то, в силу открытости множеств G_j, для каждого $j=1, 2, \ldots, k$ существует такое $\varepsilon_j > 0$, что $U(x;\ \varepsilon_j) \subset G_j$. Полагая $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, получим, что для каждого j справедливо включение $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$. Следовательно, $U(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, т. е. точка x является внутренней для пересечения $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$. Поскольку x — произвольная точка этого пересечения, оно является открытым множеством.

Пусть теперь дана произвольная система открытых множеств $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов, и $G = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$. Покажем, что G — открытое множество. Действительно, какова бы ни была точка $x \in G$, существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $x \in G_{\alpha_0}$. Поскольку G_{α_0} — открытое множество, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $U(x;\ \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Но тогда $U(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha = G$, т. е. x — внутренняя точка множества G, и значит это множество открыто. □

Очень удобным оказывается следующее определение.

Определение 14. *Всякое открытое множество, содержащее точку называется ее окрестностью.*

Окрестность точки x будет обычно обозначаться через $U = U(x)$, быть может, с теми или иными индексами.

Замечание. Во всякой окрестности $U(x)$ точки x, очевидно, содержится как сферическая, так и прямоугольная окрестность этой точки. Далее, при понимании окрестности точки в смысле определения 14 сохраняется и аналог свойства (18.12), т. е. точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$ тогда и только тогда, когда для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер m_0, что для всех $m \geqslant m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(x)$.

Определение 15. *Точка $x \in R^n$ называется точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества E.*

Очевидно, что каждая точка множества E является его точкой прикосновения, ибо всякая окрестность точки $x \in E$ содержит саму точку x. Вместе с тем могут, конечно, существовать и точки прикосновения данного множества, не принадлежащие ему (например, концы интервала на прямой являются его точками прикосновения).

Упражнение 4. Доказать, что для того чтобы точка $x \in R^n$ была точкой прикосновения множества $E \subset R^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)} \in E$, $m=1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$.

Определение 16. *Если у точки $x \in E$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества E, кроме самой точки x, то эта точка называется изолированной точкой множества E.*

Определение 17. *Точка $x \in R^n$ называется предельной точкой множества E, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества E, отличную от x.*

Очевидно, что предельная точка является точкой прикосновения.

У всякой точки прикосновения x_0 множества E либо существует окрестность, содержащая лишь одну точку из E (в этом случае этой точкой является сама точка x_0), либо такой окрестности нет, т. е. в каждой окрестности точки x_0 имеется по крайней мере две точки множества E (следовательно, по крайней мере одна из них отлична от x_0). Поэтому всякая точка прикосновения множества E является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству).

Примеры. Пусть $n=1$, $E=(0, 1)$ — интервал. Каждая точка отрезка $[0, 1]$ является точкой прикосновения и предельной точкой множества E, при этом точки 0 и 1 не принадлежат самому множеству E. Если $E=[0, 1]$ — отрезок, то множество точек прикосновения множества E совпадает с самим множеством. Наконец, если множество E состоит из интервала $(0, 1)$ и точки 2, т. е. $E=(0, 1)\cup\{2\}$, то точка 2 является его изолированной точкой, а множеством его точек прикосновения будет $[0, 1]\cup\{2\}$.

Определение 18. *Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset R^n$ называется замыканием множества E и обозначается $\bar{E}$.*

Как уже отмечалось, каждая точка множества E является его точкой прикосновения, поэтому

$$E \subset \bar{E}. \tag{18.18}$$

Определение 19. *Множество E называется замкнутым, если $\bar{E}=E$, т. е. если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Например, при $n=1$ интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, а отрезок $[0, 1]$ — замкнутое множество.

Все пространство и пустое множество являются единственными в R^n одновременно замкнутыми и открытыми множествами (проверьте это).

Поскольку всякая точка прикосновения множества является либо его предельной, либо его изолированной точкой, а изолированная точка в силу самого своего определения принадлежит множеству, то требование принадлежности каждой точки прикосновения к множеству эквивалентно требованию принадлежности к этому множеству каждой его предельной точки. Иначе говоря,

множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Упражнение 5. Пусть $E \subset R^k \subset R^n$. Доказать, что $x \in R^n$ является точкой прикосновения множества E в пространстве R^n тогда и только тогда, когда она принадлежит пространству R^k и является в нем точкой прикосновения множества E.

Отсюда следует, что множество E является замкнутым множеством пространства R^k тогда и только тогда, когда оно является замкнутым множеством пространства R^n. Таким образом, свойство множества быть замкнутым в некотором пространстве R^n является его «внутренним» свойством, т. е. свойством, которое не зависит от выбора пространства R^n, в котором лежит рассматриваемое множество. Как было отмечено выше, свойство множества быть открытым не является «внутренним» свойством в указанном смысле, одно и то же множество может быть открытым в одном пространстве R^n и не быть открытым в другом.

Отметим следующее очевидное свойство замкнутых множеств.

Если A — замкнутое множество, а $\{x^{(m)}\}$ — сходящаяся последовательность, все члены которой принадлежат множеству A: $x^{(m)} \in A$, $m = 1, 2, \ldots$, то ее предел также принадлежит множеству A.

Действительно, если $x^{(0)} = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, то из определения предела последовательности точек следует, что в любой окрестности точки $x^{(0)}$ имеются точки данной последовательности (и, более того, там лежат почти все точки последовательности, т. е. все за исключением конечного числа их), являющиеся, по предположению, и точками множества A. Таким образом, точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества A, и поскольку A — замкнутое множество, то $x^{(0)} \in A$.

Лемма 5. *Точка прикосновения замыкания множества является и точкой прикосновения самого множества.*

Следствие. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство леммы. Пусть $E \subset R^n$, $\bar{\bar{E}}$ — замыкание множества E и x — точка прикосновения множества $\bar{\bar{E}}$, т. е. $x \in \bar{\bar{E}}$. Покажем, что $x \in \bar{\bar{E}}$.

Из условия $x \in \bar{\bar{E}}$ следует, что любой окрестности $U = U(x)$ точки x принадлежит хотя бы одна точка y множества $\bar{\bar{E}}$: $y \in U \cap \bar{\bar{E}}$. Поскольку U, как всякая окрестность, является открытым множеством, то она является и окрестностью содержащейся в ней точки y. Но $y \in \bar{\bar{E}}$, следовательно, в любой окрестности точки y, в частности — в U, имеется точка z из множества E: $z \in U \cap E$.

Итак, в любой окрестности U точки $x \in \bar{\bar{E}}$ имеется точка из E. Это и означает, что x является точкой прикосновения множества E: $x \in \bar{\bar{E}}$. □

Доказательство следствия. В лемме 5 доказано, что

$$\bar{\bar{E}} \subset \bar{\bar{E}},$$

и так как согласно (18.18), $\bar{E} \subset \bar{\bar{E}}$, то

$$\bar{\bar{E}} = \bar{E}. \tag{18.19}$$

Примеры. 1. Всякий n-мерный шар

$$\bar{Q}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2 \right\} \tag{18.20}$$

является открытым множеством (см. лемму 1), поэтому его часто называют также *n-мерным открытым шаром*. Множество же

$$\bar{Q}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2 \right\}, \tag{18.21}$$

замкнуто, так как нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе. Оно является замыканием открытого шара Q^n и называется *n-мерным замкнутым шаром*. В случае $n=2$: Q^2 — открытый круг, $\bar{Q}^2$ — замкнутый круг; в случае $n=1$: Q^1 — интервал, $\bar{Q}^1$ — отрезок.

2. Замкнутый шар $\bar{Q}^n$ получается из открытого шара Q^n присоединением к нему множества

$$\left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\},$$

называемого *$(n-1)$-мерной сферой радиуса r с центром в точке $a = (a_1 \ldots, a_n)$* и обозначаемого S^{n-1}. В случае $n=2$: S^1 — окружность, в случае $n=1$: S^0 — пара точек.

Сфера

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\} \tag{18.22}$$

также дает пример замкнутого множества (почему?)

Заметим еще, что n-мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат обычно называется *n-мерным единичным шаром* (замкнутым или открытым), а $(n-1)$-мерная сфера радиуса 1 с центром в начале координат — $(n-1)$-мерной единичной сферой.

Определение 20. *Для всякого множества $E \subset R^n$ множество $R^n \setminus E$ называется его дополнением в пространстве R^n* (см. п. 1.1).

Лемма 6. *Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть G — открытое множество. Тогда никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения его дополнения $F = R^n \setminus G$, так как множество G, будучи открытым, является окрестностью точки x и не содержит точек множества F. Следовательно, все точки прикосновения множества F содержатся в F, что и означает замкнутость множества F.

Доказательство достаточности. Пусть F является замкнутым множеством и пусть $x \in G = R^n \setminus F$. В силу замкнутости F точка x не является его точкой прикосновения, поэтому существует ее окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с множе-

ством F и следовательно, такая, что $U(x) \subset G$. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, т. е. G открыто. □

Следствие 1. *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

Это сразу следует из леммы 6, так как если множество B является дополнением множества A в R^n, т. е. $B = R^n \setminus A$, то и наоборот множество A является дополнением B в R^n: $A = R^n \setminus B$.

Следствие 2. *Пересечение любой совокупности и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

В самом деле, пусть F_α — замкнутые множества, тогда по лемме 6 множества $G_\alpha = R^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми. Согласно формуле (1.1) имеем:

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (R^n \setminus G_\alpha) = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Множество $\bigcup_\alpha G_\alpha$ по лемме 4 открыто как объединение открытых множеств. Следовательно, его дополнение $\bigcap_\alpha F_\alpha = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha$, согласно лемме 6 замкнуто.

Аналогично с помощью формулы (1.2) доказывается замкнутость объединения конечного числа замкнутых множеств. □

Упражнение 6. Доказать, что если G — открытое множество, а F — замкнутое, $G \subset R^n$, $F \subset R^n$, то $G \setminus F$ — открытое множество.

Лемма 7. Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества из R^n и множество A ограничено; тогда существует такое число $d > 0$, что для любых двух точек $x \in A$ и $y \in B$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \geqslant d$.

Доказательство. Допустим, что такого числа d не существует. Тогда для любого $m = 1, 2, \ldots$ существует пара точек $x^{(m)} \in A$ и $y^{(m)} \in B$ таких, что $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < 1/m$. Поскольку A — ограниченное множество, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $x^{(0)} \in A$. Из неравенства

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m}$$

следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Поэтому точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества B и в силу его замкнутости $x^{(0)} \in B$. Таким образом, $x^{(0)} \in A$ и $x^{(0)} \in B$, а это противоречит тому, что A и B не пересекаются. □

Определение 21. *Для двух множеств* E_1 и E_2 величина

$$\rho(E_1, E_2) = \inf_{x \in E_1,\ y \in E_2} \rho(x, y)$$

называется расстоянием между E_1 и E_2. В частности, *если* E_1 *состоит из одной точки* x, то $\rho(E_1, E_2) = \rho(x, E_2)$ *называется расстоянием от точки* x *до множества* E_2.

Применяя этот термин, лемму 7 можно сформулировать следующим образом.

Если два замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них ограничено, то расстояние между ними положительно.

Упражнение 7. Привести пример двух непересекающихся замкнутых множеств, расстояние между которыми равно нулю.

Лемма 8. *Если* A — *замкнутое множество*, $A \subset R^n$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ и $\rho(x, A) = d$, то существует такая точка $y \in A$, что $\rho(x, y) = d$.

Доказательство. Если $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) = d$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ найдется такая точка $y^{(m)} \in A$, что $\rho(x, y^{(m)}) < d + \frac{1}{m}$. Очевидно, для каждого m справедливо включение $y^{(m)} \in U(x, d+1)$, а поэтому последовательность $\{y^{(m)}\}$ ограничена и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_k)}\}$. Пусть $\lim_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. В силу замкнутости множества A имеем $y^{(0)} \in A$; далее

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. С другой стороны, $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, следовательно, $\rho(x, y^{(0)}) = d$. □

Определение 22. *Точка* $x \in R^n$ *называется граничной точкой множества* $E \subset \boldsymbol{R}^n$, *если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству* E, *так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества* E *называется его границей и обозначается* ∂E.

Очевидно, что $\partial E \subset \bar{E}$. При этом каждая точка прикосновения множества E является либо его граничной точкой, либо его внутренней точкой — других возможностей нет, поэтому $\bar{E} = E \cup \partial E$.

Если G — открытое множество, то в объединении $\bar{G} = G \cup \partial G$ G и ∂G не пересекаются.

Действительно, поскольку множество G открыто, всякая его точка является внутренней и тем самым не принадлежит его границе.

Примеры. Пусть $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — открытый круг. Если $E = Q^2$, то любая точка окружности $S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 +$

$+x_2^2=1\}$ является граничной точкой множества E и других граничных точек нет, т. е. $S^1=\partial E$. В этом случае граница множества E не принадлежит ему.

Пусть $E=\bar{Q}^2$ — замкнутый круг, и в этом случае окружность S^1 является границей для E, причем теперь $\partial E\subset E$.

Наконец, если $E=S^1$ — окружность, то каждая точка множества E является его граничной точкой и других граничных точек нет, т. е. $E=\partial E$.

Вообще, $(n-1)$-мерная сфера (18.22) является границей как n-мерного открытого шара (18.20), так и замкнутого (18.21), а также совпадает со своей собственной границей (почему?)

