

Из свойств пределов векторных функций следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, а также произведение скалярных функций на векторные будут непрерывными в некоторой точке, если в этой точке непрерывны все слагаемые, соответственно — сомножители.

15.2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Определение 4. Пусть вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 . Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

то он называется производной данной вектор-функции в t_0 и обозначается через $\mathbf{r}'(t_0)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$.

Таким образом, производная вектор-функция в точке есть вектор.

Для того чтобы функция $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, определенная в некоторой окрестности точки t_0 , имела производную в t_0 , необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ имели производные при $t = t_0$, причем в этом случае

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), |\mathbf{r}'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}.$$

Это непосредственно следует из эквивалентности двух подходов (15.1) и (15.3) к определению предела для вектор-функции:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} &= \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Определение 5. Вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0 , называется дифференцируемой при $t = t_0$, если ее приращение $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ в точке t_0 представимо в виде

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{a} \Delta t + \mathbf{e}(\Delta t) \Delta t, \quad (15.8)$$

где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{e}(\Delta t) = 0$. При этом линейная вектор-функция ^{*)} $\mathbf{a} \Delta t$ называется дифференциалом функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается через $d\mathbf{r} = \mathbf{a} \Delta t$:

$$\Delta \mathbf{r} = d\mathbf{r} + \mathbf{e}(\Delta t) \Delta t. \quad (15.9)$$

^{*)} Вектор-функция аргумента t называется линейной, если она имеет вид $a\mathbf{t} + \mathbf{b}$, где a и b — какие-либо два фиксированных вектора.

Очевидно, что если вектор-функция дифференцируема при $t = t_0$, то она и непрерывна в этой точке.

Как и в случае скалярных функций, из дифференцируемости функции следует существование производной $\mathbf{r}'(t)$ и равенство ее вектору \mathbf{a} . В самом деле, из (15.8) имеем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{a} + \mathbf{e}(\Delta t)] = \mathbf{a}.$$

Наоборот, если существует производная $\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, то, полагая $\mathbf{e}(\Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} - \mathbf{r}'(t_0)$, получаем $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t + \mathbf{e}(\Delta t) \Delta t$, где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{e}(\Delta t) = 0$. Значит, $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t.$$

Положим для независимой переменной t , по определению, $dt = \Delta t$; тогда (опуская обозначение аргумента t_0)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}' dt, \quad \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Подставляя полученное выражение для $d\mathbf{r}$ в (15.9), получим

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' \Delta t + \mathbf{e}(\Delta t) \Delta t,$$

или

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' \Delta t + \mathbf{a}(\Delta t), \quad (15.10)$$

где $\mathbf{a}(\Delta t) = \mathbf{e}(\Delta t) \Delta t = \mathbf{o}(\Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ *) и $\mathbf{a}(0) = 0$.

Пусть теперь $t = t(\tau)$. Если эта функция дифференцируема в точке τ_0 , $t_0 = t(\tau_0)$ и $\Delta \tau = \tau - \tau_0$, то из (15.10) (обозначая для ясности \mathbf{r}' через \mathbf{r}'_t), следует, что

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau} = \mathbf{r}'_t \frac{\Delta t}{\Delta \tau} + \frac{\mathbf{a}(\Delta t)}{\Delta \tau}.$$

Так как $\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta \tau \rightarrow 0$, то, как и в случае числовой функции (см. п. 9.7), положив $\mathbf{e}(0) = 0$, получим

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\Delta t)}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{e}(\Delta t) \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = 0.$$

поэтому производная $\mathbf{r}'_\tau = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau}$ существует и $\mathbf{r}'_\tau = \mathbf{r}'_t t'_\tau$. Отсюда, как и в случае скалярных функций, вытекает инвариантность записи дифференциала вектор-функции; как для зависимой переменной t , так и для независимой переменной τ имеем

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_t dt, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_\tau d\tau.$$

* По аналогии со случаем скалярных функций, для вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ пишется $\mathbf{a} = \mathbf{o}(\beta)$ при $t \rightarrow t_0$, если $\mathbf{a}(t) = \mathbf{e}(t)\beta(t)$, где $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{e}(t) = 0$.

Приведем формулы дифференцирования вектор-функций (аргумент для простоты обозначений опущен):

1. $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2$.
2. $(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}'$.
3. $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}'_2$.
4. $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}'_2$.

Здесь все рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности точки t_0 и предполагается, что все производные, стоящие в правой части каждого равенства, существуют при $t=t_0$; тогда в точке t_0 существуют и производные, стоящие в левой части, причем справедливы написанные равенства.

Все эти формулы доказываются аналогично формулам дифференцирования скалярных функций (см. п. 9.5). Докажем, например, формулу 4.

Используя свойства 1°—5° пределов вектор-функций, получим:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]'_{t=t_0} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t) \times \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t_0) \times \mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{r}_1(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t_0)}{\Delta t} \times \mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) + \mathbf{r}_1(t_0) \times \frac{\mathbf{r}_2(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t} \right] = \\ &= \mathbf{r}'_1(t_0) \times \mathbf{r}_2(t_0) + \mathbf{r}_1(t_0) \times \mathbf{r}'_2(t_0). \end{aligned}$$

Если вектор-функция $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и имеет n производных в этой точке, то для нее справедлива формула Тейлора

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k \mathbf{r}(t_0)}{dt^k} \Delta t^k + o(\Delta t^n).$$

Она непосредственно следует из разложения по формуле Тейлора координатных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Мы видим, что многие факты, установленные в теории скалярных функций, дословно переносятся на вектор-функции. Однако было бы ошибкой думать, что это всегда так: например, в определенном смысле аналог формулы конечных приращений не имеет места для вектор-функций.

Действительно, рассмотрим двумерную вектор-функцию $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Поскольку $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, то $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ при любом $t \in [0, 2\pi]$. Следовательно, не существует такой точки $\xi \in [0, 2\pi]$, для которой было бы справедливо равенство, аналогичное формуле конечных приращений Лагранжа для скалярных функций,

$$\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) = 2\pi \mathbf{r}'(\xi),$$

так как слева стоит нулевой вектор, ибо $\mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{r}(0)$, а справа — не нулевой.

Некоторой заменой формулы конечных приращений для вектор-функций является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq (b-a) |\mathbf{r}'(\xi)|. \quad (15.11)$$

Доказательство. Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то неравенство (15.11) справедливо при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$, ибо его левая часть обращается в ноль.

Пусть $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$. Оценим длину $|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)|$ вектора $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) \neq 0$. Если задан какой-либо вектор \mathbf{x} , то обозначая через \mathbf{e} единичный вектор в направлении вектора \mathbf{x} , получим $|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}, \mathbf{e})$, ибо согласно определению скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = |\mathbf{x}| |\mathbf{e}| \cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{e}}$, $|\mathbf{e}| = 1$, $\widehat{\mathbf{x}\mathbf{e}} = 0$, и, следовательно, $\cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{e}} = 1$. Поэтому, если \mathbf{e} — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) \neq 0$, то

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a), \mathbf{e}) = (\mathbf{r}(b), \mathbf{e}) - (\mathbf{r}(a), \mathbf{e}),$$

т. е. получилась разность значений числовой функции

$$f(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{e}) \quad (15.12)$$

на концах отрезка $[a, b]$:

$$|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| = f(b) - f(a). \quad (15.13)$$

Из (15.12) следует, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, ибо согласно условиям теоремы этими свойствами обладает функция $\mathbf{r}(t)$. Поэтому, в силу формулы конечных приращений Лагранжа, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. Но согласно правилу дифференцирования скалярного произведения имеем

$$f'(t) = (\mathbf{r}'(t), \mathbf{e}),$$

вследствие чего

$$f(b) - f(a) = (\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})(b-a), \quad a < \xi < b. \quad (15.14)$$

Для любых же двух векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} из определения скалярного произведения следует неравенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| |\cos \widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|;$$

в частности

$$|(\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{e})| \leq |\mathbf{r}'(\xi)| |\mathbf{e}| = |\mathbf{r}'(\xi)|.$$

Следовательно, из (15.14) получаем:

$$f(b) - f(a) \leq |\mathbf{r}'(\xi)|(b-a), \quad a < \xi < b.$$

Из этого неравенства и формулы (15.13) сразу следует неравенство (15.11). \square

§ 16. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

16.1. ПОНЯТИЕ КРИВОЙ

Рассмотрим отображения отрезков в трехмерное пространство R^3 . Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок, а $r(t)$ — его отображение в R^3 , т. е. отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in [a, b]$ точку $r(t)$ пространства R^3 , короче, $r : [a, b] \rightarrow R^3$.

Будем считать, что в пространстве R^3 фиксирована система координат. В этом случае задание точки пространства равносильно заданию трех ее координат. Обозначим координаты точки $r(t)$ через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Тогда задание отображения $r(t)$ оказывается равносильным заданию трех числовых функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, называемых *координатными функциями отображения* $r(t)$.

Отображение $r(t)$ называется *непрерывным на отрезке* $[a, b]$, если на этом отрезке непрерывны все его координатные функции.

Для отображения $r(t)$ будем обозначать через $\mathbf{r}(t)$ вектор-функцию, у которой координаты вектора $\mathbf{r}(t)$ совпадают с координатами точки $r(t)$, т. е. $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, и будем называть отображение $r(t)$ и вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ соответствующими друг другу.

Очевидно, что отображение $r(t)$, $a \leq t \leq b$, непрерывно на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке непрерывна соответствующая ему вектор-функция $\mathbf{r}(t)$. Действительно, мы знаем, что вектор-функция непрерывна на отрезке в том и только том случае, когда на нем непрерывны все ее координаты (см. п. 15.1), что по определению является условием непрерывности отображения $r(t)$ на отрезке.

Теперь можно сформулировать определение кривой.

Множество Γ пространства, заданное как непрерывный образ некоторого отрезка *) называется *непрерывной кривой* или просто *кривой*.

Указанное непрерывное отображение, обозначим его снова через $r(t)$, $a \leq t \leq b$, отрезка $[a, b]$ на множество $\Gamma \subset R^3$ называется представлением кривой Γ и пишется

$$\Gamma = \{r(t), a \leq t \leq b\}.$$

Переменная t называется *параметром кривой* Γ .

Таким образом, кривая есть не просто множество пространства, а множество, рассматриваемое как результат некоторого непрерывного отображения отрезка. Иначе говоря, кривая — это

*) Непрерывным образом отрезка называется образ отрезка при непрерывном отображении последнего.

множество пространства плюс непрерывное отображение на него отрезка.

Поэтому одно и то же множество, полученное как образ двух разных непрерывных отображений отрезков, рассматривается как различные кривые.

Отметим, что непрерывное отображение $r(t)$, $a \leq t \leq b$, являющееся представлением кривой Γ , не предполагается взаимно однозначным: в одну и ту же точку кривой Γ могут отобразиться две или больше точек отрезка $[a, b]$.

Точки кривой $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$, в которые отображается более чем одна точка отрезка $[a, b]$, называются *точками самопересечения*, или *кратными точками* этой кривой.

Таким образом, если точка M непрерывной кривой Γ является кратной точкой последней, то при заданном представлении $r(t)$, $a \leq t \leq b$, этой кривой Γ существуют по крайней мере два таких различных значения t_1 и t_2 параметра t , $a \leq t_1 \leq b$, $a \leq t_2 \leq b$, что $r(t_1) = r(t_2) = M$.

Точка $r(a)$ кривой $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ называется ее началом, а точка $r(b)$ — ее концом.

Определение 1. Кривая $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ называется *замкнутой кривой*, или, что то же самое, *замкнутым контуром*, если ее начало совпадает с ее концом: $r(a) = r(b)$.

Замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения, кроме точки $r(a) = r(b)$, и такая, что $r(t) \neq r(a) = r(b)$ при $a < t < b$, называется *простым замкнутым контуром*.

Будем говорить, что точка $M = r(t)$ кривой $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ стремится к точке $M_0 = r(t_0)$ этой кривой, если $|MM_0| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$.

Если кривая Γ лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*. Если указанная плоскость выбрана за координатную плоскость xOy , то представление кривой имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0,$$

причем уравнение $z = 0$, если это не может привести к недоразумениям, обычно не пишется.

График непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$ является плоской кривой в нашем смысле с представлением

$$x = x, \quad y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

(в этом случае параметр $t = x$).

Отображение $r(t)$, $a \leq t \leq b$, задающее кривую Γ , при фиксированной в пространстве системе координат x, y, z можно задавать также в координатном виде, т. е., задавая координаты точки $r(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

В этом случае тройка функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leq t \leq b$, называется *координатным представлением кривой Γ* и пишется:

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t); a \leq t \leq b\}.$$

Отображение $r(t)$ можно задать и соответствующей ему вектор-функцией $r(t)$, $a \leq t \leq b$, где, как всегда, $r(t)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(t)$. *) В этом случае кривая $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ называется *годографом* вектор-функции $r(t)$, а сама эта вектор-функция $r(t)$ — *векторным представлением кривой Γ* и пишется

$$\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}.$$

Примером кривой является окружность. Возьмем для определенности окружность радиуса r с центром в начале координат. Ее можно, например, представить как непрерывный образ отрезка $[0, 2\pi]$ с помощью функций

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (16.1)$$

Очевидно, окружность является простым замкнутым контуром. Примером незамкнутой кривой является любая дуга окружности, соответствующая, например, изменению параметра t на отрезке $[0, \alpha]$, где $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Отметим, что множество точек кривой

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi \quad (16.2)$$

совпадает с множеством точек кривой (16.1): и в том и в другом случае это окружность $x^2 + y^2 = r^2$ на плоскости x , y . Однако получена она как результат разных отображений: при отображении (16.1), т. е. при изменении параметра t от 0 до 2π эта окружность проходится один раз, а при отображении (16.2), т. е. при изменении параметра t от 0 до 4π , она проходит дважды. Поэтому (16.1) и (16.2) — разные кривые.

