это означает, что при $x \to +\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем любая положительная степень переменной x.

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

2. Найдем $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x}$, где n — натуральное число и $a > 1$. Имеем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0. \tag{12.12}$$

Таким образом при $x \to +\infty$ любая степень x^n растет медленнее, чем показательная функция a^x, $a > 1$.

3. Следует иметь в виду, что проведение вычислений по образцу (12.12) оправдано только в том случае, когда в результате получается конечный или бесконечный предел. Так, например, было бы ошибкой написать

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'},$$

так как предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

не существует.

В самом деле, беря последовательности $x_n'=2\pi n\to+\infty$ и $x_n''=\frac{\pi}{2}+2\pi n\to+\infty$ при $n\to\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n'}{1+\cos x_n'}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n''}{1+\cos x_n''}=1.$$

Вместе с тем данная неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ может быть раскрыта элементарным путем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Упражнение 1. Пусть $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ и доказать, что в этом случае правило Лопиталя неприменимо.

4. Неопределенности 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно раскрыть, предварительно прологарифмировав соответствующие функции. Например, чтобы найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$, следует найти предел

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{1/x^2}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Поэтому в силу непрерывности показательной функции

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=1.$$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ следует привести к виду $0/0$ или ∞/∞. При этом, как и всегда при применении правила Лопиталя, по ходу вычислений рекомендуется упрощать получающиеся выражения. Поясним это на примере.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$. Заметим, что

$$\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\,\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

Предел первого сомножителя правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cos x\right)=2,$$

а предел второго — путем применения правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=2/3.$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$. 4. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\varepsilon}\ln x$, $\varepsilon>0$. 5. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x-1/x)$.

§ 13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

13.1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0,$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$ и $A=f'(x_0)$, т. е. $f(x)=y_0+A(x-x_0)+o(x-x_0)$. Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x)=y_0+A(x-x_0) \tag{13.1}$$

такая, что

$$f(x)=P_1(x)+o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

причем

$$P_1(x_0)=y_0=f(x_0),\quad P_1'(x_0)=A=f'(x_0).$$

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, такой, что

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0, \tag{13.2}$$

и

$$f(x_0)=P_n(x_0),\quad f'(x_0)=P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.3}$$

Будем искать этот многочлен, по аналогии с формулой (13.1), в виде

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n.$$

Замечая, что $P_n(x_0)=A_0$, из первого условия (13.3), т. е. $f(x_0)=P_n(x_0)$, имеем $A_0=f(x_0)$. Далее,

$$P_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+\ldots+nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

отсюда $P_n'(x_0)=A_1$, и так как $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, то $A_1=f'(x_0)$. Затем найдем вторую производную многочлена $P_n(x)$:

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot A_2+\ldots+n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}.$$

Отсюда и из условия $f''(x_0)=P_n''(x_0)$ получим $A_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$ и вообще

$$A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В силу самого построения, для многочлена

$$P_n(x)=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

выполнены все соотношения (13.3). Проверим, удовлетворяет ли он условию (13.2).

Пусть

$$r_n(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-P_n(x).$$

Из условия (13.3) следует, что

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0. \tag{13.4}$$

Поэтому, применяя n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ при $x\to x_0$, а именно сначала $n-1$ раз теорему 2 из § 12, а затем теорему 1 того же параграфа, получаем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}=\frac{r^n(x_0)}{n!}=0,$$

т. е. действительно $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$.

Итак, доказана следующая очень важная теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определенная на интервале $(a,\ b)$, имеет в точке $x_0\in(a,\ b)$ производные до порядка n включительно. Тогда при $x\to x_0$*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \tag{13.5}$$

или $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$.

Эта теорема остается справедливой, вмсте с ее доказательством, и для функции f, определенной на отрезке $[a,\ b]$, при $x_0\in[a,\ b]$,

если для $x_0=a$ и $x_0=b$ под производными понимать соответствующие односторонние производные.

Формула (13.5), называется *формулой Тейлора**) *n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.*

Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{n!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (13.6)$$

называется *многочленом Тейлора,* а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x) \qquad (13.7)$$

— *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора.* Как показано, остаточный член $r_n(x)$ является бесконечно малой, при $x\to x_0$, более высокого порядка, чем все члены многочлена Тейлора (13.6).

Укажем другой вид записи формулы (13.5). Полагая

$$x-x_0=\Delta x,\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

получим

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0. \qquad (13.5')$$

Если в формуле (13.5) $x_0=0$, то получается частный вид формулы Тейлора, называемый обычно *формулой Маклорена***):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),\ x\to 0. \qquad (13.8)$$

Доказанная теорема позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям этой теоремы заменить, в окрестности некоторой точки, многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена. Таким многочленом является многочлен Тейлора. Величина погрешности дается при этом остаточным членом.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает единообразный метод выделения главной части функции в окрестности данной точки. На этом обстоятельстве и основаны многочисленные и разнообразные приложения формулы (13.5) в различных вопросах анализа.

Отметим полезное следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), и пусть в точке x она имеет производные до порядка $n+1$*

---

*) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

**) К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик.

включительно. Тогда при $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O(x-x_0)^{n+1}. \tag{13.9}$$

Действительно, в силу теоремы 1 при $x \to x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}), \tag{13.10}$$

и поскольку

$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1}) = O((x-x_0)^{n+1}) \text{ при } x \to x_0,$$

то из формулы (13.10) непосредственно следует формула (13.9). □

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную порядка n, то, каковы бы ни были точка x этой окрестности и функция $\psi(t)$, непрерывная на отрезке с концами в точках x_0 и x, имеющая неравную нулю производную внутри этого отрезка, найдется такая точка ξ, лежащая между x_0 и x, что для остаточного члена $r_{n-1}(x)$ формулы Тейлора функции $f(x)$ имеет место формула

$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Получить отсюда следующие виды записи остаточного члена:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n-p}, \quad p>0 \quad \text{(форма Шлёмильха—Роша *)}.$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{(форма Лагранжа)},$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n, \quad 0<\theta<1 \quad \text{(форма Коши)}.$$

Указание. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

и применить к функциям φ и ψ теорему Коши о среднем значении. Для вывода остаточного члена в виде Шлёмильха—Роша положить $\psi(t) = (x-t)^p$.

13.2. МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА КАК МНОГОЧЛЕН НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В ОКРЕСТНОСТИ ДАННОЙ ТОЧКИ

Заметим предварительно, что, очевидно, всякий многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k \tag{13.11}$$

---

* О. Шлёмильх (1823—1901) — немецкий математик. Э. Рош (1820—1883) — французский астроном и математик.

может быть представлен, для любого x_0, в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k. \tag{13.12}$$

В самом деле, достаточно в (13.11) положить $x = x_0 + h$ и разложить правую часть по степеням h; тогда

$$P_n(x) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n, \text{ где } h = x - x_0,$$

т. е. мы получили формулу (13.12).

Многочлен Тейлора порядка n является многочленом, наилучшим образом среди всех многочленов степени n приближающим функцию f «в бесконечно малой окрестности» точки x_0, т. е. при $x \to x_0$. При этом такой многочлен оказывается единственным. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0 и пусть*

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{13.13}$$

где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ — некоторый многочлен степени, меньшей или равной n. Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{13.14}$$

т. е. $P_n(x)$ является многочленом Тейлора.

Иначе говоря, никакой многочлен степени, меньшей или равной n, отличный от многочлена Тейлора порядка n, не может приближать данную функцию с точностью до $o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$ (а значит, и с более высокой точностью $o((x - x_0)^k)$, $k > n$).

Доказательство. Из формул (13.5) и (13.13) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$$

откуда, перейдя к пределу при $x \to x_0$ получим $a_0 = f(x_0)$. Отбрасывая слева и справа этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на $x - x_0$ $(x \neq x_0)$ и замечая, что

$$o((x - x_0)^n) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n, \text{ где } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

и, значит, при $x \to x_0$

$$\frac{o((x-x_0)^n)}{x-x_0} = \varepsilon(x)(x-x_0)^{n-1} = o((x-x_0)^{n-1}),\ n=1, 2, \ldots,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}).$$

Перейдя снова к пределу при $x \to x_0$ будем иметь $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая таким же образом, получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0, 1, 2, \ldots, n. \ \square$$

Единственность представления функции в виде (13.13) может быть иногда использована для ее разложения по формуле Тейлора. Именно, если удается каким-либо косвенным путем получить представление (13.13), то в силу теоремы 2 можно утверждать, что это и есть разложение по формуле Тейлора (13.5), т. е. что коэффициенты найденного многочлена выражаются по формулам (13.14).

Так, например, соотношение (13.12) представляет собой разложение многочлена (13.11) по формуле Тейлора, причем в этом случае $r_n(x) \equiv 0$, поэтому согласно теореме 2 коэффициенты многочлена (13.12) имеют вид

$$a_k = \frac{P_n^k(x_0)}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

В частности, при разложении многочлена степени n по формуле Тейлора остаток n-го порядка тождественно равен нулю.

Пусть требуется разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = 1/(1-x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Замечая, что $1/(1-x)$ есть не что иное как сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,\quad |x| < 1,$$

и полагая $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, получим

$$1/(1-x) = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)=O(x^{n+1})$ и, значит, $r_n(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$. Таким образом, представление

$$1/(1-x)=1+x+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n} x^k+o(x^n),\ x\to 0.$$

и есть разложение функции $1/(1-x)$, по формуле Тейлора в окрестности нуля.

