В силу свойств сопряженных комплексных чисел имеем

$$\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z}).$$

Действительно,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_n z + A_0} =$$
$$= \bar{A}_n \bar{z}^n + \bar{A}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1 \bar{z} + \bar{A}_0 = \bar{P}_n(\bar{z}).$$

Очевидно также, что $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Покажем, что если число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k, то сопряженное ему число $\bar{z}_0$ является корнем сопряженного многочлена $\bar{P}_n(z)$ и притом той же кратности.

В самом деле, переходя в формулах

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

к сопряженным выражениям, получим

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Полагая для наглядности $\zeta = \bar{z}$ ($\bar{z}$, как и z — произвольные комплексные числа), перепишем полученные формулы в виде

$$\bar{P}_n(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\zeta), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Это и означает, что число $\bar{z}_0$ является корнем кратности k для многочлена $\bar{P}_n(z)$.

Пусть теперь все коэффициенты многочлена $P_n(z)$ суть действительные числа. В этом случае сопряженный многочлен $\bar{P}_n(z)$, очевидно, совпадает с самим многочленом $P_n(z)$. Поэтому из доказанного следует, что если комплексное число z_0 является корнем кратности k многочлена $P_n(z)$ с действительными коэффициентами, то и сопряженное ему число $\bar{z}_0$ также является корнем кратности k этого многочлена.

Отметим далее, что произведение $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ всегда является многочленом (относительно z) с действительными коэффициентами. Действительно, пусть $z_0 = a + bi$, где a и b действительны. Тогда $\bar{z}_0 = a - bi$, и поэтому

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) =$$
$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2 = z^2 + pz + q, \quad (23.8)$$

где положено $p = -2a$ и $q = a^2 + b^2$; очевидно, p и q действительны. Отметим, что $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$, поэтому при $b \neq 0$, т. е. тогда, когда корень z_0 является существенно комплексным числом, выполняется неравенство

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \quad (23.9)$$

Обратим внимание и на справедливость обратного утверждения: если выполнено неравенство (23.9), то корни трехчлена z^2+pz+q (p и q действительны) — существенно комплексные числа.

Из сказанного следует, что для всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение на множители вида

$$P_n(x)=A_n(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots \\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.10)$$

где

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+2\sum_{i=1}^{s}\beta_i=n, \quad \frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

и все коэффициенты A_n, a_1, ..., a_r; p_1, q_1, ..., p_s, q_s действительны. При этом a_1, ..., a_r суть все действительные корни многочлена $P_n(x)$, а каждому существенно комплексному корню z_0 и ему сопряженному корню $\bar{z}_0$ соответствует множитель вида $x^2+px+q=(x-z_0)(x-\bar{z}_0)$. Вместо буквы z, употреблявшейся выше для обозначения аргумента рассматриваемого многочлена, здесь по традиции написана буква x, чтобы подчеркнуть, что все рассмотрения происходят в действительной области (это означает, что коэффициенты многочлена x^2+px+q действительны).

Формула (23.10) непосредственно следует из формул (23.7) и (23.8): нужно в разложении (23.7) сгруппировать попарно множители с сопряженными корнями и записать произведения вида $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)$ в форме (23.8). Тогда, замечая, что кратность сопряженных корней z_0 и $\bar{z}_0$ одинакова, мы и получим формулу (23.10).

Разложение многочлена на множители вида (23.10) единственно, ибо оно однозначно определяется корнями этого многочлена и их кратностями.

23.5*. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть дан многочлен $P(x)$. Всякий многочлен $R(x)$, на который делится многочлен $P(x)$, т. е.

$$P(x)=R(x)\,r(x), \quad (23.11)$$

где $r(x)$ — также многочлен, называется *делителем* многочлена $P(x)$.

Мы видели, что многочлен $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots \\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \quad (23.12)$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — действительные корни многочлена, а множители вида $x^2+p_jx+q_j$ соответствуют существенно комплексным корням этого многочлена,

$$\frac{p_j^2}{4}-q_j<0, \quad j=1, 2, \ldots, s;$$

коэффициенты A, p_j и q_j $(j=1, 2, \ldots, s)$ действительны. Отсюда следует, что всякий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ может быть записан в виде

$$R(x)=B(x-a_1)^{\lambda_1}\ldots(x-a_r)^{\lambda_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots \\ \ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}, \quad (23.13)$$

где $\lambda_i\leqslant\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, $\mu_j\leqslant\beta_j$, $j=1, 2, \ldots, s$. (23.14)

Действительно, никаких других множителей вида

$$x-a \text{ и } x^2+px+q, \quad (23.15)$$

где a, p и q действительны и $\frac{p^2}{4}-q<0$ в разложении многочлена $R(x)$ быть не может, ибо, с одной стороны, многочлен $R(x)$, как всякий многочлен, может быть разложен на множители вида (23.15), с другой стороны, из формулы (23.11) следует, что если в разложении $R(x)$ на множители имеется множитель вида $x-a$, соответственно вида x^2+px+q, то $x=a$, соответственно корни трехчлена x^2+px+q, являются и корнями многочлена $P(x)$; поэтому указанные множители входят в разложение (23.12). Неравенства (23.14) также очевидны: из той же формулы (23.11) следует, что кратность корня многочлена $R(x)$ не может превышать кратности того же корня многочлена $P(x)$.

Пусть теперь даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Всякий многочлен, являющийся делителем как многочлена $P(x)$, так и многочлена $Q(x)$, называется их *общим делителем*. Общий делитель двух многочленов, который делится на любой общий делитель этих многочленов, называется их *наибольшим общим делителем*.

Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ записаны в виде (23.12):

$$P(x)=A'(x-a_1')^{\alpha_1'}\ldots(x-a_{r'}')^{\alpha_{r'}'}(x^2+p_1'+q_1')^{\beta_1'}\ldots \\ \ldots(x^2+p_{s'}'x+q_{s'}')^{\beta_{s'}'}, \quad (23.16)$$

$$Q(x)=A''(x-a_1'')^{\alpha_1''}\ldots(x-a_{r''}'')^{\alpha_{r''}''}(x^2+p_1''x+q_1'')^{\beta_1''}\ldots \\ \ldots(x^2+p_{s''}''x+q_{s''}'')^{\beta_{s''}''}, \quad (23.17)$$

то всякий их общий делитель $R(x)$ можно записать в виде (23.13), где множители

$$x-a_k \ (k=1, 2, \ldots, r), \ x^2+p_lx+q_l \ (l=1, 2, \ldots, s) \quad (23.18)$$

входят как в разложение (23.16), так и в разложение (23.17).

Пусть индексы y коэффициентов множителей (23.18) в разложениях (23.16) и (23.17) равны соответственно i'_k, j'_l и i''_k, j''_l, тогда в силу неравенств (23.14) имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i'_k}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i''_k}, \qquad k=1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j'_l}, \quad \mu_l \leqslant \beta''_{j''_l}, \qquad l=1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Для того чтобы многочлен (23.13) был наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, необходимо и достаточно, чтобы показатели степени λ_k, $k=1, 2, \ldots, r$ и μ_l, $l=1, 2, \ldots, s$ были максимальными из возможных, т. е. чтобы

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\left\{\alpha'_{i'_k}, \alpha''_{i''_k}\right\}, \qquad k=1, 2, \ldots, r, \\ &\mu_l = \min\left\{\beta'_{j'_l}, \beta''_{j''_l}\right\}, \qquad l=1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{23.20}$$

Действительно, при выполнении этих условий многочлен $R(x)$ будет общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, кроме того он будет делиться на любой многочлен вида (23.13), для которого выполнены условия (23.19), т. е. $R(x)$ будет делиться на любой общий делитель многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. $\square$

Из найденного вида общего делителя, и в частности, наибольшего общего делителя следует, во-первых, что наибольший общий делитель двух многочленов не единственен; однако два наибольших общих делителя двух данных многочленов могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем (постоянную B в формуле (23.13) можно брать произвольной, неравной нулю); во-вторых, что наибольший общий делитель двух многочленов имеет степень, бо́льшую, чем любой их общий делитель, не являющийся наибольшим общим делителем.

В качестве примера, полезного для дальнейшего, найдем наибольший общий делитель многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$.

Предварительно заметим, что если число a является действительным корнем кратности α многочлена $P(x)$, т. е.

$$P(x) = (x-a)^\alpha P_1(x), \quad P_1(a) \neq 0, \tag{23.21}$$

то a является корнем кратности $\alpha - 1$ для многочлена $P'(x)$.

Действительно, дифференцируя (23.21), имеем

$$P'(x) = \alpha(x-a)^{\alpha-1} P_1(x) + (x-a)^\alpha P'_1(x) = (x-a)^{\alpha-1} P_2(x),$$

где

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x-a) P'_1(x)$$

и

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

Подобным образом, если

$$P(x) = (x^2 + px + q)^\beta P_3(x), \tag{23.22}$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, и, значит, корни z_1 и z_2 ($z_2=\bar{z}_1$) трехчлена x^2+ $+px+q$ существенно комплексны, и если

$$P_3(z_1)\neq 0,\ P_3(z_2)\neq 0,\quad \text{то}\quad P'(x)=(x^2+px+q)^{\beta-1}P_4(x),$$

где $P_4(z_1)\neq 0$, $P_4(z_2)\neq 0$, т. е. $P_4(z)$ не делится на x^2+px+q.