Аналогичным образом определяются специальные виды непрерывных кривых: (непрерывно) дифференцируемые, дважды (непрерывно) дифференцируемые и т. п. Определим, например, непрерывно дифференцируемые кривые. Отображение $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ отрезка $[a, b]$ в пространство называется *непрерывно дифференцируемым*, если все функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$.

Кривая $\Gamma = \{r(t), a \leq t \leq b\}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если ее представление $r(t)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $[a, b]$.

Аналогично определяются дифференцируемые кривые, дважды дифференцируемые, дважды непрерывно дифференцируемые и т. д.

*) Если не оговорено что-либо другое, то всегда предполагается, что начало радиус-вектора находится в начале координат.

Приведенное определение кривой имеет в своей основе физическое представление о траектории (пути) движущейся в пространстве материальной точки. Но на такой траектории можно выбирать различные параметры, например, время движения t , длину пройденного пути s или что-либо еще. Поэтому условие, состоящее в том, что две кривые с разными представлениями считаются всегда различными, не всегда удобно. Такое соглашение естественно для кривых (16.1) и (16.2). Однако два представления кривых

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad -\pi \leq t \leq 0 \text{ и } y = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

естественно было бы считать представлением одной и той же кривой: полуокружности $x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$.

Эти соображения приводят к мысли о проведении некоторого уточнения понятия кривой: объединения некоторых различных в смысле данного выше определения кривых в одну кривую. Сделаем это.

Будем говорить, что кривые $\Gamma_1 = \{r(t), \quad a \leq t \leq b\}$ и $\Gamma_2 = \{\rho(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta\}$ являются одной и той же кривой, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau = \varphi(t), \quad a \leq t \leq b$, $\varphi(a) = \alpha, \varphi(b) = \beta$ или непрерывная строго убывающая функция $\tau = \varphi(t), \quad a \leq t \leq b, \quad \varphi(a) = \beta, \quad \varphi(b) = \alpha$, такая, что для всех $t \in [a, b]$ имеет место равенство $r(t) = \rho(\varphi(t))$.

В случае (непрерывно) дифференцируемых кривых предполагается, что функция $\varphi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ кроме того (непрерывно) дифференцируема на $[a, b]$ и имеет не обращающуюся в ноль производную. Последнее условие обеспечивает (непрерывную) дифференцируемость обратной функции φ^{-1} .

Подобные преобразования параметра, т. е. такие, которые приводят к той же кривой в смысле сделанного определения, называются *допустимыми преобразованиями параметра*, а все представления одной и той же кривой называются *эквивалентными* между собой.

Более подробно переход к другим представлениям данной кривой будет рассмотрен в следующем пункте.

16.2*. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАННЫЕ КРИВЫЕ

Для построения строгой теории кривых, допускающих разные представления, введем предварительно понятие эквивалентных отображений отрезков в пространство.

Определение 2. Непрерывное отображение $r(t)$ отрезка $[a, b]$ в пространство называется *эквивалентным непрерывному отображению $\rho(\tau)$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в то же пространство*, если существует такая непрерывная строго монотонная функция $t = \varphi(\tau)$ (возрастающая или убывающая), что она отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ и для каждого $\tau \in [\alpha, \beta]$ справедливо $r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau)$.

венство (рис. 63)

$$r(\varphi(t)) = \rho(t). \quad (16.3)$$

Функция $\varphi(t)$ называется *отображением, осуществляющим эквивалентность отображений $r(t)$ и $\rho(t)$* .

Если непрерывное отображение $r(t)$, $a \leq t \leq b$, отрезка $[a, b]$ в пространство эквивалентно непрерывному отображению $\rho(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, отрезка $[\alpha, \beta]$ в пространство, то пишут $r(t) \sim \rho(t)$.

Легко убедиться, что всякое непрерывное отображение отрезка в пространство эквивалентно самому себе: $r(t) \sim r(t)$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является функция $t = \tau$, $a = \alpha \leq t \leq \beta = b$). Это свойство называется свойством *рефлексивности*. Легко проверяется также, что если $r(t)$, $a \leq t \leq b$, и $\rho(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, суть непрерывные отображения соответственно отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ в пространство и если $r(t) \sim \rho(t)$, то и $\rho(t) \sim r(t)$ — свойство *симметричности*. Так же легко убедиться, что если $r_1(t_1)$, $a_1 \leq t_1 \leq b_1$, $r_2(t_2)$, $a_2 \leq t_2 \leq b_2$, и $r_3(t_3)$, $a_3 \leq t_3 \leq b_3$, являются непрерывными отображениями соответственно отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ и $[a_3, b_3]$ в пространство, то из $r_1(t_1) \sim r_2(t_2)$ и $r_2(t_2) \sim r_3(t_3)$ следует, что $r_1(t_1) \sim r_3(t_3)$ — свойство *транзитивности*.

Если в некотором множестве элементов введено понятие эквивалентности, обладающее тремя указанными свойствами (рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью), то такое множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов (см. § 61). В нашем случае получаются непересекающиеся классы эквивалентных между собой непрерывных отображений отрезков.

Наконец, заметим, что, если $r(t)$, $a \leq t \leq b$, и $\rho(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ — эквивалентные непрерывные отображения отрезков в пространство, то образы отрезков $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ в пространстве соответственно при отображениях $r(t)$ и $\rho(t)$ совпадают. Это сразу следует из условия (16.3).

Перейдем теперь к понятию кривой.

Определение 3. Всякое множество Γ непрерывных эквивалентных отображений $r(t)$ отрезков $[a, b]$ в пространство (см. определение 2) называется *параметрически заданной кривой*:

$$\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}.$$

Каждое из указанных отображений называется *представлением этой кривой*.

Вектор-функция $r(t)$ ($r(t)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(t)$) называется по аналогии с п. 16.1 *векторным представлением*

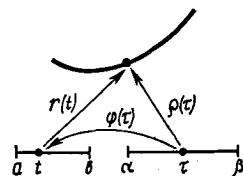


Рис. 63

параметрически заданной кривой Γ :

$$\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}.$$

Если $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leq t \leq b$ называются координатным представлением параметрически заданной кривой Γ :

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t); a \leq t \leq b\}.$$

Очевидно, что параметрически заданная кривая однозначно определяется каждым из своих представлений. Это позволяет (что более удобно), например, в записи $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ правую часть равенства понимать не как совокупность всех представлений кривой Γ , а как некоторое вполне определенное ее представление $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Мы так и будем поступать в дальнейшем, причем не только в указанном случае, но и в случаях как векторных, так и координатных представлений.

Пример. В силу нашего определения параметрически заданные кривые

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

и

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

являются, как это уже отмечалось в п. 16.1, различными кривыми, хотя как множества точек плоскости они совпадают: эти множества представляют собой одну и ту же окружность $x^2 + y^2 = 1$. В первом случае эта окружность «пробегается» один раз, во втором — дважды.

Представления же

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$

и

$$x = \sqrt{\tau(2-\tau)}, \quad y = \tau - 1, \quad 0 \leq \tau \leq 2,$$

задают одну и ту же кривую. Действительно, функция $\tau = 1 + \sin t$ непрерывна, строго монотонно возрастает на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ и переводит одно представление в другое. Множество точек кривой образует в этом случае полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$.

При заданном представлении $r(t)$, $a \leq t \leq b$, некоторой непрерывной кривой и при фиксированном значении параметра t через $r(t)$, естественно, обозначается точка рассматриваемой непрерывной кривой, в которую при данном представлении отображается точка $t \in [a, b]$.

Определим, теперь, что называется точкой параметрически заданной кривой, т. е. кривой, определенной как класс эквивалентных непрерывных отображений отрезков.

Определение 4. Пусть $r(t)$, $a \leq t \leq b$, и $\rho(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, — два представления параметрически заданной кривой Γ , φ — отображение, осуществляющее их эквивалентность (см. определение 3) и

пусть $t = \varphi(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, $a \leq t \leq b$ (причем значение τ , а потому и значение t фиксированы), и, следовательно, $r(t) = \rho(\tau)$. Обозначим эту точку пространства через P , т. е. $P = r(t) = \rho(\tau)$. Пары (P, t) и (P, τ) называются эквивалентными.

Эквивалентность пар (P, t) и (P, τ) будем обозначать символом $(P, t) \sim P(\tau)$.

- Легко проверить, что 1) $(P, t) \sim (P, t)$;
 2) если $(P, t) \sim (P, \tau)$, то $(P, \tau) \sim (P, t)$;
 3) если $(P, t_1) \sim (P, t_2)$ и $(P, t_2) \sim (P, t_3)$, то $(P, t_1) \sim (P, t_3)$.

Определение 5. Для данной параметрически заданной кривой Γ совокупность $\{(P, t)\}$ всех эквивалентных пар (P — фиксировано) называется точкой этой кривой, а точка пространства P — ее носителем.

Каждая точка $\{(P, t)\}$ параметрически заданной кривой $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ однозначно определяется каждой парой (P, t) , и поскольку в этой паре $P = r(t)$, то каждая точка кривой Γ однозначно определяется значением параметра $t \in [a, b]$ при каждом представлении. Поэтому для краткости точки параметрически заданных кривых будем обозначать не символом $\{(P, t)\}$, а просто $r(t)$. В силу сказанного это обозначение имеет однозначный смысл.

Определение 6. Совокупность носителей всех точек параметрически заданной кривой Γ называется носителем этой кривой.

Точка P носителя кривой Γ , являющаяся носителем по крайней мере двух различных точек кривой, называется кратной точкой (или точкой самопересечения) носителя кривой Γ .

Как мы уже видели на примерах в п. 16.1 (см. (16.1) и (16.2)), различные кривые могут иметь один и тот же носитель. Заметим еще, что если $r(t) \neq r(a) = r(b)$, $a < t < b$ при одном представлении кривой, то это условие выполняется и при любом другом ее представлении. Следовательно, понятие замкнутого контура (см. определение 1 в п. 16.1) не зависит от выбора представления кривой.

Перейдем, теперь, к определению кривых других классов. Понятие эквивалентности отображений отрезка в пространство можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других отображений. Это дает возможность определить специальные классы параметрически заданных кривых: n раз дифференцируемых и n раз непрерывно дифференцируемых параметрически заданных кривых, $n = 1, 2, \dots$.

Определим, например, понятие эквивалентности для непрерывно дифференцируемых отображений отрезков и непрерывно дифференцируемую параметрически заданную кривую.

Определение 7. Два непрерывно дифференцируемых отображения отрезков в пространство называются непрерывно дифференцируемо эквивалентными, если существует функция φ , осуществляющая их эквивалентность в смысле определения 2, которая как сама, так и ей обратная непрерывно дифференцируемы.

Определение 8. Всякое множество Γ непрерывно дифференцируемых и непрерывно дифференцируемо эквивалентных отображений отрезков в пространство называется непрерывно дифференцируемой параметрически заданной кривой.

Вообще параметрически заданная кривая данного класса определяется как совокупность отображений отрезков в пространство (называемых ее представлениями), эквивалентных в некотором смысле. Отображения одного отрезка на другой, осуществляющие эту эквивалентность, называются в этом случае *допустимыми преобразованиями параметра* и удовлетворяют условиям рефлексивности, симметричности и транзитности (см. п. 16.1).

Каждая параметрически заданная кривая некоторого класса однозначно определяется любым своим представлением и для нее по той же схеме, что и выше, определяется понятие точки, носителя точки и носителя кривой. В дальнейшем для простоты там, где это не сможет привести к недоразумениям, параметрически заданные кривые и их носители (непрерывные кривые в смысле п. 16.1) будут называться одним и тем же термином «кривые».

16.3. ОРИЕНТАЦИЯ КРИВОЙ. ДУГА КРИВОЙ. СУММА КРИВЫХ. НЕЯВНОЕ ЗАДАНИЕ КРИВЫХ

Порядок чисел (по величине) на отрезке $[a, b]$ с помощью данного фиксированного представления $r(t)$ кривой $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$, естественно, порождает соответствующий порядок точек на кривой. Точка $r(t') \in \Gamma$ считается предшествующей точке $r(t'') \in \Gamma$, или, что то же, точка $r(t'')$ считается следующей за точкой $r(t')$, если $a \leq t' < t'' \leq b$. Если этот же порядок точек желательно сохранить и при других представлениях кривой, то необходимо сузить класс допустимых преобразований параметра, именно допускать лишь строго монотонно возрастающие преобразования параметра.

Определение 9. Кривая Γ , определенная классом эквивалентных непрерывных отображений отрезков в пространство, для которых допустимыми преобразованиями параметров являются только строго монотонно возрастающие непрерывные функции, называется *ориентированной кривой*.

Таким образом, функции φ , осуществляющие эквивалентность двух представлений данной ориентированной кривой, удовлетворяют условиям определения 2 и, кроме того, являются строго монотонно возрастающими.

Вместо выражения «задана ориентированная кривая» говорят иногда, что «на кривой задана ориентация» (т. е. порядок точек).

Определение 10. Пусть $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ — ориентированная кривая и пусть $t = t(\tau)$ — строго монотонно убывающая и непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, причем $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. Кривая, определяемая представлением $r = r(t(\tau))$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, назы-

вается кривой, ориентированной противоположно кривой Γ , и обозначается $-\Gamma$.