Упражнения. 8. Доказать, что для того чтобы множество $A\subset \boldsymbol{R}^n$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $\partial A\subset A$.

9. Доказать, что $\overline{\partial E}=\partial E$.

Для дальнейшего нам понадобится еще понятие кривой в n-мерном пространстве. Для этой цели обобщим данное выше определение кривой в трехмерном пространстве, не касаясь вопроса о преобразовании параметра.

Определение 23. *Множество точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, называется непрерывной кривой в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Аргумент t называется параметром кривой. Точка $x(a)=(x_1(a), \ldots, x_n(a))$ называется началом, а точка $x(b)=(x_1(b), \ldots, x_n(b))$ — концом данной кривой.*

Все сказанное в п. 16.1 и 16.2 о кривой в трехмерном пространстве можно естественным образом перенести и на общий n-мерный случай, но мы не будем на этом останавливаться. Важным для дальнейшего является понятие прямой в n-мерном пространстве.

Определение 24. *Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in R^n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые фиксированные числа $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2>0$. Множество точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n, координаты которых представимы в виде*

$$x_i=x_i^{(0)}+\alpha_i t, \quad i=1, 2, \ldots, n, \quad -\infty<t<+\infty,$$

называется прямой в пространстве R^n, проходящей через точку $x^{(0)}$.

Часть прямой, соответствующая изменению параметра t в некотором отрезке $[a, b]$, называется *прямолинейным отрезком* (прямой), а ее часть, соответствующая изменению параметра в бесконечном промежутке $t\geqslant a$, — *лучом*. Очевидно, что в случае $n=3$ получается прямая, соответственно отрезок или луч, в обычном трехмерном пространстве, а $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ является направляющим вектором этой прямой. Если даны две различные точки $(x_1', \ldots, x_n')$

и $(x_1'', \ldots, x_n'')$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$x_i = x_i' + (x_i'' - x_i')\,t;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ -\infty < t < +\infty.$$

Определение 25. *Множество $E \subset R^n$, любые две точки которого можно соединить целиком лежащей в нем непрерывной кривой, называется линейно связным* *).

Иначе говоря, множество E называется линейно связным, если, каковы бы ни были точки $x^{(1)} \in E$ и $x^{(2)} \in E$, существует непрерывная кривая $x(t) = \{x_i(t);\ \alpha \leqslant t \leqslant b\}$ такая, что ее началом является точка $x^{(1)}$, т. е. $x(a) = x^{(1)}$, концом — точка $x^{(2)}$, т. е. $x(b) = x^{(2)}$, и все точки этой кривой принадлежат множеству E, т. е. $x(t) \in E$ для всех $t \in [a, b]$.

Примерами линейно связных множеств являются точка, отрезок, а примером линейно несвязного множества — пара различных точек.

Лемма 9. *Если линейно связное множество пересекается с некоторым множеством и с его дополнением в R^n, то оно пересекается и с границей этого множества.*

Доказательство. Пусть A — линейно связное множество $A \subset R^n$, B — некоторое множество, $B \subset R^n$, и пусть пересечения $A \cap B$ и $A \cap (R^n \setminus B)$ не пусты. Пусть $x^{(1)} \in A \cap B$ и $x^{(2)} \in A \cap (R^n \setminus B)$. Поскольку A — линейно связное множество, то существует такая непрерывная кривая $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и $x(t) \in A$ для всех $t \in [a; b]$. Обозначим через τ верхнюю грань тех $t \in [a, b]$, для которых $x(t) \in B$. Очевидно, $a \leqslant \tau \leqslant b$. В любой окрестности точки $x(\tau)$ содержатся как точки, принадлежащие B, так и не принадлежащие B (почему?). Следовательно, $x(\tau) \in \partial B$. Поскольку $x(\tau) \in A$, пересечение $\partial B \cap A$ не пусто. □

Определение 26. *Открытое линейно связное множество называется областью.* **)

Примеры. В случае $n = 1$ всякий интервал является областью, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся интервалов (рис. 83), хотя и представляет собой открытое множество, но не является областью.

Рис. 83

В случае $n = 2$ всякий открытый круг есть область, а множество, состоящее из двух или более непересекающихся открытых кругов (рис. 84), хотя и открыто, но не является областью, так как две точки x и y,

*) Кроме понятия линейной связности в математике существует понятие связности множества, которое в нашем курсе не рассматривается.

**) Не следует смешивать понятие области определения функции и понятие области в смысле этого определения.

принадлежащие разным кругам, нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей целиком внутри рассматриваемого множества.

Всякий n-мерный открытый шар является областью.

Определение 27. *Область, любые две точки которой можно соединить отрезком, целиком в ней лежащим, называется выпуклой областью.*

Всякий n-мерный открытый шар является выпуклой областью.

Определение 28. *Множество, лежащее в пространстве R^n и являющееся замыканием некоторой области, называется замкнутой областью.*

Замкнутый n-мерный шар является замкнутой областью.

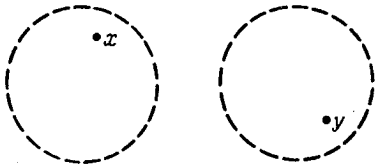

Рис. 84

Упражнение 10. Построить пример невыпуклой области.

Задача 15 (теорема Жордана *). Доказать, что всякий простой контур (см. п. 16.1) на плоскости разбивает плоскость на две области (ограниченную и неограниченную); это означает, во-первых, что он является границей каждой из этих областей, во-вторых, что никакие две точки, принадлежащие различным указанным областям, нельзя соединить кривой, не пересекающей данный контур.

18.3 КОМПАКТЫ

В этом пункте будут рассмотрены некоторые свойства множеств, называемых *компактами* и играющих важную роль в анализе.

Определение 29. *Множество $A \subset R^n$ называется компактом, если из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит множеству A.*

Важное свойство, характеризующее компакты в R^n, устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того, чтобы множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

Доказательство необходимости. Пусть $A \subset R^n$ и A — компакт. Если множество A было бы неограниченным, то для любого натурального числа m нашлась бы такая точка $x^{(m)} \in A$, что $\rho(O, x^{(m)}) > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Здесь, как всегда, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Поэтому любая подпоследовательность последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеет пределом ∞, и, следовательно, из $\{x^{(m)}\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A — компакт. Итак, A — ограниченное множество.

*) К. Жордан (1838—1922) — французский математик.

Если множество A не было бы замкнутым, то существовала бы его точка прикосновения x, которая ему не принадлежала бы $x \notin A$. Для этой точки нашлась бы такая последовательность $x^{(m)} \subset A$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Поэтому любая ее подпоследовательность также имела бы своим пределом точку $x \notin A$, т. е. множество A снова не было бы компактом. Следовательно, A — замкнутое множество.

Доказательство достаточности. Пусть E — ограниченное замкнутое множество и $\{x^{(m)}\}$ — какая-либо последовательность его точек: $x^{(m)} \in E$ $(m = 1, 2, \ldots)$. В силу ограниченности множества E эта последовательность также ограничена. Следовательно, по теореме 2 п. 18.1, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Обозначим ее предел через x: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$. Очевидно x — точка прикосновения множества E, ибо $x^{(m_k)} \in E$, а поскольку E — замкнутое множество, то $x \in E$, т. е. E действительно компакт. □

Доказанная теорема позволяет легко устанавливать компактность многих часто встречающихся множеств, например, отрезков, замкнутых шаров и параллелепипедов, сфер в пространствах $\boldsymbol{R}^n$ любой размерности — все перечисленные множества, будучи ограниченными и замкнутыми, являются компактами. Так же легко с помощью теоремы 3 устанавливается и некомпактность многих множеств. Например, конечные интервалы, не будучи замкнутыми, а бесконечные, не будучи ограниченными множествами, не являются компактами.

Отметим, что в силу той же теоремы 3, лемму 7 из п. 18.2 можно сформулировать следующим образом: *если два замкнутых множества не пересекаются и по крайней мере одно из них является компактом, то расстояние между ними больше нуля.*

Прежде чем перейти к другим характеристическим свойствам компактов, введем ряд определений и докажем одно вспомогательное утверждение.

Последовательность n-мерных кубов $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, называется последовательностью *вложенных кубов*, если

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

Лемма 10. *Для последовательности замкнутых вложенных кубов $\{Q_k\}$, длины ребер которых стремятся к нулю при $k \to \infty$, существует одна и только одна точка, принадлежащая всем кубам рассматриваемой последовательности.*

Доказательство. Пусть кубы

$$Q_k = \{x = (x_i) : a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)}; \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \qquad (18.23)$$

с ребрами длин $d^{(k)}$ образуют последовательность вложенных

кубов *) и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)}=0$. Тогда отрезки $[a_i^{(k)}, a_i^{(k)}+d_i^{(k)}]$, $k=1, 2, \ldots$, образуют систему вложенных отрезков, длины $d_i^{(k)}$ которых стремятся к нулю при $k\to\infty$. Поэтому существуют и притом единственные числа ξ_i, такие, что при фиксированном $i=1, 2, \ldots, n$ и любом $k=1, 2, \ldots$ имеет место включение $\xi_i \in [a_i^{(k)}, a_i^{(k)}+d^{(k)}]$. Отсюда следует, что точка $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принадлежит всем кубам рассматриваемой последовательности $\xi \in Q_k$, $k=1, 2, \ldots$, и эта точка единственна.

Определение 30. Пусть $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Система

$$\Omega=\{E_\alpha\}, \ \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.24}$$

множеств $E_\alpha \subset \boldsymbol{R}^n$ ($\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ — некоторая совокупность индексов α) называется *покрытием множества* E, если

$$E \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} E_\alpha.$$

Таким образом, система (18.24) называется покрытием множества E, если каждая точка этого множества принадлежит хотя бы одному множеству E_α системы Ω.

Покрытие (18.24) множества E, состоящее из конечного числа множеств E_α, называется *конечным покрытием* этого *множества*.

В случае, когда все множества системы Ω открытые, покрытие Ω называется *открытым покрытием множества* E.

Теорема 4. *Для того чтобы множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его открытого покрытия можно было выделить конечное покрытие.*

Доказательство необходимости. Пусть A — компакт и пусть система

$$\Omega=\{G_\alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.25}$$

— его открытое покрытие. Допустим, что из этого покрытия нельзя выделить конечного покрытия компакта A. Согласно теореме 3 из того, что множество A является компактом, следует, что оно ограничено. Поэтому существует замкнутый куб Q, содержащий множество A.

Пусть

$$Q=\{x=(x_i): a_i \leqslant x_i \leqslant a_i+d, \quad i=1, 2, \ldots, n\}.$$

Разобьем куб Q на 2^n равных замкнутых кубов Q_j, определяемых набором n неравенств вида

$$a_i+\frac{d}{2} \leqslant x_i \leqslant a_i+d \quad \text{или} \quad a_i \leqslant x_i \leqslant a_i+\frac{d}{2}$$

*) Напомним, что мы договорились (см. п. 18.1) под кубом всегда понимать лишь кубы, задаваемые неравенствами вида (18.23) при данной фиксированной системе координат.

(на рис. 85 изображен случай, когда $n=2$), тогда

$$Q=\bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{18.26}$$

Система (18.25) образует открытое покрытие каждого из множеств $A\cap Q_j$ ($j=1, 2, \ldots, 2^n$). Среди этих множеств существует такое непустое множество — обозначим его через $A\cap Q_{j_1}$ —, что из покрытия (18.25) нельзя выделить конечное покрытие этого множества — в противном случае из системы (18.25) можно было бы в силу равенства (18.26) выделить конечное покрытие и всего множества A, что противоречило бы сделанному предположению.

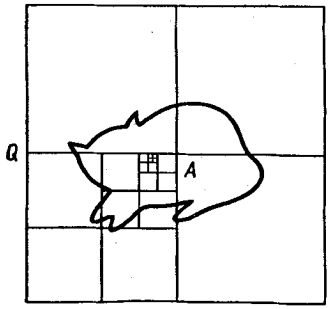

Рис. 85

Разобьем куб Q_{j_1} снова на 2^n равных замкнутых кубов $Q_{j_1 j}$ ($j=1, 2, \ldots, 2^n$). Обозначим через $Q_{j_1 j_2}$ тот из кубов $Q_{j_1 j}$, пересечение которого с компактом A нельзя покрыть конечным числом множеств системы Ω и т. д. В результате получим последовательность вложенных замкнутых кубов

$$Q_{j_1}\supset Q_{j_1 j_2}\supset\ldots\supset Q_{j_1 j_2\ldots j_k}\supset\ldots, \tag{18.27}$$

длины ребер которых равны, соответственно, $d/2, d/4, \ldots, d/2^k, \ldots$, и, следовательно, стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Каждый из кубов $Q_{j_1 j_2\ldots j_k}$ последовательности (18.27) обладает тем свойством, что из системы (18.25) нельзя выделить конечное покрытие непустого множества

$$A\cap Q_{j_1 j_2\ldots, j_k},$$

j_ν принимает одно из значений $1, 2, 3, \ldots, 2^n$; $\nu=1, 2, \ldots, k$; $k=1, 2, \ldots$. Согласно лемме 10 существует, и притом единственная, точка ξ, принадлежащая всем кубам системы (18.27). Поскольку ребра кубов этой системы стремятся к нулю и каждый куб имеет непустое пересечение с множеством A, то в любой окрестности точки ξ имеются точки множества A. Действительно, заметим, что диагональ куба $Q_{j_1 j_2\ldots j_k}$ равна $d\sqrt{n}/2^k$. Далее, каково бы ни было $\varepsilon>0$ выберем k_0 так, что

$$d\sqrt{n}/2^{k_0}<\varepsilon. \tag{18.28}$$

Это возможно, ибо $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{d\sqrt{n}}{2^k}=0$. Теперь, замечая, что любая точка $x\in Q_{j_1 j_2\ldots j_{k_0}}$ находится от точки $\xi\in Q_{j_1 j_2\ldots j_{k_0}}$ на рас-

стоянии, не превышающем диагонали куба $Q_{i_1 i_2 \dots i_{k_0}}$, будем иметь

$$\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon.$$

Это означает, что x лежит в ε-окрестности точки ξ. Следовательно, весь куб $Q_{i_1 i_2 \dots i_{k_0}}$, в том числе и его точки, принадлежащие множеству A, содержатся в рассматриваемой ε-окрестности точки ξ. Таким образом, ξ является точкой прикосновения множества A. Согласно же теореме 3, множество A, будучи компактом, замкнуто, и поэтому $\xi \in A$.