Действительно, дифференцируя (23.22), получим:

$$P'(x)=\beta(x^2+px+q)^{\beta-1}(2x+p)P_3(x)+$$
$$+(x^2+px+q)^{\beta}P_3'(x)=(x^2+px+q)^{\beta-1}P_4(x),$$

где $P_4(x)=\beta(2x+p)P_3(x)+(x^2+px+q)P_3'(x)$, откуда следует, что

$$P_4(z_1)=\beta(2z_1+p)P_3(z_1)\neq 0,\quad P_4(z_2)=\beta(2z_2+p)P_3(z_2)\neq 0,$$

ибо $z_1\neq -p/2$ и $z_2\neq -p/2$, так как они существенно комплексны. □

Из доказанного следует, что если многочлен $P(x)$ записан в виде (23.12), то его производную $P'(x)$ можно представить в виде

$$P'(x)=C(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}P_5(x),$$

где многочлен $P_5(x)$ не делится ни на $x-a_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, ни на $x^2+p_jx+q_j$, $j=1, 2, \ldots, s$, т. е. не имеет общих корней с многочленом $P(x)$.

Из формул (23.13) и (23.20) получаем, что наибольший общий делитель $R(x)$ многочлена $P(x)$ и его производной $P'(x)$ имеет вид

$$R(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}. \qquad (23.23)$$

Изложенный метод получения наибольшего общего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ принципиально полностью решает вопрос о существовании и виде наибольшего общего делителя. Практическое же его применение может, однако, вызвать существенные затруднения: для использования этого метода надо знать разложения на множители вида (23.16) и (23.17) данных многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, которые далеко не всегда удается написать в явном виде.

Существует, однако, другой способ получения наибольшего общего делителя двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, называемый обычно *алгоритмом Евклида*. *) Опишем его.

Пусть для определенности степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$. Разделив $P(x)$ на $Q(x)$,

*) Евклид (ок. 365 — ок. 300 до н. э.) — древнегреческий математик.

получим в качестве частного некоторый многочлен $Q_1(x)$ и остаток $R_1(x)$, степень которого, очевидно, меньше степени многочлена $Q(x)$ (в противном случае процесс деления на $Q(x)$ можно было бы продолжить):

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x).$$

Из этой формулы следует: 1) если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на некоторый многочлен $r(x)$, то и многочлен $R_1(x)$ делится на этот многочлен; 2) если многочлены $Q(x)$ и $R_1(x)$ делятся на какой-то многочлен $r(x)$, то и многочлен $P(x)$ делится на этот многочлен $r(x)$. Отсюда в свою очередь следует, что общие делители многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, в частности их наибольшие общие делители, совпадают с общими делителями, соответственно с наибольшими общими делителями, многочленов $Q(x)$ и $R_1(x)$.

Разделим далее многочлен $Q(x)$ на многочлен $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

продолжая процесс дальше, будем иметь

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Степени многочленов $R_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ убывают, поэтому существует номер (мы его обозначим $m+1$) такой, что $R_{m+1}(x) = 0$, и следовательно,

$$R_{m-1}(x) = R_m(x)Q_{m+1}(x).$$

Пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, $Q(x)$ и $R_1(x)$, $R_1(x)$ и $R_2(x)$, ..., $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$ имеют одинаковые общие делители, а значит, и одинаковые наибольшие общие делители. Но $R_{m-1}(x)$ делится на $R_m(x)$, поэтому $R_m(x)$ является наибольшим общим делителем $R_{m-1}(x)$ и $R_m(x)$, а значит, и наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

23.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Если рациональная дробь $P(x)/Q(x)$ не является правильной, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу

деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{23.24}$$

где $R(x)$, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — некоторые многочлены, а $P_1(x)/Q_1(x)$ — правильная рациональная дробь.

Лемма 1. *Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь. Если число a является действительным корнем кратности $\alpha \geqslant 1$ многочлена $Q(x)$, т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} Q_1(x) \quad \text{и} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

то существуют действительное число A и многочлен $P_1(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}$ также является правильной.

Доказательство. Каково бы ни было действительное число A, прибавляя и вычитая из дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)}$$

выражение $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\right] =$$

$$= \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)}. \tag{23.25}$$

По условию, степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x) = (x-a)^{\alpha} Q_1(x)$. Очевидно, что и степень многочлена $Q_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$ (ибо $\alpha \geqslant 1$), поэтому при любом выборе числа A рациональная дробь $\frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^{\alpha} Q_1(x)}$ является правильной.

Выберем теперь число A таким образом, чтобы число a было корнем многочлена $P(x) - AQ_1(x)$ и, следовательно, чтобы этот многочлен делился на $x-a$. Иначе говоря, определим A из условия

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

поскольку, по условию, $Q_1(a) \neq 0$, то отсюда $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. При таком выборе A второе слагаемое правой части в формуле (23.25) можно сократить на $x-a$, в результате получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на множитель $x-a$,

где a действительно, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Лемма 2. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — *правильная рациональная дробь. Если комплексное число* $z_1 = a + bi$ (a *и* b *действительны,* $b \neq 0$) *является корнем кратности* $\beta \geqslant 1$ *многочлена* $Q(x)$, *т. е.*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q_1(x),$$

где $Q_1(z_1) \neq 0$, а $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, *то существуют действительные числа* M, N *и многочлен* $P_1(x)$ *с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)},$$

где дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q_1(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. Для любых действительных M и N имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta}\right] =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P(x) - (Mx + N) Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)}, \quad (23.26)$$

причем второе слагаемое правой части равенства (23.26) является, как нетрудно видеть, правильной дробью.

Постараемся теперь подобрать M и N так, чтобы числитель этой дроби делился на $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$. Для этого достаточно выбрать M и N так, чтобы z_1 было корнем многочлена $P(x) - (Mx + N) Q_1(x)$. Действительно, тогда, согласно сказанному в п. 23.3, число $\bar{z}_1$, сопряженное с z_1, также будет являться корнем указанного многочлена. Отсюда и следует, что этот многочлен в силу существования его разложения вида (23.10) делится на $x^2 + px + q$. Итак, пусть

$$P(z_1) - (Mz_1 + N) Q_1(z_1) = 0. \quad (23.27)$$

Если это имеет место, то $Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, где, по условию, $Q_1(z_1) \neq 0$.

Пусть $z_1 = a + bi$, $P(z_1)/Q(z_1) = A + Bi$; тогда

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + bi) + N.$$

Отсюда, приравнивая действительные и мнимые части, получим уравнения $Ma + N = A$ и $Mb = B$ и следовательно,

$$M = \frac{B}{b} \quad \text{и} \quad N = A - \frac{a}{b} B. \quad (23.28)$$

При этих значениях M и N многочлен

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$$

будет делиться на многочлен x^2+px+q. Сокращая второе слагаемое правой части равенства (23.26) на x^2+px+q, получим дробь вида

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q_1(x)}.$$

Поскольку она получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на многочлен с действительными коэффициентами, то и сама она является также правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. □

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

Теорема 1. *Пусть $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь* *), *$P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \qquad (23.29)$$

где a_i — попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$ кратности α_i, $i=1, 2, \ldots, r$, а $x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\bar{z}_j)$, где z_j и $\bar{z}_j$ — попарно различные при разных j существенно комплексные корни многочлена $Q(x)$ кратности β_j, $j=1, 2, \ldots, s$, то существуют действительные числа $A_i^{(\alpha)}$, $i=1, 2, \ldots, r$, $\alpha=1, 2, \ldots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \text{ и } N_j, \quad j=1, 2, \ldots, s, \quad \beta=1, 2, \ldots, \beta_j,$$

такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1}+\ldots+$$
$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\ldots+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_s-1}}+\ldots+\frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+$$
$$+\frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+\ldots+\frac{M_s^{(\beta_s)}x+N_s^{(\beta_s)}}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (23.30)$$

---

*) Без ограничения общности можно считать, что коэффициент у старшего члена многочлена $Q(x)$ равен единице, так как в случае, когда он равен какому-то другому числу (отличному от нуля), можно разделить числитель и знаменатель дроби $P(x)/Q(x)$ на это число, после чего у получившегося в знаменателе многочлена коэффициент у старшего члена окажется равным единице.

Доказательство. Из разложения (23.29) имеем:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}Q_1(x).$$

Здесь

$$Q_1(x)=(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

и, следовательно, $Q_1(a_1)\neq 0$, поэтому, согласно лемме 1,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}}+\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}.$$

Применяя в случае $\alpha_1>1$ подобным образом ту же лемму к рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha_1-1}Q_1(x)}$, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}Q_2(x)}.$$

Продолжая этот процесс дальше, пока показатель степени у сомножителя x_1-a не станет равным нулю, а затем поступая аналогичным образом относительно множителей $x-a_i$, $i=2,\ldots,r$, будем иметь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1}+\ldots+$$
$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+\ldots+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+\frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

где $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ — снова правильная рациональная дробь, причем $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ суть многочлены с действительными коэффициентами и многочлен $Q^*(x)$ не имеет действительных корней.

Применяя последовательно лемму 2 к дроби $P^*(x)/Q^*(x)$ и к получающимся при этом выражениям, в результате получим формулу (23.30). □

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\quad\text{и}\quad\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где a, p, q, A, M и N — действительные числа и $\frac{p^2}{4}-q<0$ (корни трехчлена x^2+px+q существенно комплексные), называются *элементарными рациональными дробями.*

Таким образом, доказанная теорема утверждает, *что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму элементарных рациональных дробей.*

При выполнении разложения вида (23.30) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным так называемый метод

неопределенных коэффициентов. Он состоит в следующем. Для данной дроби $P(x)/Q(x)$ пишется разложение (23.30), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считаются неизвестными ($i=1, 2, \ldots, r$, $\alpha=1, 2, \ldots, \alpha_i$, $j=1, 2, \ldots, s$, $\beta=1, 2, \ldots, \beta_j$). После этого обе части равенства приводятся к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравниваются коэффициенты. При этом если степень многочлена $Q(x)$ равна n, то, вообще говоря, в числителе правой части равенства (23.30) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени $n-1$, т. е. многочлен с n коэффициентами, число же неизвестных $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ также равняется n (см. (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

Таким образом, мы получаем систему n уравнений с n неизвестными. Существование у нее решения вытекает из доказанной теоремы.