13.3. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

1. $f(x)=\sin x$. Функция $\sin x$ обладает производными всех порядков. Найдем для нее формулу Тейлора при $x_0=0$, т. е. формулу Маклорена (13.8). Было доказано (см. п. 10.1), что $(\sin x)^{(m)}=\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$f^{(m)}0=\sin\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}0 \text{ для } m=2k,\\ \qquad\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots\\ (-1)^k \text{ для } m=2k+1,\end{cases}\qquad (13.15)$$

и согласно формуле (13.5),

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

при $x\to 0$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$, или, короче,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}) \text{ при } x\to 0.$$

Мы записали здесь остаточный член в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$, так как следующий за последним выписанным слагаемым член многочлена Тейлора в силу (13.15) равен нулю.

2. $f(x)=\cos x$. Как известно (см. п. 10.1), $f^{(m)}(x)=\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)$, а поэтому

$$f^{(m)}(0)=\cos\frac{m\pi}{2}=\begin{cases}0 \text{ для } m=2k+1,\\ \qquad\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\\ (-1)^k \text{ для } m=2k,\end{cases}$$

и

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

при $x\to 0$ $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$, или, короче,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \text{ при } x\to 0,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

3. $f(x)=e^x$. Поскольку $(e^x)^{(n)}=e^x$, то $f^{(n)}(0)=1$, $n=0, 1, \ldots$, следовательно,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \tag{13.16}$$

при $x\to 0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, или, короче,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \text{ при } x\to 0.$$

Отсюда, заменяя x через $-x$, получим

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \text{ при } x\to 0,\ n=0, 1, 2, \ldots \tag{13.17}$$

4. $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Сложив и вычтя (13.16) и (13.17), будем иметь

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}) \text{ при } x\to 0\ n=0, 1, 2, \ldots.$$

В силу единственности представления функции в указанном виде (см. теорему 2) полученные соотношения являются формулами Тейлора для функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$, α — некоторое фиксированное число. Так как $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

и, следовательно,

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

при $x\to 0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, или, короче,

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n) \text{ при } x\to 0,$$
$$n=1, 2, \ldots.$$

6. $f(x)=\ln(1+x)$. Легко видеть, что

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\ f''(x)=-(1+x)^{-2}$$

и вообще $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$, $k=1, 2, \ldots$. Поэтому $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$, $k=1, 2, \ldots$, и так как $f(0)=0$, то

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

при $x\to 0$, $n=1, 2, \ldots$, или, короче,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n) \text{ при } x\to 0,\ n=1, 2, \ldots.$$

Замечание. В силу следствия теоремы 1, полученные формулы можно записать, используя символ O (O большое), следующим образом:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+O(x^{2n+2}),$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+O(x^{2n+2}),\qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+O(x^{n+1}),\ n=1, 2, \ldots, \text{ при } x\to x_0.$$

Такая запись формул Тейлора в некоторых вопросах оказывается более удобной, чем их запись с символом o (o маленькое).

13.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА (МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ)

Формула Тейлора дает простое и весьма общее правило для выделения главной части функции. В результате этого метод вычисления пределов функций с помощью выделения главной части приобретает законченный алгоритмический характер.

Рассмотрим сначала случай неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. В этом случае рекомендуется разложить по формуле Тейлора функции f и g в окрестности точки x_0 (если, конечно, это возможно), ограничившись в этом разложении лишь первыми не равными нулю членами, т. е. взять разложения в виде

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\qquad a\neq 0,$$
$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),\qquad b\neq 0,$$

тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m)}=$$
$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \frac{a}{b}, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Часто бывает удобно для разложения функций f и g по формуле Тейлора использовать готовый набор разложений элементарных функций, полученный в п. 13.3. Для этого следует в случае $x_0\neq 0$ предварительно выполнить замену переменного $t=x-x_0$; тогда $x\to x_0$ будет соответствовать $t\to 0$. Случай $x\to\infty$ заменой переменного $x=\frac{1}{t}$ сводится к случаю $t\to 0$.

Если имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то ее легко привести к рассмотренному случаю $\frac{0}{0}$ преобразованием $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Подобно вычислению пределов с помощью правила Лопиталя, при применении метода выделения главной части к раскрытию неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ их следует преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Наконец, для раскрытия неопределенностей вида 0^0, ∞^0 и 1^∞ указанным методом, необходимо предварительно прологарифмировать рассматриваемые функции.

Посмотрим на примерах, как применяется формула Тейлора к вычислению пределов функций. Пусть требуется найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Заметив, что (см. п. 13.3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3}{x^3/6} = 2.$$

Рассмотрим неопределенность вида $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 - x^2}{x^2\,[x + o(x)]^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2\,[x^2 + o(x^2)]} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

В качестве последнего примера вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, т. е. раскроем неопределенность вида 1^∞. Согласно общему правилу, найдем предел логарифма выражения, стоящего под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{x + o(x^2)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + o(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Упражнения. Найти пределы:

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x - x^2)}{x \sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sqrt[4]{1 - x^2} - 4e^{x^3} + \ln(1 + x^2)}{\operatorname{arctg} x - \sin x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x}) + 2x^3}{x^5}$.

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

14.1. ПРИЗНАК МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* (a, b) *функция* f *возрастала (убывала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках производная была неотрицательной,* $f'(x) \geqslant 0$ *(соответственно, неположительной,* $f'(x) \leqslant 0$*).*

Если всюду на (a, b) *производная положительна:* $f'(x) > 0$ *(соответственно отрицательна:* $f'(x) < 0$*), то функция* f *строго возрастает (строго убывает) на рассматриваемом интервале.*

Необходимость. Если функция f возрастает (убывает) на (a, b), то для любой точки $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ имеем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0$ $(\Delta y \leqslant 0)$. Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right)$; перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $f'(x_0) \geqslant 0$ $(f'(x_0) \leqslant 0)$.

Достаточность. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда по формуле Лагранжа (см. п. 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < \xi < x_2$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b) (откуда следует, что в частности $f'(\xi) \geqslant 0$) будем иметь $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. функция f возрастает. Аналогично, при $f'(x) \leqslant 0$ на (a, b) имеем $f'(\xi) \leqslant 0$ и, следовательно, $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, т. е. функция f убывает.

Если же $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f'(\xi) > 0$ и поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция f строго возрастает. Пусть теперь $f'(x) < 0$ на (a, b); тогда $f'(\xi) < 0$, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$, т. е. функция f строго убывает. □

Отметим, что условия $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ не являются необходимыми для строгого возрастания, соответственно строгого убывания, функции, показывают примеры функций $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = -x^3$. Первая из них строго возрастает, а вторая строго убывает на всей числовой оси, но для $x = 0$ их производные обращаются в ноль.

Теорема остается верной для непрерывных функций, не имеющих в конечном числе точек производной. Утверждение второй части теоремы остается в силе, если кроме того, в конечном числе точек производная обращается в ноль. Например,

если функция непрерывна на некотором интервале и имеет всюду в нем положительную (отрицательную) производную, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых производная обращается в ноль или не существует, то функция строго монотонно возрастает (соответственно строго монотонно убывает) на рассматриваемом интервале.

Это непосредственно следует из теоремы 1: достаточно ее последовательно применить ко всем промежуткам, на которые разбивается заданный интервал указанным конечным множеством точек.

Пример. Исследуем функцию

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Функция f дифференцируема (а, следовательно, и непрерывна) на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. В специальной проверке нуждается лишь существование производной в точке $x=0$. Применяя, например, дважды правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \sin t = 0.$$

Это и означает, что существует $f'(0) = 0$.

Для всех $x \neq 0$ имеем

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

ибо $x < \operatorname{tg} x$, если $0 < x < \pi/2$ (см. доказательство леммы 1 в п. 8.1). Следовательно, функция f строго убывает на отрезке $[0, \pi/2]$, и поэтому $f(0) > f(x) > f(1)$, т. е.

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{14.1}$$

14.2. ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Определение 1. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 называется точкой максимума (соответственно точкой минимума) функции f, если существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) \geqslant f(x_0)$).*

Если существует такое $\delta > 0$, что для всех $\Delta x \neq 0$, таких, что $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, то x_0 называется точкой строгого максимума (соответственно строгого минимума).

Точки (строгого) максимума и минимума называются точками (строгого) экстремума.

Для точек x_0 строгого экстремума функции f, и только для них, приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через x_0, т. е. при изменении знака Δx. Именно

$\Delta f < 0$ для точек строгого максимума и $\Delta f > 0$ в случае строгого минимума независимо от знака достаточно малого $\Delta x \neq 0$.

Теорема 2 (необходимые условия экстремума). *Пусть x_0 является точкой экстремума функции f, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.*

Действительно, если x_0 является точкой экстремума для функции f, то найдется такая окрестность $U(x_0, \delta)$, что значение функции f в точке x_0 будет наибольшим или наименьшим на этой окрестности. Поэтому, если в точке x_0 существует производная, то она, согласно теореме Ферма (см. п. 11.1), равна нулю.

Отметим, что условие $f'(x_0) = 0$ не является, для дифференцируемой при $x = x_0$ функции, достаточным условием наличия экстремума, как это показывает пример функции $f(x) = x^3$, которая для $x = 0$ имеет производную, равную нулю, но для которой $x = 0$ не является точкой экстремума.

Упражнение 1 (достаточные условия экстремума). Пусть функция f определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Доказать, если f (строго) возрастает на интервале (a, x_0) и (строго) убывает на (x_0, b), то x_0 является точкой (строгого) максимума; если же функция f (строго) убывает на (a, x_0) и (строго) возрастает на (x_0, b), то x_0 является точкой (строгого) минимума.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки $x_0 \in (a, b)$, в которой она является, однако, непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0 (это означает, что существует такое число $\delta > 0$, что значения производной f' имеют один и тот же знак всюду в $(x_0 - \delta, x_0)$ и противоположный знак для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), то x_0 является точкой строгого экстремума.*

При этом, если для $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а для $x_0 + \delta > x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то x_0 является точкой строгого максимума, а если для $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а для $x_0 + \delta > x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то x_0 является точкой строгого минимума (*рис.* 46).