Построенная вспомогательная последовательность кубов (18.27) легко позволяет доказать невозможность выполнения сделанного предположения о том, что из покрытия (18.25) компакта A нельзя выделить конечного покрытия этого компакта. В самом деле, поскольку система (18.25) является покрытием множества A, то существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $\xi \in G_{\alpha_0}$. Множество G_{α_0} открыто, следовательно, найдется такое число $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность $U(\xi; \varepsilon)$ точки ξ будет целиком содержаться в G_{α_0}:

$$U(\xi; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{18.29}$$

Заметим теперь, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности для ε, удовлетворяющего условию (18.29), найдется, как показано выше, такой номер k_0, что будет выполнено включение

$$Q_{i_1 i_2 \dots i_{k_0}} \subset U(\xi; \varepsilon). \tag{18.30}$$

Из (18.29) и (18.30) имеем

$$A \cap Q_{i_1, i_2 \dots i_{k_0}} \subset Q_{i_1 i_2 \dots i_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0},$$

и, следовательно, из системы (18.25) можно выделить конечное покрытие множества $A \cap Q_{i_1 i_2 \dots i_{k_0}}$, а именно покрытие, состоящее только из одного множества G_{α_0}. Это противоречит допущению в соответствии с которым выбраны кубы $Q_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Таким образом предположив, что из системы (18.25) нельзя выделить конечного покрытия компакта, мы пришли к противоречию. Тем самым необходимость условия доказана.

Доказательство достаточности. Пусть $E \subset R^n$ и пусть из любого открытого покрытия множества E можно выделить конечное покрытие. Допустим, что E не является компактом. Это согласно определению 29 означает, что существует последовательность $\{x^{(m)}\} \subset E$, $m = 1, 2, \dots$, из которой нельзя выделить сходящуюся к некоторой точке из E подпоследовательность. Следовательно, какова бы ни была точка $x \in E$, она не является частичным пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$. Поэтому у каждой точки $x \in E$ найдется окрестность — обозначим ее через G_x, содержащая лишь конечное число элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$;

в противном случае из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно было бы выделить сходящуюся к x подпоследовательность (если все элементы последовательности $\{x^{(m)}\}$, лежащие в G_x, таковы, что $x^{(m)} \neq x$, то из того, что этих элементов лишь конечное число, очевидно, следует, что у точки x можно выбрать даже такую окрестность, которая вовсе не будет содержать элементов последовательности $\{x^{(m)}\}$).

В силу выбора окрестностей G_x, каждая точка x множества E принадлежит соответствующей окрестности: $x \in G_x$. Поэтому совокупность $\Omega = \{G_x\}$, $x \in E$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие множества E. Согласно условию теоремы, из него можно выделить конечное покрытие. Пусть им будет

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Каждый элемент этого покрытия содержит лишь конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Следовательно, все элементы покрытия Ω_0 также содержат лишь конечное число членов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Это, однако, невозможно, так как покрывая все множество E, элементы конечного покрытия Ω_0 должны содержать все члены последовательности $\{x^{(m)}\}$, которых бесконечно много. Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы. □

Замечание. Необходимость условий теоремы, т. е. утверждение, что из всякого открытого покрытия компакта можно выделить конечное покрытие, обычно называют леммой Гейне—Бореля*).

Подчеркнем, что в теореме 4 существенным является то, что рассматриваются покрытия, состоящие именно из открытых множеств. Так, например, из покрытия отрезка $[0, 1]$ (который, как уже отмечалось, будучи ограниченным замкнутым множеством, является компактом) отрезками $[1/(n+1), 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, и отрезком $[-1, 0]$ нельзя выделить конечного покрытия. Это объясняется тем, что здесь покрытие состоит не из открытых, а из замкнутых множеств.

Упражнение 11. Доказать, что для любого конечного открытого покрытия $\Omega = \{G_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ компакта $A \subset R^n$ существует такое число $l > 0$, что каково бы ни было множество $E \subset A$, для которого $\sup\limits_{x, y \in E} \rho(x, y) \leqslant l$, существует такой элемент G_{k_0} покрытия Ω, что $E \subset G_{k_0}$.

В заключение этого пункта докажем еще одно вспомогательное утверждение. Предварительно введем следующее обозначение: для всякого множества $E \subset R^n$ обозначим через E_η, где $\eta > 0$, совокупность всех точек, расстояния которых от E не превосходят

*) Э. Борель (1871—1956) — французский математик.

числа η, т. е. положим

$$E_\eta \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ \rho(x,\ E) \leqslant \eta\}.$$

Лемма 11. *Если A — компакт, $A \subset R^n$, то при любом $\eta > 0$ множество A_η также является компактом.*

Доказательство. Согласно теореме 3, множество A, будучи компактом, ограничено и замкнуто. Ограниченность множества A означает, что существует такое $a > 0$, что A содержится в шаре $U(O,\ a)$.

Покажем, что $A_\eta \subset U(O,\ a+\eta)$. Если $x \in A_\eta$, то согласно лемме 8 найдется такая точка $y \in A$, что $\rho(x,\ y) = \rho(x,\ A) \leqslant \eta$. Из условия же $A \subset U(O,\ a)$ следует, что $\rho(O,\ y) < a$, поэтому

$$\rho(O,\ x) \leqslant \rho(O,\ y) + \rho(y,\ x) < a + \eta.$$

Таким образом, $x \in U(O,\ a+\eta)$. Точка x является произвольной точкой множества A_η. Следовательно, $A_\eta \subset U(O,\ a+\eta)$ и поэтому множество A_η ограничено.

Покажем теперь, что A_η — замкнутое множество. Если x — точка прикосновения множества A_η: $x \in \bar{A}_\eta$ то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $y \in A_\eta$, что $\rho(x,\ y) < \varepsilon$. Из определения множества A_η и леммы 8 следует, что существует такая точка $z_0 \in A$, что $\rho(y,\ z_0) = \rho(y,\ A) \leqslant \eta$; поэтому

$$\rho(x,\ A) = \inf_{z \in A} \rho(x,\ z) \leqslant \rho(x,\ z_0) \leqslant \rho(x,\ y) + \rho(y,\ z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Это неравенство верно для любого $\varepsilon > 0$. Устремляя ε к нулю, получаем $\rho(x,\ A) \leqslant \eta$, т. е. $x \in A_\eta$, что и доказывает замкнутость множества A_η.

Итак, множество A_η ограничено и замкнуто, а следовательно, в силу той же теоремы 3 является компактом. □

18.4. МНОГОМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В п. 15.1 отмечалось, что при фиксированной системе координат в трехмерном пространстве задание вектора равносильно заданию трех его координат. При сложении векторов и их умножении на числа те же действия выполняются и с их координатами. В n-мерном случае вектор можно определить при помощи его координат.

Определение 31. *Упорядоченная система n действительных чисел*

$$(x_1,\ \ldots,\ x_n); \qquad x_i \in \boldsymbol{R}; \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

называется n-мерным действительным вектором $\boldsymbol{x}$, а числа $x_1, \ldots, x_n$ — его координатами. Число n называется размерностью вектора.

Суммой $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ *векторов* $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ *называется вектор* $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$, т. е.

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$

а произведением вектора $\boldsymbol{x}$ *на число* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *называется вектор*

$$\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} x\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число, называется *n-мерным действительным векторным пространством, или, более полно, n-мерным арифметическим векторным пространством над полем действительных чисел.*

Вектор $\boldsymbol{0}=(0, 0, \ldots, 0)$ называется *нулевым вектором* или *нулем n-мерного векторного пространства.*

По определению вектор $-\boldsymbol{x} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)\boldsymbol{x}$ называют противоположным вектору $\boldsymbol{x}$.

Упражнение 12. Доказать, что если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ — любые векторы, а числа $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ произвольны, то 1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$; 2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$; 3) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$; 4) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$; 5) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$; 6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$; 7) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$.

Таким образом, n-мерное арифметическое пространство (см. определение 1 в п. 18.1) превращается в n-мерное арифметическое векторное пространство, если в нем ввести сложение его элементов и умножение их на число согласно определению 31.

В трехмерном случае связь между точками пространства и векторами в нем можно установить (как всегда, считая систему координат фиксированной), сопоставляя каждой точке $M=(x_1, x_2, x_3)$ этого пространства ее радиус-вектор, т. е. вектор $\overrightarrow{OM}=(x_1, x_2, x_3)$. Это сопоставление является взаимно однозначным соответствием между точками трехмерного пространства и векторами в нем.

Иногда n-мерное арифметическое пространство, введенное в определении 1 п. 18.1 в отличие от n-мерного векторного пространства называют *точечным пространством.*

Итак, как n-мерное точечное, так и n-мерное векторное пространство состоят из одних и тех же элементов — из упорядоченных совокупностей n действительных чисел. Поэтому как то, так и другое пространство будет обозначаться одним и тем же символом R^n. Они отличаются друг от друга тем, что в арифметическом n-мерном пространстве вводится понятие расстояния между его элементами (см. определение 1 в п. 18.1), а в n-мерном векторном — определяются операции сложения векторов и умножения их на действительные числа (см. определение 31 этого пункта).

Если через $\boldsymbol{e}_k$ обозначить n-мерный вектор, все координаты которого равны нулю, кроме k-й, равной единице, k — фиксиро-

ванное натуральное число ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), то для любого n-мерного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n, \tag{18.31}$$

правая часть которого называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. При этом коэффициенты $x_1, \ldots, x_n$ этого разложения единственны, т. е. однозначно определяются самим вектором $\boldsymbol{x}$, и, следовательно, в силу равенства (18.31) совпадают с его координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Векторы $\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ называются *координатными* или *базисными векторами, а их совокупность* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — *стандартным базисом* пространства R^n (общее определение базиса будет дано в п. 57.2).

Подмножество L векторного пространства R^n называется *подпространством* пространства R^n, если для любых векторов $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$ и любых чисел $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\mu \in \boldsymbol{R}$ имеет место включение

$$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in L$$

Определение 32. *Скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $n > 3$, *называется число, обозначаемое через* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *и определяемое по формуле*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \tag{18.32}$$

Из элементарной математики известно, что формула (18.32) справедлива и при обычном определении скалярного произведения векторов, т. е. и для $n \leqslant 3$.

Всякое n-мерное векторное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *евклидовым*.

Число $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ называется *длиной вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначается через $|\boldsymbol{x}|$:

$$|\boldsymbol{x}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{18.33}$$

Очевидно, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in R^n$ и любого числа $\lambda \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$|\lambda\boldsymbol{x}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{x}|, \tag{18.34}$$

а из неравенства (18.3) (см. п. 18.1) следует, что для любых $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{y} \in R^n$ выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \tag{18.35}$$

называемое *неравенством треугольника*.

Из (18.35) следует, что

$$\big||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|\big| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|. \tag{18.36}$$

Действительно, $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|$, поэтому

$$|\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

В силу равноправия $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеем также

$$|\boldsymbol{y}|-|\boldsymbol{x}|\leqslant|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

Из двух последних неравенств и следует (18.36). □

Если $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(x_1, \ldots, y_n)$, то $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x_1-y_1, \ldots$ $\ldots, x_n-y_n)$ и поэтому

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}=\rho(x, y), \qquad (18.37)$$

где x и y — точки точечного n-мерного пространства с теми же координатами, что и векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Таким образом, в n-мерном векторном пространстве со скалярным произведением определено расстояние $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ между его элементами, совпадающее с расстоянием $\rho(x, y)$, определенным в п. 18.1. Поэтому все понятия, введенные в п. 18.1 — 18.3 для точечных пространств имеют смысл и для векторных пространств со скалярным произведением.

В качестве примера использования векторной символики отметим, что замкнутый шар $Q^n(x_0, r)$ радиуса r с центром в точке x_0 в векторных обозначениях определяется равенством

$$Q^n(x_0, r)=\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant r\},$$

а ограничивающая его $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1}(x_0, r)$ — равенством

$$S^{n-1}(x_0, r)=\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=r\}.$$

Скалярное произведение обладает следующими непосредственно проверяемыми свойствами:

1°. Коммутативность. Для любых $\boldsymbol{x}\in R^n$, $y\in R^n$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

2°. Дистрибутивность. Для любых $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y}\in R^n$, $\boldsymbol{z}\in R^n$: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

3° Однородность. Для любого $\boldsymbol{x}\in R^n$ и любого числа $\lambda\in \boldsymbol{R}$: $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

4°. Невырожденность. Для любого $\boldsymbol{x}\in R^n$: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\geqslant 0$, причем

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=0.$$

Дистрибутивность и однородность скалярного произведения составляют вместе свойство, называемое *линейностью скалярного произведения*.