Отметим, что после приведения выражения (23.30) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае когда $Q(x)$ имеет действительные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются некоторые соотношения между искомыми коэффициентами, полезные для их окончательного определения.

Примеры. 1. Разложим дробь $x/((x^2-1)(x-2))$ на элементарные дроби. Согласно (22.30), искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \qquad (23.31)$$

Мы имеем случай, когда все корни знаменателя действительны. Полагая в равенстве (23.31), согласно сказанному выше, последовательно $x=1$, $x=-1$ и $x=2$, находим

$$1=-2A, \quad -1=6B, \quad 2=3C,$$

откуда

$$A=-\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{6}, \quad C=\frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомое разложение будет

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}. \qquad (23.32)$$

2. Найдем разложение на элементарные дроби для $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$. Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, имеем

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$-1=A,\ 0=C+E,\ 1=2A+B+D,\ 0=E,\ 0=A+D,$$

отсюда находим

$$A=-1,\ B=2,\ C=0,\ D=1,\ E=0,$$

и, поэтому, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}. \tag{23.33}$$

Следует заметить, что в отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а действуя каким-либо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$
$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Упражнение 3. Доказать, что разложение вида (23.30) правильной рациональной дроби единственно.

§ 24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

24.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. При этом каждый раз, не оговаривая этого специально, будем предполагать, что речь идет о вычислении интеграла на некотором

промежутке, во всех точках которого определена подынтегральная элементарная функция (иначе говоря, на котором формула, задающая подынтегральную функцию, имеет смысл, см. об этом в п. 4.3).

В предыдущем параграфе показано, что всякая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей (см. (23.24) и (23.30)). Интеграл от многочлена вычисляется, и притом очень просто (см. п. 22.2). Рассмотрим вопрос об интегрировании элементарных рациональных дробей.

Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

Если $n=1$, то (см. формулу 2 в п. 22.2)

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C, \tag{24.1}$$

а если $n\neq 1$, то (см. формулу 1 в п. 22.2)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C. \tag{24.2}$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $\frac{p^2}{4}-q<0$, $n=1, 2, \ldots$. Снова начнем со случая $n=1$. Замечая, что

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

и полагая $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt=M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+$$
$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C. \tag{24.3}$$

В случае $n>1$, полагая, как и выше, $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, подобным же образом получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2N-pM}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \tag{24.4}$$

Рассмотрим в отдельности каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из

них, то он вычисляется сразу:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \qquad (24.5)$$

Второй же интеграл правой части равенства (24.4) вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Проинтегрируем интеграл I_n по частям, положив

$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}$, $dv = dt$, и, следовательно, $du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}$, $v = t$,

а затем, добавив и вычтя a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и произведя деление так, как это указано ниже, получим

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

т. е. $I_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$, откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (24.6)$$

Интеграл I_1 легко вычисляется (см. в п. 22.2 формулу 12); формула (24.6) позволяет вычислить I_2; зная же I_2, по той же формуле можно найти значение и I_3, продолжая этот процесс дальше, можно найти и выражение для любого интеграла I_n ($n = 1,\ 2,\ \ldots$).

24.2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Из результатов п. 23.6 и предыдущего п. 24.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель дроби не обращается в ноль, существует и выражается через элементарные функции, а именно он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.*

Теорема 1 есть прямое следствие формул (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1) — (24.6). Эти формулы дают и конкретный способ вычисления интеграла от рациональной функции: сначала деле-

нием числителя на знаменатель выделяется «целая часть», т. е. данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (23.24), затем получившаяся правильная рациональная дробь раскладывается на сумму элементарных дробей (23.30), после чего, используя линейность интеграла (22.6), можно вычислить интегралы от каждого слагаемого в отдельности, согласно формулам (22.8) и (24.1) — (24.6).

Примеры. 1. Вычислим $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$. Уже известно (см. (23.32)), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Вычислим $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; получим

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби (см. формулу (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$
$$+ \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Следует иметь в виду, что указанный метод вычисления неопределенного интеграла от рациональной дроби является общим: с помощью его можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби, если можно получить конкретное разложение знаменателя на множители вида (23.10). Однако естественно, что в отдельных частных случаях бывает целесообразнее для существенного сокращения вычислений действовать иными путями.

Например, для вычисления интеграла

$$I=\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$$

проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементарные дроби, а применить правило интегрирования по частям. Положив

$$u=x,\quad dv=\frac{x\,dx}{(1-x^2)^3}\quad \text{и следовательно,}\quad du=dx,\quad v=\frac{1}{4(1-x^2)^2},$$

получим

$$I=-\frac{1}{2}\int x\,\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx.$$

Прибавляя и вычитая к числителю получившейся подынтегральной функции x^2, производя деление, получаем два интеграла, из которых первый табличный, а второй легко вычисляется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
I&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx=\\
&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2}=\\
&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{8}\int x\,\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}=\\
&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{1-x^2}=\\
&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{x}{8(1-x^2)}+C.
\end{aligned}$$

24.3*. МЕТОД ОСТРОГРАДСКОГО

В пункте (24.1) было показано, что всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы элементарных дробей. Но из п. 24.1 следует, что первообразные элементарных дробей $\frac{1}{x-a}$ и $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$ являются трансцендентными функциями вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+B\ln(b_1x+b_2)+C$ (см. (24.1) и (24.3)); первообразная элементарной дроби

$$A/(x-a)^\alpha,\quad \alpha=2,\ 3,\ \ldots,$$

является рациональной дробью; первообразная же элементарной дроби $(Mx+N)/(x^2+px+q)^\beta$, $\beta=2,\ 3,\ \ldots$, в силу формул (24.4), (24.5), (24.6) и формулы 12 п. 22.2 может быть, вообще говоря, представлена в виде суммы правильной рациональной дроби и трансцендентной функции вида $A\operatorname{arctg}(a_1x+a_2)+C$, являющейся первообразной от дроби вида $\frac{B}{x^2+px+q}\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right)$. Поэтому

всякая первообразная любой рациональной дроби представима, вообще говоря, в виде суммы рациональной дроби (алгебраическая часть) и трансцендентной функции, являющейся первообразной от суммы дробей вида

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Таким образом, если $P(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь и

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

разложение ее знаменателя в виде (23.10), то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{j=1}^{s}\frac{M_jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}\right]dx; \quad (24.7)$$

отсюда, произведя под знаком интеграла сложение дробей, имеем

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \quad (24.8)$$

где $Q_2(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x_2+p_sx+q_s)$. Из формул (24.2) и (24.6) следует, что многочлен $Q_1(x)$ имеет вид

$$Q_1(x)=$$
$$=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ldots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1},$$

т. е. многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$ (см. (23.23)).

Формула (24.8) называется формулой *Остроградского* *). Второе слагаемое правой части формулы (24.8) называется трансцендентной частью интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$; это естественно, ибо из сказанного выше следует, что всякая первообразная дроби $P_2(x)/Q_2(x)$ с точностью до постоянного слагаемого представляет собой линейную комбинацию логарифмов и арктангенсов от рациональных функций и, значит, как это можно показать, будет являться, вообще говоря, трансцендентной функцией. Первое же слагаемое, называемое алгебраической частью, может быть найдено чисто алгебраическим путем, если известны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ (а значит, и $Q'(x)$, т. е. без интегрирования каких-либо функций. В самом деле, многочлен $Q_1(x)$, являясь наибольшим общим делителем многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$, всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида (см. п. 23.5*), тем самым для отыскания

*) М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик.

многочлена $Q_1(x)$ не требуется знания корней многочлена $Q(x)$; однако, если корни многочлена $Q(x)$ известны, а значит, известно и его разложение вида (23.17), то многочлен $Q_1(x)$ сразу выписывается по формуле (23.23). Многочлен $Q_2(x)$ находится как частное от деления $Q(x)$ на $Q_1(x)$.