Подобным же образом определяются ориентированные и противоположно ориентированные кривые других классов (дифференцируемые, непрерывно дифференцируемые и т. п.).

Если $t = t(\tau)$ — указанное в определении 10 отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ и $t_0 = t(\tau_0)$, то точки $r(t_0)$ и $r(t(\tau_0))$ соответственно кривой Γ и противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$ называются соответствующими друг другу. Одна точка кривой Γ предшествует другой точке этой кривой тогда и только тогда, когда точка кривой $-\Gamma$, соответствующая первой точке, следует за точкой, соответствующей второй. Этим оправдывается термин «противоположно ориентированная кривая».

Если $r(t)$, $a \leq t \leq b$ — представление кривой Γ , то $r(a+b-\tau)$, $a \leq \tau \leq b$, является представлением противоположно ориентированной кривой $-\Gamma$, ибо функция $t = a+b-\tau$, $a \leq \tau \leq b$, строго монотонно убывает и отображает отрезок $[a, b]$ на себя.

В заключение сформулируем еще несколько полезных для дальнейшего определений.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$.

Определение 11. Если $[a', b'] \subset [a, b]$, то кривая $\Gamma' = \{r(t); a' \leq t \leq b'\}$ называется частью кривой Γ (или ее дугой) и пишется $\Gamma' \subset \Gamma$.

Определение 12. Если $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{r(t), a \leq t \leq t_0\}$, $\Gamma_2 = \{r(t), t_0 \leq t \leq b\}$, то кривая Γ называется суммой кривых Γ_1 и Γ_2 и пишется $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Аналогично определяется сумма конечного числа кривых.

Определение 13. Сумма конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых называется кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой.

Определение 14. Пусть $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ — плоская кривая, расположенная на плоскости x, y . Если существует такая функция $F(x, y)$, что координаты точек (x, y) кривой Γ удовлетворяют условию

$$F(x, y) = 0, \quad (16.4)$$

то говорят, что уравнение (16.4) является неявным представлением кривой Γ .

Следует, однако, иметь в виду, что, вообще говоря, множество всех точек, удовлетворяющих уравнению вида (16.4), не является кривой в выше определенном смысле даже для достаточно «хороших» функций $F(x, y)$. Например, множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$, представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 1$ и точку $(0; 0)$. Можно показать, что это множество не является непрерывным образом отрезка.

Можно и в пространственном случае задавать кривые неявным образом, но уже при помощи системы двух уравнений:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Более подробно этим вопросом мы займемся в п. 41.3.

Наконец, отметим, что кривая всегда ограничена, т. е. лежит в некотором шаре; это следует из того, что функции координатного представления кривой, согласно теореме Больцано — Вейерштасса, ограничены в силу их непрерывности. Вместе с тем уже в элементарной математике встречаются неограниченные кривые, к таковым относятся, например, прямая, парабола, гипербола, синусоида, график $\operatorname{tg} x$ и т. п. Чтобы охватить и такие «кривые», можно определить класс так называемых *открытых кривых* по схеме, подобной вышеприведенной, в которой за основу взято непрерывное отображение интервала, а не на отрезке, как это было сделано выше. Открытые кривые, в частности, могут быть и неограниченными. Подробное и точное формулирование всех этих понятий предоставляется проделывать читателю по мере потребности.

16.4. КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b\}$, вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0 \in [a, b]$ и $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$. Поскольку в силу определения дифференцируемости

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0) \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

то для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ имеет место неравенство

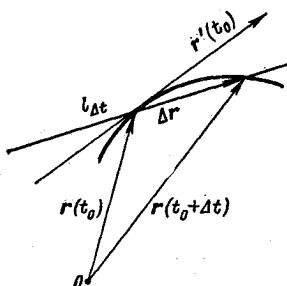
$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq \mathbf{r}(t_0).$$

Действительно при сделанных предположениях $\mathbf{r}'(t_0) \Delta t \neq 0$, а потому для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ будем иметь и

$$\mathbf{r}'(t_0) \Delta t + o(\Delta t) \neq 0.$$

Прямая, проведенная через точки $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ называется *секущей* для кривой Γ . Обозначим ее через $l_{\Delta t}$ (рис. 64). Для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ в силу условия $\mathbf{r}(t_0) \neq \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ секущая $l_{\Delta t}$ определена однозначно. Поскольку вектор $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$ параллелен этой секущей, то и вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, $\Delta t \neq 0$, отличающийся от вектора $\mathbf{r}'(t_0)$ лишь скалярным множителем $1/\Delta t$, также ей параллелен.

Рис. 64



По условию в точке t_0 существует производная, т. е. предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t_0). \quad (16.5)$$

Так как все секущие проходят через одну и ту же точку $r(t_0)$, то геометрически формула (16.5) означает, что секущие Δr при Δt , стремящемуся к нулю стремятся к некоторому предельному положению, т. е. к прямой, проходящей через ту же точку $r(t_0)$ в направлении вектора $r'(t_0)$. Эта прямая в силу условия $r'(t_0) \neq 0$ определена однозначно. Она и называется *касательной к кривой* Г в точке $r(t_0)$.

Таким образом, в силу самого определения касательной к кривой Г в точке $r(t_0)$, производная $r'(t_0)$ вектор-функции $r(t)$ в случае, если $r'(t_0) \neq 0$ является вектором, параллельным касательной в точке $r(t_0)$. Если начало вектора $r'(t_0)$ поместить в эту точку, как это обычно и делается, то он будет направлен по касательной.

В рассматриваемом случае дифференциал $dr(t_0) = r'(t_0) dt$ также направлен по касательной к кривой, ибо он отличается от производной лишь скалярным множителем dt . Вектор $t = r'/|r'|$, $r' \neq 0$ является единичным вектором, направленным по касательной. Вектор Δr при $\Delta t > 0$ направлен от точки кривой с меньшим значением параметра к точке с большим значением параметра, поэтому можно сказать, что вектор Δr при $\Delta t > 0$ показывает направление, в котором параметр на кривой возрастает, т. е., как говорят, положительное направление на кривой. Вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ при $\Delta t > 0$ имеет то же направление, что и вектор Δr .

Поскольку $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t)$, то естественно говорить, что вектор $r'(t)$, а значит, и вектор t , который отличается, быть может, от вектора $r'(t)$ положительным числовым множителем $1/|r'(t)|$, также направлены в сторону возрастания параметра и что их ориентация (направление) соответствует ориентации кривой. Направление вектора t (или, что то же, вектора r') называется *положительным направлением касательной*.

Уравнение касательной к кривой Г в точке $r(t_0)$, для которой $r'(t_0) \neq 0$, в векторной записи имеет вид

$$r = r(t_0) + r'(t_0) \tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

где r — текущий радиус-вектор касательной. В координатной записи уравнение касательной в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0) \tau, \\ y &= y(t_0) + y'(t_0) \tau, \\ z &= z(t_0) + z'(t_0) \tau, \\ -\infty &< \tau < +\infty. \end{aligned}$$

Исключив переменную τ , получим

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Определение 15. Пусть Γ — дифференцируемая кривая и $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ — ее векторное представление. Точка кривой Γ , в которой $\mathbf{r}' \neq 0$, называется неособой, а точка, в которой $\mathbf{r}' = 0$ — особой.

Если $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$, то из равенства $|\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (см. п. 15.2) имеем: точка $(x(t), y(t), z(t))$ кривой Γ неособая тогда и только тогда, когда в ней $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, т. е. хоть одна из производных x' , y' и z' не обращается в нуль.

Согласно доказанному выше, во всякой неособой точке кривой Γ существует касательная.

В определении 15 формально правильнее было бы говорить об особой и неособой точке кривой при данном ее представлении. Это не было сделано, поскольку понятие особой точки не зависит от выбора представления кривой. Поясним и докажем это.

Допустимыми преобразованиями параметра для дифференцируемых кривых являются функции $t = t(\tau)$, которые, как сами, так и обратные к ним, являются строго монотонными дифференцируемыми функциями. Поэтому в силу теоремы 3 п. 9.6 о производной обратной функции имеем $t'_\tau t' = 1$. Отсюда следует, что для каждого допустимого преобразования $t = t(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, параметра дифференцируемой кривой всегда $t'(\tau) \neq 0$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$. Поскольку

$$x_\tau^2 + y_\tau^2 + z_\tau^2 = (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) t_\tau^2,$$

то неособая точка при одном представлении дифференцируемой кривой будет одновременно неособой и при любом другом ее представлении.

Определение 16. Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется гладкой.

Кривая, представимая как сумма конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.

Отметим, что если плоская кривая имеет явное представление $y = y(x)$ или $x = x(y)$, то для нее вектор $(x'(t), y'(t))$ — всегда не нулевой: в первом случае это $(1, y')$, а во втором — $(x', 1)$.

Аналогичным образом определяется касательная как предельное положение секущей и кривой $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b\}$ в точке $\mathbf{r}(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, и в случае, когда $\mathbf{r}'(t_0) = 0$, но существует некоторое натуральное $n > 1$, для которого $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq 0$.

Если все $\mathbf{r}^{(k)}(t_0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, а $\mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq 0$, то раскладывая $\Delta \mathbf{r}$ по формуле Тейлора, получаем

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \frac{1}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(t_0) \Delta t^n + o(\Delta t^n), \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t^n}$ направлен параллельно секущей $l_{\Delta t}$, проходящей через точки $r(t_0)$ и $r(t_0 + \Delta t)$. Из написанного равенства следует, очевидно, что существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t^n} = \frac{1}{n!} \mathbf{r}^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

Поэтому в этом случае предельное положение секущей $l_{\Delta t}$, т. е. касательная в точке $r(t_0)$, является прямой, проходящей через точку $r(t_0)$ параллельно вектору $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$.

16.5. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Прежде чем определять понятие длины дуги кривой, введем понятие разбиения отрезка — понятие, которое будет неоднократно встречаться и в дальнейшем.

Определение 17. Для всякого отрезка $[a, b]$ систему его точек $t_i, i=0, 1, 2, \dots, n$, таких, что

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b,$$

будем называть его разбиением и обозначать $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b\}$ и пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$.

Положим

$$\sigma_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|.$$

Очевидно (рис. 65), σ_τ — длина ломаной с вершинами $r(a), r(t_1), \dots, r(t_{n-1}), r(b)$, т. е. как обычно говорят, ломаной, вписанной в кривую Γ .

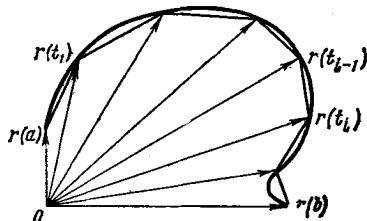


Рис. 65

Всякую ломаную, в частности и вписанную в кривую $\Gamma = \{\mathbf{r}(t); a \leq t \leq b\}$, можно рассматривать как кривую в смысле данного выше определения, если только задать ее представление. Пусть λ — ломаная, т. е. множество, состоящее из конечного числа отрезков с вершинами в точках M_0, M_1, \dots, M_n (эти отрезки называются звеньями ломаной). Возьмем некоторый отрезок $[a, b]$ и какое-либо его разбиение на n отрезков: $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$. Будем для простоты всегда считать, что представлением ломаной является непрерывное отображение $\rho(t)$, линейно отображающее каждый отрезок $[t_{i-1}, t_i]$ на отрезок $M_{i-1}M_i$, $i=1, 2, \dots, n$; таким образом, если обозначить через ρ_i радиус-вектор точки M_i , $i=0, 1, \dots, n$, то векторное представление ломаной будет иметь вид

$$\rho(t) = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (t - t_{i-1}) + \rho_{i-1}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Если $M_{i-1} \neq M_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$, то ломаная называется *невырожденной*.

Определение 18. Величина $S_\Gamma = \sup_{\tau} \sigma_\tau$, где верхняя грань взята по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$, называется длиной кривой Γ . Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой.

В силу этого определения спрямляемость кривой и ее длина не зависят от выбора представления кривой и всегда

$$0 \leq S_\Gamma \leq +\infty.$$

Упражнение 1. Доказать, что кривая, являющаяся частью спрямляемой кривой, также спрямляема.

Лемма 2. Пусть $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, тогда

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \quad (16.6)$$

Доказательство. Пусть $a < c < b$ и

$$\Gamma = \{r(t), a \leq t \leq b\}, \quad \Gamma_a = \{r(t), a \leq t \leq c\}, \quad \Gamma_b = \{r(t), c \leq t \leq b\}.$$

Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$, а τ^* — разбиение этого же отрезка, совпадающее с τ , если точка c входит в разбиение τ , и получающееся из τ добавлением к нему точки c , если эта точка не входит в разбиение τ . Разбиение τ^* является объединением двух разбиений отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, которые мы обозначим соответственно τ_a и τ_b , т. е. $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Очевидно, для длин ломаных, соответствующих разбиениям τ^* , τ_a и τ_b справедливо равенство $\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}$. Но $\sup_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup_{\tau_b} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$, следовательно,

$$\sigma_{\tau^*} \leq S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

При переходе от разбиения τ к разбиению τ^* , быть может, лишь одно звено $r(t_{i-1})r(t_i)$ заменяется двумя $r(t_{i-1})r(c)$ и $r(c)r(t_i)$, и поскольку $|r(t_{i-1})r(t_i)| \leq |r(t_{i-1})r(c)| + |r(c)r(t_i)|$, то $\sigma_\tau \leq \sigma_{\tau^*}$ и, следовательно,

$$\sigma_\tau \leq S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Но $S_\Gamma = \sup_{\tau} \sigma_{\tau}$, поэтому

$$S_\Gamma \leq S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \quad (16.7)$$

Докажем теперь обратное неравенство. Для произвольных τ_a и τ_b разбиений соответственно отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ и разбиения $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ отрезка $[a, b]$ имеем $\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leq S_\Gamma$. Отсюда $\sigma_{\tau_a} \leq S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$; фиксируя разбиение τ_b и переходя к верхней грани σ_{τ_a} при всевозможных τ_a , получаем неравенство $S_{\Gamma_a} \leq S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$, и затем —

$$S_{\Gamma_a} + \sigma_{\tau_b} \leq S_\Gamma.$$

Беря верхнюю грань множества чисел, которое получается при всевозможных разбиениях τ_b , будем иметь:

$$S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b} \leq S_{\Gamma}. \quad \square$$

Отметим, что в лемме 2 не предполагается, что рассматриваемые кривые спрямляемы.