Если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — координатные векторы в R^n, то согласно (18.32)

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j, \\ 0 \text{ при } i\neq j, \end{cases} \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому для любого вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ в силу свойств скалярного произведения получим:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)=(x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)=x_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i)+\ldots+x_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)=$$
$$=x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=x_i, \qquad (18.38)$$

т. е. i-ая координата вектора $\boldsymbol{x}$ равна скалярному произведению $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$.

Используя обозначение скалярного произведения и длины вектора, неравенство Коши—Шварца (см. (18.2) в п. 18.1) для векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ можно записать в виде

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|. \tag{18.39}$$

Углом φ между векторами $\boldsymbol{x} \in R^n$ и $\boldsymbol{y} \in R^n$, $n>3$, называется угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, определяемый равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}. \tag{18.40}$$

В силу неравенства Коши—Шварца (18.39) это определение корректно, ибо в силу (18.39) для φ, определяемого формулой (18.40), имеет место неравенство $|\cos\varphi| \leqslant 1$.

Здесь снова, как и в случае определения скалярного произведения за исходное определение принимается высказывание, аналогичное которому в пространстве R^n, $n \leqslant 3$, является доказываемым утверждением. Благодаря этому формулы (18.32) и (18.40) оказываются справедливыми во всех пространствах $\boldsymbol{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$

Векторы, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Вектор единичной длины кратко называют *единичным вектором*.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные векторы, то для косинуса угла между ними из формулы (18.40) получаем

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \quad |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1. \tag{18.41}$$

Если $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ — единичный вектор, то обозначая через α_i угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_i$ согласно (18.38) и (18.41) имеем:

$$a_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i) = \cos\alpha_i, \text{ т. е. } \boldsymbol{a} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n).$$

Косинусы $\cos\alpha_i$, $i=1, \ldots, n$, называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$.

Поскольку $|\boldsymbol{a}|=1$, то в силу (18.33)

$$\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1. \tag{18.42}$$

Если $\boldsymbol{a}$ — не единичный вектор и $\boldsymbol{a} \neq 0$, то, очевидно, вектор $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ уже единичный, и его направляющие косинусы называются также и направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$.

Уравнение прямой в пространстве R^n (см. определение 24 в п. 18.2) в векторной записи имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + t\boldsymbol{a}, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{18.43}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \ \boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \ \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

(при сложении координат векторов сами векторы также складываются, а при умножении их координат на число они сами умно-

жаются на то же число). Прямая (18.43) называется *прямой, проходящей через* точку $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ точечного пространства в направлении вектора $\boldsymbol{a}$.

Если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор $|\boldsymbol{a}|=1$ и, следовательно, $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ ($\cos\alpha_i$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$; $i=1, 2, \ldots, n$), то прямая (18.43) в координатной записи имеет вид

$$x_i=x_i^{(0)}+t\cos\alpha_i; \quad i=1, 2, \ldots, n; \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.44}$$

Пусть заданы две точки $x'=(x_1', \ldots, x_n')$ и $x''=(x_1'', \ldots, x_n'')$ точечного пространства; обозначим через $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$ векторы с теми же координатами. Тогда уравнением прямой, проходящей через точки x' и x'' (см. п. 18.2), в векторной записи будет

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+(\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}')t, \quad -\infty<t<+\infty. \tag{18.45}$$

По аналогии с § 15 можно рассмотреть n-мерную вектор-функцию

$$\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t\in E\subset \boldsymbol{R}$$

($\boldsymbol{R}$ — как всегда, множество всех действительных чисел). Совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 15, при любом натуральном n определяются понятия предела, непрерывности и производной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)\in\boldsymbol{R}^n$. Как и для $n\leqslant 3$ при дифференцировании вектор-функции дифференцируются ее координаты: $\boldsymbol{r}'(t)=(x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, и утверждение $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=0$ равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0}|\boldsymbol{r}(t)|=0$.

§ 19. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

19.1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом параграфе рассматриваются функции, которые определены на множествах n-мерного арифметическвго евклидова пространства R^n и значениями которых являются действительные числа. Таким образом, все функции будут являться функциями точек пространства. Это означает, что если имеется какая-либо функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ задана система координат $x_1, \ldots, x_n$, то в другой системе координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, связанной с исходной преобразованием

$$x_i=x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

под той же функцией понимается не $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а функция

$$f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$

Рассматриваемые функции будут обозначаться либо одной буквой, например f, либо более подробно, с указанием аргумента, через $f(x)$ или $f(x_1, \ldots, x_n)$. При $n > 1$ они называются *функциями многих переменных*. В случае $n = 2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, в случае $n = 3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ — также $f(x, y, z)$.

Каждой функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствует ее график в n-мерном пространстве точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Определим это понятие для рассматриваемого здесь случая.

Определение 1. *Пусть на множестве E евклидова пространства R^n определена функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, и пусть R_{xy}^{n+1} — $(n+1)$-мерное евклидово пространство точек $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$. Множество точек пространства R_{xy}^{n+1} вида $(x, f(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f(x))$, где $x \in E$, называется графиком функции f.*

График функции многих переменных, так же как и график функции одной переменной, удобно использовать для геометрической интерпретации вводимых понятий и доказываемых утверждений. Конечно изображение графика на чертеже в случае, когда число независимых переменных больше единицы, сложнее, чем в одномерном случае. На рис. 86 изображен вид графика функции двух переменных $y = f(x_1, x_2)$.

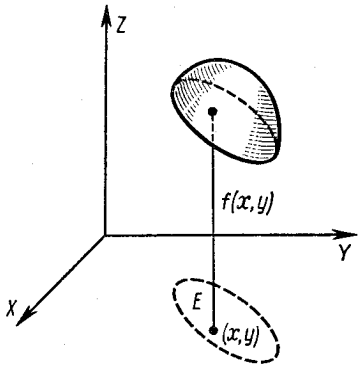

Рис. 86

Сформулированное здесь определение графика функции n переменных является частным случаем общего определения графика функции, сформулированного в п. 1.2*.

Пусть снова функция f определена на множестве $E \subset R^n$. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c,$$

где c — некоторая постоянная, называется *множеством уровня* функции f, соответствующим данному значению c.

В случае $n = 2$ множество уровня называется также *линией уровня*, в случае $n = 3$ — *поверхностью уровня*, а при $n > 3$ — *гиперповерхностью уровня*.

19.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определим понятие предела функции многих переменных.

Определение 2. *Пусть функция f определена на множестве $X_f \subset R^n$, E — некоторое подмножество множества X_f и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E.*

Число a называется пределом функции f по множеству E в точке $x^{(0)}$ (или при x, стремящемся к $x^{(0)}$), если для любой последовательности точек

$$x^{(m)} \in E, \quad x^{(m)} \neq x^{(0)}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

такой, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$ числовая последовательность $\{f(x^{(m)})\}$ сходится к числу a,

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = a.$$

При сделанных предположениях можно дать и другое, эквивалентное предыдущему определение предела функции многих переменных по аналогии с тем, как это было сделано раньше для функции одной переменной (см. п. 4.4 и п. 4.5).

Определение 3. *Пусть $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E содержащегося в области определения X_f функции f.*

Число a называется пределом функции f по множеству E в точке $x^{(0)}$ (или, что то же, при x, стремящемся к $x^{(0)}$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in E$, $x \neq x^{(0)}$, $\rho(x_1, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Совершенно аналогично случаю функции одной переменной доказывается эквивалентность определений 2 и 3.

Иногда наряду с обозначением $\lim\limits_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x)$ применяется равносильное обозначение $\lim\limits_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} f(x)$

Упражнения. 1. Доказать эквивалентность двух приведенных определений предела функции многих переменных по множеству.

2. По аналогии со случаем функции одной переменной сформулировать и доказать критерий Коши существования предела функции многих переменных.

Употребляя термин сужения функции (см. п. 4.1), можно сказать, что существование предела функции и его значение в точке $x^{(0)}$ не зависят от выбора сужения функции на пересечении какой-либо окрестности точки $x^{(0)}$ с областью определения данной функции, т. е. в конечном итоге не зависят от выбора указанной окрестности. Точная формулировка этого утверждения состоит в следующем: если функция f, определенная на множе-

стве X_f, имеет предел по множеству $E \subset X_f$ в предельной точке $x^{(0)}$ этого множества, то для любой окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \cap U(x^{(0)})$; при этом, если указанные пределы существуют, то они совпадают

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E \cap U(x^{(0)})} f(x);$$

если же функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \cap U(x_0)$ хотя бы для одной окрестности $U(x_0)$, то она имеет предел в этой точке и по множеству E. Все это совсем легко проверить и поэтому может быть самостоятельно проделано читателем.

Свойство функции, не зависящее от выбора достаточно малой окрестности, содержащей данную точку, называется *локальным свойством функции* в этой точке. Очевидно, существование предела функции и его значение в некоторой точке (если он, конечно, существует) являются локальными свойствами функции в этой точке.

Из определения предела функции следует также, что существование предела функции в точке $x^{(0)}$ (по некоторому множеству), а если он существует, то и его значение, не зависят от значения самой функции в точке $x^{(0)}$ (если она определена в этой точке).

При определении предела функции многих переменных так же, как и в случае одной переменной, удобно использовать понятие проколотой окрестности, т. е. окрестности точки, из которой удалена сама эта точка: если $U(x^{(0)})$ — окрестность точки $x^{(0)}$, то множество

$$\mathring{U}(x^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}$$

называется *проколотой окрестностью* точки $x^{(0)}$.

Определение 4. *Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, то предел функции f в точке $x^{(0)}$ по этой проколотой окрестности называется просто пределом функции в точке f и обозначается через* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$.

Определение 5. *Пусть через точку $x^{(0)}$ проведена прямая l* (см. определение 24 в п. 18.2) *и $\mathring{U}(x^{(0)})$ — некоторая проколотая окрестность точки $x^{(0)}$. Предел функции f в точке $x^{(0)}$ по пересечению $\mathring{U}(x^{(0)}) \cap l$ называется пределом функции f в точке $x^{(0)}$ в направлении прямой l.*

Определение 6. *Если множество E* (см. определение 2) *является множеством точек некоторой кривой, проходящей через $x^{(0)}$, то в этом случае предел функции f по множеству E при x, стремящемся к $x^{(0)}$, называется пределом функции по данной кривой в точке $x^{(0)}$.*

Очевидно, что если у функции f существует предел в точке x_0, то он существует в этой точке и по любому направлению и по любой кривой, причем все эти пределы совпадают.

Пример. Пусть $f(x, y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат (0, 0). Исследуем пределы этой функции по различным направлениям в точке (0, 0). Уравнение прямой, проходящей через начало координат (0, 0) в направлении вектора (α, β), имеет вид $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2>0$. Имеем: $f(\alpha t, \beta t)=\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta}\to 0$ при $t\to 0$, т. е. предел по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y=x^2$, то $f(x, x^2)\equiv\frac{1}{2}$, и, значит, предел вдоль параболы $y=x^2$ также существует, но равен 1/2.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе, хотя и существует, отличен от общего значения пределов по направлениям, тем самым просто предел в точке (0, 0) не существует.

Упражнение 3. Исследовать пределы по направлению в точке (0, 0) функции $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Аналогично случаю функций одного переменного для пределов функций многих переменных по множеству имеют место соответствующие теоремы о пределах суммы, произведения и частного, так как в силу приведенного выше определения, предел функции n переменных по множеству также сводится к понятию предела последовательности (см. п. 4.7).

Наряду с указанными пределами у функций многих переменных можно рассматривать и пределы других видов, связанные с последовательным переходом к пределу, например по различным координатам, т. е. пределы вида

$$\lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^{(0)}}\ \lim_{x_{i_2}\to x_{i_2}^{(0)}}\ \dots\ \lim_{x_{i_n}\to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n),$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, а функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x^{(0)}$.

Пределы указанного вида называются *повторными пределами*. Они представляют собой специфику функций многих переменных.

Рассмотрим определенную на всей плоскости функцию

$$f(x, y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \text{ и } y\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0 \text{ или } y=0,\end{cases}$$

Исследуем различные ее пределы в точке (0, 0).

Очевидно, $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)=0$. Что же касается повторных пределов

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right] \text{ и } \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right],$$

то они не существуют, так как не существуют даже пределы

$$\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\ (y\neq 0) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} \qquad (x\neq 0).$$

Для функции же $f(x,\ y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, определенной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела в точке (0, 0), существуют, и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)=0$. Однако предела функции f в точке (0, 0) не существует, ибо, как легко видеть, предел вдоль координатных осей равен нулю, а вдоль прямой $y=x$ он равен 1/2.