Для отыскания же многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов. Поясним его. Обозначим степень многочлена $Q_1(x)$ через n_1, степень многочлена $Q_2(x)$ — через n_2; тогда из равенства

$$Q(x)=Q_1(x)Q_2(x) \tag{24.9}$$

получим $n=n_1+n_2$. В силу того что дроби $P_1(x)/Q_1(x)$ и $P_2(x)/Q_2(x)$ правильные, степени многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ соответственно не выше, чем n_1-1 и n_2-1 и, значит, в этих многочленах число отличных от нуля коэффициентов соответственно не превышает n_1 и n_2; таким образом, число неизвестных коэффициентов равно $n_1+n_2=n$. Дифференцируя первообразные, входящие в обе части формулы (24.8), получим (опуская для краткости обозначение аргумента) соотношение

$$\frac{P}{Q}=\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)'+\frac{P_2}{Q_2}.$$

Производя дифференцирование, будем иметь

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}+\frac{P_2}{Q_2}. \tag{24.10}$$

Заметим, что

$$\frac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q_1Q_2}, \tag{24.11}$$

где $R=Q_1'Q_2/Q_1$ является многочленом. Действительно, если z — корень многочлена Q_1 кратности λ, то, как мы знаем (см. п. 23.4), z является корнем кратности $\lambda-1$ для производной Q_1' и однократным корнем многочлена Q_2, поэтому в этом случае z является и корнем кратности λ для многочлена $Q_1'Q_2$. Отсюда, согласно формуле (23.7), сразу следует, что многочлен $Q_1'Q_2$ нацело делится на многочлен Q_1, т. е. что R также является многочленом. Итак, из (24.9), (24.10) и (24.11) имеем

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1'Q_2-P_1R}{Q}+\frac{P_2}{Q_2},$$

откуда

$$P=P_1'Q_2-P_1R+P_2Q_1. \tag{24.12}$$

Многочлен P имеет степень не выше, чем $n-1$ (ибо дробь P/Q — правильная). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, переменного x в обеих частях

равенства (24.12), получим n линейных уравнений относительно n неизвестных. Выше было доказано (см. (24.8)), что многочлены P_1 и P_2 всегда (в частности, при некотором фиксированном многочлене Q и при любом многочлене P степени, не превышающей $n-1$) существуют; поэтому полученная система линейных уравнений имеет решение при любой правой части *). Отсюда следует, что определитель этой системы не равен нулю, а значит, про рассматриваемую систему можно сказать, что она не только имеет решение, но и что оно единственно. Тем самым не только получен метод для определения неизвестных коэффициентов в формуле (24.8), но и доказана единственность этого представления.

Формула (24.8) сводит, вообще говоря, задачу интегрирования любой правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, у которой знаменатель $Q(x)$ имеет только простые корни. С помощью этой формулы при интегрировании правильной рациональной дроби можно найти указанным выше путем алгебраическую часть интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, а затем проинтегрировать более простую рациональную дробь $P_2(x)/Q_2(x)$, если, конечно, случайно не окажется, что $P_2(x)$ — тождественный ноль: в этом случае задача будет уже решена.

Описанный здесь метод интегрирования рациональных дробей носит название *метода Остроградского*.

При использовании метода Остроградского для интегрирования рациональных дробей часто оказывается целесообразней записывать формулу Остроградского (24.8) в виде (24.7), так как в этом случае после нахождения неизвестных коэффициентов в подынтегральной функции ее сразу можно проинтегрировать.

Неизвестные коэффициенты в формуле (24.7) находятся тем же методом, который был описан для формулы (24.8): следует продифференцировать обе части равенства (24.7), привести к общему знаменателю все рациональные дроби, получившиеся в обеих частях равенства, приравнять коэффициенты у одинаковых степеней переменной x в многочленах, стоящих в числителях, и решить получившуюся систему линейных уравнений.

Пример. Применим метод Остроградского для вычисления интеграла $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx$. Согласно формуле (24.8),

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}\,dx,$$

поэтому

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2} = \left[\frac{Kx^2+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

*) Как обычно, предполагается, что все члены уравнений, содержащие неизвестные, и только они перенесены в левую часть равенства.

Произведя дифференцирование, получим

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(3Kx^2+2Lx+M)(1-x)(x^2+1)-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)\times\times[-2(1+x^2)+(1-x)2x]}{(1-x)^3(1+x^2)^2}+$$

$$+\frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Отсюда имеем:

$$x^4+2x^3-2x^2+x=(3Kx^2+2Lx+M)(-x^3+x^2-x+1)-$$
$$-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)(-4x^2+2x-2)+$$
$$+(kx^2+lx+m)(x^4-2x^3+2x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$M+2N+m=0,$$
$$-M+2L+2M-2N-2m+l=1,$$
$$3K-2L+M+2L-2M+4N+k-2l+2m=-2,$$
$$-M+2L-3K+2K-2L+4M-2K+2l-2m=2,$$
$$3K-2L-2K+4L+2k-2l+m=1,$$
$$-3K+4K-2k+l=0,$$
$$k=0,$$

или

$$M+2N+m=0,$$
$$2L+M-2N+l-2m=1,$$
$$3K-M+4N+k-2l+2m=-2,$$
$$-K+3M-2k+2l-2m=2,$$
$$K+2L+2k-2l+m=1,$$
$$K-2k+l=0,$$
$$k=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$K=\frac{1}{2},\quad L=-\frac{1}{2},\quad M=\frac{3}{2},\quad N=-1,$$
$$k=0,\quad l=-\frac{1}{2},\quad m=\frac{1}{2};$$

поэтому

$$\int\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{x^3-x^2+3x-2}{(1-x)^2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

§ 25. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

25.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Функции вида

$$R(u_1, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)}, \tag{25.1}$$

где P и Q — многочлены от переменных $u_1, \ldots, u_n$, т. е. функции вида

$$\sum_{k_1 + \cdots + k_n \leqslant k} a_{k_1, \ldots, k_n} u_1^{k_1} \ldots u_n^{k_n},$$

называются *рациональными функциями от* $u_1, \ldots, u_n$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ в свою очередь являются функциями переменной $x: u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то функция

$$R[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

называется *рациональной функцией* от функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Например, функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

является рациональной функцией от x и радикалов $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, и $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2-1}, \sqrt{x^2+1}\right);$$

здесь $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4 = \sqrt{x^2+1}$.

Если в формуле (25.1) переменные $u_1, \ldots, u_n$ являются элементарными тригонометрическими функциями, то получающаяся сложная функция называется рациональной относительно элементарных тригонометрических функций. Примером такой функции является следующая:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x).$$

Перейдем теперь к интегралам от функций рассмотренных типов и покажем, что в ряде случаев они сводятся к интегралам от рациональных функций.

25.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx.$

Рассмотрим интегралы, указанные в заглавии пункта, при условии, что постоянные $r_1, \ldots, r_s$ рациональны, и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d — постоянные). Последнее предположение естественно, так как если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то коэффициенты a, b были бы пропорциональны коэффициентам c, d и поэтому отношение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависело бы от x. Подынтегральная функция в этом случае была бы обыкновенной рациональной дробью от одного переменного, вопрос об интегрировании которой был рассмотрен выше.

Пусть m — общий знаменатель чисел $r_1, \ldots, r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{ — целое}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Положим

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{25.2}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ является рациональной функцией, поэтому $\rho'(t)$ также рациональная функция; далее,

$$dx = \rho'(t)\, dt, \tag{25.4}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{25.5}$$

Подставляя (25.3), (25.4) и (25.5) в подынтегральное выражение рассматриваемого интеграла, получим

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx =$$
$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right) \rho'(t)\, dt = \int R^*(t)\, dt,$$

где $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \ldots, t^{p_s}\right) \rho'(t)$, очевидно, является рациональной функцией переменного t. Таким образом, вычисление интеграла

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx \tag{25.6}$$

сводится к интегрированию рациональных дробей.

Конечно, для того чтобы найти выражение для исходного интеграла, надо после вычисления интеграла $\int R^*(t)\, dt$, сделав

обратную замену переменного $t=((ax+b)/(cx+d))^{1/m}$, вернуться к первоначальной переменной x. В дальнейшем в аналогичных ситуациях мы не будем каждый раз оговаривать необходимость обратного перехода к исходной переменной x.

Отметим, что, в частности, к рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$\int R[x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_s}]\,dx$, в частности $\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_s})\,dx$.

Пример. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Полагая, согласно общему правилу, $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=6\left[\int (t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$
$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C=$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

К интегралам вида (25.6) сводятся иногда с помощью элементарных преобразований и интегралы других типов, например, типа

$$\int \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx.$$

Покажем метод вычисления подобных интегралов на примере интеграла

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx. \tag{25.7}$$

Вынося в подынтегральной функции множитель $(x-1)$ за знак радикала, получим интеграл вида (25.6): именно при $x\geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int (x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx,$$

а при $x<1$

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int (1-x)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\,dx.$$

При $1<x<2$ подынтегральное выражение чисто мнимое.

Рассмотрим, например, случай $x\geqslant 2$. Положим здесь (см. (25.2)) $t^2=\frac{x-2}{x-1}$, тогда

$$x=\frac{2-t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2},$$

поэтому

$$\int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,dx=\int \left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)\frac{2t^2\,dt}{(1-t^2)^2}=2\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^3}$$

— получился интеграл от рациональной дроби, который был вычислен раньше (см. п. 24.2).

25.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Указанные интегралы могут быть сведены с помощью замены переменного к рациональным функциям. Рассмотрим три замены переменного, носящие название *подстановок Эйлера* *). Итак, пусть дан интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \quad a\neq 0. \tag{25.8}$$

Первый случай: $a>0$.

Сделаем замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t \tag{25.9}$$

(знаки можно брать в любой комбинации). Возведем обе части написанного равенства в квадрат:

$$ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

отсюда

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}}=R_1(t),$$

$R_1(t)$ — рациональная функция от t, значит $R_1'(t)$ — также рациональная функция.

Далее, $dx=R_1'(t)\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm R_1(t)\sqrt{a}\pm t=R_2(t)$, где, очевидно, $R_1(t)$ — рациональная функция. Окончательно,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$
$$=\int R\left(R_1(t),\ R_2(t)\right)R_1'(t)\,dt=\int R^*(t)\,dt,$$

где $R^*(t)=R\left(R_1(t),\ R_2(t)\right)R_1'(t)$ — рациональная дробь. □

Второй случай: корни трехчлена ax^2+bx+c действительные.

Пусть x_1 и x_2 действительны и являются корнями трехчлена ax^2+bx+c. Если $x_1=x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)^2}=|x-x_1|\sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что в этом случае либо под корнем стоит отрицательная при всех значениях $x\neq x_1$ величина, т. е. корень принимает только чисто мнимые выражения, — этот случай имеет место при $a<0$ и мы его не рассматриваем, либо при $a\geqslant 0$ после указанного элементарного преобразования получаем, что переменное x не входит под знак корня, т. е. под интегралом

*) Л. Эйлер (1707—1783) — швейцарский математик.