Доказательство. Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, где x принадлежит окрестности точки x_0, указанной в условиях теоремы. По теореме Лагранжа (см. п. 11.2)

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где ξ лежит на интервале с концами x_0 и x.

Если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и $f'(\xi) > 0$, так как $x < \xi < x_0$. Если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$ и $f'(\xi) < 0$, так как в этом случае $x_0 < \xi < x$. Таким образом, всегда $\Delta f < 0$, т. е. точка x_0 является точкой строгого максимума. Аналогично рассматривается второй случай. □

Из п. 14.1 следует, что если функция имеет всюду в некоторой проколотой окрестности данной точки x_0 производную одного и того же знака, а в самой точке x_0 производная либо равна нулю, либо не существует, однако сама функция непрерывна, т. е. если производная непрерывной функции «не меняет знака» при переходе через точку x_0, то эта точка заведомо *не является точкой экстремума* рассматриваемой функции (более того, функция в указанной окрестности строго возрастает или убывает в зависимости от того, положительна или отрицательна производная в точках $x \neq x_0$).

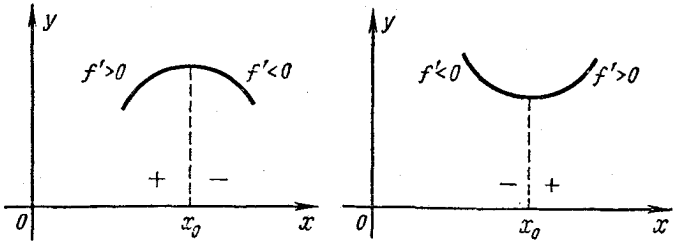

Рис. 46

Объединяя это утверждение с доказанной выше теоремой 3, получим следующий результат.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна при $x = x_0$, имеет всюду в рассматриваемой окрестности кроме, может быть, точки x_0, производную и эта производная с каждой стороны от x_0 сохраняет постоянный знак (следовательно, можно говорить о сохранении или перемене знака у производной при переходе через x_0), то для того, чтобы при $x = x_0$ функция достигала экстремума необходимо и достаточно, чтобы производная меняла знак при переходе через точку x_0.

Следует, однако, обратить внимание на то, что рассмотренным здесь случаем, т. е. случаем, когда можно в указанном смысле говорить о перемене знака производной при переходе через точку x_0, не исчерпываются возможные ситуации (даже для всюду дифференцируемых функций): может случиться, что в сколь угодно малых односторонних окрестностях точки x_0 производная функции меняет знак. В этом случае приходится применять другие методы для исследования функции на экстремум при $x = x_0$.

Поэтому в классе всех дифференцируемых функций теорема 3 дает лишь достаточные условия строгого экстремума.

Задача 9. Построить пример функции, которая дифференцируема на интервале, достигает в некоторой его точке x_0 строгого экстремума, а ее производная в любой окрестности точки x_0 (как слева, так и справа от нее) принимает и положительные и отрицательные значения (таким образом показать,

что условие изменения знака производной в данной точке, являясь достаточным для наличия строгого экстремума, не является вместе с тем необходимым).

Введем еще одно понятие, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 2. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Будем называть x_0 точкой возрастания (убывания) функции f, если существует такое $\delta > 0$, что при $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$), а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ — неравенство $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$).*

Таким образом, точки возрастания и убывания функции f характеризуются тем, что при переходе через них приращение Δf меняет знак, а именно с «—» на «+» в точке возрастания и с «+» на «—» в точке убывания (рис. 47).

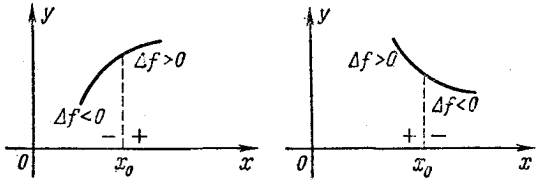

Рис. 47

Не следует думать, что если функция определена на интервале, то всякая точка этого интервала является либо точкой экстремума функции, либо точкой возрастания, либо точкой убывания: могут существовать точки, не принадлежащие ни к одному из указанных типов. Например, точка $x = 0$ для функции

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания.

Производная функции (14.2) равна (см. пример 8 в п. 9.7)

$$y' = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, & (14.3') \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. & (14.3'') \end{cases}$$

Таким образом функция (14.2) дифференцируема на всей числовой оси. При $x = 0$ ее производная имеет разрыв второго рода, ибо

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x}\right) = 0, \tag{14.4}$$

а второе слагаемое в правой части равенства (14.3′), т. е. $-\cos\frac{1}{x}$, не имеет предела при $x\to 0$. Кроме того это слагаемое, изменяясь в любой односторонней окрестности точки $x=0$ от -1 до $+1$, бесконечно много раз меняет знак. Отсюда, в силу формул (14.3′) и (14.3″) и (14.4) следует, что и производная функции (14.2) в любой сколь угодно малой односторонней окрестности нуля также меняет знак. Общий характер поведения функции (14.2) изображен на рис. 48.

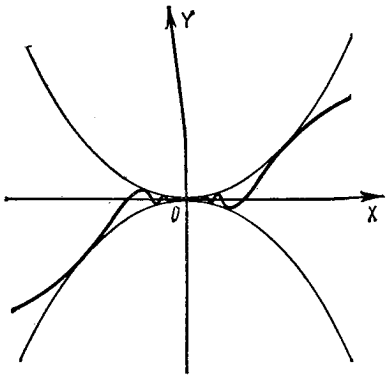

Рис. 48

Сформулируем теперь основанные на использовании производных высших порядков достаточные условия наличия строгого экстремума, а также точек возрастания и убывания.

Теорема 4. *Пусть в точке x_0 у функции f существуют производные до порядка $n\geqslant 1$ включительно, причем*

$$f^{(i)}(x_0)=0 \quad \text{для} \quad i=1,\ \ldots,\ n-1,$$
$$f^{(n)}(x_0)\neq 0. \tag{14.5}$$

Тогда, если $n=2k$, $k=1, 2, \ldots$, т. е. n — четное число, то функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, а именно максимум при $f^{(2k)}(x_0)<0$ и минимум при $f^{(2k)}(x_0)>0$. Если же $n=2k+1$, $k=0, 1, \ldots$, т. е. n — нечетное число, то функция f не имеет в точке x_0 экстремума; в этом случае x_0 является точкой возрастания при $f^{(2k+1)}(x_0)>0$ и убывания при $f^{(2k+1)}(x_0)<0$.

Предпошлем доказательству теоремы одно простое замечание.

Если $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to x_0$, то существует такое $\delta>0$, что при $|x-x|<\delta$, $x\neq x_0$, справедливо неравенство

$$|\beta(x)|\leqslant\frac{1}{2}|\alpha(x)|. \tag{14.6}$$

В самом деле,

$$\beta(x)=\varepsilon(x)\,\alpha(x), \tag{14.7}$$

где $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ и, следовательно, существует такое δ, что при $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, выполняется неравенство

$$|\varepsilon(x)|<\frac{1}{2}. \tag{14.8}$$

Из (14.7) и (14.8) и следует (14.6).

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку f имеет в точке x_0 производную порядка $n\geqslant 1$, то (согласно опре-

делению производной) производная порядка $n-1$ рассматриваемой функции определена в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому и сама функция f также определена, во всяком случае в той же окрестности точки x_0.

Напишем формулу Тейлора n-го порядка для функции f в окрестности точки x_0. В силу (13.5′) и условий (14.5) будем иметь

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(x), \tag{14.9}$$

где

$$\alpha(x) = o(\Delta x^n), \qquad \Delta x \to 0,$$

и, значит (см. п. 8.2),

$$\alpha(x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right), \quad \Delta x \to 0.$$

Поэтому, согласно сделанному замечанию, существует такое $\delta > 0$, что при $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$,

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

Отсюда следует, что при $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, знак правой части равенства (14.9), а значит и знак Δf совпадает со знаком первого слагаемого правой части.

Если $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, то в (14.9) Δx возводится в четную степень, поэтому знак Δf не зависит от знака $\Delta x \neq 0$, и, значит, x_0 является точкой строгого экстремума, причем точкой строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (в этом случае $\Delta f < 0$) и строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (в этом случае $\Delta f > 0$).

Если же $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то Δx возводится в нечетную степень, поэтому знак Δf меняется вместе с изменением знака Δx, и, значит, x_0 не является точкой экстремума. Если Δx меняет знак с «—» на «+», то при $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ приращение Δf меняет знак с «—» на «+», и, значит, x_0 является точкой возрастания функции f, а при $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ приращение Δf меняет знак с «+» на «—», и, значит, x_0 является точкой убывания функции f. □

Из доказанной теоремы вытекают, в частности, при $n = 1$ и $n = 2$ два следствия.

1. *Если $f'(x_0) > 0$, то x_0 является точкой возрастания функции; если $f'(x_0) < 0$, то x_0 — точка убывания функции.*

2. *Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) > 0$ x_0 является точкой строгого минимума, а при $f''(x_0) < 0$ — точкой строгого максимума функции f (рис. 49).*

Следствие 1 остается в силе и для бесконечных производных: если $f'(x_0) = +\infty$ (соответственно $f'(x_0) = -\infty$), то x_0 является точкой возрастания (соответственно, убывания) функции. В самом деле, если, например, $f'(x_0) = +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и,

в частности, для $\varepsilon = 1$ существует такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 1$. Поэтому при $0 < \Delta x < \delta$ имеем $\Delta y > \Delta x > 0$, а при $-\delta < \Delta x < 0$ — аналогично $\Delta y < \Delta x < 0$, т. е. x_0 — точка возрастания. Подобным же образом рассматривается случай $f'(x_0) = -\infty$.