Таким образом, из одного лишь существования предела функции в данной точке не следует существования повторных пределов в этой точке, и наоборот, из существования повторных пределов не следует существования предела в соответствующей точке. Тем не менее определенная связь между этими понятиями может быть установлена.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,\ y)$ определена на множестве E, содержащем все точки некоторой прямоугольной окрестности $P((x_0,\ y_0);\ \delta_1,\ \delta_2)$ точки $(x_0,\ y_0)$, кроме, быть может, точек прямых $x=x_0$ и $y=y_0$. Если существует предел функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ по множеству E и при любом $y\in(y_0-\delta_2,\ y_0+\delta_2)$, $y\neq y_0$, существует предел* *)

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=g(y), \tag{19.1}$$

то повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)$ существует, и

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)=\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0),\ (x,\ y)\in E} f(x,\ y). \tag{19.2}$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0),\ (x,\ y)\in E} f(x,\ y)=A$ и пусть фиксировано произвольное $\varepsilon>0$. Существует прямоугольная окрестность $P=P((x_0,\ y_0);\ \eta_1,\ \eta_2)$, $0<\eta_1<\delta_1$, $0<\eta_2<\delta_2$, такая, что если $0<|x-x_0|<\eta_1$, $0<|y-y_0|<\eta_2$, то

$$|f(x,\ y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.3}$$

---

*) Как всегда, под пределами, если не оговорено что-либо другое, понимаются конечные пределы.

В силу существования предела (19.1) для любого числа y, такого, что $0<|y-y_0|<\eta_2$, из (19.3) следует, что

$$|g(y)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(для этого достаточно перейти к пределу при $x\to x^{(0)}$ в равенстве (19.3)), а это и означает, что $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$. $\square$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}$, $y\neq 0$. Эта функция определена во всей плоскости, кроме точек оси x-ов. Обозначим ее область определения через E. Очевидно, существуют пределы

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0),\ x\in E} f(x, y)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} f(x, y)=0, \qquad y\neq 0;$$

поэтому, согласно доказанной теореме, существует и повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)=0$. Это конечно, ясно и непосредственно. Заметим, что другой повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ в этом случае не существует.

Как и для случая функций одной переменной, для функций $f(x)$ многих переменных можно определить предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, т. е. предел, когда точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$ неограниченно удаляется от начала координат, иначе говоря, когда $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\to+\infty$, а также повторный предел по переменным $x_i\to\infty$ и $x_j\to\infty$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Отметим, что и в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 1. Можно ввести и понятие бесконечных пределов. Мы всего этого делать не будем, предоставляя это проделывать читателю по мере потребности.

Замечание 1. В дальнейшем будут рассматриваться композиции функций многих переменных. Для сложных функций многих переменных справедлив аналог правила замены переменного для пределов функций, установленного ранее для функций одного переменного (см. п. 4.8*). Его формулировку и доказательство (также аналогичное одномерному случаю) предоставляем читателю.

Замечание 2. Данное в настоящем параграфе определение предела функции расширяет это понятие и для функций одного переменного. Определение предела функции, сформулированное в п. 4.4 и в п. 4.5, является определением предела по интервалу (т. е. когда множество E в определении 2 этого пункта является интервалом). Конечно, и в случае функций одной переменной можно рассматривать пределы по произвольным множествам. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле (см. п. 4.2).

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рациональное,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.}\end{cases}$$

Для предела в нуле по множеству рациональных чисел и по множеству иррациональных чисел имеем соответственно

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

Замечание 3. Если множество $X\subset R^2$, на котором определена функция $f: X\to R$, состоит только из точек x, координаты которых суть натуральные числа: $x=(m, n)$, $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$, то функция f называется *двойной последовательностью* и ее значение $y=f(m, n)$ обозначается через y_{mn}, а сама последовательность — через $\{y_{mn}\}$.

Для двойных последовательностей $\{y_{mn}\}$ можно рассматривать предел $\lim\limits_{(m,\, n)\to\infty} y_{mn}$ (см. п. 38.1) и повторные пределы

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} y_{mn}, \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} y_{mn}.$$

Пример. Пусть $y_{mn}=\cos^m 2\pi n!x$, $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$, $x\in \boldsymbol{R}$; тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.}\end{cases}$$

Действительно, если $x=p/q$, $p\in \boldsymbol{Z}$, $q\in \boldsymbol{Z}$, $q>0$, то при $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant q$, имеет место равенство $\cos 2\pi n!\, x=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!\, x=1$, $n\geqslant q$, а поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!\, x=1$. Если же число x иррационально, то при любом натуральном n справедливо неравенство $|\cos 2\pi n!\, x|<1$, из которого и вытекает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!\, x=0$. □

В результате нами получено аналитическое задание функции Дирихле (см. замечание 2):

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x, \qquad x\in \boldsymbol{R}.$$

19.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Определение 7. *Функция f, определенная на множестве $E\subset R^n$, называется непрерывной в точке $x^{(0)}\in E$ по множеству E, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)})<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon. \tag{19.4}$$

Заметим, что это определение в случае $n=1$ шире соответствующего определения непрерывности, данного в п. 5.1, так как мы здесь не предполагаем, что функция f определена обязательно в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Определение непрерывности, данное здесь (в отличие от сформулированного в п. 19.2 определения предела), не предполагает и того, что точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E. Точка $x^{(0)}$ может быть и изолированной; при этом в изолированной точке множества E функция f всегда непрерывна, ибо в этом случае в качестве $\delta > 0$, участвующего в определении непрерывности, всегда можно взять такое δ, что окрестность $U(x^{(0)}; \delta)$ не содержит других точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, а для точки $x = x^{(0)}$ условие (19.4), очевидно, выполняется при любом $\varepsilon > 0$.

Например, раньше для элементарной функции $y = \sqrt{\ln \cos 2\pi x}$, определенной лишь для целочисленных значений $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, мы не могли говорить о ее непрерывности, так как множество, на котором она определена, состоит только из изолированных точек. В смысле же определения 7 эта функция непрерывна во всех точках ее области задания.

Если же точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E, то данное определение непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E эквивалентно условию

$$\lim_{x \to x^{(0)},\ x \in E} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{19.5}$$

Из сказанного следует, что если функция f, определенная на множестве E, непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, то либо $x^{(0)}$ является предельной точкой множества E и тогда выполняется условие (19.5), либо $x^{(0)}$ является изолированной точкой.

Если в равенстве (19.5) перенести $f(x^{(0)})$ в левую часть и положить $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$, то условие (19.5) перепишется в виде

$$\lim_{\rho(x,\ x^{(0)}) \to 0,\ x \in E} \Delta y = 0.$$

Число Δy называется приращением функции в точке $x^{(0)}$, соответствующим изменению аргумента от точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ до точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Так как $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, где $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots n$, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E означает, что ее приращение Δy в этой точке стремится к нулю, когда приращения Δx_i всех ее аргументов одновременно стремятся к нулю, (т. е. таким образом, когда $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$).

Можно, конечно, сформулировать понятие непрерывности функции и на языке последовательностей.

Функция $f(x)$, определенная на множестве E, непрерывна по этому множеству в точке $x^{(0)} \in E$ в том и только в том случае, когда для любой последовательности точек $x^{(k)} \in E$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{19.6}$$

Действительно, точка $x^{(0)}$ является либо предельной точкой множества E, либо его изолированной точкой. В случае, когда $x^{(0)}$ — предельная точка множества E, равенство (19.6) равносильно равенству (19.5) в силу определения предела функции. Если же $x^{(0)}$ является изолированной точкой, то, как это отмечалось выше, в этой точке функция $f(x)$ всегда непрерывна. С другой стороны, поскольку в этом случае существует окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, в которой не содержится точек множества E, кроме самой точки $x^{(0)}$, и поскольку последовательность точек $x^{(k)} \in E$, $k=1, 2, \ldots$ сходится к точке $x^{(0)}$, то в указанной окрестности содержатся все точки этой последовательности, начиная с некоторого номера $k_0 : x^{(k)} \in U(x^{(0)})$, $k \geqslant k_0$, что возможно лишь когда $x^{(k)} = x^{(0)}$, $k \geqslant k_0$. Очевидно, что в этом случае равенство (19.6) также справедливо. □

Когда говорят, что функция f определена на множестве E, это означает, что она заведомо определена во всех точках этого множества, но не исключает того, что она может быть определена и на некотором большем множестве $D \supset E$. Может, конечно, случиться, что функция f будет непрерывной в какой-то точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E и не будет непрерывной в этой точке по множеству D (например, функция Дирихле, см. п. 4.2 и 19.2, непрерывна в точке $x=0$ по множеству рациональных чисел и не является непрерывной в этой точке по множеству всех действительных чисел). Поэтому слова «по множеству E» в определении непрерывности существенны. Впрочем, иногда в случаях, когда это не может привести к недоразумениям, они опускаются.

Лемма 1. *Если функция f определена на множестве $E \subset R^n$ и непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по этому множеству, причем $f(x^{(0)}) \neq 0$, то существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ справедливы неравенства*

$$f(x) > \frac{f(x^{(0)})}{2}, \quad \text{если} \quad f(x^{(0)}) > 0,$$

и

$$f(x) < \frac{f(x^{(0)})}{2}, \quad \text{если} \quad f(x^{(0)}) < 0,$$

в частности, во всех точках множества $U(x^{(0)}) \cap E$ значения функции $f(x)$ имеют тот же знак, что и $f(x_0)$.

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству $E \subset R^n$ и $f(x^{(0)}) > c$ (соответственно, $f(x^{(0)}) < c$), то существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для любых $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ выполняется неравенство $f(x) > c$ (соответственно $f(x) < c$).*

Доказательство леммы. Пусть $\varepsilon = \frac{|f(x^{(0)})|}{2}$, тогда в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U(x^{(0)}; \delta) \cap E$ справедливо неравен-

ство $|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon=\frac{|f(x^{(0)})|}{2}$, и поэтому

$$f(x^{(0)})-\frac{|f(x^{(0)})|}{2}<f(x)<f(x^{(0)})+\frac{|f(x^{(0)})|}{2}.$$

Если $f(x^{(0)})>0$, то $f(x^{(0)})-\frac{|f(x^{(0)})|}{2}=\frac{f(x^{(0)})}{2}$ и, следовательно, $f(x)>\frac{f(x^{(0)})}{2}$; если же $f(x^{(0)})<0$, то

$$f(x^{(0)})+\frac{|f(x^{(0)})|}{2}=\frac{f(x^{(0)})}{2} \text{ и, следовательно } f(x)<\frac{f(x^{(0)})}{2}. \square$$

Чтобы получить утверждение следствия достаточно применить лемму к функции $g(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-c$.

Совершенно аналогично случаю $n=1$ доказывается, что, *если функции f и g непрерывны в точке $x^{(0)}$ множества E, то функции $f+g$, cf (c — постоянная), fg, а если $g(x^{(0)})\neq 0$, то и f/g также непрерывны в точке $x^{(0)}$.*

Для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n>1$, наряду с их непрерывностью в вышеопределенном смысле, которую называют также *непрерывностью по совокупности переменных* $x_1, \ldots, x_n$, можно рассматривать и непрерывность по отдельным переменным x_i.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, называется *непрерывной в точке $x^{(0)}$ по переменной x_i*, если функция

$$\varphi(x_i)\overset{\text{def}}{=}f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

одной переменной x_i непрерывна в точке $x_i^{(0)}$.

Отметим, что из непрерывности функции по всем переменным в отдельности не следует ее непрерывность по совокупности. Например, функция

$$f(x, y)=\begin{cases} xy/(x^2+y^2), & \text{если } x^2+y^2>0, \\ 0 & \text{, если } x=y=0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности в каждой точке плоскости, но не непрерывна по их совокупности в точке (0, 0), так как не имеет в этой точке даже предела (проверьте это).

19.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ КОМПОЗИЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть на некотором множестве $E_t\subset R^k$ задана система n функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)\in E_t$ и пусть на некотором множестве $E_x\subset R^n$ задана функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)\in E_x$.

Если $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))\in E_x$ для любой точки $t\in E_t$, то имеет смысл говорить о сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. функции, ставящей в соответствие каждой точке $t\in E_t$

число $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ называется также *композицией* функций f и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Теорема 2. *Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны в точке $t^{(0)} \in E_t \subset R^k$ по множеству E_t, а функция f непрерывна в точке $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)})) \in E_x \subset R^n$ по множеству E_x, то сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ непрерывна в точке $t^{(0)}$ по множеству E_t.*

Доказательство. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ по множеству E_x для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon \tag{19.7}$$

для всех точек $x \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$ *), т. е. для всех точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_x$, для которых

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \eta, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.8}$$

В силу же непрерывности по множеству E_t в точке $t^{(0)}$ каждой из функций φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, для указанного $\eta > 0$ существуют такие $\delta_i = \delta_i(\eta) > 0$, что для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta_i)$ выполняется неравенство

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^{(0)})| < \eta. \tag{19.9}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ и всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство (19.9), т. е. неравенство (19.8), где

$$x_i = \varphi_i(t), \quad x_i^{(0)} = \varphi_i(t^{(0)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

По условиям теоремы имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, т. е. при $t \in E_t$ выполняется включение $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x$, а следовательно, в силу (19.9) при $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ — включение $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta) \cap E_x$. Поэтому для всех $t \in E_t \cap U(t^{(0)}; \delta)$ выполняется условие

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon,$$

где $x = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$. Это и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в точке $t^{(0)}$. □

Как видно из проведенных рассуждений, доказательство теоремы 2 по идее повторяет доказательство соответствующей теоремы для $n = 1$ (см. п. 5.2).