Задача 12. Построить пример неспрямляемой кривой.

Теорема 1. Если кривая $\Gamma = \{r(t), a \leq t \leq b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема, и ее длина S_{Γ} удовлетворяет неравенству

$$|r(b) - r(a)| \leq S_{\Gamma} \leq M(b-a), \quad (16.9)$$

где

$$M = \max_{[a, b]} |r'(t)|. \quad (16.10)$$

Отметим, что в силу непрерывности производной $r'(t)$, ее абсолютная величина $|r'(t)|$ также непрерывна и потому достигает на отрезке $[a, b]$ своего наибольшего значения M .

Доказательство. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a, b]$. Тогда применив неравенство (15.11), получим

$$\begin{aligned} |r(b) - r(a)| &= \left| \sum_{i=1}^n r(t_i) - r(t_{i-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |r(t_i) - r(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |r'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}), \end{aligned} \quad (16.11)$$

где $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Поскольку

$$\sum_{i=1}^n |r(t_i) - r(t_{i-1})| = \sigma_{\tau}$$

— длина вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению τ , и для всех $i = 1, 2, \dots, n$ в силу (16.10) имеет место неравенство $|r'(\xi_i)| \leq M$, то из неравенства (16.11) для любого разбиения τ , будем иметь

$$|r(b) - r(a)| \leq \sigma_{\tau} \leq M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b-a). \quad (16.12)$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по τ , получим утверждение теоремы. \square

Теорема 2. Пусть кривая $\Gamma = \{r(t) = (x(t), y(t), z(t)); a \leq t \leq b\}$ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги s , отсчитываемая от начала $r(a)$ кривой Γ или соответственно от ее конца $r(b)$, является возрастающей, соответственно убывающей,

непрерывно дифференцируемой функцией параметра t ; при этом

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left| \frac{dr}{dt} \right|, \quad (16.13)$$

соответственно

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = -\left| \frac{dr}{dt} \right|. \quad (16.14)$$

Доказательство. Пусть $s = s(t)$ длина дуги кривой Γ от точки $r(a)$ до точки $r(t)$. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$ и $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Очевидно, что функция $s = s(t)$ возрастает на отрезке $[a, b]$, т. е. если $\Delta t > 0$, то $\Delta s \geq 0$; если же $\Delta t < 0$, то $\Delta s \leq 0$. Поэтому всегда $\frac{\Delta s}{\Delta t} \geq 0$.

Применив неравенство (16.9) к части кривой Γ , соответствующей отрезку $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при $\Delta t > 0$ (соответственно отрезку $[t_0 + \Delta t, t_0]$ при $\Delta t < 0$), получим:

$$|\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)| \leq |\Delta s| \leq M |\Delta t|;$$

откуда

$$\left| \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq M, \quad (16.15)$$

где M — наибольшее значение $|\mathbf{r}'(t)|$ на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при $\Delta t > 0$ или на отрезке $[t_0 + \Delta t, t_0]$ при $\Delta t < 0$.

В силу непрерывности производной $\mathbf{r}'(t)$ ее абсолютная величина $|\mathbf{r}'(t)|$ также непрерывна и потому ее наибольшее значение существует, т. е. принимается в некоторой точке $\xi = t_0 + \theta \Delta t$, $0 < \theta < 1$, указанного отрезка. Поэтому неравенство (16.15) можно переписать в виде

$$\left| \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} \right| \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq |\mathbf{r}'(t_0 + \theta \Delta t)|, \quad 0 < \theta < 1.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, в левой части неравенства в силу определения производной, а в правой в силу непрерывности производной $\mathbf{r}'(t)$ в точке $t = t_0$, получим $|\mathbf{r}'(t_0)|$. Следовательно, предел $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и также равен $|\mathbf{r}'(t_0)|$, т. е. существует производная $s'(t_0)$ и $s'(t_0) = |\mathbf{r}'(t_0)|$.

Если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ и потому

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

Если теперь $\sigma = \sigma(t)$ — переменная длина дуги, отсчитываемая от конца $r(b)$ кривой Γ , то, очевидно, $\sigma = S_\Gamma - s$, откуда, дифференцируя это равенство по t , будем иметь

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -\left| \frac{dr}{dt} \right|. \quad \square$$

Следствие 1. Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой является переменная длина дуги s , то

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = 1. \quad (16.16)$$

Это сразу следует из формулы $\left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$ при $t = s$.

Замечание. Формула (16.16) имеет простой геометрический смысл. Пусть параметром непрерывно дифференцируемой кривой Γ является переменная длина дуги s : $\Gamma = \{r(s); 0 \leq s \leq S_\Gamma\}$. Величина $|\Delta r| = |r(s + \Delta s) - r(s)|$ равна длине отрезка, соединяющего точки $r(s)$ и $r(s + \Delta s)$. Этот отрезок называется обычно хордой, стягивающей дугу кривой Γ с началом в точке $r(s)$ и концом в точке $r(s + \Delta s)$. Длина указанной дуги, очевидно, равна $|\Delta s|$ (рис. 66). Поскольку $\left| \frac{dr}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right|$, то из равенства (16.16) следует, что

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta r}{\Delta s} \right| = 1.$$

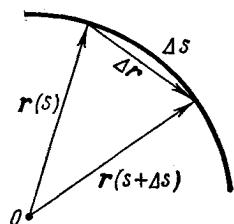


Рис. 66

Это означает, что предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице, когда дуга стягивается в точку. В этом и состоит геометрический смысл формулы (16.16).

Следствие 2. Для всякой непрерывно дифференцируемой кривой Γ без особых точек, т. е. для всякой гладкой кривой, существует ее представление $r = r(s)$, в котором за параметр s взята переменная длина дуги кривой Γ .

Доказательство. Пусть непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ не имеет особых точек, т. е. $r'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$. В этом случае переменная длина дуги $s = s(t)$ является строго монотонно возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией, ибо $\frac{ds}{dt} = |r'| > 0$ во всех точках $[a, b]$. Поэтому существует обратная функция $t = t(s)$, $0 \leq s \leq S_\Gamma$, которая также строго монотонно возрастает и имеет непрерывную не обращающуюся в ноль производную на отрезке $[0, S_\Gamma]$, т. е. функция $t = t(s)$ является допустимым преобразованием параметра для непрерывно дифференцируемых кривых без особых точек и представление $r = r(t(s))$ является искомым представлением, в котором роль параметра играет переменная длина дуги. \square

Выясним теперь геометрический смысл координат вектора $\frac{dr}{ds}$.

Обозначим через α , β и γ углы, образованные вектором $\frac{dr}{ds}$ или, что то же, касательной к кривой $\Gamma = \{r(s)\}$ соответственно с ось-

ми Ox , Oy и Oz . Тогда из равенства $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$, очевидно, следует, что проекции вектора $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ на оси координат равны соответственно направляющим косинусам вектора $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$: $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (16.17)$$

Наряду с этим для вектор-функции $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, как для всякой вектор-функции (см. п. 15.2), имеем

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right). \quad (16.18)$$

Сравнивая (16.17) и (16.18), получаем

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma. \quad (16.19)$$

В качестве примера рассмотрим кривую, называемую *винтовой линией*. Эта кривая задается представлением

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \\ a^2 + b^2 \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Очевидно, что винтовая линия является бесконечно дифференцируемой кривой, и так как

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \\ = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,$$

то она не имеет особых точек (рис. 67). Следовательно, переменную длину ее дуги можно принять за параметр.

Найдем соответствующее представление. Согласно формуле (16.13), имеем

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отсюда $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и, так как $t(0) = 0$, то $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$. Поэтому искомое представление имеет вид

$$x(s) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y(s) = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ z(s) = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leq s \leq T \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Упражнение 2. Доказать, что для спрямляемой кривой без точек самопересечения переменная длина дуги является непрерывной строго монотонной функцией параметра.

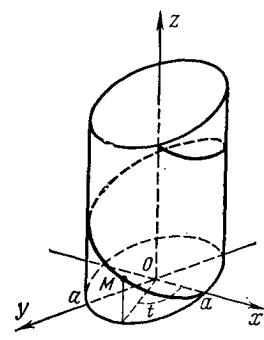


Рис. 67

16.6. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Пусть $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ — непрерывно дифференцируемая плоская кривая, лежащая в плоскости xOy ,

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

и пусть $s = s(t)$ — переменная длина дуги кривой Γ ; для ее производной из формул (16.13) и (16.14) получаем:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad (16.20)$$

здесь знак «+» берется, если длина дуги $s(t)$ отсчитывается от начальной точки $r(a)$ кривой, и знак «—», если от конечной точки $r(b)$. Из формулы (16.20) для дифференциала дуги получаем выражение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (16.21)$$

Пусть точка $(x(t_0), y(t_0))$ — неособая, т. е. $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) > 0$, например $x'(t_0) \neq 0$. Пусть для определенности $x'(t_0) > 0$, тогда в некоторой окрестности точки t_0 также $x'(t) > 0$ и, значит, функция $x(t)$ строго монотонно возрастает в этой окрестности; поэтому существует обратная непрерывно дифференцируемая функция $t = t(x)$. Подставляя ее в представление кривой Γ , находим

$$y = y(t(x)) = f(x),$$

т. е. в некоторой окрестности неособой точки непрерывно дифференцируемая кривая, является графиком непрерывно дифференцируемой функции f ; точнее, существуют окрестность точки t_0 и непрерывно дифференцируемая функция f , определенная на некотором интервале, содержащем точку $x_0 = x(t_0)$, такие, что часть кривой, соответствующая значениям параметра, принадлежащим указанной окрестности точки t_0 , является графиком функции f .

В случае, если кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, формула (16.20) превращается в формулу

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + y'^2}, \text{ и, следовательно, } ds = \pm \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Рассмотрим геометрический смысл формулы (16.21) в случае, когда Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, и длина дуги кривой отсчитывается от начальной точки кривой (рис. 68). Пусть

$$x_0 \in [a, b], x_0 + dx \in [a, b], y_0 = f(x_0), M_0 = (x_0, y_0),$$

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + dx), M = (x_0 + dx, y_0 + \Delta y),$$

M_0N — касательная в точке M_0 , $PM = \Delta y$ — приращение функции в точке $x_0 + dx$, $PN = dy$ — приращение ординаты касательной

в точке $x_0 + dx$. Треугольник M_0NP прямоугольный; поскольку $M_0P = dx$, $PN = dy$, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

т. е. длина отрезка касательной M_0N равна ds . Иначе говоря, приращение длины касательной $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ равно главной части ds приращения длины дуги Δs .

Если теперь на кривой Γ в качестве параметра взята переменная длина дуги s : $\Gamma = \{r(s); 0 \leq s \leq S_\Gamma\}$, то, согласно (16.19),

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta = \sin \alpha, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad (16.22)$$

где (рис. 69) α — угол, образованный касательной с осью Ox , а β — с осью Oy .

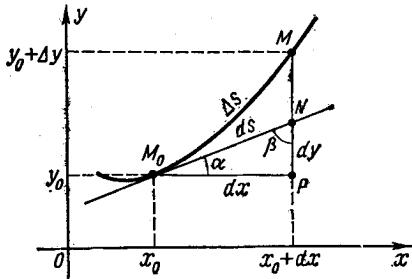


Рис. 68

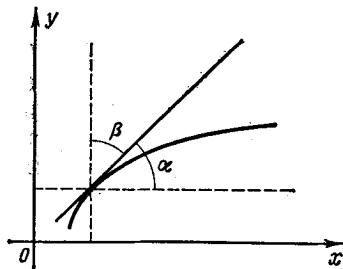


Рис. 69

Отметим, что эти формулы могут быть получены применением к «криволинейному треугольнику» M_0MP (см. рис. 68) формул, выражающих синус и косинус углов обычного прямоугольного треугольника через его катеты и гипотенузу, считая стороны указанного «треугольника» M_0MP равными соответственно dx , dy , ds . Подобное обстоятельство имеет место и для пространственных формул (16.19). Такой метод получения формул (16.19) и (16.22) является, конечно, необоснованным — он не имеет доказательной силы, однако он облегчает запоминание этих формул.