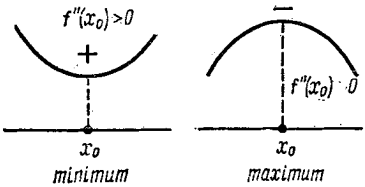

Рис. 49

Заметим, что из первого следствия еще раз вытекает теорема Ферма (см. теорему 1 п. 11.1). Действительно, если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке экстремум, то производная в x_0 не может быть ни положительной, ни отрицательной, так как в противном случае функция либо возрастала, либо убывала бы в этой точке. Следовательно, производная в x_0 или не существует, или, если существует, необходимо равна нулю.

Отметим еще, что из теоремы 4 непосредственно вытекает следующий критерий наличия точек экстремума.

Пусть у функции f в точке x_0 существуют производные до порядка $n \geqslant 1$ включительно, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда для того чтобы при $x = x_0$ функция достигала экстремума, необходимо и достаточно, чтобы n было четным числом.

Все полученные правила справедливы лишь в том случае, когда функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Однако об экстремуме функции можно говорить не только в этом случае: пусть функция f определена на некотором числовом множестве E; будем называть $x_0 \in E$ *точкой максимума* (*минимума*) *), если существует такое $\delta > 0$, что если $x \in E$ и $|x - x_0| < \delta$, то $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$). Подобным же образом определяются в этом случае и понятия строгого максимума и строгого минимума, следует лишь знаки нестрогих неравенств заменить знаками строгих неравенств и дополнительно потребовать, чтобы $x \neq x_0$.

Например, если функция f определена на полуинтервале $[a, b)$, то точка a в указанном смысле может являться экстремальной. Заметим, однако, что производная (правосторонняя) в этой точке, вообще говоря, не обязана обращаться в ноль. Так, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$, имеет строгий минимум

*) Правильнее было бы добавить — локального, но не будем усложнять терминологию.

при $x=0$ и строгий максимум при $x=1$, однако в этих точках, как и всюду на отрезке $[0, 1]$, $y'=1$.

Выяснение обстоятельства, имеет или нет функция экстремум на концах промежутка, принадлежащего ее области определения (такой экстремум будем называть концевым), требует специального исследования.

Упражнение 2. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет производные при $x=a$ и $x=b$. Доказать, что если $f'_+(a)>0$ (соответственно $f'_-(b)<0$), то точка $x=a$ (соответственно $x=b$) является точкой строгого минимума, а если $f'_+(a)<0$ (соответственно $f'_-(b)>0$), то $x=a$ (соответственно $x=b$) является точкой строгого максимума.

Установленные нами теоремы лежат в основе метода, позволяющего единообразно решать многочисленные математические, физические и технические задачи, в которых ищутся экстремальные значения какой-либо величины.

Пусть, например, требуется определить наибольшее значение функции f на отрезке $[a, b]$. Может случиться, что это возможно сделать достаточно просто каким-либо способом, исходя из конкретного вида функции. Если же не видно, как это сделать, то следует найти все ее критические точки, лежащие на $[a, b]$ (точка, в которой функция определена, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, обычно называется *критической точкой* этой функции). Затем из этих значений x необходимо, исходя из сказанного, отобрать те, в которых возможен максимум (можно заведомо отбросить точки, удовлетворяющие достаточным условиям наличия минимума). После этого достаточно сравнить между собой по величине значения функции в полученных точках и числа $f(a)$ и $f(b)$; наибольшее из этих чисел и будет наибольшим значением функции на отрезке $[a, b]$. Эта задача принципиально заведомо может быть решена, если множество критических точек конечно.

Если функция определена на полуинтервале (конечном или бесконечном), например на полуинтервале вида $[a, b)$, задача об определении ее наибольшего значения на этом полуинтервале требует дополнительных исследований; найдя множество указанных выше точек, надо изучить еще поведение функции при $x \to b-0$. Аналогичным образом решаются и задачи на определение наименьших значений функций.

Не следует, однако, думать, что изложенный метод позволяет находить точки экстремума данной функции с любой нужной степенью точности. Это не так, поскольку если пользоваться им, надо прежде всего уметь решать уравнение $f'(x)=0$ с заданной степенью точности, что является другой математической задачей. Как она решается с помощью дифференциального исчисления в тех случаях, когда точное решение уравнения не выписывается в явном виде, будет показано в дальнейшем (см. том 2, § 60).

Пример. Две точки движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по двум прямым, образующим прямой угол в направлении вершины этого угла, от которой в начале движения первая точка находилась на расстоянии a, а вторая — на расстоянии b. Через какое время после начала движения расстояние между точками будет наименьшим?

Пусть $\rho = \rho(t)$ — расстояние между точками через время t после начала движения, которое будем считать начавшимся при $t = 0$. Тогда

$$\rho^2(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2.$$

Функция $\rho(t)$, очевидно, достигает минимума при том же значении t, при котором достигает минимума функция $y = \rho^2(t)$.

Физически ясно, что расстояние $\rho(t)$ должно достигать минимума (тела начинают сближаться), а максимума заведомо нет, ибо $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В силу необходимого условия экстремума это может быть только в точке, в которой $y' = 0$, и, так как $y' = -2v_1(a - v_1 t) - 2v_2(b - v_2 t)$, то из условия $y' = 0$ получаем единственное значение

$$t_0 = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

которое и дает ответ на поставленный вопрос.

14.3. ВЫПУКЛОСТЬ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция f определена на интервале (a, b) и пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Проведем прямую через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, лежащие на графике функции f. Ее уравнение будет

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$; тогда оно кратко запишется в виде

$$y = l(x).$$

Очевидно, $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$.

Определение 3. *Функция f называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале (a, b), если каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x_0 интервала (x_1, x_2), выполняется неравенство*

$$l(x_0) \leqslant f(x_0), \tag{14.7}$$

(соответственно

$$l(x_0) \geqslant f(x_0)). \tag{14.8}$$

Геометрически это означает, что любая точка хорды AB (т. е. отрезка прямой $y = l(x)$ с концами в точках A и B) лежит не

выше (не ниже) точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента (рис. 50).

Определение 4. *Если вместо* (14.7) *и* (14.8) *выполняются строгие неравенства* $l(x_0) < f(x_0)$ *и соответственно* $l(x_0) > f(x_0)$ *при любых* x_0, x_1 *и* x_2 *таких, что* $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, *то функция* f *называется строго выпуклой вверх* (*строго выпуклой вниз*) *на интервале* (a, b).

В этом случае любая точка хорды AB, исключая ее концы, лежит ниже (выше) соответствующей точки графика функции.

Определение 5. *Всякий интервал, на котором функция* (*строго*) *выпукла вверх, соответственно вниз, называется интервалом* (*строгой*) *выпуклости вверх, соответственно вниз, этой функции.*

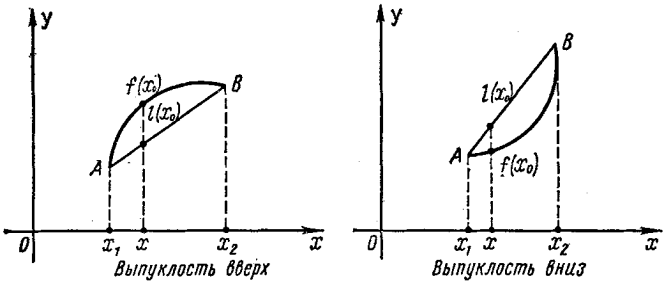

Рис. 50

Теорема 5 (достаточное условие строгой выпуклости). *Пусть функция* f *дважды дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда, если* $f'' < 0$ *на* (a, b), *то функция* f *строго выпукла вверх, а если* $f'' > 0$ *на* (a, b), *то функция* f *строго выпукла вниз на этом интервале.*

Доказательство. Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Применяя теорему Лагранжа (см. п. 11.2), получаем

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Применим снова теорему Лагранжа:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}, \qquad \xi < \zeta < \eta.$$

Отсюда видно, что если $f''<0$ на (a, b), следовательно, в частности, $f''(\zeta)<0$, то $l(x)<f(x)$, т. е. функция f строго выпукла вверх; если же $f''>0$ на (a, b), то $l(x)>f(x)$, т. е. функция f выпукла вниз. □

Условие знакопостоянства второй производной, являясь достаточным для строгой выпуклости (вверх или вниз), не является вместе с тем необходимым. Так, функция $y=x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y''=12x^2$ обращается в ноль при $x=0$.

Отметим, что если функция f (строго) выпукла вверх на интервале (a, b), то функция $-f$ (строго) выпукла вниз на этом интервале и обратно, а поскольку $\frac{d^2}{dx^2}[-f(x)]=-\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, то, например, приводимое в теореме 5 достаточное условие строгой выпуклости вверх следует из содержащегося в этой же теореме достаточного условия строгой выпуклости функции вниз.

Упражнения 3. Доказать, что для функции

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

точка $x=0$ не принадлежит никаким интервалам выпуклости вверх или вниз и не является концом какого-либо из этих интервалов.

4. Доказать, что функция $y=x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой.

Мы видим, что выпуклость вверх или вниз функции f зависит от знака ее второй производной. Оказывается, что расположение графика дважды дифференцируемой функции относительно касательной также в определенном смысле связано со знаком второй производной.