Замечание. Если функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, определенные на множестве $E_t \subset R^k$, непрерывны по этому множеству E_t в точке $t^{(0)} \in E_t \subset R^k$, а функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (\varphi_1(t^{(0)}), \ldots, \varphi_n(t^{(0)}))$, то существует такая окрест-

*) Здесь удобнее воспользоваться кубической окрестностью $P(x^{(0)}; \eta)$, чем сферической.

ность $U(t^{(0)})$ точки $t^{(0)}$, что для всех $t \in U(t^{(0)}) \cap E_t$ имеет смысл композиция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

В силу этого, когда функция f определена на множестве, содержащем некоторую окрестность точки $x^{(0)}$, то требование существования композиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в условиях теоремы 2 можно отбросить.

Действительно, если функция f определена в какой-то окрестности точки $x^{(0)}$, то существует и прямоугольная окрестность $P(x^{(0)}; \eta)$ этой точки, в которой функция f также определена. В качестве же искомой окрестности точки $t^{(0)}$ можно взять δ-окрестность этой точки, построенную при доказательстве теоремы 2. В самом деле, если $t \in U(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$, то, согласно неравенству (19.9), получим $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in P(x^{(0)}; \eta)$, следовательно, сложная функция определена на $U(t^{(0)}; \delta) \cap E_t$. $\square$

С помощью теоремы 2 можно легко установить непрерывность функций, большей частью встречающихся на практике, а именно так называемых элементарных функций многих переменных.

Определение 8. *Функции, получающиеся из переменных $x_1, \ldots, x_n$ с помощью конечного числа композиций элементарных функций одного переменного, операций сложения, умножения и деления, называются элементарными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$.*

Например, функция $f(x, y) = xe^{y \sin \frac{xy}{x+y}}$ является элементарной функцией двух переменных x и y. Действительно,

$$f(x, y) = xw, \quad w = e^v, \quad v = yz, \quad z = \sin t, \quad t = \alpha/\beta, \quad \alpha = xy, \quad \beta = x + y.$$

Из теоремы 2 и сохранения непрерывности в соответствующих точках при арифметических операциях над непрерывными функциями (см. п. 19.3) следует, что *всякая элементарная функция любого числа переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.*

19.5. ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА МНОЖЕСТВАХ

Функция f называется *непрерывной на множестве E*, если она непрерывна по этому множеству в каждой его точке. Иногда в этом случае говорят также, что функция f *непрерывна во множестве E*.

Докажем ряд теорем о функциях, непрерывных на множествах. Эти теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для функций одного переменного. Мы рассмотрим их при достаточно общих предположениях, это позволит более глубоко выяснить, с чем связаны рассматриваемые свойства непрерывных функций. Начнем с обобщения теоремы Вейерштрасса (см. п. 6.1) на многомерный случай. Определение ряда понятий, которые

будут рассматриваться ниже, как, например, ограниченность функции, верхняя и нижняя грани функции и т. п. — см. в п. 4.1.

Теорема 3. *Всякая функция, непрерывная на компакте, ограничена на нем и достигает своей верхней и своей нижней грани* *).

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на компакте $A \subset R^n$ и пусть $M = \sup\limits_A f$. Выберем по аналогии с одномерным случаем (см. доказательство теоремы 1 в п. 6.1) последовательность таких чисел a_m, что $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = M$ и $a_m < M$, $m = 1, 2, \ldots$.

Для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует такая точка $x^m \in A$, что $f(x^{(m)}) > a_m$. Поскольку множество A — компакт, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, предел $x^{(0)}$ которой лежит в A: $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in A$.

Для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $a_{m_k} < f(x^{(m_k)}) \leqslant M$. Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$, получим $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(m_k)}) = M$. В силу же непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству A имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)})$, и, следовательно, $M = f(x^{(0)})$.

Таким образом, верхняя грань функции f конечна, и поэтому функция f ограничена сверху; кроме того, эта верхняя грань достигается в точке $x^{(0)} \in A$. Аналогично доказывается, что функция f ограничена снизу и что ее нижняя грань достигается в некоторой точке множества A. □

Перейдем теперь к рассмотрению обобщения теоремы Коши о промежуточных значениях (см. п. 6.2) для случая функций многих переменных.

Теорема 4. *Пусть функция f определена и непрерывна в области $G \subset R^n$, тогда, принимая какие-либо два значения в G, функция f принимает в G и любое значение, заключенное между ними.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна в области $G \subset R^n$, пусть $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < b$. Пусть далее, c — какое-либо число, такое, что $a < c < b$. Согласно определению области (см. определения 25 и 26 в п. 18.2), существует такая кривая $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, что $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ и $x(t) \in G$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$.

Если $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, то, по определению кривой, функции $x_i(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Согласно же теореме 2 о суперпозиции непрерывных функций многих переменных, функция $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ также непрерывна на

*) Иначе говоря, функция, непрерывная на компакте, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

отрезке $[\alpha, \beta]$. Так как $f(x(\alpha))=a$, $f(x(\beta))=b$ и $a<c<b$, то согласно теореме Коши (см. п. 6.2), существует точка $t_0 \in (\alpha, \beta)$ такая, что $f(x(t_0))=c$. Полагая $x^{(0)}=x(t_0)$, имеем $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)})=c$. □

Следствие. *Функция f, определенная и непрерывная в замкнутой области $\bar{G}$, принимая какие-либо два значения, принимает в G и любое промежуточное.*

Доказательство. Пусть G — область, функция f определена и непрерывна на ее замыкании $\bar{G}$, $x^{(1)} \in \bar{G}$, $x^{(2)} \in \bar{G}$, $f(x^{(1)})=a$, $f(x^{(2)})=b$ и пусть для определенности $a<c<b$. Докажем, что существует точка $\zeta \in G$, такая, что $f(\zeta)=c$.

Возьмем число $\varepsilon>0$, определяемое равенством

$$\varepsilon=\min\{c-a,\ b-c\}.$$

В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что если $x \in U(x^{(1)};\ \delta) \cap \bar{G}$, то $|f(x)-f(x^{(1)})|<\varepsilon$ и, значит, $|f(x)-a|<c-a$ в частности, $f(x)<c$. Точка $x^{(1)} \in \bar{G}$, т. е. точка $x^{(1)}$ является точкой прикосновения множества G, поэтому в окрестности $U(x^{(1)};\ \delta)$ заведомо существует точка, принадлежащая G; обозначим ее $y^{(1)}$. Таким образом, $y^{(1)} \in U(x^{(1)};\ \delta) \cap G$, и поэтому $f(y^{(1)})<c$. Аналогичным методом доказывается существование точки $y^{(2)} \in G$, такой, что $f(y^{(2)})>c$. Из существования в области G точек $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ с указанным свойством в силу теоремы 4 вытекает существование в G точки ζ такой, что $f(\zeta)=c$. □

Отметим, что ни при доказательстве самой теоремы 4, ни при доказательстве ее следствия не использовалось то, что множество G открыто. Использовалось лишь то, что любые две его точки можно соединить кривой, принадлежащей самому множеству, т. е. что оно линейно связно.

Упражнение 4. Пусть функция f непрерывна и принимает значения разных знаков на открытом множестве. Доказать, что множество точек, в которых $f \neq 0$ является открытым множеством, но не является областью.

Задача 16. Построить пример области G, в замыкании $\bar{G}$ которой не существуют две точки, не соединяемые в $\bar{G}$ непрерывной кривой.

19.6. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Наряду с понятием непрерывности функции в точке в математическом анализе большую роль играет так называемое понятие равномерной непрерывности функции на множестве.

Определение 9. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $E \subset R^n$, называется равномерно непрерывной на E, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек*

$x \in E$, $x' \in E$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x') < \delta, \tag{19.10}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{19.11}$$

Отметим, что если функция f равномерно непрерывна на множестве E, то она и просто непрерывна на E, т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in E$. Чтобы в этом убедиться, достаточно, например, в (19.10) и (19.11) положить $x' = x^{(0)}$.

Если же функция f непрерывна в каждой точке $x \in E$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь $\delta = \delta(\varepsilon; x)$ такое, что для всех $x' \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x') < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. В этом случае выбор δ зависит не только от ε, но, вообще говоря, и от точки x.

Подчеркнем, что в случае, когда функция f равномерно непрерывна на множестве E, выбор соответствующего δ зависит только от ε и не зависит от выбора рассматриваемых точек множества E.

Сказанное хорошо видно при записи указанных определений с помощью логических символов. Условие непрерывности функции f на множестве E имеет вид

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in E)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in E, \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

а условие ее равномерной непрерывности на E — вид

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E, \forall x' \in E, \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Примеры 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси, ибо, если задано $\varepsilon > 0$, достаточно взять $\delta = \varepsilon$, тогда если $|x - x'| < \delta$, то в силу равенств $f(x) = x$, $f(x') = x'$ получим $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

2. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, не будет равномерно непрерывной на своей области определения, т. е. на числовой оси, из которой удалена точка $x = 0$. В самом деле, если взять, например, $\varepsilon = 1$, то при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдутся точки x и x', например точки вида

$$x = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{и} \quad x' = 1\Big/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$$

(n — достаточно большое натуральное число) такие, что $|x - x'| < \delta$, а вместе с тем $|f(x) - f(x')| > 1$.

В качестве достаточного признака равномерной непрерывности функций одного переменного на интервале отметим следующий.

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале (a, b), то она равномерно непрерывна на этом интервале.*

Действительно, если $|f'(x)| \leqslant c$ (c — постоянная) на (a, b), то с помощью формулы конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2) получим

$$|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leqslant c|x' - x|,$$
$$a < x < b, \quad a < x' < b, \quad a < \xi < b. \qquad (19.12)$$

Поэтому для $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \varepsilon/c$; тогда если $|x' - x| < \delta$, $a < x < b$, $a < x' < b$, то в силу (19.12) справедливо неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, что и означает равномерную непрерывность функции f на (a, b). □

Аналогичный результат имеет место для любого промежутка, конечного или бесконечного. Обобщение этого критерия на многомерный случай будет дано в п. 39.2.

Принципиальное значение имеет следующая теорема.

Теорема 5 (Кантор). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.*

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна.*

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что существует функция f, определенная и непрерывная на некотором компакте $E \subset R^n$, но не равномерно непрерывная на нем. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x'_\delta \in E$ и $x''_\delta \in E$ (индекс «δ» у точек означает, что они зависят от выбора δ), для которых $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ и вместе с тем $|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем какую-либо последовательность чисел δ_m, так, чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$, например, $\delta_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $x'^{(m)} = x'_{\delta_m}$, $x''^{(m)} = x''_{\delta_m}$ и, значит,

$$\rho(x'^{(m)}, x''^{(m)}) < \frac{1}{m}, \quad |f(x''^{(m)}) - f(x'^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (19.13)$$

Множество E является компактом, поэтому из последовательности $\{x'^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x'^{(m_k)}\}$, предел ζ которой принадлежит компакту E, $\lim\limits_{k\to\infty} x'^{(m_k)} = \zeta \in E$. Точка ζ является точкой прикосновения замкнутого множества E, и поэтому $\zeta \in E$.

Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x''^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x''^{(m)}\}$, соответствующую подпоследовательности $\{x'^{(m_k)}\}$. Докажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} x''^{(m_k)} = \zeta$. Действительно,

$$\rho(x''^{(m_k)}, \zeta) \leqslant \rho(x''^{(m_k)}, x'^{(m_k)}) + \rho(x'^{(m_k)}, \zeta) < \frac{1}{m_k} + \rho(x'^{(m_k)}, \zeta),$$

и так как $\rho(x'^{(m_k)}, \zeta) \to 0$ и $\frac{1}{m_k} \to 0$ при $k \to \infty$, то и $\rho(x''^{(m_k)}, \zeta) \to 0$ при $k \to \infty$, а это и означает, что $x''^{(m_k)} \to \zeta$ при $k \to \infty$.

В силу непрерывности функции f в точке $\zeta \in E$ имеем $f(x'^{(m_k)}) \to f(\zeta)$ и $f(x''^{(m_k)}) \to f(\zeta)$ при $k \to \infty$, и, следовательно,

$$f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{19.14}$$

Но, по способу построения последовательностей $\{x'^{(m)}\}$ и $\{x''^{(m)}\}$ (см. (19.13))

$$|f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 \tag{19.15}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, условия (19.14) и (19.15) противоречат друг другу. Это и доказывает теорему 5. □

Справедливость следствия вытекает из того, что отрезок является компактом.

Отметим, что при отказе от требования, чтобы множество, на котором рассматриваемая функция непрерывна, было компактом она может уже не оказаться равномерно непрерывной. Например, функция $f(x) = 1/x$ определена и непрерывна на интервале $(0, 1)$, который хотя и является ограниченным множеством, но не является замкнутым; эта функция не будет равномерно непрерывной на интервале $(0; 1)$. Функция $y = x^2$ определена и непрерывна на всей вещественной оси, которая хотя и является замкнутым множеством, но не является ограниченным. Эта функция также неравномерно непрерывна на вещественной оси. Доказательство того, что функции $y = 1/x$ и $y = x^2$ неравномерно непрерывны на указанных множествах будет дано в этом пункте несколько дальше.

Часто оказывается более удобным другой подход к понятию равномерной непрерывности, а именно с помощью так называемого модуля непрерывности функции.