16.7. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть теперь годограф Γ непрерывно дифференцируемой вектор-функции $r(t)$ есть траектория движущейся материальной точки, а параметр t — время движения. Обозначим переменную длину дуги, отсчитываемую от некоторой начальной точки $r(t_0)$, через $s = s(t)$. Пусть $t > t_0$; положив $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ согласно (16.13), получим

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

т. е. длина вектора $\frac{dr}{dt}$ совпадает с величиной скорости в рассматриваемой точке (см. п. 9.4); сам же вектор $\frac{dr}{dt}$, как мы знаем (см. п. 16.2), направлен по касательной. Вектор $\frac{dr}{dt}$ называется в этом случае *скоростью движения* в данной точке и обозначается \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}.$$

§ 17. КРИВИЗНА КРИВОЙ

17.1. ДВЕ ЛЕММЫ. РАДИАЛЬНАЯ И ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ СКОРОСТИ

Докажем две полезные для дальнейшего леммы о производных вектор-функции.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет производную в точке t_0 . Если длина вектора $\mathbf{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 постоянна, то вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогонален вектору $\mathbf{r}(t_0)$, т. е.*

$$\mathbf{r}'(t_0) \mathbf{r}(t_0) = 0. \quad (17.1)$$

Доказательство. По условию, существует окрестность точки t_0 , в которой длина вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянна: $|\mathbf{r}(t)| = c$, где c — константа. Поэтому для всех точек указанной окрестности имеем $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$, а следовательно, и $\mathbf{r}^2(t) = c^2$. Вычислив производную функции $\mathbf{r}^2(t)$ в точке t_0 , получим (см. п. 15.2) $2\mathbf{r}(t_0) \mathbf{r}'(t_0) = 0$ откуда и следует (17.1). \square

Физическая интерпретация этой леммы состоит в том, что у материальной точки, движущейся так, что она все время остается на поверхности сферы, ее скорость направлена по касательной к этой сфере и, следовательно, перпендикулярна радиус-вектору.

Пусть функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 и пусть в этой окрестности $\mathbf{r}(t) \neq 0$ (если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 , то условия неравенства нулю радиус-векторов $\mathbf{r}(t)$ в достаточно малой окрестности точки t_0 всегда можно добиться переносом начала координат). Пусть $t = t_0 + \Delta t \in U(t_0)$ и пусть $\varphi = \varphi(t)$ — угол (выраженный в радианах) между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$, $|\varphi| \leq \pi$, причем будем считать, что $\varphi(t) \geq 0$ для $\Delta t \geq 0$ и $\varphi \leq 0$ для $\Delta t < 0$. В точке t_0 для приращения $\Delta\varphi$ функции φ имеем

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t),$$

ибо $\varphi(t_0) = 0$; поэтому всегда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \geq 0$.

Определение 1. Производная $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ называется скоростью вращения вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается $\omega = \omega(t_0; \mathbf{r}(t))$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (17.2)$$

Заметим, что, если выбрать противоположный отсчет углов, т. е. определить угол между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$ как угол $\psi = -\varphi$, то, очевидно,

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \omega(t_0; \mathbf{r}) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left| \frac{d\psi}{dt} \right|.$$

Таким образом, как при одном, так и при другом отсчете углов φ между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$ всегда

$$\omega(t_0; \mathbf{r}) = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

Лемма 2. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 и $\mathbf{r}(t_0) \neq 0$. Тогда, если в точке t_0 существует производная $\mathbf{r}'(t_0)$, то в этой точке существует и скорость вращения $\omega = \omega(t_0; \mathbf{r}(t))$, причем

$$\omega = \frac{1}{r^2(t_0)} |\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}'(t_0)|. \quad (17.3)$$

Следствие. Если в дополнение к условиям леммы длина вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянна: $|\mathbf{r}(t)| = r$, r — константа, то

$$\omega = |\mathbf{r}'(t)|/r. \quad (17.4)$$

Доказательство. В силу существования производной $\mathbf{r}'(t_0)$ функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 . Отсюда и из условия $\mathbf{r}(t_0) \neq 0$ следует, что для всех достаточно малых Δt выполняется неравенство $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) \neq 0$ и, следовательно, определен угол $\Delta\varphi$ между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$. Из непрерывности вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 следует также *) и непрерывность в точке t_0 функции $\varphi(t)$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi = 0$$

(как всегда $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, ибо $\varphi(t_0) = 0$).

Для вычисления производной (17.2) заменим бесконечно малую $\Delta\varphi$ на эквивалентную ей при $\Delta t \rightarrow 0$ бесконечно малую $\sin \Delta\varphi$ (см. лемму в п. 8.2), которую можно найти из формулы

$$|\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)| = |\mathbf{r}_0(t_0)| |\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)| |\sin \Delta\varphi|.$$

*) Это вытекает, например, из равенства $\cos \varphi = \frac{\mathbf{r}(t_0) \cdot \mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t_0)| |\mathbf{r}(t)|}$.

В силу теоремы 2 п. 8.3 о замене бесконечно малых им эквивалентными при вычислении пределов имеем

$$\begin{aligned}\omega = \frac{d\varphi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|}{|\mathbf{r}(t_0)| |\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)| |\Delta t|} = \frac{1}{\mathbf{r}^2(t_0)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}(t_0 + \Delta t)|}{|\Delta t|}. \quad (17.5)\end{aligned}$$

Здесь снова была использована непрерывность вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Далее, поскольку функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 , то

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0) \Delta t + \mathbf{e}(\Delta t) \Delta t,$$

где $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{e}(\Delta t) = \mathbf{0}$. Подставив это выражение для $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)$ в (17.5) и заметив, что $|\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}(t_0)| = 0$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{e}(\Delta t)| = 0$ получим:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}'(t_0)|}{\mathbf{r}^2(t_0)}. \quad \square$$

Доказательство следствия. Если $|\mathbf{r}(t)| = r$ — постоянная, то в силу леммы 1 $\mathbf{r}(t_0) \mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$, т. е. $|\mathbf{r}(t_0)| |\mathbf{r}'(t_0)| \cos \widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = 0$. Поскольку $|\mathbf{r}(t_0)| \neq 0$, то либо $|\mathbf{r}'(t_0)| = 0$, либо угол $\widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$ между векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0)$ равен $\pm \pi/2$ и, следовательно, $|\sin \widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}'}| = 1$. В обоих случаях

$$|\mathbf{r}(t_0) \times \mathbf{r}'(t_0)| = |\mathbf{r}(t_0)| |\mathbf{r}'(t_0)| \sin \widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = r |\mathbf{r}'(t_0)|.$$

Подставляя это выражение в формулу (17.3), получим (17.4). \square

Леммы 1 и 2 остаются справедливыми и в случае, если в них под окрестностями понимать односторонние окрестности.

Для выяснения физического смысла формул (17.3) и (17.4) будем снова интерпретировать кривую, описываемую концом радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, как траекторию движения материальной точки, а параметр t — как время. Пусть длина вектора $\mathbf{r}(t)$ остается постоянной: $|\mathbf{r}(t)| = r$, т. е. точка движется по сфере радиуса r . Рассмотрим движение точки в каждый момент времени как вращение около так называемой мгновенной оси вращения, т. е. оси, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскости движения (так называется плоскость, проходящая через радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ параллельно скорости $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$). Тогда вектор $\omega = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')/r^2$ физически означает вектор угловой скорости, а формулы (17.3) и (17.4) выражают связь между угловой скоростью ω и линейной скоростью \mathbf{v} . В частности, формула (17.4) в этих обозначениях принимает вид

$$|\omega| = |\mathbf{v}|/r.$$

Замечание. Используя лемму 1, можно легко получить разложение производной вектор-функции на две ортогональные составляющие: в направлении вектора $\mathbf{r}(t)$ (*радиальная составляющая*) и в перпендикулярном направлении (*трансверсальная составляющая*).

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0 , $\mathbf{r}(t) \neq 0$ и существует производная $\mathbf{r}'(t_0)$. Положим $\mathbf{r}_0(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|}$, очевидно, $|\mathbf{r}_0(t)| = 1$. В точке t_0 существует производная

$$\frac{d|\mathbf{r}|}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\mathbf{r}^2} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{r}_0\mathbf{r}',$$

следовательно, в точке t_0 существует и производная $\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$, которая, согласно лемме 1, ортогональна вектору $\mathbf{r}_0(t_0)$, а потому, и вектору $\mathbf{r}(t_0)$.

Дифференцируя равенство $\mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|\mathbf{r}_0(t)$ в точке t_0 , получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d|\mathbf{r}|}{dt} \mathbf{r}_0 + |\mathbf{r}| \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = (\mathbf{r}_0\mathbf{r}')\mathbf{r}_0 + |\mathbf{r}| \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}. \quad (17.6)$$

Это и есть искомое разложение.

В случае, если годограф вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является траекторией движущейся материальной точки, то формула (17.6) дает разложение ее скорости на составляющую поступательного движения (радиальная составляющая) и составляющую вращательного движения (трансверсальная составляющая).

17.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ КРИВОЙ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть $\Gamma = \{\mathbf{r}(s); 0 \leq s \leq S\}$ — непрерывно дифференцируемая и, следовательно, спрямляемая кривая, s — переменная длина дуги $0 \leq s_0 \leq S$, $\Delta s = s - s_0$, а $\alpha = \alpha(s)$ — угол между касательными к кривой Γ в точках $\mathbf{r}(s_0)$ и $\mathbf{r}(s_0 + \Delta s)$, причем будем считать, что $\alpha(s) \geq 0$ для $\Delta s \geq 0$ и $\alpha(s) \leq 0$ для $\Delta s < 0$. Очевидно, $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$, ибо $\alpha(s_0) = 0$.

Пусть теперь $\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$. Как было показано, $\mathbf{t}(s)$ является единичным вектором (см. (16.16)), параллельным касательной к кривой в соответствующей точке (см. п. 16.4), поэтому угол $\Delta\alpha$ является и углом между векторами $\mathbf{t}(s_0)$ и $\mathbf{t}(s_0 + \Delta s)$.

Определение 2. Угловая скорость вращения касательного единичного вектора $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ в данной точке кривой называется кривизной $k(s_0)$ кривой в этой точке, $k(s_0) = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha(s_0)}{ds}$.

Опуская для краткости значение аргумента, получаем

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (17.7)$$

Поскольку $|t|=1$, то в силу следствия леммы 2 из п. 17.1 отсюда имеем

$$k = \left| \frac{dt}{ds} \right| \quad (17.8)$$

(если, конечно, производная $\frac{dt}{ds}$ существует).

Определение 3. Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны в данной точке и обозначается R , т. е. $R=1/k$.

Пусть Γ — окружность радиуса R . В этом случае угол $\Delta\alpha$ между касательными равен углу, образованному радиусами точек касания (рис. 70), а для длины дуги Δs между этими точками имеется формула $\Delta s = R\Delta\alpha$. Поэтому $\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}$.

По определению же кривизны для окружности имеем

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, в случае окружности ее кривизна k постоянна (не зависит от точки) и равна обратной величине радиуса; радиус же кривизны окружности равен ее радиусу. Отсюда и произошел термин «радиус кривизны».

Достаточные условия существования кривизны в данной точке и метод ее вычисления даются следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда в каждой ее точке существует кривизна и

$$k = |r' \times r''| / |r'|^3. \quad (17.9)$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначаются производные по произвольному параметру t . Производные по длине дуги s будем обозначать символом $\frac{d}{ds}$.

Доказательство. При предположениях теоремы переменная длина дуги $s = s(t)$, $a \leq t \leq b$, $0 \leq s \leq S$, кривой Γ может быть принята на этой кривой за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5). При этом единичный касательный вектор $t = \frac{dr}{ds}$ является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией и поэтому для него при каждом значении $s_0 \in [0, S]$ определена ско-

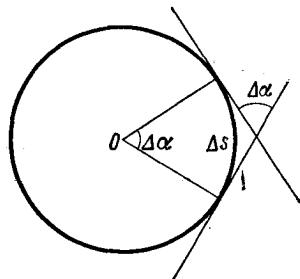


Рис. 70

рость его вращения $\omega(s_0; t)$, т. е. в каждой точке кривой Γ определена кривизна

$$k(s_0) = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha}{ds}, \quad (17.10)$$

где $\alpha = \alpha(s)$ — угол между векторами $\frac{dr(s_0)}{ds}$ и $\frac{dr(s)}{ds}$, выбранный, как указано в начале этого пункта. В частности, это означает, что для всех $s \in [0, S]$ выполняется неравенство $\frac{d\alpha(s)}{ds} \geq 0$.

Из формулы

$$\frac{dr(s)}{ds} = r'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{r'(t)}{s'}$$

следует, что векторы $\frac{dr(s)}{ds}$ и $r'(t)$ при $s = s(t)$ всегда коллинеарны, и поскольку функция $s'(t)$ не меняет знака, то указанные векторы либо всегда имеют одно направление (если $s'(t) > 0$), либо всегда противоположное (если $s'(t) < 0$).

При этом в первом случае достаточно малым приращениям Δt соответствуют приращения Δs того же знака, а во втором — противоположного. В силу сказанного, если $s_0 = s(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, и если $\beta = \beta(t)$ — угол между векторами $r'(t_0)$ и $r'(t)$, то либо для всех $t \in [a, b]$ будет $\beta = \alpha$, либо для всех $t \in [a, b]$ будет $\beta = -\alpha$; поэтому (см. п. 17.1)

$$\omega(t_0, r') = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|. \quad (17.11)$$

Теперь, используя формулы (17.10), (17.11) и лемму 2, получим

$$k(s_0) = \frac{d\alpha}{ds} = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \omega(t_0; r') \frac{1}{|s'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

(мы воспользовались также формулой (16.13)). \square

От формулы (17.9) легко перейти к выражению для кривизны в координатной записи. В самом деле, замечая, что $r' = (x', y', z')$, $r'' = (x'', y'', z'')$ и что

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

(где i, j, k — единичные векторы соответственно в направлении осей Ox, Oy, Oz), получаем

$$|r' \times r''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}, \quad (17.12)$$

с другой стороны

$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \quad (17.13)$$

Подставив (17.12) и (17.13) в (17.9), мы и найдем искомое выражение.