стоит просто рациональная функция от x, вообще говоря, разная для каждого из промежутков $(-\infty, x_1)$ и $(x_1, +\infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_1 \neq x_2$. Замечая, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, и вынося $x-x_1$ из-под знака корня, получаем, что

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right) = \\ = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right), \quad (25.10)$$

здесь $R_3(u, v)$ — рациональная функция переменных u и v.

Как известно (см. п. 25.1), интеграл от функции (25.10) может быть вычислен с помощью подстановки (см. 25.2) $t^2=\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$, что в нашем случае дает

$$\pm(x-x_1)t=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)},$$

или, беря $t>0$ при $x \geqslant x_1$ и $t<0$ при $x \leqslant x_1$, $(x-x_1)t = \sqrt{ax^2+bx+c}$. □

Рассмотренный в предыдущем пункте интеграл (25.7) является примером случая 2; этот интеграл был сведен выше к рациональной дроби приемом, разобранным сейчас в общем случае.

Два изученных нами способа вычисления интеграла (25.8) позволяют всегда свести этот интеграл к интегралу от рациональной дроби на любом промежутке, если только корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ на этом промежутке не принимает чисто мнимые значения (естественно, изучая анализ в действительной области, исключить этот случай из рассмотрения). В самом деле, допустим, что ни первый, ни второй случай не имеют места, т. е. $a<0$ и корни x_1 и x_2 трехчлена ax^2+bx+c существенно комплексны: $x_1=g+hi$, $x_2=g-hi$, $h \neq 0$. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \\ = \sqrt{a(x-g-hi)(x-g+hi)}=\sqrt{a[(x-g)^2+h^2]},$$

и так как $a<0$, а $h \neq 0$, то под корнем при любых x стоит отрицательное выражение. □

Третий случай: $c>0$.

В этом случае можно применить подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

(комбинация знаков произвольна). Возводя в квадрат, получим равенство

$$ax^2+bx=\pm 2\sqrt{c}\,xt+x^2t^2,$$

откуда

$$x=\frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_4(t), \quad dx=R_4'(t)\,dt,$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm R_4(t)\,t=R_5(t)$, где $R_4(t)$, $R_4'(t)$ и $R_5(t)$ суть рациональные функции t. Поэтому

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(R_4(t),\ R_5(t)\right)R_4'(t)\,dt=\int \tilde{R}(t)\,dt,$$

где $\tilde{R}(t)=R\left(R_4(t),\ R_5(t)\right)R_4'(t)$ — рациональная дробь. □

Интегралы вида $\int R\left(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d}\right)dx$ сводятся подстановкой

$$t^2=ax+b \tag{25.11}$$

к рассмотренным интегралам вида (25.8).

В самом деле, из (25.11) имеем:

$$x=\frac{t^2-b}{a},\quad dx=\frac{2}{a}t\,dt,\sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}t^2-\frac{cb}{a}+d}=\sqrt{At^2+B},$$

где $A=\frac{c}{a}$, $B=-\frac{cb}{a}+d$, поэтому

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d}\right)dx=\int R_6\left(t,\ \sqrt{At^2+B}\right)dt,$$

где $R_6(u,\ v)$—рациональная функция переменных u и v. В правой части последнего равенства стоит интеграл типа (25.8). □

Вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям, поэтому их следует применять, вообще говоря, лишь тогда, когда рассматриваемый интеграл не удается вычислить другим более коротким способом. Например, замечая, что $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, нетрудно убедиться, что интеграл (25.8) в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором интервале, с помощью линейной подстановки может быть приведен (ср. п. 22.3) к одному из трех интегралов:

$$\int R\left(t,\ \sqrt{1-t^2}\right)dt,\ \int R\left(t,\ \sqrt{t^2-1}\right)dt,\ \int R\left(t,\ \sqrt{t^2+1}\right)dt$$

(конечно, здесь символом R обозначена, вообще говоря, другая, чем в формуле (25.8), рациональная функция). Для вычисления полученных интегралов часто оказывается очень удобным использовать тригонометрические подстановки

$$t=\sin u,\ t=\cos u,\ t=\operatorname{tg} u,$$

а также гиперболические подстановки

$$t=\operatorname{sh} u,\ t=\operatorname{ch} u,\ t=\operatorname{th} u.$$

25.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА

Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*. Будем рассматривать случаи, когда n, m и p — рациональные, а a и b действительные числа.

Положим

$$x=t^{1/n}, \tag{25.12}$$

тогда

$$dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1}\, dt \quad \text{и} \quad \int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int (a+bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\, dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx \tag{25.13}$$

сводится подстановкой (25.12) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p\, t^q\, dt, \tag{25.14}$$

где p и q рациональны. В рассматриваемом случае

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Первый случай: p — целое число.

Пусть $q = \frac{r}{s}$, где r и s — целые числа. Согласно результатам п. 25.2 в этом случае подстановка $z = t^{1/s}$ сводит интеграл (25.14) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q — целое число.

Пусть теперь $p = r/s$, r и s — целые числа. Согласно результатам пункта 25.2, интеграл (25.14) приводится в этом случае подстановкой $z = (a+bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

Третий случай: $p+q$ — целое.

Пусть $p = r/s$ и s — целые. Запишем для наглядности интеграл (25.14) несколько в другом виде:

$$\int (a+bt)^p\, t^q\, dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Снова имеем интеграл типа, рассмотренного в том же п. 25.2. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}.$$

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p+q$ является целым, интеграл (25.14) при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (25.13) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, интеграл (25.13) может быть сведен к интегралу

от рациональной дроби. При этом в случае, когда p целое, это сведéние осуществляет подстановка

$$z = x^{n/s},$$

где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, т. е. $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в случае, когда $\frac{m+1}{n}$ целое, — подстановка

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

где число s является знаменателем дроби p, т. е. $p = r/s$; а в случае, когда $\frac{m+1}{n} + p$ целое, — подстановка

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

П. Л. Чебышев *) показал, что при показателях m, n и p, не удовлетворяющих вышеуказанным условиям, интеграл (25.13) не выражается через элементарные функции.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \sqrt{x}\sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx = \int x^{1/2}\left(1 - x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4} dx.$$

Здесь $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ и $(m+1)/n = -1$; имеем второй случай.

Сделаем указанную выше подстановку:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}; \tag{25.15}$$

отсюда

$$x = (1 - z^4)^{-2/3}, \quad dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-5/3} z^3\,dz,$$

и потому

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{z^4}{(1-z^4)^2}\,dz = \frac{2}{3}\int z\,d\frac{1}{1-z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{1-z^4} - \int \frac{dz}{1-z^4}\right) =$$

$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$$

$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C,$$

где z выражается через x согласно формуле (25.15).

*) П. Л. Чебышев (1821 — 1894) — русский математик.

25.5. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \quad a \neq 0,$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$. С принципиальной точки зрения этот интеграл всегда можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью одной из подстановок Эйлера (см. п. 25.3). Однако в данном конкретном случае значительно быстрее к цели приводит обычно другой прием.

Именно покажем, что справедлива формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \\ = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{25.16}$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше, чем $n-1$, а α — некоторое число.

Итак, пусть многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{25.17}$$

задан. Если существует многочлен

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0, \tag{25.18}$$

удовлетворяющий условию (25.16), то, дифференцируя это равенство, получим:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ = P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

или

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \tag{25.19}$$

Здесь слева стоит многочлен степени n, а справа каждое слагаемое также является многочленом степени не больше n.

Замечая, что

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1, \tag{25.20}$$

и подставляя (25.17), (25.18) и (25.20) в (25.19), имеем равенства

$$2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ = 2(ax^2+bx+c)[(n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1] + \\ + (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты у одинаковых степеней x, получим следующую систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$
\begin{gathered}
2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha, \\
2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \qquad (25.21) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1}, \\
2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.
\end{gathered}
$$

Из последнего уравнения сразу находится b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{na}.$$

Подставляя это выражение в предпоследнее уравнение и замечая, что в этом уравнении коэффициент у неизвестного b_{n-2} равен $2a(n-1) \neq 0$ найдем значение b_{n-2}. Подставляя далее значения b_{n-1} и b_{n-2} в предыдущее уравнение, найдем значение b_{n-3}, и т. д. Последовательно получим все значения неизвестных b_k ($k=0, 1 \ldots, n-1$). После этого из первого уравнения сразу находится неизвестное α.

Таким образом, система (25.21) имеет решение при любых значениях $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому определитель этой системы не равен нулю и указанное решение единственно.

На практике многочлен $P_{n-1}(x)$ в формуле (26.16) пишут с неопределенными коэффициентами, которые находят, решая систему (25.21). После этого вычисление данного интеграла сводится к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

который в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором промежутке, легко сводится к табличному (см. п. 22.3).

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

подстановкой

$$t = \frac{1}{x-\lambda}$$

сводятся к интегралам рассмотренного типа (25.16).

§ 26. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

26.1. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi,$$

сводит указанный в заглавии интеграл к интегралу от рациональной дроби. Действительно, имеем

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{26.1}$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Таким образом, получился интеграл от рациональной функции.

Вычислим указанным методом интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. Используя формулы (26.1), получим:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u}+C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя с принципиальной точки зрения рассматриваемые интегралы всегда можно привести к интегралу от рациональной дроби указанным методом, при практическом его применении он часто приводит к громоздким вычислениям; вместе с тем другие методы, в частности подстановки вида

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x, \tag{26.2}$$

иногда значительно быстрее позволяют вычислить нужный интеграл.