Определение 10. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset R^n$. Ее модулем непрерывности $\omega(\delta; f; E)$ называется функция*

$$\omega(\delta; f; E) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x' \in E, \quad x'' \in E. \tag{19.16}$$

Часто для краткости вместо $\omega(\delta; f; E)$ пишется просто $\omega(\delta; f)$ или даже $\omega(\delta)$.

Нетрудно убедиться, что

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')|, \quad x' \in E, \quad x'' \in E,$$

т. е. в правой части равенства (19.16) под знаком верхней грани можно писать или не писать знак абсолютной величины, от чего величина указанной верхней грани не меняется.

Очевидно, также, что $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Далее, если $0<\delta_1<\delta_2$, то

$$y: y=f(x'')-f(x'),\ \rho(x',\ x'')\leqslant\delta_1\}\subset$$
$$\subset\{y: y=f(x'')-f(x'),\ \rho(x',\ x'')\leqslant\delta_2\},$$

откуда

$$\sup_{\rho(x',\ x'')\leqslant\delta_1}[f(x'')-f(x')]\leqslant\sup_{\rho(x',\ x'')\leqslant\delta_2}[f(x'')-f(x')]$$

(так как при расширении числового множества его верхняя грань может только возрастать), т. е. $\omega(\delta_1)\leqslant\omega(\delta_2)$, иначе говоря, *модуль непрерывности является монотонно возрастающей функцией.*

Задача 17. Пусть G — область в R^n. Доказать, что если $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\omega(\delta;\ f;\ G)}{\delta}=0$, то f — постоянная функция.

Примеры 1. Найдем $\omega(\delta)$ для функции $y=x^2$, $-\infty<x<+\infty$. Для любого $\delta>0$ и произвольного фиксированного x_0 имеем:

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}(x''^2-x'^2)\geqslant x_0^2-(x_0-\delta)^2=2x_0\delta-\delta^2. \qquad (19.17)$$

Это неравенство верно для всех x_0 и так как при любом фиксированном δ имеем $\lim\limits_{x_0\to+\infty}(2x_0\delta-\delta^2)=+\infty$, то из (19.17) получаем

$$\omega(\delta;\ x^2)=+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

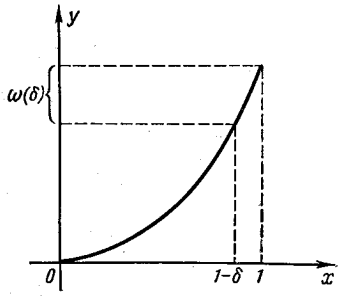

Рис. 87

Найдем теперь модуль непрерывности функции $y=x^2$ на отрезке $[0;\ 1]$. Интуитивно ясно, что поскольку модуль непрерывности $\omega(\delta)$ описывает согласно определению наибольший рост функции на отрезке длины δ, то чтобы получить модуль непрерывности функции в данном случае следует взять отрезок $[1-\delta,\ \delta]$, на котором функция $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, растет наиболее быстро: модуль непрерывности совпадает с приращением функции на этом отрезке (рис. 87):

$$\omega(\delta)=f(1)-f(1-\delta)=1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2.$$

Аналитически это проверяется следующим образом. Пусть $0\leqslant x''-\delta\leqslant x'\leqslant x''\leqslant 1$, тогда, в силу неравенства

$$x''^2-x'^2\leqslant x''^2-(x''-\delta)^2=2x''\delta-\delta^2\leqslant 2\delta-\delta^2,$$

получим

$$\omega(\delta;\ x^2)=\sup_{|x''-x'|\leqslant\delta}(x''^2-x'^2)\leqslant 2\delta-\delta^2, \qquad (19.18)$$

но если взять $x' = 1 - \delta$, $x'' = 1$, то

$$\omega(\delta;\ x^2) = \sup_{|x''-x'|\leqslant\delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant 1 - (1-\delta)^2 = 2\delta - \delta^2. \quad (19.19)$$

Из оценок (19.18) и (19.19) следует, что на отрезке [0; 1] имеем $\omega(\delta;\ x^2) = 2\delta - \delta^2$.

2. Рассмотрим функцию $y = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. С одной стороны

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right) = \sup_{|x''-x'|\leqslant\delta} \left|\sin\frac{1}{x''} - \sin\frac{1}{x'}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|x''-x'|\leqslant\delta} \left(\left|\sin\frac{1}{x''}\right| + \left|\sin\frac{1}{x'}\right|\right) \leqslant \sup_{|x''-x'|\leqslant\delta} 2 = 2.$$

С другой стороны, выбрав $x''_n = 1/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $x'_n = 1/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$ и зафиксировав n так, что $|x'_n| \leqslant \delta/2$, $|x''_n| \leqslant \delta/2$, и поэтому $|x''_n - x'_n| \leqslant |x'_n| + |x''_n| \leqslant \delta$, будем иметь

$$\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right) \geqslant \sin\frac{1}{x''_n} - \sin\frac{1}{x'_n} = 1 + 1 = 2.$$

Из полученных оценок следует, что $\omega\left(\delta;\ \sin\frac{1}{x}\right) = 2$.

3. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$ на интервале (0; 1).

При любом фиксированном δ, $0 < \delta < 1$, имеем

$$\omega\left(\delta;\ \frac{1}{x}\right) = \sup_{|x''-x'|\leqslant\delta} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right) = \sup_{x' \leqslant x'' \leqslant x'+\delta} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+\delta}\ ^{*)} = \frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)} \to +\infty \text{ при } x_0 \to +0.$$

Таким образом, $\omega(\delta;\ 1/x) = +\infty$.

В терминах модуля непрерывности равномерная непрерывность может быть выражена следующим образом.

Теорема 6. *Для того чтобы функция f, определенная на множестве E, была равномерно непрерывной на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta;\ f;\ E) = 0. \quad (19.20)$$

Доказательство. Пусть функция f равномерно непрерывна на множестве E, т. е. выполнены условия (19.10) — (19.11); тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $x' \in E$, $x'' \in E$, $\rho(x',\ x'') < \delta_\varepsilon$, то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2$. Отсюда явствует, что для

---

*) Здесь x_0 таково, что $0 < x_0 < 1 - \delta$.

любого $\delta < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta) < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Необходимость условия (19.20) доказана.

Докажем достаточность условия (19.20). Выполнение условия (19.20) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что если $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, то $\omega(\delta; f; E) < \varepsilon$. Выберем какое-либо из указанных δ. Тогда при $\rho(x', x'') < \delta$, $x' \in E$, $x'' \in E$, будем иметь (см. (19.16)): $|f(x'') - f(x')| \leqslant \omega(\delta, f, E) < \varepsilon$, т. е. функция f равномерно непрерывна на E. □

Мы видели выше, что на отрезке $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, поэтому $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0$, и, следовательно, функция x^2 равномерно непрерывна на этом отрезке, как и должно быть согласно теореме 5. Модуль непрерывности той же функции x^2, но уже рассматриваемой на всей вещественной оси, так же как и модули непрерывности $\omega\left(\delta; \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, и $\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$, не стремятся к нулю при $\delta \to +0$ и поэтому все эти функции не являются равномерно непрерывными на соответствующих множествах.

Упражнения. 5. Доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте, с помощью леммы Гейне — Бореля (см. теорему 4 в п. 18.3 и замечание после нее).

6. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ называется *кусочно линейной*, если существует такое разбиение отрезка $[a, b]$ на конечное число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

что функция $f(x)$ линейна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказать, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$ может быть с любой степенью точности аппроксимирована кусочно линейной функцией, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно линейная функция $f(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Введем теперь еще некоторые понятия, полезные для дальнейшего.

Определение 11. *Пусть $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Число (конечное или бесконечное) $d = \sup\limits_{x' \in E,\ x'' \in E} \rho(x', x'')$ называется диаметром множества E и обозначается через $d(E)$.*

Упражнения 7. Пусть Q^n — n-мерный шар с центром в некоторой точке $x^{(0)}$ и радиусом r: $Q^n = O(x^{(0)}, r)$, тогда $d(Q^n) = 2r$. Доказать, что множество E ограничено тогда и только тогда, когда $d(E) < +\infty$.

Определение 12. *Пусть функция f определена на множестве E; тогда значение модуля непрерывности $\omega(\delta; f; E)$ при δ, равном диаметру множества E, т. е. $\omega(d(E); f; E)$ называется колеба-*

нием функции f на множестве E и обозначается через $\omega(f;\ E)$ или просто $\omega(f)$.

Очевидно, что в силу (19.16)

$$\omega(f;\ E) = \sup_{x' \in E,\ x'' \in E} [f(x'') - f(x')].$$

Замечание. Из сказанного в этом и предыдущем параграфах, в частности, видно, что в ряде вопросов, относящихся к функциям многих переменных, всю их специфику можно в достаточной мере усмотреть уже в двумерном или трехмерном случае. Благодаря удачно выбранным определениям и обозначениям доказательства теорем автоматически переносятся со случая $n=2$ на произвольный n-мерный случай иногда лишь приводя к некоторому техническому усложнению записи. Случай же $n=2$ имеет преимущество геометрической наглядности и более простой записи, когда в ней участвуют координаты точек. Поэтому для большей ясности и простоты изложения мы, как правило, будем подробно рассматривать лишь случаи $n=2$ или $n=3$, а в случае произвольного n — лишь формулировать соответствующие результаты или даже только отмечать возможность их обобщения на случай произвольного n. Если же при рассмотрении какого-либо вопроса при $n>3$ возникают какие-либо специфические трудности, то этот вопрос будет детально рассматриваться в общем случае.

§ 20. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

20.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим сначала случай функций трех переменных.

Определение 1. *Пусть в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ задана функция $u=u(x,\ y,\ z)$. Фиксируя переменные y и z: $y=y_0$, $z=z_0$, получим функцию одного переменного x: $u=u(x,\ y_0,\ z_0)$. Обычная производная* (см. п. 9.1) *этой функции в точке $x=x_0$ называется частной производной функции $u(x, y, z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) по x и обозначается через $\dfrac{\partial u(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial x}$.*

Таким образом,

$$\frac{\partial u(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{du(x,\ y_0,\ z_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Заметим, что обозначение частной производной по переменной x через $\dfrac{\partial u(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial x}$ традиционно. Правильнее было бы писать $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,\ y_0,\ z_0)$, так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ является единым символом, обозначающим новую функцию, значение которой и рассматривается в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Если вспомнить определение обычной производной $\frac{du}{dx}$ (см. п. 9.1) то, согласно этому определению, можно написать

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

или, если ввести обозначение $u(x_0+\Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$, ($\Delta_x u$ — приращение функции по переменной x),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Аналогично вводятся частные производные по y и z:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \left.\frac{du(x_0, y, z_0)}{dy}\right|_{y=y_0},$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \left.\frac{du(x_0, y_0, z)}{dz}\right|_{z=z_0},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\partial z},$$

где $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$ — приращения функции соответственно по переменным y и z.

По аналогии с функциями одной переменной линейные функции $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, $\frac{\partial u}{\partial y} dy$, $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ переменных dx, dy, dz, называемых *дифференциалами независимых переменных*, называются *частными дифференциалами* функции $u(x, y, z)$ соответственно по переменным x, y, z и обозначаются через

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Аналогичные определения имеют место для любого числа переменных.

Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то по определению

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{df(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_i}\right|_{x_i = x_i^{(0)}}, \tag{20.1}$$

или, что то же, опуская обозначение аргумента, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i}$, где $\Delta_{x_i} y = f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Для обозначения частной производной $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ применяются также обозначения y_{x_i} или f_{x_i}.

Частный дифференциал $d_{x_i}y$ определяется по формуле

$$d_{x_i}y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial y}{\partial x_i}\,dx_i, \quad -\infty < dx_i < +\infty, \tag{20.2}$$

и тем самым является линейной функцией переменной dx_i, называемой *дифференциалом независимой переменной* x_i. Здесь везде $i = 1, 2 \ldots, n$. В случае $n = 1$ частная производная совпадает с обычной производной, а частный дифференциал — с обычным дифференциалом.

Подчеркнем, что $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ — единый символ, т. е. в нем числитель и знаменатель не имеют самостоятельного смысла. С другой стороны, частная производная $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, конечно, может быть записана и в виде частного двух дифференциалов: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{d_{x_i}y}{dx_i}$.

Из определения частных производных, как обычных производных при условии фиксирования всех переменных, кроме одной, по которой берется производная, следует, что при вычислении частных производных можно пользоваться правилами вычисления обычных производных. Пусть, например, требуется найти производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = xye^{x/y}$. Для этого, зафиксировав в этой формуле x, получим функцию одной переменной y; вычисляя ее производную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xye^{x/y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y-x)\,e^{x/y}}{y}.$$

В заключение этого пункта отметим, что из непрерывности в данной точке функции n переменных не вытекает существование у нее в этой точке частных производных. Соответствующий пример в случае $n = 1$ был приведен ранее (см. п. 9.2). Важно заметить, что при $n \geqslant 2$ из существования даже всех частных производных в некоторой точке не следует непрерывность функции в этой точке *). Это естественно, поскольку условие непрерывности функции нескольких переменных в точке накладывает определенное ограничение на ее поведение при приближении к этой точке по всем направлениям, в то время как существование частных производных в точке означает, что функция удовлетворяет определенным условиям при приближении к указанной точке лишь в направлении координатных осей.