17.3. ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим дважды дифференцируемую кривую Γ без особых точек. У такой кривой существует дважды дифференцируемое представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — переменная длина дуги, $0 \leq s \leq S$.

Обозначим через \mathbf{n} единичный вектор в направлении вектора $\frac{dt}{ds}$, где $t = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — единичный касательный вектор к рассматриваемой кривой. Из формулы (17.8) следует, что \mathbf{n} определен лишь для тех точек, в которых кривизна $k \neq 0$, и что в этих точках

$$\frac{dt}{ds} = k\mathbf{n}. \quad (17.14)$$

Вектор t — единичный, поэтому вектор \mathbf{n} перпендикулярен (см. п. 17.1) вектору t . Формула (17.14) называется *формулой Френе* *).

Вектор $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$, а значит, и вектор $\mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ не зависят от выбора ориентации кривой. Действительно, если σ — переменная длина дуги кривой, отсчитываемая в противоположном, чем s , направлении, и, следовательно, если $\sigma = S - s$, то, заметая, что $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, получим

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2}.$$

Определение 4. Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная к касательной в этой точке, называется *нормалью к кривой в данной точке*. Нормаль к кривой, параллельная вектору \mathbf{n} , называется *главной нормалью*.

Вектор главной нормали \mathbf{n} с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δs^2 , указывает направление, в котором кривая в окрестности данной точки отклоняется от своей касательной (рис. 71). Действительно, выбирая на кривой в качестве параметра переменную длину дуги s , согласно формуле Тейлора для вектор-функции (см. п. 15.2), будем иметь

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0) = \frac{d\mathbf{r}(s_0)}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}(s_0)}{ds^2} \Delta s^2 + o(\Delta s^2),$$

или, заметив, что (см. 17.14))

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = t, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = k\mathbf{n}, \quad (17.15)$$

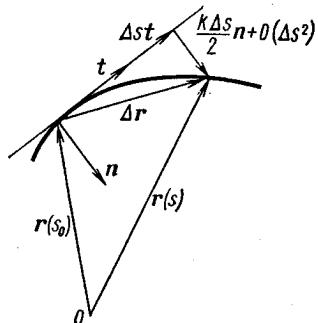


Рис. 71

* Ж. Френе (1801—1880) — французский математик.

получим

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta s t + \frac{1}{2} k \Delta s^2 \mathbf{n} + o(\Delta s^2);$$

поскольку $\frac{1}{2} k \Delta s^2 > 0$, то эта формула и доказывает справедливость нашего утверждения.

Определение 5. Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется соприкасающейся плоскостью.

В силу этого определения соприкасающаяся плоскость определена для точек, в которых $k \neq 0$. Найдем уравнение этой плоскости для кривой, заданной представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ с произвольным параметром t . Как и выше, производные по переменному t будем обозначать штрихом, а производные по длине дуги s — символом $\frac{d}{ds}$. Дифференцируя $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ как сложную функцию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s = s(t)$, получим (см. (17.15))

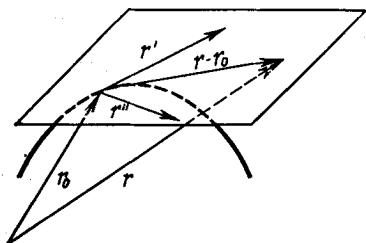


Рис. 72

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} s' = s' \mathbf{t},$$

$$\mathbf{r}'' = s'^2 \frac{dt}{ds} + s'' \mathbf{t} = s'^2 k \mathbf{n} + s'' \mathbf{t}. \quad (17.16)$$

Отсюда следует, что векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' также параллельны соприкасающейся плоскости; в силу же условия $k \neq 0$ выполняется неравенство $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \neq 0$ (см. (17.9)), и, значит, \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' не коллинеарны. Обозначим теперь через \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}'_0 и \mathbf{r}''_0 векторы \mathbf{r} , \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' в некоторой фиксированной точке данной кривой Γ , а через \mathbf{r} обозначим текущий вектор соприкасающейся плоскости; тогда смешанное произведение векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, \mathbf{r}'_0 и \mathbf{r}''_0 должно быть равно нулю, так как все они параллельны соприкасающейся плоскости (рис. 72):

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0, \mathbf{r}''_0) = 0.$$

Это и есть уравнение указанной плоскости в векторном виде. В координатном виде оно записывается следующим образом

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\mathbf{r}'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$, $\mathbf{r}''_0 = (x''_0, y''_0, z''_0)$.

В случае если в данной точке $k = 0$, то любая плоскость, проходящая через касательную в этой точке, называется соприкасающейся.

17.4. ЦЕНТР КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮТА КРИВОЙ

Определение 6. Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной точке и находящаяся от этой точки на расстоянии R в направлении вектора n , называется центром кривизны кривой в указанной ее точке.

Таким образом, если ρ является радиус-вектором центра кривизны, а r , как обычно, радиус-вектор данной точки кривой, то

$$\rho = r + Rn,$$

или, что то же (см. (17.15)),

$$\rho = r + \frac{1}{k^2} \frac{d^2r}{ds^2}. \quad (17.17)$$

Найдем выражение ρ через производные вектор-функции по произвольному параметру t . По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= r' \frac{dt}{ds} = \frac{r'}{s'}, \\ \frac{d^2r}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{r'}{s'} \right) = \left(\frac{r'}{s'} \right)' \frac{1}{s'} = \frac{r''s' - r's''}{s'^3}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

Эти формулы в силу формул (17.15), очевидно, являются обращением формул (17.16).

Подставив (17.18) в (17.17), получим

$$\rho = r + \frac{1}{k^2} \frac{s'r'' - s''r''}{s'^3}, \quad (17.19)$$

где (считая для простоты, что при возрастании параметра t длина дуги $s(t)$ также возрастает) $s' = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, откуда

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Формулы (17.17) и (17.19) можно рассматривать как представления некоторой кривой, точками которой являются центры кривизны данной кривой. Эта кривая называется *эволютой* данной кривой.

17.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И ЭВОЛЮТЫ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Все сказанное в предыдущем пункте, в частности, справедливо и для плоских кривых. Заметим лишь, что если кривая $\Gamma = \{\mathbf{r}(t)\}$ лежит в некоторой плоскости, то все производные вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ также лежат в этой плоскости. В самом деле, в ней лежит приращение вектор-функции $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$, а поэтому и отношение $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$. Отсюда легко следует, что и предел

этих отношений $r' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ лежит в указанной плоскости. Применяя то же рассуждение к r' , мы докажем, что и r'' находится в той же плоскости, и т. д.

Из сказанного следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то касательный вектор r , а если ее кривизна $k \neq 0$,

то и вектор главной нормали n лежат в той же плоскости. Поэтому эта плоскость является соприкасающейся плоскостью для рассматриваемой кривой.

Отметим также, что, если в случае кривой $\Gamma = \{r(s)\}$, лежащей в плоскости xOy в отличие от п. 17.2 через $\alpha(s)$ обозначить угол, образованный касательной в точке $r(s)$ с осью Ox (рис. 73), то $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ будет являться углом между касательными

в точках $r(s_0)$ и $r(s_0 + \Delta s)$. Если угол α возрастает вместе с s , т. е. если $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geq 0$ при $\Delta s > 0$, то $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$; если же α убывает с возрастанием s , то

$$k = - \lim_{\Delta s \rightarrow \infty} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = - \frac{d\alpha}{ds}.$$

Выпишем некоторые из формул, полученных в предыдущем пункте, считая, что кривая $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$ лежит в плоскости xOy : $r(t) = (x(t), y(t))$. Из формул (17.9), (17.12) и (17.13) имеем

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (17.20)$$

Обозначая (ξ, η) центр кривизны кривой Γ , из формулы (17.17) получим формулы, выражающие координаты ξ и η через производные по s :

$$\xi = x + R^2 \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2 \frac{d^2 y}{ds^2},$$

а из формул (17.19) и (17.20) следуют формулы, выражающие координаты центра кривизны через производные по произвольному параметру t :

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \frac{x' \sqrt{x'^2 + y'^2} - x' \frac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \quad (17.21) \end{aligned}$$

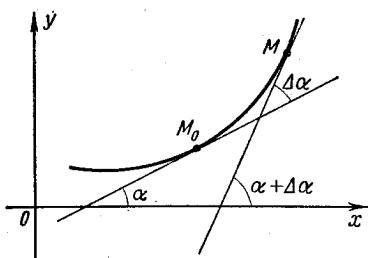


Рис. 73

аналогично,

$$\eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \quad (17.22)$$

Упражнение 1. Пусть Γ — дважды дифференцируемая плоская кривая без особых точек, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox и пусть $k^* = \frac{d\alpha}{ds}$ (следовательно, $|k^*| = k$) и $R^* = \frac{1}{k^*}$. Показать, что $\xi = x - R^* \sin \alpha$, $\eta = y + R^* \cos \alpha$, а также что $\xi = x - \frac{dy}{d\alpha}$, $\eta = y + \frac{dx}{d\alpha}$.

В случае, когда кривая является графиком функции $y = f(x)$, формулы (17.20), (17.21) и (17.22) принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad (17.23)$$

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''} y', \quad (17.24)$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Примеры. 1. Найдем кривизну и эволюту параболы $y = ax^2$, $a > 0$.

Замечая, что $y' = 2ax$, $y'' = 2a$, по формуле (17.23) имеем $k = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$. Чтобы найти уравнение эволюты, воспользуемся формулами (17.24):

$$\xi = x - \frac{1+4a^2x^2}{2a} 2ax = -4a^2x^3, \quad \eta = ax^2 + \frac{1+4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2+1}{2a}.$$

Получилось параметрическое представление эволюты параболы с параметром x . Можно получить и ее явное представление, исключив этот параметр x . Для этого из первого равенства найдем $x^3 = -\xi/4a^2$, а из второго $x^2 = (2a\eta - 1)/6a^2$. Возводя первое получившееся равенство в квадрат, а второе в куб и приравнивая правые части, будем иметь

$$\left(\frac{\xi}{4a^2}\right)^3 = \left(\frac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^2, \text{ откуда } \xi = \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} \left(\eta - \frac{1}{2a}\right)^{3/2}.$$

Эта кривая, изображенная на рис. 74, является, как мы знаем (см. пример 2 в п. 14.3), полукубической параболой.

2. Найдем радиус кривизны и эволюту эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a \geq b > 0$.

Заметив, что $x' = -a \sin t$, $y' = b \cos t$, $x'' = -a \cos t$, $y'' = -b \sin t$, по формуле (17.20) получим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Поэтому из формул (17.21) и (17.22) следует, что

$$\xi = a \cos t - b \cos t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t,$$

$$\eta = b \sin t - a \sin t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

Это параметрическое представление искомой эволюты; параметр t можно исключить, возводя получившиеся равенства в степень $2/3$ и складывая их:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Эта кривая называется *астроидой* (рис. 75).

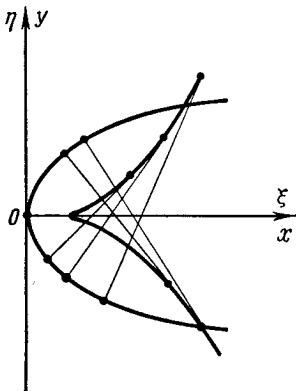


Рис. 74

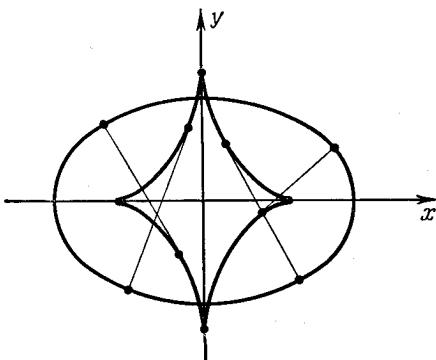


Рис. 75

Иногда для изображения кривой бывает удобно использовать так называемые полярные координаты (ρ, φ) , $\rho \geq 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, где ρ — длина радиус-вектора данной точки M , а φ — угол, образованный этим радиус-вектором с осью Ox . Таким образом, каждой точке плоскости, кроме начала координат, взаимно однозначно соответствует указанная упорядоченная пара (ρ, φ) ; для начала же координат имеем $\rho = 0$, а угол φ не определен (рис. 76).

Если $M = (x, y)$ где, как обычно, x и y — декартовы координаты точки M , то

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (17.25)$$

Обратная связь выражается формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} + k\pi,$$

где $k = 0$, если $x \geq 0$, $k = 1$, если $x < 0$, $y > 0$, и $k = -1$, если $y < 0$; при этом, как обычно, при $x = 0$, $y \neq 0$ считается $\arctg \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$.

Иногда на угол φ не накладывают ограничения $-\pi < \varphi \leq \pi$, а обозначают через φ любой угол, для которого $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. В этом случае соответствие между упорядоченными парами (ρ, φ) , $\rho \neq 0$, и точками плоскости, отличными от начала координат, уже, очевидно, не является взаимно однозначным.