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Представим его в виде $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Сразу видно, что в этом случае

очень удобна подстановка $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, d \operatorname{tg} x = \int (1 + u^2)\, du =$$
$$= u + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Представляя интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ в виде $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^4 x \cos x}$, убеждаемся в целесообразности подстановки $u = \cos x$. Действительно,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\sin^4 x \cos x} = -\int \frac{du}{(1-u^2)^2 u} = -\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{(1-u^2)^2 u^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2 v}\,^{*)} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)^2 v}\, dv =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)\, v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-v)+v}{(1-v)\, v}\, dv - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1-v} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} = -\frac{1}{2}\ln|v| +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln|1-v| - \frac{1}{2}\frac{1}{1-v} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Конечно, интегралы, рассмотренные в примерах 1 и 2, могут быть вычислены и с помощью подстановки (26.1), например,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+u^2)^3\, du}{u^3 (1-u^2)};$$

однако, при таком способе пришлось бы интегрировать более сложную рациональную дробь, чем в результате применения подстановки $u = \cos x$.

3. Иногда при вычислении интегралов, подынтегральное выражение которых содержит $\sin x$ и $\cos x$, бывает полезно прибегать и к другим искусственным приемам, используя известные тригонометрические формулы, как, например, формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Покажем на рассмотренном только что примере способ применения этой формулы:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x} =$$
$$= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d \sin x}{\sin^3 x} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v^3}\,^{*)} =$$
$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\frac{1}{v^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

Как и следовало ожидать, получился тот же результат, что и выше.

---

*) Здесь сделана подстановка $v = u^2$.

26.2. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Пусть m и n — рациональные числа. Интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ с помощью подстановок $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Действительно, полагая, например, $u = \sin x$, получим

$$\cos x = (1 - u^2)^{1/2}, \quad du = \cos x\, dx, \quad dx = (1 - u^2)^{-1/2}\, du,$$

и потому

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du.$$

Таким образом, интеграл $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ выражается или нет через элементарные функции в зависимости от того, обладает этим свойством или нет получающийся интеграл от дифференциального бинома.

В случае когда m и n целые (не обязательно положительные) числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^m x\, dx$ относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте, в частности, для их вычисления целесообразно применять подстановки (26.2).

Например, если $m = 2k + 1$ (соответственно $n = 2k + 1$) — нечетное число, то можно сделать подстановку $u = \cos x$ (соответственно $u = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x = \\ = -\int (1 - u^2)^k u^n\, du.$$

Рассматриваемый интеграл сведен к интегралу от рациональной дроби.

Аналогичный результат можно получить и для интеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ с помощью подстановки $u = \sin x$.

Если $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, то бывает полезной подстановка $t = \cos 2x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x\, dx = \\ = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2} d \cos 2x\right) = \\ = -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l\, dt,$$

т. е. снова получился интеграл от рациональной дроби.

Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них ноль), то целесообразно применять формулы

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

которые, очевидно, приводят рассматриваемый интеграл к интегралам того же типа, но с меньшими, также неотрицательными показателями. Например,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

26.3. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$

Указанные в заглавии пункта интегралы непосредственно вычисляются, если в них подынтегральные функции преобразовать согласно формулам

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int \sin 2x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

26.4. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ, ВЫЧИСЛЯЮЩИЕСЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

К числу интегралов, указанных в заглавии этого пункта, относятся, например, интегралы

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int x^n\cos\alpha x\,dx$, $\int x^n\sin\alpha x\,dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$, $\int x^n \arcsin x\,dx$, $\int x^n \arccos x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$ (n — целое неотрицательное).

Все эти интегралы вычисляются с помощью, вообще говоря, повторного интегрирования по частям.

Действительно, имеем:

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \int e^{\alpha x}\,d\frac{\sin\beta x}{\beta} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx =$$
$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}d\left(-\frac{\cos\beta x}{\beta}\right) =$$
$$= \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx =$$
$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I,$$

откуда

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \qquad (26.3)$$

Аналогично вычисляется и интеграл $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$.

В интегралах $\int x^n \cos \alpha x \, dx$, $\int x^n \sin \alpha x \, dx$, $\int x^n e^{\alpha x} dx$, положив $u = x^n$ и соответственно $dv = \cos \alpha x \, dx$, $dv = \sin \alpha x \, dx$, $dv = e^{\alpha x} dx$, после интегрирования по частям снова придем к интегралу одного из указанных видов, но уже с меньшим на единицу показателем степени. Применяя этот прием n раз, придем к интегралу рассматриваемого типа с $n = 0$, который, очевидно, сразу берется. Например,

$$\int x^2 \sin x \, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x d \sin x = -x^2 \cos x + 2x \sin x -$$
$$- 2 \int \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Используя интегралы, рассмотренные выше, можно вычислять и более сложные интегралы. Вычислим, например, интеграл

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Интегрируя по частям и применяя (26.3), имеем:

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \int x^n d \left[\frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] =$$
$$= x^n e^{\alpha x} \frac{\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx -$$
$$- \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Полученные в правой части интегралы — того же типа, что и исходный, только степень у x на единицу меньше. Применяя последовательно указанный прием, мы придем к интегралам вида

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \quad \text{и} \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

которые были рассмотрены выше.

Наконец, интегралы

$$\int x^n \arcsin x \, dx, \ \int x^n \arccos dx, \ \int x^n \operatorname{arctg} x \, dx,$$
$$\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx \ \text{и} \ \int x^n \ln x \, dx$$

сводятся интегрированием по частям к интегралу от алгебраической функции, если в них положить $dv = x^n dx$, а за функцию u взять оставшуюся трансцендентную функцию, т. е. одну из функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$. Например,

$$\int x \ln x \, dx = \int \ln x \, d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

26.5. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Подстановка

$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

сводит интеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ к интегралу от рациональной дроби.

Действительно, при указанной замене переменной имеем

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1-u^2},$$

поэтому

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1-u^2}, \frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{du}{1-u^2}.$$

В конкретных примерах иногда оказывается значительно удобнее использовать подстановки вида $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ или $u = \operatorname{th} x$, позволяющие вычислить интеграл существенно проще (ср. п. 26.1).

Интегралы вида

$$\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\,dx,$$

где m и n — рациональные числа, с помощью подстановок $v = \operatorname{sh} x$ ($u = \operatorname{ch} x$) приводятся к интегралу от дифференциального бинома (ср. п. 26.2).

26.6. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ, НЕ ВЫРАЖАЮЩИХСЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Мы рассмотрели различные классы элементарных функций и нашли их первообразные, которые также являются элементарными функциями. Однако не всякая элементарная функция имеет в качестве своей первообразной элементарную же функцию. С подобным обстоятельством мы уже встретились при рассмотрении интеграла от дифференциального бинома: в этом случае подынтегральная функция — элементарная (иррациональная), а интеграл от нее, как отмечалось, вычисляется далеко не всегда.

Можно показать, что интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}\,dx$$

(n — натуральное число) также не выражаются через элементарные функции.

Имеется ряд интегралов от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции и играющих большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях. К таким интегралам относится, напри-

мер, интеграл

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

а также так называемые *эллиптические интегралы*

$$\int R\left(x,\ \sqrt{P(x)}\right)dx,$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени. В общем случае эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Особенно часто встречаются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0<k<1,$$

которые подстановкой $x=\sin\varphi$ приводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi;$$

они называются соответственно эллиптическими интегралами *первого и второго рода в форме Лежандра* *).

Упражнения. Вычислить интегралы.

1. $\int |x|\,dx.$
2. $\int (2x-5)^2\,dx.$
3. $\int \sin^2 x\,dx.$
4. $\int \left(2x^2-3x+\frac{1}{x}\right)dx.$
5. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx.$
7. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$
9. $\int xe^{-x}\,dx.$
10. $\int \ln x\,dx.$
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$
12. $\int x^2\ln x\,dx.$
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$
15. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$
16. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx.$
17. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$
18. $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^3)}.$
19. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$
20. $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$
21. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$
22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$
24. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$
25. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$
26. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$
27. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$
28. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx.$
29. $\int \sin^4 x\,dx.$

*) А. Лежандр (1752—1833) — французский математик.

30. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

31. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$

32. $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

33. $\int \sin 3x \cos 5x\,dx.$

34. $\int \arccos^2 x\,dx.$

35. $\int x^2 \arcsin^2 x\,dx.$

36. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}.$

37. $\int x^3 \ln^3 x\,dx.$

38. $\int xe^x \sin x\,dx.$

39. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

40. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

§ 27. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

27.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО РИМАНУ

Напомним (см. п. 16.5), что *разбиением* τ отрезка $[a, b]$ называется любая конечная система его точек x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, k$, такая, что

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k=b.$$

При этом пишется $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, k$, называется *отрезком разбиения* τ, его длина обозначается через Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Величину

$$\delta_\tau = \max_{i=1,2,\ldots,k} \Delta x_i$$

назовем *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение τ' отрезка $[a, b]$ называется следующим за разбиением τ (или продолжающим разбиение τ) того же отрезка, а также вписанным в разбиение τ, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'; иначе говоря, если каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ (говорят еще, что τ' — измельчение разбиения τ). В этом случае пишут $\tau' \succcurlyeq \tau$, или, что то же, $\tau \preccurlyeq \tau'$.

Совокупность всех разбиений данного отрезка обладает следующими свойствами.

1°. Если $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$, а $\tau_2 \preccurlyeq \tau_3$, то $\tau_1 \preccurlyeq \tau_3$.