Чтобы в этом наглядно убедиться, рассмотрим функцию $f(x, y)$, равную 0, если $xy = 0$, и 1, если $xy \neq 0$. Очевидно,

*) Напомним, что при $n = 1$, т. е. для функции одной переменной из существования в точке производной вытекает и непрерывность функции в этой точке (см. п. 9.2).

$f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Однако эта функция разрывна в точке (0, 0), так как, например, ее предел вдоль прямой $y = x$ при $(x, y) \to (0, 0)$ равен 1, а $f(0, 0) = 0$.

Более того, существуют функции, имеющие частные производные во всех точках и все-таки разрывные. Примером такой функции является функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{при} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = y = 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Эта функция имеет частные производные во всей плоскости и разрывна в точке (0, 0) (почему?).

20.2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ В ТОЧКЕ

Рассмотрим сначала случай функций двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(M_0; \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и пусть (рис. 88)

$$M = (x, y) \in U(M_0; \delta),$$
$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

и, значит,

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta.$$

Пусть, наконец, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

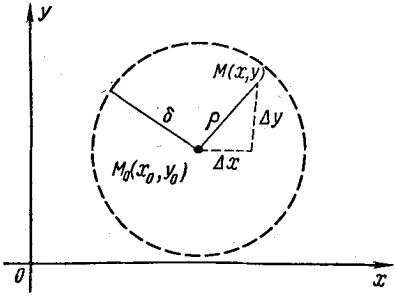

Рис. 88

Обычно Δz называется *полным приращением функции*; это название объясняется тем, что здесь, вообще говоря, все независимые переменные получают приращения, отличные от нуля.

Определение 2. *Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существуют два такие числа A и B, что*

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{20.4}$$

где при $\rho \neq 0$:

$$\alpha(\Delta x; \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\,\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0\ ^{*)}. \tag{20.5}$$

---

*) Напомним, что, согласно сделанному соглашению, запись $\lim\limits_{\rho \to 0} f$ равносильна записи $\lim\limits_{M \to M_0} f$, где $\rho = \rho(M, M_0)$.

Из (20.4) следует, что $\alpha(0, 0)=0$.

Вместе с тем заметим, что значение функции $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке $(0, 0)$ не определено формулой (20.5).

Определение 3. *В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\Delta x+B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется полным дифференциалом, или просто дифференциалом, функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается через dz.*

Таким образом $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

Вместо Δx и Δy употребляются также равнозначные обозначения dx и dy, т. е. пишут $dz=A\,dx+B\,dy$. Из (20.5) следует, что

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho}=0. \tag{20.6}$$

Функции $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, обладающие свойством (20.6), будем обозначать по аналогии с функциями одного переменного через $o(\rho)$ при $\rho\to 0$ *). Применяя это обозначение, определение дифференцируемости можно переписать в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\ \rho\to 0. \tag{20.7}$$

Лемма 1. *Условие* (20.5) *эквивалентно условию*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y)=\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x+\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,\ \rho\neq 0, \tag{20.8}$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (20.5), т. е. $\alpha=\varepsilon\rho$, $\rho\neq 0$, где $\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$; тогда

$$\alpha=\varepsilon\rho=\varepsilon\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=$$
$$=\varepsilon\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Delta x+\varepsilon\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Delta y=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

где $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$, $\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$. Замечая, что $|\Delta x/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}|\leqslant 1$, $|\Delta y/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}|\leqslant 1$, имеем $|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon|$, $|\varepsilon_2|\leqslant|\varepsilon|$, откуда $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$, т. е. получилось представление функции α в виде (20.8).

Пусть, наоборот, выполнено условие (20.8), т. е. $\alpha=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$, $\rho\neq 0$, где $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ при $\rho\to 0$; тогда

$$\alpha=\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_1+\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_2\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon\rho,$$

---

*) Вообще для функций α и β многих переменных $\alpha=o(\beta)$ при $x\to x^{(0)}$, $x\in E\subset R^n$, $x^{(0)}\in R^n$, если $\alpha(x)=\varepsilon(x)\beta(x)$, где $\lim\limits_{x\to x^{(0)},\ x\in E}\varepsilon(x)=0$. В этом случае будем говорить, что функция α является бесконечно малой по сравнению с функцией β при $x\to x^{(0)}$, $x\in E$.

где $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2$ и, значит, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$; поэтому $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом получилось представление функции α в виде (20.5). □

Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, так как $|\Delta x| \leqslant \rho$ и $|\Delta y| \leqslant \rho$, то из формул (20.4) и (20.5) следует, что $\Delta z \to 0$ при $\rho \to 0$, что и означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0). □

Теорема 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = A\,dx + B\,dy$ — ее дифференциал в этой точке, то в точке (x_0, y_0) у функции f существуют все частные производные и*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{20.9}$$

Таким образом,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{20.10}$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости (см. (20.4) и (20.8)),

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{20.11}$$

Полагая $\Delta y = 0$, получим $\Delta z = \Delta_x z = A\,\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$ (это следует из (20.11), поскольку, полагая $\Delta y = 0$, получим $\rho = |\Delta x|$). Отсюда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{20.12}$$

где при $\Delta x \to 0$ правая часть стремится к пределу, равному A, поэтому и левая часть при $\Delta x \to 0$ имеет тот же предел, а это и означает (см. (20.1)), что в точке (x_0, y_0) существует частная производная $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Аналогично, полагая в (20.4) $\Delta x = 0$ и переходя к пределу, при $\Delta y \to 0$ получим $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. □

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она имеет единственный дифференциал.*

Единственность дифференциала непосредственно вытекает из формул (20.9), так как частные производные в данной точке определяются однозначно.

Вспоминая определения частных дифференциалов (см. (20.2)), формулу (20.10) можно переписать в виде

$$dz = d_x z + d_y z,$$

т. е. полный дифференциал функции (когда он существует) является суммой ее частных дифференциалов.

Заметим, что утверждение, обратное теореме 2, не имеет места: существуют функции, имеющие все частные производные во всех точках плоскости, но не дифференцируемые в некоторой точке. Примером может служить функция (20.3), приведенная в конце предыдущего пункта: в точке (0, 0) эта функция не непрерывна, откуда в силу теоремы 1 вытекает, что в точке (0, 0) она и не дифференцируема.

Из сказанного следует, что не всегда выражение $d_x z + d_y z$, когда оно имеет смысл, является полным дифференциалом функции. Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке частных производных сложнее, чем связь между дифференцируемостью и существованием производной у функции одной переменной.

Сформулируем достаточные условия в терминах свойств частных производных для дифференцируемости функции.

Теорема 3. *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые непрерывны в самой точке (x_0, y_0); тогда функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.*

Следствие. *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем эти частные производные непрерывны в самой точке (x_0, y_0), то и функция $z = f(x, y)$* также *непрерывна в этой точке.*

Доказательство теоремы. Обозначим через $U(\delta)$ δ-окрестность точки (x_0, y_0), в которой определена вместе со своими частными производными f_x и f_y функция f. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(\delta)$. Замечая, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

применим к выражениям, стоящим в квадратных скобках и являющимся приращениями функций только по одной переменной, формулу конечных приращений Лагранжа (см. п. 11.2). Это возможно, поскольку функция $f(x, y_0 + \Delta y)$, рассматриваемая как функция одного переменного x, имеет на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$ производную (являющуюся частной производной по x функции f), поэтому она и непрерывна на указанном отрезке. Таким образом, функция $f(x, y_0 + \Delta y)$ удовлетворяет всем условиям, при которых была доказана формула конечных приращений Лагранжа. Аналогично проверяется и возможность применения формулы Лагранжа к функции $f(x_0, y)$, рассматриваемой как функция одного переменного y, на отрезке с концами

в точках y_0 и $y_0+\Delta y$. Тогда

$$\Delta z = f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y)\,\Delta y,$$
$$0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1, \qquad (20.13)$$

причем θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от выбора точки $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, т. е. от Δx и Δy.

Если

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f_x(x_0,\ y_0) = \varepsilon_1,$$
$$f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y) - f_y(x_0,\ y_0) = \varepsilon_2, \qquad (20.14)$$

то в силу непрерывности частных производных f_x и f_y в точке $(x_0,\ y_0)$ имеем

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0. \qquad (20.15)$$

Подставив (20.14) в (20.13), получим:

$$\Delta z = f_x(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,\ y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \qquad (20.16)$$

что в силу выполнения условий (20.15) и означает дифференцируемость функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ (см. (20.4) и (20.8)). □

Следствие из теоремы вытекает из того обстоятельства, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, является и непрерывной в ней (см. теорему 1).

Теорема 3 имеет важное значение, связанное с тем, что понятие дифференцируемости функции играет первостепенную роль в ряде разделов теории функций многих переменных. Однако непосредственная проверка дифференцируемости функции (например, для выяснения возможности применения тех или иных теорем) часто бывает затруднительна, в то время как проверка непрерывности частных производных, для вычисления которых имеется удобный аналитический аппарат, оказывается проще.

Определение 4. *Функция, имеющая в некоторой точке (или соответственно на некотором множестве) непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке (соответственно на этом множестве).*

Сопоставим определение дифференцируемости функции (определение 2) и определение непрерывной дифференцируемости (определение 4). Дифференцируемость функции в точке означает существование в этой точке дифференциала, т. е. справедливость для этой точки формулы (20.4). Непрерывная же дифференцируемость функции в точке означает непрерывность в этой точке ее частных производных. Таким образом, дифференцируемость функции связана с понятием дифференциала, а непрерывная дифференцируемость — с понятием частных производных. Вместе с тем из непрерывной дифференцируемости в точке (на открытом множестве)

следует дифференцируемость в этой точке (соответственно на этом множестве); в этом состоит утверждение теоремы 3.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые дополнительные свойства функций ε_1 и ε_2 из формулы (20.16).

Определение 5. *Пусть A и B — два плоских множества, $A \subset R^2_{xy}$, $B \subset R^2_{uv}$ и пусть функция $f = f(x, y, u, v)$ определена для $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

Функция f называется равномерно стремящейся к нулю на множестве A переменных x, y при $(u, v) \to (u_0, v_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех (u, v), удовлетворяющих условию $\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ и всех $(x, y) \in A$ выполняется условие $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.

Общее определение равномерного стремления функции к пределу будет дано в п. 39.4.

Теорема 4. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $G \subset R^2$. Тогда*

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (20.17)$$

где функции $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно стремятся к нулю при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ на любом компакте $A \subset G$.

Доказательство. Пусть A — компакт, лежащий в G. Тогда замкнутые множества A и $R^2 \setminus G$ не пересекаются, и так как A ограничено (см. п. 18.3, теорему 3), то $d = \rho(A, R^2 \setminus G) > 0$ (см. лемму 7, п. 18.2).

Множество $A_{d/2} = \{(x, y) : \rho((x, y), A) \leqslant d/2\}$ содержится во множестве G и является компактом (см. лемму 11 п. 18.3).

Пусть теперь $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < d/2$; тогда при $(x_0, y_0) \in A$ получим (см. (20.13)):

$$(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \in A_{d/2},\ (x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y) \in A_{d/2},$$

и, следовательно, согласно формулам (20.14), имеем неравенства

$$|\varepsilon_1| \leqslant \omega(\rho;\ f_x;\ A_{d/2}), \quad |\varepsilon_2| \leqslant \omega(\rho;\ f_y;\ A_{d/2}),$$

где в их правых частях стоят соответственно модули непрерывности функций f_x и f_y. Из непрерывности частных производных f_x и f_y на компакте $A_{d/2}$ следует, что

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho;\ f_x;\ A_{d/2}) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho;\ f_y;\ A_{d/2}) = 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\rho < \delta$ выполняются неравенства

$$\omega(\rho;\ f_x;\ A_{d/2}) < \varepsilon,\ \omega(\rho;\ f_y;\ A_{d/2}) < \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $\rho < \delta$ и всех $(x_0, y_0) \in A$ справедливы неравенства

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon,\ |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерное стремление к нулю при $\rho \to 0$ функций ε_1 и ε_2 на компакте A. $\square$

Замечание. В предположениях теоремы 2 приращение функции Δz представимо также в виде

$$\Delta z = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon\rho, \tag{20.18}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ равномерно на каждом компакте $A \subset G$ стремится к нулю, когда $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Для доказательства достаточно в формуле (20.18) положить $\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}$ (сравните с доказательством леммы в начале этого пункта).

Все определения и утверждения этого пункта переносятся и на случай функции $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Например, условие дифференцируемости в данной точке $x^{(0)}$ в общем случае выглядит так:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.19}$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \ \Delta y = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем в этом случае $A_i = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, если функция f дифференцируема, то

$$f(x) = f(x^{(0)}) + A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \ldots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho),$$
$$\rho \to 0, \tag{20.20}$$

т. е. функция f в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2}$, равна линейной функции *). Образно говоря, дифференцируемость функции в данной точке означает, что функция f «почти линейна» в окрестности этой точки; точный смысл выражения «почти линейна» заключается в формуле (20.20).

В случае, когда имеет место (20.19), линейная функция $\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n$ от переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (здесь вместо $x^{(0)}$ написано x) называется *дифференциалом функции*, или, подробнее, полным дифференциалом функции в данной точке x и обо-

*) Функции вида $y = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$, где c_i — постоянные, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, называются *линейными функциями* n переменных, или, что то же самое, *линейными функциями точки* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$.