Если задана непрерывная функция

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad (17.26)$$

то, подставляя ее в (17.25), получаем

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad (17.27)$$

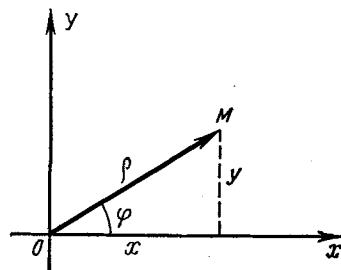


Рис. 76

т. е. параметрическое представление некоторой кривой Γ . В этом смысле можно говорить, что уравнение (17.26) задает в полярных координатах кривую Γ . Для вычисления кривизны, радиуса кривизны и эволюты кривой Γ , заданной уравнением (17.26), надо перейти к ее параметрическому представлению (17.27) и воспользоваться выведенными выше формулами.

Упражнение 2. Пусть в полярных координатах задана кривая $\rho = \rho(\varphi)$, пусть α — угол наклона ее касательной к оси Ox , а ω — угол, образованный этой касательной с продолжением радиус-вектора точки касания. Доказать, что $\alpha = \omega + \varphi$ и $\tan \omega = \rho/\rho'$.

3. Найти эволюту кривой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ называемой *кардиоидой*.

Указание. Полезно воспользоваться результатами упражнений 1 и 2.

Задача 13. Пусть Γ — дважды дифференцируемая кривая без особых точек, $\Gamma = \{r(t); a \leq t \leq b\}$, и пусть $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Проведем через точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ плоскость; доказать, что если в точке $r(t_0)$ кривизна $k \neq 0$, то при $\Delta t_1 \rightarrow 0$ и $\Delta t_2 \rightarrow 0$ эта плоскость стремится (определите это понятие) к соприкасающейся плоскости в точке $r(t_0)$.

Задача 14. В предположении предыдущей задачи проведем через те же три точки $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ и $r(t_0 + \Delta t_2)$ окружность. Доказать, что эта окружность при $\Delta t_1 \rightarrow 0$ и $\Delta t_2 \rightarrow 0$ стремится к окружности (определите это понятие), лежащей в соприкасающейся плоскости с центром в центре кривизны кривой и радиусом, равным радиусу кривизны в точке $r(t_0)$.

Эта предельная окружность называется *соприкасающейся окружностью* в данной точке кривой.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 18. МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

18.1. ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ТОЧЕК

Прежде чем перейти к изучению функций многих переменных, ознакомимся с некоторыми свойствами множеств, на которых эти функции задаются. Будем предполагать, что на рассматриваемой нами плоскости или в пространстве всегда задана некоторая прямоугольная система декартовых координат. Точки будем большей частью обозначать буквами $a, b, \dots, x, y, z, \dots$ *), а их координаты — теми же буквами с индексами, т. е. в случае плоскости будем писать $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, а в случае пространства $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Расстояние между точками x и y будем обозначать $\rho(x, y)$. Как известно, формула для расстояния между точками x и y в случае плоскости имеет вид

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

а в случае пространства —

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

В дальнейшем придется иметь дело не только с функциями двух и трех переменных, но и с функциями большего числа переменных, а поэтому полезно ввести понятие n -мерного пространства для любого $n = 1, 2, 3, \dots$.

Определение 1. Точкой x n -мерного пространства называется упорядоченная совокупность n действительных чисел $(x_1, \dots, x_n) = x$.

Число x_i называется i -координатой точки x ; $i = 1, 2, \dots, n$.

Расстояние между двумя точками (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_n) определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (18.1)$$

*) Иногда точки обозначаются и большими буквами, например M, N, P , а их координаты — буквами x, y, z .

Совокупность точек n -мерного пространства, для которых определено расстояние согласно формуле (18.1), называется n -мерным евклидовым пространством (или, более полно, n -мерным арифметическим евклидовым пространством) и обозначается через R^n или R_x^n .

Иногда для краткости вместо $x = (x_1, \dots, x_n)$ будем писать $x = (x_i)$.

В случае $n = 1$ пространство R^n совпадает с прямой, в случае $n = 2$ — с плоскостью, а в случае $n = 3$ — с пространством, изучаемым в элементарной и аналитической геометрии. В случае произвольного $n > 3$ не следует искать в нашем определении какого-то скрытого физического или геометрического смысла. Нашей целью является лишь построение некоторого математического аппарата, удобного для изучения функций многих переменных; определения и терминологию мы заимствуем из обычной геометрии, так как это позволяет включить прямую, плоскость и трехмерное пространство в одну более общую схему.

Расстояние между точками в n -мерном евклидовом пространстве R^n обладает следующими свойствами:

1°) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ в том и только том случае, когда $x = y$;

2°) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых двух точек x и y из R^n ;

3°) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых трех точек x, y и z из R^n .

Свойства 1° и 2° непосредственно следуют из формулы (18.1), третье же, обычно называемое «неравенством треугольника» и хорошо известное для обычного трехмерного пространства, в общем случае (при произвольном n) требует доказательства.

Докажем предварительно лемму.

Лемма 1 (Коши — Шварц^{*)}). Для любых действительных чисел a_k и b_k , $k = 1, 2, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (18.2)$$

Следствие.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (18.3)$$

Доказательство. Если все $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то неравенство (18.2) очевидно — обе его части обращаются в ноль. Если же $a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0$, то рассмотрим квадратичную функцию

$$F(t) = \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2. \quad (18.4)$$

^{*)} Г. Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

Очевидно, что

$$F(t) \geqslant 0. \quad (18.5)$$

Из условия (18.5) следует, что квадратный трехчлен (18.4) имеет либо совпадающие действительные корни, либо существенно комплексные корни, и поэтому его дискриминант не положителен:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leqslant 0.$$

Перенеся второе слагаемое в правую часть и извлекая квадратный корень, получим (18.2). \square

Для доказательства неравенства (18.3) оценим сумму $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2$, применяя неравенство (18.2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получим (18.3). \square
Вернемся теперь к свойству 3 расстояния между точками в пространстве R^n .

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и $z = (z_1, \dots, z_n)$. Положим $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, и значит, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда неравенство (18.3) перепишется следующим образом:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2},$$

или, согласно (18.1) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. \square

В дальнейшем в этом параграфе пространство R^n будем считать фиксированным (т. е. считать фиксированным число n).

Определение 2. Множество точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ n -мерного евклидова пространства R^n таких, что $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$, называется i -й координатной осью ($i = 1, 2, \dots, n$) этого пространства. Точка $O = (0, 0, \dots, 0)$ называется началом координат.

Очевидно, в случае $n = 2$ и $n = 3$ наше определение дает обычные координатные оси.

Замечание. Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат, точка M в одной системе имеет координаты

(x, y) , а в другой (ξ, η) , т. е. $M = (x, y) = (\xi, \eta)$. Ставя в соответствие упорядоченной паре чисел (x, y) упорядоченную пару (ξ, η) , получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех упорядоченных пар (x, y) и множеством всех упорядоченных пар (ξ, η) . При этом если

$$M' = (x', y') = (\xi', \eta'), \quad M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta''),$$

то

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2}.$$

Этот пример делает естественным следующее определение.

Пусть каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ поставлен в соответствие упорядоченный комплекс из n действительных чисел $\xi(x) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, таким образом, что для любых двух точек $x' = (x_1, \dots, x_n)$ и $x'' = (x'_1, \dots, x''_n)$ и соответствующих им комплексов $\xi(x') = (\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ и $\xi(x'') = (\xi''_1, \dots, \xi''_n)$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n (x''_i - x'_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\xi''_i - \xi'_i)^2,$$

тогда числа, входящие в совокупность (ξ_1, \dots, ξ_n) также называются *координатами точки* x («в другой системе координат»). При таком определении координат расстояние между двумя данными точками не меняется при изменении систем координат, т. е. при замене одной системы координат другой. В дальнейшем, если не оговорено что-либо другое, система координат считается фиксированной.

Если точка x задается координатами (x_1, \dots, x_n) , то иногда для ясности пространство R_x^n будет обозначать $R_{x_1}^n, \dots, x_n$.

Определение 3. Пусть $x \in R^n$ и $\varepsilon > 0$. Совокупность всех точек y пространства R^n , таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется n -мерным шаром с центром в точке x и радиусом ε или ε -окрестностью (а иногда сферической или правильнее, шаровой окрестностью) точки x в пространстве R^n и обозначается $U(x; \varepsilon)$; таким образом,

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}. \quad (18.6)$$

В координатной записи это определение выглядит так:

$$U(x; \varepsilon) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2 \right\},$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad \varepsilon > 0.$$

В случае прямой, т. е. при $n = 1$ (рис. 77) $x = x_1$, $y = y_1$, а поэтому

$$U(x; \varepsilon) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}.$$

Таким образом, $U(x; \varepsilon)$ является интервалом длины 2ε с центром в точке x , т. е. окрестностью точки x в рассмотренном выше смысле (см. п. 2.6).

В случае плоскости, т. е. при $n=2$ (рис. 78) $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ и

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < \varepsilon^2\}, \quad \varepsilon > 0,$$

т. е. $U(x; \varepsilon)$ — круг радиуса ε с центром в точке $x=(x_1, x_2)$, а в случае пространства, т. е. при $n=3$ окрестность точки $x=(x_1, x_2, x_3)$

$$U(x; \varepsilon) =$$

$$= \{y = (y_1, y_2, y_3) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2\}, \quad \varepsilon > 0,$$

является шаром радиуса ε с центром в точке (x_1, x_2, x_3) .

Таким образом, понятие окрестности обобщено на случай n -мерного евклидова пространства R^n . Однако наряду с указанным обобщением бывает полезно и другое обобщение этого понятия, а именно понятие так называемой прямоугольной окрестности.



Рис. 77

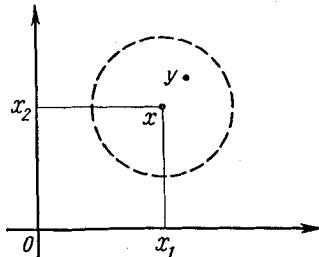


Рис. 78

Определение 4. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.
Множество

$$P(x; \delta_1, \dots, \delta_n) =$$

$$= \{y = (y_1, \dots, y_n) : x_i - \delta_i < y_i < x_i + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (18.7)$$

называется n -мерным параллелепипедом, а точка x — его центром.

Определение 5. Если $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$, то $P(x, \delta, \delta, \dots, \delta)$ называется n -мерным кубом с центром в точке x и обозначается $P(x; \delta)$.

Если $n=1$, то множество $P(x; \delta)$ является интервалом с центром в точке x длины 2δ ; если $n=2$, то множество $P(x; \delta_1, \delta_2)$ является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (их длины равны соответственно $2\delta_1$ и $2\delta_2$); при $n=3$ множество $P(x; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (их длины соответственно равны $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$).

Под n -мерным параллелепипедом, соответственно n -мерным кубом, понимается также множество, определенное вышеуказанны-

ными условиями хотя бы в одной системе координат (а не обязательно в данной, как это было сделано выше). В дальнейшем n -мерный параллелепипед и n -мерный куб понимаются лишь в узком смысле, т. е. в смысле данного выше определения при фиксированной системе координат.

Определение 6. Всякий n -мерный параллелепипед $P(x; \delta_1, \dots, \delta_n)$ называется *прямоугольной окрестностью* точки x .

Если прямоугольная окрестность точки является n -мерным кубом, то она называется также и *кубической окрестностью* этой точки.

Лемма 2. Какова бы ни была ε -окрестность $U(x; \varepsilon)$ точки $x \in R^n$, существует ее *прямоугольная окрестность* $P(x; \delta_1, \dots, \delta_n)$ такая, что

$$P(x; \delta_1, \dots, \delta_n) \subset U(x; \varepsilon), \quad (18.8)$$

и наоборот, какова бы ни была *прямоугольная окрестность* $P(x; \delta_1, \dots, \delta_n)$ точки $x \in R^n$, существует ее ε -окрестность $U(x; \varepsilon)$ такая, что

$$U(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \dots, \delta_n). \quad (18.9)$$

Эти утверждения геометрически очевидны, при $n=1, 2$ и 3 . Действительно, при $n=1$ понятия сферической и прямоугольной окрестностей совпадают. При $n=2$ лемма означает, что во всякий прямоугольник можно поместить круг с центром в центре прямоугольника, а во всякий круг можно вписать прямоугольник с центром в центре круга. Наконец, при $n=3$ лемма означает, что во всякий прямоугольный параллелепипед можно поместить шар с центром в центре этого параллелепипеда и во всякий шар можно вписать прямоугольный параллелепипед с центром в центре рассматриваемого шара. Нетрудно записать и доказать эти утверждения и в аналитической форме, использовав координатную запись. Этот способ, как это сейчас будет показано, легко обобщается и на случай произвольного n -мерного пространства.

Доказательство леммы. Для любых точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $a = (a_1, \dots, a_n)$ пространства R^n при каждом $i=1, 2, \dots, n$ справедливы неравенства

$$|x_i - a_i| \leq \rho(x, a) \leq |x_1 - a_1| + \dots + |x_n - a_n|. \quad (18.10)$$

Левое неравенство получится, если в выражении $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$ все слагаемые под корнем, кроме i -го, заменить нулем — в результате значение $\rho(x, a)$ может только уменьшиться.

Правое неравенство (18.10) следует из неравенства

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \leq |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|, \quad (18.11)$$

справедливого для любых действительных чисел $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, и проверяемого непосредственным возведением в квадрат. Полагая в (18.11) $\alpha_i = x_i - a_i, i = 1, 2, \dots, n$, получаем неравенство, стоящее в правой части (18.10).