2°. Для любых τ_1 и τ_2 существует такое τ, что $\tau \succcurlyeq \tau_1$ и $\tau \succcurlyeq \tau_2$.

В самом деле, первое свойство следует просто из того, что в силу условия $\tau_3 \succcurlyeq \tau_2$ каждый отрезок разбиения τ_3 содержится в некотором отрезке разбиения τ_2, который в свою очередь, согласно условию $\tau_2 \succcurlyeq \tau_1$, содержится в каком-то отрезке разбиения τ_1; таким образом, всякий отрезок разбиения τ_3 лежит на определенном отрезке разбиения τ_1, а это и означает, что $\tau_3 \succcurlyeq \tau_1$.

Для доказательства второго свойства разбиений заметим лишь, что если заданы два разбиения τ_1 и τ_2, то разбиение τ, состоя-

щее из всех точек, входящих как в разбиение τ_1, так и в разбиение τ_2, очевидно, будет следовать за τ_1 и за τ_2.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена функция f и пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое разбиение этого отрезка,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

а δ_τ — мелкость этого разбиения.

Зафиксируем произвольным образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и составим сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Суммы вида $\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ называются *интегральными суммами Римана**) функции f (рис. 101). Иногда для краткости мы будем их обозначать через $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ или даже просто через σ_τ.

Геометрически в случае, когда функция f неотрицательна (рис. 101) каждое слагаемое интегральной суммы Римана σ_τ равно площади прямоугольника с основанием длины Δx_i и с высотой $f(\xi_i)$. Вся же сумма σ_τ равна площади «ступенчатой фигуры», получающейся объединением всех указанных прямоугольников.

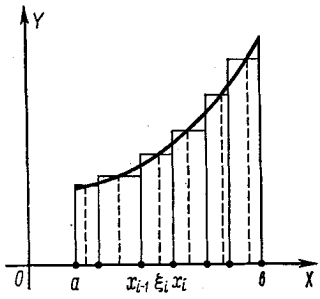

Рис. 101

Определение 1. *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует такое число A, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a, b]$*

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$, и для любого выбора точек

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, \ldots, k_n, \; n = 1, 2, \ldots,$$

существует предел последовательности интегральных сумм $\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)})$ и он равен A:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\,\Delta x_i^{(n)} = A, \tag{27.1}$$

где

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; \quad i = 1, 2, \ldots, k_n; \; n = 1, 2, \ldots.$$

*) Б. Риман (1826—1866) — немецкий математик.

При выполнении этих условий число A называется (римановым) определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается через $\int_a^b f(x)\,dx$.

Выражение $\int_a^b f(x)\,dx$ читается «интеграл от a до b $f(x)\,dx$; x называется *переменной интегрирования*, f — *подынтегральной функцией*, a — *нижним*, а b — *верхним пределом интеграла*; отрезок $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n}\left(f;\ \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}\right),$$

где последовательность τ_n такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$.

Для краткости записи будем в этом случае просто писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f).$$

Подобно тому как определение предела функции можно сформулировать двумя эквивалентными способами с помощью пределов последовательностей и с помощью «($\varepsilon - \delta$)-языка», так и определение интеграла можно сформулировать иначе.

Определение 2. *Число A называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше δ: $\delta_\tau < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i - A\right| < \varepsilon,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Упражнение 1. Доказать, что два данных выше определения определенного интеграла эквивалентны.

Из определения 1 следует, что для неотрицательных функций определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ является пределом, при $\delta_\tau \to 0$, последовательности площадей соответствующих ступенчатых фигур; поэтому он, естественно, оказывается связанным с понятием площади, а именно он равен площади фигуры*) (называемой

*) Привычный из элементарной геометрии термин «фигура» употребляется здесь всюду в смысле «плоское множество».

«криволинейной трапецией»), границей которой является график функции f, отрезок $[a, b]$ оси x-ов и, быть может, отрезки прямых $x=a$ и $x=b$, ординаты точек которых меняются соответственно от нуля до $f(a)$ и до $f(b)$ (рис. 102). Для того чтобы это доказать, надо прежде всего уточнить само понятие площади рассматриваемых фигур. Все это будет сделано ниже, в § 31.

Заметим, что введенное здесь понятие предела интегральных сумм Римана является новым понятием, не укладывающимся ни в понятие предела последовательности, ни в понятие предела функции.

В дальнейшем придется использовать аналогичное понятие предела не только для интегральных сумм Римана, но и для других объектов. Поэтому сформулируем общее определение предела этого вида.

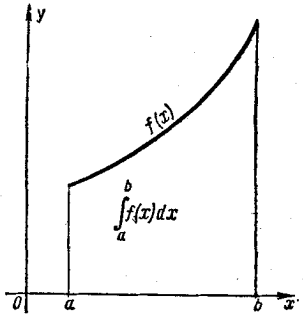

Рис. 102

Определение 3. *Рассмотрим множество $\mathfrak{T}=\{\tau\}$ всех разбиений отрезка $[a, b]$. Пусть на этом множестве определена числовая, вообще говоря, многозначная функция $\Phi(\tau)$, $\tau\in\mathfrak{T}$. Будем говорить, что функция $\Phi(\tau)$ при $\delta_\tau\to 0$ имеет предел, равный A, и будем писать*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\Phi(\tau)=A,$$

если для любой последовательности разбиений $\tau_n\in\mathfrak{T}$, $n=1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{\tau_n}=0$, при любом выборе значений $\Phi(\tau_n)$ числовая последовательность $\Phi(\tau_n)$ сходится к числу A, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\tau_n)=A.$$

Это понятие предела определено с помощью понятия предела последовательности, поэтому для него оказываются справедливыми многие свойства, аналогичные соответствующим свойствам предела последовательности. С соответствующими примерами мы встретимся в дальнейшем.

Как и в случае предела интегральных сумм Римана, понятие этого предела можно сформулировать на «($\varepsilon-\delta$)-языке», что предоставляется читателю.

Заметим в заключение, что многозначность функции Φ, о которой идет речь в определении 3 в случае интегральных сумм Римана, связана с различным способом выбора точек

$$\xi_i\in[x_{i-1}, x_i], \qquad i=1, 2, \ldots, k.$$

27.2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Установим прежде всего необходимое условие, которому удовлетворяют интегрируемые функции — их ограниченность.

Теорема 1. *Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a, b]$ и пусть фиксировано некоторое разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ этого отрезка. В силу неограниченности функции f на всем отрезке $[a, b]$ она не ограничена по крайней мере на одном отрезке разбиения τ. Пусть для определенности функция f не ограничена на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда на этом отрезке существует последовательность $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что*)

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\xi_1^{(n)}\right) = \infty. \tag{27.2}$$

Зафиксируем теперь каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, k$. Тогда сумма

$$\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

будет иметь вполне определенное значение. Поэтому в силу (27.2)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{(n)},\ \xi_2, \ldots,\ \xi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(\xi_1^{(n)}\right)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \infty$$

и, значит, каково бы ни было число $M > 0$, всегда можно подобрать такой номер n_0, что если на первом отрезке $[x_0, x_1]$ взять точку $\xi_i^{(n_0)}$, то

$$\left|\sigma_\tau\left(f;\ \xi_1^{n_0}, \xi_2, \ldots,\ \xi_k\right)\right| > M.$$

Отсюда следует, что суммы σ_τ не могут стремиться ни к какому конечному пределу при $\delta_\tau \to 0$.

Действительно, если бы существовал конечный предел $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ нашлось бы такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех разбиений $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ мелкости $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, выполнялось бы неравенство $|\sigma_\tau - A| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|\sigma_\tau| = |(\sigma_\tau - A) + A| \leqslant |\sigma_\tau - A| + |A| < \varepsilon + |A|.$$

---

*) Действительно, в силу неограниченности функции f на отрезке $[x_0, x_1]$, например для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$, существует такая точка $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, что $\left|f\left(\xi_1^n\right)\right| > n$. Очевидно, что последовательность $\left\{\xi_1^{(n)}\right\}$ и удовлетворяет условию (27.2).

В нашем случае, т. е. в случае неограниченности функции f, для любого разбиения τ (в том числе и такого, что $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$, если существовало бы указанное δ_ε) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ можно так выбрать точки ξ_i, что будет выполняться неравенство

$$|\sigma_\tau| > |A| + \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Условие ограниченности функции f будучи необходимым для ее интегрируемости, не является вместе с тем достаточным. Примером, доказывающим это утверждение, может служить так называемая *функция Дирихле* (см. п. 4.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Рассмотрим ее на отрезке $[0, 1]$. Она, очевидно, ограничена на нем. Покажем, что она не интегрируема. Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{=k}$ отрезка $[0, 1]$. Если выбрать точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ рациональными, то получим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = 1,$$

а если взять ξ_i иррациональными, то

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\Delta x_i = 0.$$

Так как это верно для любого разбиения τ, то интегральные суммы σ_τ заведомо не стремятся ни к какому пределу при $\delta_\tau \to 0$.

27.3. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ СУММЫ ДАРБУ. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ИНТЕГРАЛЫ ДАРБУ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — некоторое его разбиение и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Положим (рис. 103)

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i, \tag{27.3}$$

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i. \tag{27.4}$$

Очевидно, $s_\tau \leqslant S_\tau$.

Сумма S_τ называется *верхней*, а s_τ — *нижней суммой Дарбу*.

Свойства сумм Дарбу

1°. *Если функция f ограничена, то при любом разбиении суммы S_τ и s_τ определены.*

В самом деле, в этом случае M_i и m_i, $i=1, 2, \ldots, k$ конечны, и поэтому выражения (27.3) и (27.4) имеют смысл.