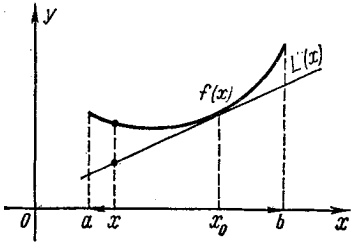

Рис. 51

Теорема 6. *Пусть функция f имеет во всем интервале (a, b) положительную (отрицательную) вторую производную: $f''(x)>0$ (соответственно $f''(x)<0$), $x\in(a, b)$* *). *Тогда, какова бы ни была точка $x_0\in(a, b)$, все точки $(x, f(x))$, $x\in(a, b)$, графика функции f лежат выше (соответственно ниже) касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$ (исключением является, естественно, сама эта точка, которая лежит на указанной касательной* **) (рис. 51).

*) Отсюда следует, что функция f строго выпукла вниз (вверх) на (a, b).

**) Если функция f, кроме того, определена и имеет одностороннюю производную в конце a или b интервала, то указанное свойство, как это видно из нижеприводимого доказательства, выполняется и для касательной в точке $(a, f(a))$ (соответственно в точке $(b, f(b))$).

Действительно, уравнением касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ будет

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $L(x)$. Тогда, применив теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получим

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где $a < x_0 < b$, $a < x < b$, а точка ξ лежит между x и x_0.

Применив еще раз теорему Лагранжа, но уже к приращению производной, получим

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

где точка η лежит между ξ и x_0.

При $x \neq x_0$ имеем $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$, ибо точка ξ всегда лежит между x и x_0 и, следовательно, всегда по ту же сторону от точки x_0, что и точка x.

В силу этого знак разности $f(x) - L(x)$ совпадает, при $x \neq x_0$, со знаком $f''(\eta)$. Поэтому, если на интервале (a, b) вторая производная положительна (следовательно, она положительна и в точке η), то для всех $x \in (a, b)$, кроме точки $x = x_0$, выполняется неравенство $f(x) - L(x) > 0$; если же на интервале (a, b) вторая производная отрицательна, то для указанных точек справедливо неравенство $f(x) - L(x) < 0$. $\square$

Поясним эту теорему исходя из несколько иных соображений. Если функция f имеет всюду на некотором интервале вторую производную, то в окрестности любой точки x_0 этого интервала можно выделить главную часть функции f в виде многочлена Тейлора второго порядка

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \qquad x \to x_0,$$

и, следовательно, график функции f «ведет себя в окрестности точки x_0 почти как парабола»

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

которая, когда ее коэффициент при x^2, т. е. $\frac{f''(x_0)}{2}$, положителен, выпукла вниз и лежит выше любой касательной, в частности и выше касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ (эта прямая является и касательной к графику функции f), а когда указанный коэффициент отрицателен, выпукла вверх и лежит ниже любой своей касательной.

Мы снова видим, как целесообразно при изучении функции в окрестности данной точки выделить с помощью формулы Тейлора главную часть функции в этой точке. В дальнейшем при решении разнообразных задач анализа мы еще неоднократно будем иметь возможность убедиться в больших возможностях и плодотворности метода выделения главной части.

Определение 6. *Пусть функция f дифференцируема при $x=x_0$ и пусть $y=L(x)$ — уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Если разность $f(x)-L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется точкой перегиба функции f.*

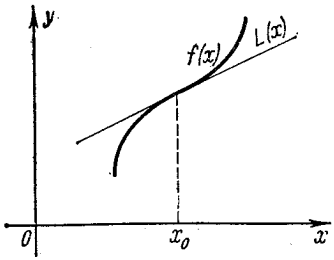

Рис. 52

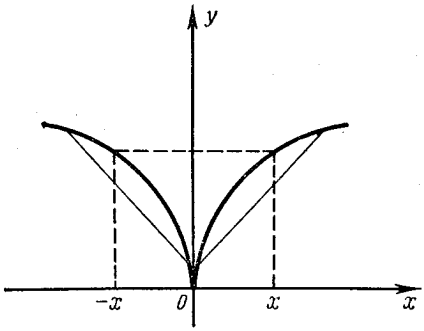

Рис. 53

Более подробно и точно это означает, что существует такая δ-окрестность $U(x_0, \delta)$ точки x_0, что на каждом из интервалов $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ разность $f(x)-L(x)$ сохраняет постоянный знак, противоположный ее знаку на другом интервале.

Геометрически это означает, что график функции f переходит в точке $(x_0, f(x_0))$ с одной стороны (от наклонной) касательной в этой точке на другую (см. рис. 52).

Если x_0 — точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции* f.

Примеры. 1. $f(x)=x^3$, $f''(x)=6x$. Очевидно, что в этом случае $f''(x)<0$ для $x<0$ и $f''(x)>0$ для $x>0$. Поэтому на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ функция $f(x)=x^3$ строго выпукла вверх, на интервале $(0, +\infty)$ она строго выпукла вниз, а точка $x=0$ является одновременно концом интервалов выпуклости вверх и вниз. Она является и точкой перегиба, поскольку уравнением касательной в ней будет $y=0$, и при $x<0$ имеет место неравенство $f(x)<0$, а при $x>0$ — наоборот $f(x)>0$.

2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; график этой функции (рис. 53) называется *полукубической параболой*. Здесь $f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, и потому для всех $x\neq 0$ справедливо неравенство $f''(x)<0$. Следовательно,

интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ являются промежутками строгой выпуклости вверх. Вместе с тем при любом $x \neq 0$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = f(x) > 0 = f(0),$$

поэтому точка $x=0$ не принадлежит никакому интервалу выпуклости вверх (интервалов выпуклости вниз у этой функции нет).

График функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в точке (0, 0) имеет вертикальную касательную, и его ветви, для которых $x>0$ и $x<0$, лежат по разные стороны от нее. Однако, $x=0$ не является точкой перегиба, поскольку в силу вертикальности касательной в этой точке ее уравнение нельзя записать в виде $y=L(x)$, и, следовательно, $x=0$ не удовлетворяет условиям определения 6.

Образно говоря, график полукубической параболы не перегибается при переходе через касательную в точке (0, 0), а «возвращается назад»; поэтому точки такого типа называются *точками возврата*.

Теорема 7 (необходимое условие наличия точки перегиба). *Пусть функция f имеет непрерывную при $x=x_0$ вторую производную. Тогда, если точка x_0 является точкой перегиба функции f, то $f''(x_0)=0$.*

Действительно, если имело бы место неравенство $f''(x_0)>0$ (соответственно $f''(x_0)<0$), то, в силу непрерывности второй производной при $x=x_0$, нашлась бы окрестность $U(x_0)$ этой точки, в которой выполнялось бы условие $f''(x)>0$ (соответственно, $f''(x)<0$) и, следовательно, согласно теореме 6, для всех $x \in U(x)$, $x \neq x_0$, график функции f лежал бы выше (ниже) касательной, проведенной к нему в точке x_0, что противоречило бы тому, что x_0 является точкой перегиба. □

Замечание. Подобно тому, как все точки экстремума функции принадлежат множеству точек, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, так и все точки перегиба функции (дважды непрерывно дифференцируемой, кроме, быть может, для конечного числа значений независимого переменного) входят во множество точек, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 8 (первое достаточное условие наличия точек перегиба). *Если функция f, дифференцируемая в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0, \delta)$ этой точки и вторая производная f'' функции f меняет знак при переходе аргумента через x_0 (т. е. либо $f''(x)<0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x_0<x<x_0+\delta$, либо $f''(x)>0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)<0$ при $x_0<x<x_0+\delta$), то x_0 является точкой перегиба функции f.*

В самом деле, представим, как и выше, в виде $y=L(x)$ уравнение касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. При доказательстве

теоремы 6 было показано, что

$$f(x)-L(x)=f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

где точки x и ξ лежат по одну сторону от x_0, поэтому при $x\neq x_0$ имеем $(\xi-x_0)(x-x_0)>0$, и, следовательно,

$$\operatorname{sign}[f(x)-L(x)]=\operatorname{sign} f''(\eta).$$

Точка η лежит между ξ и x_0, т. е. по ту же сторону от x_0 что и точка x. Отсюда явствует, что если f'' меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то разность $f(x)-L(x)$ меняет знак, и, следовательно, x_0 является точкой перегиба. □

Теорема 9 (второе достаточное условие наличия точки перегиба). *Пусть $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$; тогда x_0 является точкой перегиба.*

Доказательство. По формуле Тейлора в силу условия $f''(x_0)=0$ имеем

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),$$

и поскольку $L(x)\equiv f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, то

$$f(x)-L(x)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3).$$

Отсюда следует (см. замечание о бесконечно малых перед доказательством теоремы 4 этого параграфа), что знак разности $f(x)-L(x)$ меняется при изменении знака $x-x_0$. Это и означает, что x_0 является точкой перегиба. □

Задача 10. Доказать, что если функция f непрерывна на интервале (a, b) и если для любых точек x_1 и x_2, $a<x_1<x_2<b$, выполняется неравенство

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

то (a, b) является интервалом выпуклости вверх для функции f.

Задача 11. Доказать нижеследующие утверждения. Для того чтобы дифференцируемая функция была выпуклой вверх (вниз) на некотором интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная монотонно убывала (монотонно возрастала) на нем. Для того чтобы дифференцируемая функция была строго выпуклой вверх (вниз) на некотором интервале, достаточно, чтобы ее производная строго убывала (строго возрастала) на нем.

14.4. АСИМПТОТЫ

Определение 7. *Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x>a$ (соответственно для всех $x<a$). Если существуют такие числа k и l, что $f(x)-kx-l=o(1)$ при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$), то прямая*

$$y=kx+l \tag{14.9}$$

называется асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$).

Существование асимптоты графика функции означает, что при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) функция ведет себя «почти как линейная функция», т. е. отличается от линейной функции на бесконечно малую.