Пусть задана шаровая окрестность $U(a; \varepsilon)$ точки a . Рассмотрим прямоугольную окрестность $P(a; \varepsilon/n)$, т. е. n -мерный куб с центром в точке a и ребром длины $2\varepsilon/n$ (случай $n=2$ изображен на рис. 79). Если $x \in P(a; \varepsilon/n)$ и, следовательно, в силу определения (18.7) выполняются неравенства $|x_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{n}, i = 1, 2, \dots, n$, то из (18.10) вытекает и справедливость неравенства

$$\rho(x, a) \leq |x_1 - a_1| + \dots + |x_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Это означает, что $x \in U(a; \varepsilon)$. Поскольку под x подразумевалась произвольная точка куба $P(a; \varepsilon/n)$, то $P(a; \varepsilon/n) \subset U(a; \varepsilon)$; таким образом (18.8) доказано.

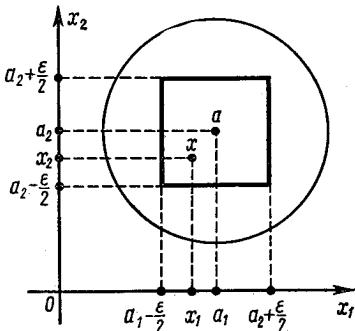


Рис. 79

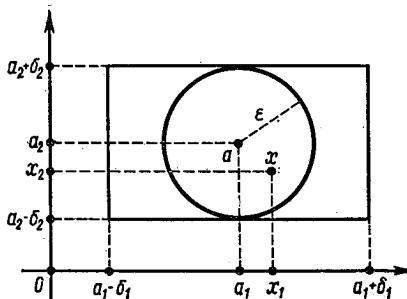


Рис. 80

Пусть теперь задана прямоугольная окрестность $P(a; \delta_1, \dots, \delta_n)$ точки a . Положим $\varepsilon = \min_{i=1, 2, \dots, n} \delta_i$ и рассмотрим шаровую окрестность $U(a; \varepsilon)$ этой точки (см. рис. 80). Если $x \in U(a; \varepsilon)$ то для любого $i = 1, 2, \dots, n$ в силу (18.10) получим неравенства

$$|x_i - a_i| \leq \rho(x, a) < \varepsilon \leq \delta_i,$$

т. е. согласно определению (18.7) $x \in P(a; \delta_1, \dots, \delta_n)$. Поскольку x — произвольная точка шара $U(a; \varepsilon)$, то $U(a; \varepsilon) \subset P(a; \delta_1, \dots, \delta_n)$. \square

На примере доказательства этой леммы хорошо видно, как используя для наглядности плоский чертеж, можно проводить доказательства в n -мерном пространстве.

От слишком поспешного использования аналогий, не подкрепленных математическими доказательствами, предостерегает пример, содержащийся в нижеследующем упражнении.

Упражнение 1. Доказать, что при $n=1, 2, 3, 4$ n -мерный куб с ребрами, длины которых равны единице, содержится в шаре единичного радиуса с центром в центре куба, а при $n \geq 5$ аналогичное утверждение несправедливо.

Определение 7. Пусть каждому натуральному числу m поставлена в соответствие некоторая точка $x^{(m)} \in R^n$ (не обязательно разные точки для разных m). Тогда множество $\{x^{(m)} : m = 1, 2, \dots\}$, состоящее из точек пространства R^n с различными номерами называется последовательностью точек этого пространства и обозначается

$$x^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, \text{ или } \{x^{(m)}\}.$$

Последовательность $\{y^{(k)}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x^{(m)}\}$ и обозначается

$$x^{(m_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ или } \{x^{(m_k)}\},$$

если для любого k существует такое m_k , что $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, причем если $k' < k''$, то $m_{k'} < m_{k''}$.

Определение 8. Точка $x \in R^n$ называется пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ и пишется

$$x = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}, \quad \text{если} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0.$$

Если $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}$, то говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ сходится к точке x . Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называется сходящейся.

Используя понятие окрестности, легко установить, что $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_ε , что для всех $m \geq m_\varepsilon$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Согласно лемме 2, получаем также $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}$ в том и только том случае, когда для любой прямоугольной окрестности $P(x; \delta_1, \dots, \delta_n)$ существует номер m_0 (зависящий от этой окрестности) такой, что для всех $m \geq m_0$

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \dots, \delta_n). \quad (18.12)$$

Конечно, при определении предела можно ограничиться и только одними кубическими окрестностями.

В случае $n=1$ определение 8 превращается в обычное определение предела числовой последовательности.

При $n=2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости R^2 к точке $x \in R^2$ означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x , начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности

лежат в этом круге (рис. 81). В случае $n=3$ сходимость последовательности точек $\{x^{(m)}\}$ пространства к точке $x \in R^3$ означает, что, каков бы ни был обычный трехмерный шар с центром в точке x , начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса шара, все члены данной последовательности лежат в этом шаре.

Как и в случае числовых последовательностей, можно сказать, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$, $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \dots$, если всякая ε -окрестность точки x содержит почти все точки данной последовательности, т. е. все, за исключением, быть может, конечного числа их.

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей, а именно последовательностей координат точек $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Для того чтобы последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in R^n$, $m = 1, 2, \dots$, сходилась к точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.13)$$

Доказательство. Докажем необходимость условия (18.13). Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; тогда, согласно (18.12) существует такое m_ε , что при всех $m \geq m_\varepsilon$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon),$$

т. е. для любого $i = 1, 2, \dots, n$ и при $m \geq m_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Докажем достаточность условия (18.13). Пусть $\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $P(x; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — заданная прямоугольная окрестность точки x . Тогда для каждого $\varepsilon_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) существует такой номер $m_i = m_i(\varepsilon_i)$, что для всех $m \geq m_i$ выполняется неравенство

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.14)$$

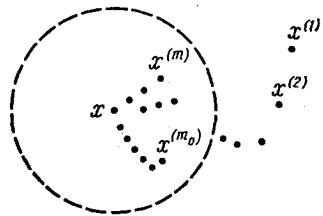


Рис. 81

Обозначим через m_0 наибольший из номеров m_1, \dots, m_n :

$$m_0 = \max \{m_1, \dots, m_n\};$$

тогда при $m \geq m_0$ и всех $i = 1, 2, \dots, n$ будут одновременно выполнены условия (18.14) и, следовательно (см. (18.7)), при $m \geq m_0$ будем иметь включение

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

что и означает, согласно (18.12), что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x. \quad \square$$

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единственен, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек пространства R^n , аналогичное критерию Коши для числовых последовательностей.

Определение 9. Множество $E \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n -мерный куб $P(O; a)$ с центром в начале координат O такой, что $E \subset P(O; a)$.

Аналогично лемме 2 доказывается, что, каков бы ни был шар $U(x; \varepsilon)$, существует куб $P(x; \delta)$ такой, что $P(x; \delta) \supset U(x; \varepsilon)$, и, наоборот каков бы ни был куб $P(x; \delta)$, существует шар $U(x; \varepsilon)$ такой, что $U(x; \varepsilon) \supset P(x; \delta)$. Отсюда следует, что можно дать еще одно эквивалентное предыдущему определение ограниченного множества.

Определение 9'. Множество $E \subset R^n$ называется ограниченным, если существует n -мерный шар $U(O; \varepsilon)$ такой, что $E \subset U(O; \varepsilon)$.

Определение 10. Последовательность точек $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \dots$, называется ограниченной, если множество ее значений, т. е. $\{x^{(m)} : m = 1, 2, \dots\}$, ограничено в пространстве R^n .

Если последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \dots$, сходится, то она ограничена, ибо каждая из координатных последовательностей $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, i — фиксировано ($i = 1, 2, \dots, n$), в этом случае также сходится и, значит, ограничена.

Теорема 2. Из любой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Эта теорема, как и в одномерном случае, обычно называется теоремой Больцано — Вейерштрасса.

Доказательство. Пусть задана ограниченная последовательность точек $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \dots$, пространства R^n . Очевидно, что каждая из n последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$,

$i = 1, 2, \dots, n$, также ограничена. Поэтому, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 3.6), последовательность $\{x_i^{(m)}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность; пусть это будет последовательность $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1 = 1, 2, \dots$. Последовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$, как подпоследовательность последовательности $\{x_2^{(m)}\}$, также ограничена и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть ею будет последовательность $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2 = 1, 2, \dots$. Последовательность $\{x_i^{(m_{k_2})}\}$, как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_i^{(m_{k_1})}\}$, очевидно, также будет сходящейся. Продолжив это рассуждение, через n шагов получим n сходящихся последовательностей $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, каждая из которых является подпоследовательностью, соответственно последовательности $\{x_i^{(m)}\}$. Тогда, согласно теореме 1 последовательность точек $\{x^{(m_{k_n})}\}$ пространства R^n будет также сходящейся. \square

Иногда бывает удобно рассматривать последовательности точек, стремящиеся к бесконечности.

Определение 11. Последовательность точек $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \dots$, называется стремящейся к бесконечности, если расстояние ее членов от начала координат $O = (0, 0, \dots, 0)$ стремится к бесконечности, т. е. если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty \quad (18.15)$$

В этом случае пишут

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$$

Поскольку для любой точки $a \in R^n$ в силу неравенства треугольника

$$\rho(x^{(m)}, O) \leq \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$$

справедливо неравенство

$$\rho(x^{(m)}, a) \geq \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O),$$

то при выполнении условия (18.15) имеем: $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, a) = +\infty$, т. е. если $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$, то расстояния от точек последовательности $\{x^{(m)}\}$ до любой фиксированной точки $a \in R^n$ стремятся к бесконечности.

Отметим, что, если $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$, то у точек $x^{(m)}$ существует по крайней мере одна координата, которая также стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$. Действительно, если $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$,

то например для каждого $p = 1, 2, \dots$ существует такой номер m_p , что для всех $m \geq m_p$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, O) = \sqrt{x_1^{(m)2} + \dots + x_n^{(m)2}} > p,$$

откуда в силу (18.11) следует, что

$$|x_1^{(m)}| + \dots + |x_n^{(m)}| > p. \quad (18.16)$$

Поэтому при данном p найдется такая i -ая координата, $i = 1, 2, \dots, n$, что для нее будем иметь

$$|x_i^{(m)}| \geq \frac{p}{n}.$$

В противном случае, т. е. если для всех $i = 1, 2, \dots, n$ имело бы место неравенство

$$|x_i^{(m)}| < \frac{p}{n},$$

то не выполнялось бы неравенство (18.16). Номеров координат конечное число, а поэтому один из них, обозначим его через i_0 , при $p = 1, 2, \dots$ будет повторяться бесконечно много раз, т. е. найдется такая подпоследовательность p_k натуральных чисел, что при всех $m \geq p_k$, $k = 1, 2, \dots$, будем иметь: $|x_{i_0}^{(m)}| \geq p_k/n$. Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} (p_k/n) = +\infty$, то для указанного i_0 получим

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{i_0}^{(m)} = \infty.$$

18.2. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ МНОЖЕСТВ

В настоящем пункте рассматриваются вопросы, вспомогательные для дальнейшего изложения математического анализа и связанные с геометрией n -мерного пространства.

Определение 12. Пусть E — некоторое множество точек евклидова пространства R^n . Точка $x \in E$ называется внутренней точкой множества (относительно пространства R^n), если существует ε -окрестность этой точки, содержащаяся во множестве E , т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $U(x; \varepsilon) \subset E$.

Определение 13. Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой (относительно рассматриваемого пространства R^n), называется открытым множеством.

Следует иметь в виду, что одна и та же точка одного и того же множества может быть его внутренней точкой относительно одного пространства, содержащего это множество, и не быть внутренней точкой рассматриваемого множества относительно другого пространства, также содержащего это множество. Рассмотрим, например, пространство R^2_{xy} , т. е. плоскость с некоторой фикси-

рованной системой декартовых координат, которые будем обозначать x и y . Ось x -ов этой плоскости, как всякая числовая ось, является евклидовым пространством R_x^1 . Каждая точка какого-либо интервала (a, b) этой оси, т. е. множество точек

$$\{(x, y) : a < x < b, y = 0\}$$

плоскости R_{xy}^2 , является внутренней точкой этого интервала относительно указанного пространства R_x^1 (оси x -ов) и не является внутренней точкой этого интервала относительно всей плоскости R_{xy}^2 . Тем самым интервал (a, b) является открытым множеством пространства R_x^1 и не является открытым множеством пространства R_{xy}^2 .

Важный класс открытых множеств устанавливается следующей леммой.

Лемма 3. Всякая ε -окрестность $U(x; \varepsilon)$ любой точки $x \in R^n$ является открытым множеством.

Доказательство. Пусть задана некоторая окрестность $U(x; \varepsilon)$ и пусть $y \in U(x; \varepsilon)$. Положим

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \quad (13.17)$$

Рис. 82

и покажем, что $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ (рис. 82).

Если $z \in U(y; \delta)$ и, значит, $\rho(z; y) < \delta$, то, применив неравенство треугольника и (18.17), получим

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in U(x; \varepsilon)$. В силу того что z — произвольная точка множества $U(y; \delta)$, это означает, что $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$. \square

Открытые множества пространства R^n будем обозначать большей частью буквой G .

Упражнение 3. Доказать, что множество внутренних точек всякого множества является открытым множеством.

Лемма 4. Пересечение конечного числа, так же как и объединение любой совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.

Доказательство. Пусть G_1, G_2, \dots, G_k — открытые множества пространства R^n . Если их пересечение $\bigcap_{j=1}^k G_j$ — пустое множество, то оно является открытым ибо его множество внутренних точек пусто и, следовательно, совпадает с самим пересечением. Если же указанное пересечение не пусто и $x \in \bigcap_{j=1}^k G_j$,