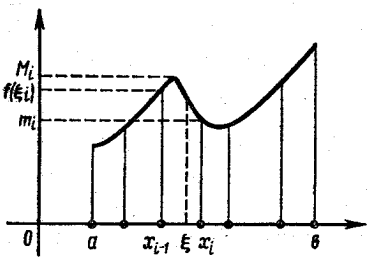

Рис. 103

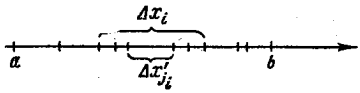

Рис. 104

2°. *Если $\tau' \succ \tau$, то $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$ и $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.*

Доказательство. Пусть $\tau = \{\tau_i\}_{i=0}^{i=k}$ и $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ — два разбиения отрезка $[a, b]$, таких, что $\tau \prec \tau'$ и

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1} \leqslant x \leqslant x'_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, k'.$$

Если $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то, очевидно,

$$m_i \leqslant m'_j. \tag{27.5}$$

(нижняя грань при уменьшении множества может только увеличиться).

В силу условия $\tau \prec \tau'$ каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения τ является объединением каких-то отрезков разбиения τ'; будем обозначать эти отрезки через $[x'_{(j-1)_i}, x'_{j_i}]$. Таким образом, если

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ и } \Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{(j-1)_i},$$

то (рис. 104)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

Используя эти обозначения и неравенство (27.5), получим:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}$$

Мы доказали, что $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

Аналогично доказывается, что $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ при $\tau \prec \tau'$. □

Следствие. *Для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \tag{27.6}$$

т. е. любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней.

Действительно, если даны два разбиения τ_1 и τ_2 отрезка $[a, b]$, то существует разбиение τ этого отрезка, такое, что $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$ (см. п. 27.1). Применяя свойство 2°, получим

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \quad \square$$

Очевидно, что суммы Римана и Дарбу связаны неравенствами

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Следующее свойство является уточнением этого утверждения.

3°. *Если $\sigma_\tau = \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ — какая-либо интегральная сумма Римана, соответствующая данному разбиению τ, то*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если заданы какие-либо числовые множества X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ и постоянные $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то для множества

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \ x_i \in X_i, \ i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

как легко видеть, справедливы равенства (почему?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \quad \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

В силу этого имеем:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i) \Delta x_i = \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Аналогично,

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1, 2, \ldots, k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k). \quad \square$$

4°. $S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i$, *где* $\omega_i(f)$ — *колебание функции* f *на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$ (см. п. 19.6), $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Отметим сначала, что если для двух данных числовых множеств X и Y положить

$$Z = \{z\colon\ z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\},$$

то $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (почему?).

Используя это, получим

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant x' \leqslant x_i \\ x_{i-1} \leqslant x'' \leqslant x_i}} [f(x'') - f(x')] = \omega_i(f),\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i. \ \square$$

Положим теперь

$$I_* = \sup_\tau s_\tau,\quad I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

I_* называется *нижним интегралом Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$, а I^* — ее *верхним интегралом*.

Из свойств 1° и 2° сумм Дарбу следует, что если функция f ограничена, то как ее нижний интеграл Дарбу, так и верхний конечны. В силу следствия из свойства 2° будем иметь также

$$I_* \leqslant I^*. \tag{27.7}$$

27.4. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

Условие (27.8) означает (см. определение 3 в п. 27.1), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется неравенство

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon. \tag{27.9}$$

Поскольку $s_\tau \leqslant S_\tau$, то (27.9) равносильно неравенству

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на нем и пусть $I=\int_a^b f(x)\,dx$; тогда $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=I$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что если $\delta_\tau<\delta$, то

$$|\sigma_\tau-I|<\varepsilon, \text{ или } I-\varepsilon<\sigma_\tau<I+\varepsilon.$$

Отсюда при $\delta_\tau<\delta$, согласно свойству 3° сумм Дарбу (см. п. 27.3), получаем неравенство

$$I-\varepsilon\leqslant s_\tau\leqslant S_\tau\leqslant I+\varepsilon.$$

Таким образом, если $\delta_\tau<\delta$, то

$$0\leqslant S_\tau-s_\tau\leqslant 2\varepsilon,$$

а это и означает выполнение условия (27.8).

Доказательство достаточности. Пусть функция f ограничена и выполняется условие (27.8). Из определения нижнего и верхнего интегралов Дарбу и из неравенства (27.7) имеем

$$s_\tau\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S_\tau, \tag{27.10}$$

поэтому

$$0\leqslant I^*-I_*\leqslant S_\tau-s_\tau,$$

откуда в силу (27.8) следует, что $I^*-I_*=0$. Обозначая общее значение верхнего и нижнего интегралов Дарбу через I, т. е. полагая $I=I_*=I^*$, из (27.10) получим

$$s_\tau\leqslant I\leqslant S_\tau,$$

и поэтому

$$0\leqslant I-s_\tau\leqslant S_\tau-s_\tau,\quad 0\leqslant S_\tau-I\leqslant S_\tau-s_\tau.$$

Отсюда в силу (27.8) вытекает, что

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}(I-s_\tau)=\lim_{\delta_\tau\to 0}(S_\tau-I)=0,$$

а значит,

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}s_\tau=\lim_{\delta_\tau\to 0}S_\tau=I. \tag{27.11}$$

Но в силу свойства 3° интегральных сумм Дарбу (см. п. 27.3)

$$s_\tau\leqslant\sigma_\tau\leqslant S_\tau. \tag{27.12}$$

Из (27.11) и (27.12) следует (ср. аналогичные утверждения в п. 3.3 и 4.7), что

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=I,$$

а это и означает интегрируемость функции f. □

Следствие 1. *Если функция f интегрируема, то не только ее интегральные суммы Римана, но и ее суммы Дарбу стремятся к ее интегралу при стремлении мелкости разбиения к нулю.*

Действительно, если функция f интегрируема, то выполняется условие (27.8), а из него, как мы видели, и следует утверждение следствия, т. е. равенство (27.11). □

Следствие 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция f была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\,\Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$.

Это следует непосредственно из свойства 4° сумм Дарбу (см. п. 27.3). □

Задача 19. Доказать, что, для того чтобы функция была интегрируемой на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на нем и чтобы ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадали; при этом общее значение этих интегралов и является ее интегралом.

27.5. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ И МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 3. *Функция, определенная и непрерывная на некотором отрезке, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$; тогда, как известно, она ограничена (см. теорему 1 в п. 6.1) и равномерно непрерывна (см. теорему 5 в п. 19.6) на этом отрезке. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $\xi \in [a, b]$ и $\eta \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|\eta - \xi| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{27.13}$$

Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ мелкости $\delta_\tau < \delta$. Пусть, как всегда, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку непрерывная на отрезке функция достигает своей нижней и верхней грани на этом отрезке, то существуют такие точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, что

$$f(\xi_i) = m_i, \quad f(\eta_i) = M_i.$$

Точки ξ_i и η_i принадлежат одному и тому же отрезку разбиения τ, поэтому

$$|\eta_i - \xi_i| \leqslant \Delta x_i \leqslant \delta_\tau < \delta.$$

Отсюда, в силу (27.13), вытекает неравенство

$$f(\eta_i) - f(\xi_i) = |f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Следовательно, для любого разбиения τ мелкости $\delta_\tau < \delta$ выполняется условие

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$. Поэтому, согласно теореме 2, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Теорема 4. *Функция, определенная и монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, например, монотонно возрастает на нем. Тогда

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Таким образом, функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Далее, для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$, очевидно, имеем

$$m_i = f(x_{i-1}), \qquad M_i = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

поэтому

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\,\Delta x_i \leqslant \delta_\tau \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\,\delta_\tau,$$

ибо в сумме $\sum\limits_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме $f(b)$ и $f(a)$.

Из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Поэтому (см. п. 27.4) функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

Упражнение 2. Доказать, что если функция ограничена и непрерывна на некотором отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Задача 20. Доказать, что, для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовала конечная или счетная система интервалов, которые содержали бы все точки разрыва заданной функции и сумма длин которых была бы меньше заданного ε.

§ 28. СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

28.1. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Будем систематически, не делая специальных ссылок, употреблять обозначения и терминологию, введенную в предыдущем параграфе.

Прежде всего заметим, что поскольку интеграл от функции является числом, сопоставляемым заданной функции согласно данному выше определению, то само собой разумеется, что это число не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, т. е. от обозначения *переменной интегрирования*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств определенного интеграла.

1°. $\int_a^b dx = b - a.$

Действительно, здесь подынтегральная функция равна единице, поэтому для любой интегральной суммы Римана σ_τ имеем

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a. \quad \square$$

2°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a^*, b^*]$, содержащемся в $[a, b]$.*

Доказательство. Прежде всего, если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, то она, очевидно, ограничена и на $[a^*, b^*]$. Далее, каково бы ни было разбиение $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k^*}$ отрезка $[a^*, b^*]$ мелкости δ_{τ^*}, его всегда можно продолжить в разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ такой же мелкости $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; для этого достаточно добавить к точкам x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k^*$ конечное число соответствующим образом выбранных точек, принадлежащих отрезку $[a, b]$, но не принадлежащих отрезку $[a^*, b^*]$.

Полагая

$$m_i^* = \inf_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x), \qquad M_i^* = \sup_{x_{i-1}^* \leqslant x \leqslant x_i^*} f(x),$$

$$\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, k^*,$$

и замечая, что каждое слагаемое суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^*$ является и слагаемым суммы $\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\,\Delta x_i$ и что все слагаемые