Найдем, например, асимптоту графика функции $y = \frac{x^2-3x-2}{x+1}$. Разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим $y = x - 4 + \frac{2}{x+1}$. Так как $\frac{2}{x+1} = o(1)$ при $x \to \pm\infty$, то прямая $y = x - 4$ является асимптотой графика данной функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Рассмотрим геометрический смысл асимптоты. Пусть $M = (x, f(x))$ — точка графика функции f, M_0 — проекция этой точки на ось Ox, AB — асимптота (14.9), θ — угол между асимптотой и положительным направлением оси Ox, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, MP — перпендикуляр, опущенный из точки M на асимптоту AB, Q — точка пересечения прямой MM_0 с асимптотой AB (рис. 54). Тогда $MM_0 = f(x)$, $QM_0 = kx + l$, $MQ = MM_0 - QM_0 = f(x) - (kx + l)$, $MP = MQ\cos\theta$. Таким образом, MP отличается от MQ лишь на не равный нулю множитель $\cos\theta$, поэтому условия $MQ \to 0$ и $MP \to 0$ при $x \to +\infty$ (соответственно при $x \to -\infty$) эквивалентны, т. е. если $\lim\limits_{x \to +\infty} MQ = 0$, то и $\lim\limits_{x \to +\infty} MP = 0$, и наоборот.

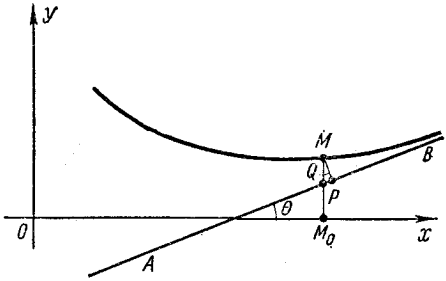

Рис. 54

Отсюда следует, что асимптота может быть определена как прямая, расстояние до которой от графика функции, т. е. отрезок MP, стремится к нулю, когда точка $M = (x, f(x))$ «стремится, оставаясь на графике, в бесконечность» (при $x \to +\infty$ или, соответственно, $x \to -\infty$).

Укажем теперь общий метод отыскания асимптоты (14.9), т. е. способ определения коэффициентов k и l в уравнении (14.9). Будем рассматривать для определенности лишь случай $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$ рассуждения проводятся аналогично). Пусть график функции f имеет асимптоту (14.9) при $x \to +\infty$. Тогда, по определению,

$$f(x) = kx + l + o(1). \tag{14.10}$$

Разделим обе части равенства (14.10) на x и перейдем к пределу при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{14.11}$$

Используя найденное значение k, получим из (14.10) для определения l формулу

$$l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{14.12}$$

Справедливо и обратное утверждение: если существуют такие числа k и l, что выполняется условие (14.12), то прямая $y = kx + l$ является асимптотой графика функции $f(x)$. В самом деле, из (14.12) имеем

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0,$$

т. е. прямая $y = kx + l$ действительно удовлетворяет определению асимптоты, иначе говоря, выполняется условие (14.10).

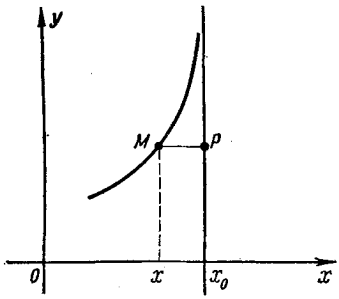

Рис. 55

Таким образом, формулы (14.11) и (14.12) сводят задачу отыскания асимптот (14.9) к вычислению пределов определенного вида. Более того, мы показали, что если существует представление функции f в виде (14.10), то k и l выражаются по формулам (14.11) и (14.12). Следовательно, если существует представление (14.10), то оно единственно.

Найдем по этому правилу асимптоту графика функции $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$, найденную нами выше другим способом:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x+1)} = 1,$$

$$l = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x - 2}{x + 1} = -4,$$

т. е. мы, как и следовало ожидать, получили то же уравнение асимптоты $y = x - 4$, как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

В виде (14.9) может быть записано уравнение любой прямой, непараллельной оси Oy. Естественно распространить определение асимптоты и на прямые, параллельные оси Oy.

Определение 8. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и пусть выполнено хотя бы одно из условий*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty. \tag{14.13}$$

Тогда прямая $x = x_0$ (рис. 55) *называется вертикальной асимптотой графика функции f (в отличие от асимптоты вида* (14.9), *которая называется также наклонной).*

В случае вертикальной асимптоты, как и в случае наклонной, расстояние $MP = x - x_0$ между точкой M и прямой $x = x_0$ стремится к нулю, если точка $M(x, f(x))$ стремится вдоль графика в бесконечность, т. е. когда $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$.

Чтобы найти вертикальные асимптоты графика функции f, надо найти такие значения x, для которых выполняется одно или оба условия (14.13). Например, функция $y = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$. Вообще если $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная функция (($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены), $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$, то прямая $x = x_0$ является асимптотой графика функции $f(x)$.

14.5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Изучение заданной функции и построение ее графика с помощью развитого нами аналитического аппарата целесообразно проводить в следующем порядке.

1. Определить область существования функции, область непрерывности и точки разрыва.
2. Найти асимптоты.
3. Приблизительно, вчерне, нарисовать график функции.
4. Вычислить первую, а если нужно, и вторую производную (без производных более высокого порядка часто удается обойтись).
5. Найти точки, в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо равны нулю.
6. Составить таблицу изменения знака первой и второй производных. Определить промежутки возрастания, убывания, выпуклости вверх или вниз функции, найти точки экстремума (в том числе концевые) и точки перегиба.
7. Окончательно вычертить график.

При этом чем бóльшую точность графика мы хотим достигнуть, тем больше, вообще говоря, необходимо найти точек, лежащих на нем. Обычно целесообразно найти (быть может, с определенной точностью) точки пересечения графика с осями координат и точки, соответствующие экстремумам функции; другие точки находятся по мере потребности.

В случае очень громоздких выражений для второй производной иногда приходится ограничиваться рассмотрением тех свойств графика, которые можно изучать лишь с помощью первой производной.

Пример 1. Построим график функции $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Эта функция определена и непрерывна для всех $x \neq -1$. Она, как мы уже знаем (см. п. 14.4), имеет асимптоты $y = x - 4$ и $x = -1$, причем $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$. Было

отмечено также, что $f(x)=x-4+\frac{2}{x+1}$, поэтому $f(x)>x-4$ при $x>-1$ (график функции находится выше асимптоты) и $f(x)<x-4$ при $x<-1$ (график лежит ниже асимптоты).

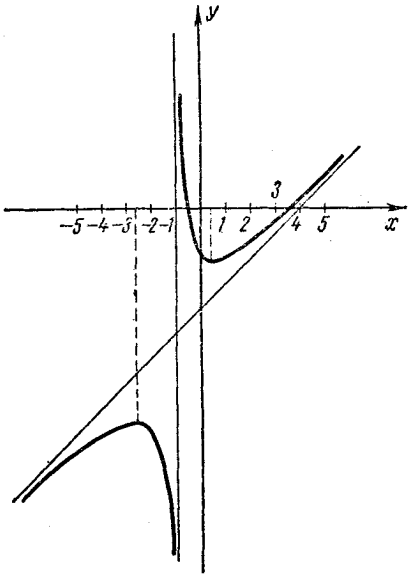

Рис. 56

График функции $f(x)$ пересекает ось Ox в точках, в которых $x^2-3x-2=0$, т. е. при $x_1, x_2=(3\pm\sqrt{17})/2$ или приблизительно в точках $x_1=3{,}5$, $x_2=-0{,}5$. Ось Oy график пересекает в точке $y=-2$. Это позволяет нарисовать график функции $f(x)$ в виде, указанном на рис. 56.

Дальнейшее исследование имеет своей целью нахождение экстремумов точек перегиба и интервалов, выпуклости вверх или вниз графика функции. Для этого найдем y' и y'':

$$y'=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2},$$

$$y''=\frac{4}{(x+1)^3}.$$

Отсюда видно, что $y'=0$ при $x=-1-\sqrt{2}\approx-2{,}4$ и $x=-1+\sqrt{2}\approx0{,}4$. В точке $x=-1$ производные y' и y'' не существуют.

Составим таблицу изменения знака первой и второй производных в зависимости от изменения аргумента, включив в нее критические точки:

x		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
y'	+	0	—	Не существует	—	0	+
y''	—	—	—	Не существует	+	+	+

Из этой таблицы видно, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=-1+\sqrt{2}$ строгий минимум, а в точке $x=-1-\sqrt{2}$ — строгий максимум; при $x<-1$ функция строго выпукла вверх, а при $x>-1$ — строго выпукла вниз. Точек перегиба нет, так как при $x=-1$ функция разрывна.

Мы нашли общий характер поведения функции. Чтобы построить график более точно, надо найти ряд точек графика, как это отмечалось выше.

В дальнейшем для краткости таблицы, подобные табл. 1, будем называть *таблицами поведения функций* и иногда сразу отмечать в них точки экстремума, точки перегиба и интервалы выпуклости.

Пример 2. Построим график функции $f(x)=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$.

Область определения этой функции — множество всех действительных чисел, причем она непрерывна в каждой точке и потому не имеет вертикальных асимптот. Из того, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty,$$

следует, что нет и наклонных асимптот.

Для построения графика вчерне заметим, что

1) $f(x)$ обращается в ноль в точках $x=-1$ и $x=0$;
2) $f>0$ при $x>-1$, $x\neq 0$;
3) $f<0$ при $x<-1$;
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Приблизительный вид графика функции, который можно нарисовать на основании этих замечаний, изображен на рис. 57.

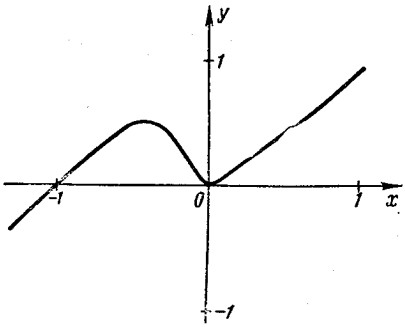

Рис. 57

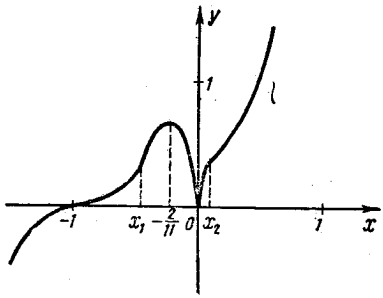

Рис. 58

Проведем теперь более подробное исследование функции с помощью производных. Найдем y' и y'':

$$y'=\frac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}},\quad y''=\frac{2(x+1)(44x^2+16x-1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

Отсюда видно, что $y'=0$ при $x=-1$ и $x=-2/11$; $y''=0$ при $x=-1$, а также когда $44x^2+16x-1=0$, т. е. приблизительно при $x_1=-9/22$ и $x_2=1/22$. При $x=0$ производные y' и y'' не существуют.

Составляем таблицу поведения функции — см. с. 242.

Теперь график функции $y=(x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$ можно нарисовать более точно. Его вид изображен на рис. 58. Как видно, с помощью исследования производных мы существенно уточнили вид графика (ср. с рис. 57).

Развитый аппарат позволяет строить и графики функций, локально заданных параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Здесь не предполагается, что пара функций $x=x(t)$, $y=y(t)$ определяет однозначно одну функцию вида $y=y(x)$ или $x=x(y)$. Под графиком параметрически заданной функции подразумевается объединение графиков всех функций вида $y=f(x)$ и $x=g(y)$, задаваемых формулами $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Для нахождения асимптот, параллельных оси Oy, необходимо найти такие значения t_0 *), для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0} x(t)=a$ или $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)=a$, а $\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)$, соответственно $\lim\limits_{t_0-0} y(t)$, равен $+\infty$ или $-\infty$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, x_1)$	x_1	$\left(x_1, -\frac{2}{11}\right)$	$-\frac{2}{11}$	$\left(-\frac{2}{11}, 0\right)$	0	$(0, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
y'	+	0	+	+	+	0	−	Не существует	+	+	+
y''	−	0	+	0	−	−	−	Не существует	−	0	+
Интервалы монотонности и точки экстремума	Возрастание					Максимум	Убывание	Минимум	Возрастание		
Интервалы выпуклости и точки перегиба	Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз	Точка перегиба	Выпуклость вверх				Выпуклость вверх	Точка перегиба	Выпуклость вниз

*) Здесь и в дальнейшем t_0 — число или одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$.

Если такие значения t_0 существуют, то

$$x = a \tag{14.14}$$

будет уравнением искомой асимптоты.

Аналогично нахождение асимптот, параллельных оси Ox, сводится к определению таких значений t_0, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t) = b$ или $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} y(t) = b$, а $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$, соответственно $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t)$, равен $+\infty$ или $-\infty$. Если окажется, что такие значения t_0 существуют, то

$$y = b \tag{14.15}$$

является уравнением искомой асимптоты.

Наконец, для нахождения асимптот, не параллельных ни оси Ox, ни оси Oy, надо найти такие значения t_0, для которых пределы $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$ и $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t)$ (или $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t)$ и $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} y(t)$) равны $+\infty$ или $-\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} \frac{y(t)}{x(t)} = k \neq 0$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{t \to t_0 - 0} \frac{y(t)}{x(t)} = k\right)$. Если для этого значения, кроме того, существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} [y(t) - kx(t)] = l$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{t \to t_0 - 0} [y(t) - kx(t)] = l\right)$, то прямая

$$y = kx + l \tag{14.16}$$

является асимптотой графика рассматриваемой функции.

Здесь везде t_0 может быть как конечным, так и бесконечным.

Упражнение 5. Вывести уравнения асимптот (14.14), (14.15) и (14.16), исходя из того, что асимптотой называется прямая, расстояние до которой от точки $(x(t), y(t))$ графика функции, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ стремится к нулю, когда точка стремится, оставаясь на графике функции, в бесконечность, т. е. когда $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \to \infty$ при $t \to t_0 + 0$ или $t \to t_0 - 0$.

При предварительном вычерчивании графика функции, заданной параметрически, часто бывает полезно построить сначала в отдельности графики функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Для определения промежутков возрастания и убывания функции, заданной параметрически, нахождения ее экстремумов, точек перегиба, а также интервалов выпуклости вверх и вниз надо использовать выражения для производных y'_{xx} и y''_{xx} через производные x'_t, y'_t, x''_{tt} и y''_{tt}. При этом следует иметь в виду, что уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ вообще говоря, не определяют однозначно функцию вида $y = y(x)$, так что при исследовании графика функции надо все время внимательно следить за тем, какая «ветвь» графика рассматривается. Иногда полезнее рассматривать, наоборот, x как функцию от y.

Пример 3. Построим график функции

$$x=\frac{t^2+1}{4(1-t)},\quad y=\frac{t}{1+t}. \tag{14.17}$$

Параметрическое представление имеет смысл для всех t, кроме $t=\pm 1$. Асимптоты, параллельные оси Ox, получаются при $t=1$ и $t=\pm\infty$; их уравнения соответственно $y=1/2$ и $y=1$. Асимптота, параллельная оси Oy, получается при $t=-1$; ее уравнение $x=1/4$. Наклонных асимптот в данном случае нет.

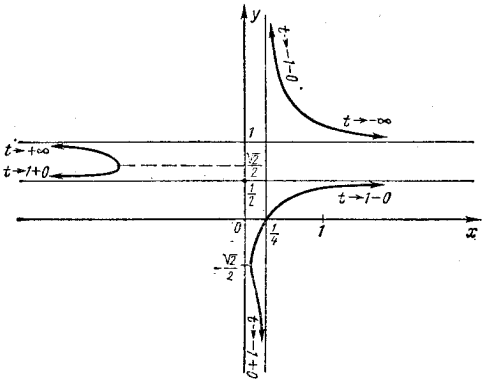

Рис. 59

Для построения графика вчерне полезно составить таблицу изменения знаков переменных x и y в зависимости от изменения t; в нее могут быть включены и некоторые характерные значения x и y. Так, в данном случае полезна следующая таблица.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$+$	$1/4$	$+$	$1/4$	$+$	∞	$-$	$-\infty$
y	1	$+$	∞	$-$	0	$+$	$1/2$	$+$	1

Теперь строим график (рис. 59). Для наглядности на графике указано, как ветви графика соответствуют изменению параметра.

Далее,

$$x'_t=\frac{1+2t-t^2}{4(1-t)^3},\quad y'_t=\frac{1}{(1+t)^2},$$

поэтому

$$x'_y=\frac{(1+t)^2(1+2t-t^2)}{4(1-t)^2}. \tag{14.18}$$

В данном случае лучше рассматривать x как функцию от y, а не наоборот, так как из нарисованного графика видно, что естественно ожидать, что x определяется однозначно как функция от y, $y\neq 1/2$ и $y\neq 1$.

Из (14.18) видно, что $x'_y=0$ при $t=-1$ и когда $1+2t-t^2=0$, т. е. при $t=1+\sqrt{2}$ и $t=1-\sqrt{2}$. Значению $t=-1$ не соответствует никакая точка графика, а при $t=1+\sqrt{2}$ и $t=1-\sqrt{2}$ имеем соответственно

$$y=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Составим теперь таблицу изменения знака производной x'_y, эта таблица позволяет найти и точки экстремума.

t	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y	1		∞		$-\sqrt{2}/2$		1/2		$\sqrt{2}/2$		1
x'_y		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Экстремумы					Минимум				Максимум		

Из таблицы видно, что в точке $y=\sqrt{2}/2$ функция $x=x(y)$ имеет максимум, в точке $y=-\sqrt{2}/2$ — минимум и строго монотонна на интервалах

$$\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right),\ (1,\ +\infty).$$

Следует обратить внимание на то, что, взяв y за независимую переменную, x — за зависимую, т. е. взяв ось Oy за первую координатную ось, а Ox — за вторую, мы получили систему координат, ориентированную противоположно рассматриваемой нами все время системе координат, у которой первой осью является Ox, а второй — Oy. Читателю полезно убедиться, что доказанные нами выше критерии, например, для наличия экстремумов и точек перегиба геометрически не связаны с той или иной ориентацией осей координат.

Для исследования выпуклости и точек перегиба функции $x(y)$ найдем x''_{yy}:

$$x''_{yy}=(x'_y)'_t\,t'_y=\frac{(1+t)^3(3+3t-3t^2+t^3)}{2(1-t)^3}.$$

Производная x''_{yy} равна нулю при $t=-1$ и для тех t, для которых

$$P(t)\equiv 3+3t-3t^2+t^3=0.$$

Замечая, что $P'(t)=3(t-1)^2\geqslant 0$, причем $P'=0$ только в одной точке $t=1$, видим, что $P(t)$ строго монотонно возрастает

на всей вещественной оси (почему?). Следовательно, существует единственное t_0 такое, что $P(t_0)=0$. При этом $P(0)=3>0$, а $P(-1)=-4<0$, откуда $-1<t_0<0$. Если $y_0=\frac{t_0}{1+t_0}$, то, очевидно, $-\infty<y_0<0$ (можно, конечно, получить и более точную оценку для y_0, выбирая более близкие t_1 и t_2, такие, что $P(t_1)<0$, $P(t_2)>0$). Составим теперь таблицу изменения производной x''_{yy} и определим с ее помощью интервалы выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба:

t	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, t_0)$	t_0	$(t_0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y	1	$(1, +\infty)$	∞	$(-\infty, y_0)$	y_0	$(y_0, 1/2)$	1/2	(1/2, 1)	1
x''_{y}		+		−	0	+	Не существует	−	
Интервалы выпуклости		Выпуклость вниз		Выпуклость вверх		Выпуклость вниз		Выпуклость вверх	
Точки перегиба и точки разрыва	Точка разрыва				Точка перегиба		Точка разрыва		Точка разрыва

График функции (14.17) исследован.

Пример 4. Построим график функции

$$x=\frac{t}{1+t^3},\quad y=\frac{t^2}{1+t^3}. \tag{14.19}$$

Асимптот, параллельных осям координат, в данном случае нет; так как $x\to\infty$ и $y\to\infty$ при $t\to-1$, то, возможно, существует наклонная асимптота. Для ее нахождения вычислим соответствующие пределы:

$$\lim_{t\to-1}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}t=-1,\ \text{т. е. } k=-1,$$

$$\lim_{t\to-1}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\left(\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^3}\right)=\lim_{t\to-1}\frac{t}{t^2-t+1}=-\frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что наклонная асимптота существует и что ее уравнение будет

$$y=-x-1/3.$$

Построим приблизительно графики функций $x(t)$ и $y(t)$; для этого предварительно найдем производные:

$$x'_t=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},\quad y'_t=\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{14.20}$$

Производная x'_t обращается в ноль при $t=1/\sqrt[3]{2}$, меняя знак с «+» на «—», поэтому это точка максимума; производная y'_t обращается в ноль при $t=0$, меняя знак с «—» на «+» (значит, это точка минимума) и при $t=1/\sqrt[3]{2}$, меняя знак с «+» на «—» (следовательно, это также точка максимума). Из этих замечаний следует, что графики функций $x(t)$ и $y(t)$ имеют вид, изображенный на рис. 60.

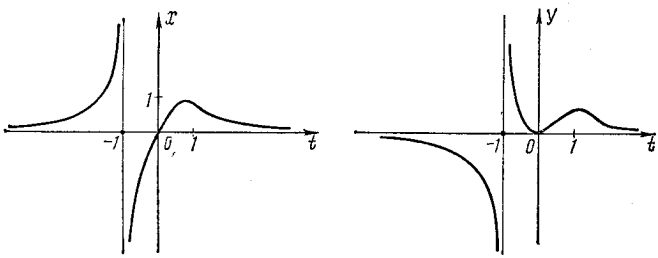

Рис. 60

По этим графикам, зная уравнение асимптоты, можно найти приблизительно график искомой функции (14.19). Он имеет вид, изображенный на рис. 61.

Исследование производной y'_x позволит уточнить размеры «петли», образуемой графиком. Из (14.20) имеем $y'_x=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. Теперь видим, что: 1) $y'_x=0$ при $t=0$ и $t=\sqrt[3]{2}$, т. е. касательная к графику параллельна оси Ox в точках (0; 0) и $(\sqrt[3]{2}/3;\ \sqrt[3]{4}/3)$; 2) $y'_x=\infty$ при $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $t=\infty$, т. е. касательная параллельна оси Oy в точках $(\sqrt[3]{4}/3;\ \sqrt[3]{2}/3)$ и (0; 0). Таким образом, точке (0; 0) (являющейся, как говорят, точкой самопересечения графика) соответствуют два значения параметра $t=0$ и $t=\infty$, если только доопределить функции (14.19), положив $x(\infty)=0$, $y(\infty)=0$. В этой точке две части графика имеют соответственно своими касательными координатные оси.

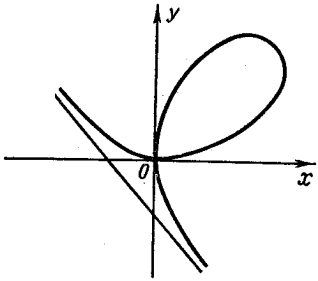

Рис. 61

График функции (14.19) называется *декартовым* *) *листом*. Из формул (14.19) нетрудно получить его неявное задание

$$x^3+y^3-xy=0.$$

*) Р. Декарт (1596—1650) — французский философ, математик, физик, физиолог.

Упражнения. Построить графики следующих функций:

6. $y=x^{1/x}$.

7. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$.

8. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

9. $y=x^2\ln x$.

10. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

11. $y=x^2\left(1-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

12. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

13. $x=t-e^{-t}$, $y=2t-e^{-2t}$.

14. $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y=\dfrac{t}{t^4+1}$.

15. $y^3-x^2y^2-x^3=0$. Указание: выразить x и y через параметр t, полагая $y=tx$.

§ 15. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ

15.1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Определение 1. *Если каждому значению $t\in E$, где E — некоторое множество чисел, соответствует определенный вектор $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ трехмерного пространства, то будем говорить, что на E определена вектор-функция, или, что то же, векторная функция $\boldsymbol{r}(t)$.*

В этом определении в зависимости от рассматриваемых задач под значениями $\boldsymbol{r}(t)$ можно понимать как свободные векторы, так и векторы с закрепленными в одной и той же точке началами (так называемые *радиус-векторы*).

Если в пространстве задана прямоугольная система координат, то, как хорошо известно, каждому вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел — его координат, и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует вектор, для которого числа, входящие в эту тройку, являются его координатами. Поэтому задание вектор-функции эквивалентно заданию трех скалярных (числовых) функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющихся его координатами:

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)).$$

Если при всех $t\in E$ имеем $z(t)=0$, то вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ называется двумерной; в этом случае пишется

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t)).$$

Длина всякого вектора $\boldsymbol{\rho}$ обозначается через $|\boldsymbol{\rho}|$. Будем предполагать известными основные алгебраические свойства векторов, понятие скалярного и векторного произведений, а также свойства этих произведений. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\boldsymbol{ab}$ или $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, а векторное через $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ или $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Введем понятие предела, непрерывности, производной и дифференциала для векторных функций.

Определение 2. *Пусть вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки t_0 и $\boldsymbol{a}$ — некоторый вектор.*

Будем называть вектор $\boldsymbol{a}$ *пределом функции* $\boldsymbol{r}(t)$ *при* $t \to t_0$ *и писать* $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ *(или* $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{a}$ *при* $t \to t_0$*), если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* t, *удовлетворяющих условию* $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, *выполняется неравенство (рис. 62)* $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$.

Очевидно (ср. с леммой п. 4.9), что

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}, \tag{15.1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = 0. \tag{15.2}$$

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ и $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, то для того, чтобы $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{15.3}$$

В самом деле,

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2}. \tag{15.4}$$

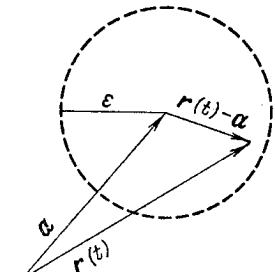

Рис. 62

Поэтому $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \geqslant |x(t) - a_1|$. Отсюда следует, что условие $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \to 0$ при $t \to t_0$ влечет за собой условие $|x(t) - a_1| \to 0$ при $t \to t_0$, т. е. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$. Аналогично доказываются другие равенства (15.3). Наоборот, если выполнено (15.3), то из (15.4) сразу получаем, что $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \to 0$ при $t \to t_0$, т. е. $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$.

Отметим некоторые свойства пределов векторных функций.

1°. Если $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{a}|$. Это непосредственно следует из неравенства $||\boldsymbol{r}| - |\boldsymbol{a}|| \leqslant |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|$.

2°. $\lim\limits_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\boldsymbol{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ ($f(t)$ — скалярная функция).

4°. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

В свойствах 2°—5° все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки t_0, кроме, быть может, самой точки t_0, и предполагается, что все пределы, входящие в правые части равенств, существуют; тогда утверждается, что существуют и пре-

делы, стоящие в левых частях, причем справедливы написанные равенства.

Все эти свойства доказываются аналогично тому, как мы доказывали подобные утверждения, встречавшиеся нам раньше (см. п. 3.9, 4.7). Докажем, например, свойство 5°. Предварительно заметим, что для любых векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$

$$|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\sin\widehat{\boldsymbol{pq}}\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|. \tag{15.5}$$

Поэтому, если $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$, причем $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{p}(t)|=0$, а $|\boldsymbol{q}(t)|$ — ограниченная функция, то из (15.5) имеем (см. п. 4.9)

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=0. \tag{15.6}$$

Пусть теперь $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)=\boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{b}$. Положим $\boldsymbol{\alpha}(t)=\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\beta}(t)=\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{b}$; тогда согласно (15.2),

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)|=\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{\beta}(t)|=0 \tag{15.7}$$

и

$$\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\alpha}(t)]\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\beta}(t)]=$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t),$$

где, в силу (15.7), $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|=\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|=\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0$. Так как

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)|\times\boldsymbol{\beta}(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|,$$

то и $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0$. А это, согласно (15.2), и означает, что

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}. \ \square$$

Отметим, что свойства 1°—5° пределов вектор-функций могут, конечно, быть получены с помощью формул (15.3) из соответствующих свойств скалярных функций, если перейти к координатной записи векторов и их скалярных и векторных произведений.

Перейдем к определению непрерывности вектор-функции.

Определение 3. *Вектор-функция $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется непрерывной в t_0, если* $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0)$.

Из эквивалентности условий (15.1) и (15.3) следует, что для того чтобы вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, была непрерывной в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы при $t=t_0$ были непрерывными функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.