$R \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) в формуле (28) можно пренебречь всеми членами более высокого порядка, чем $1/r$. При этом получим:

$$E_r = 0, \quad E_\vartheta = H_\varphi = -k^2 \sin\vartheta \Pi_0, \tag{30}$$

т. е. поле становится поперечным относительно направления распространения. Такие удаленные области поля, где поле излучения становится поперечным, называются *волновой зоной осциллятора*. Чтобы подсчитать *поток энергии* через поверхность сферы радиуса R с центром в осцилляторе, надо вычислить вектор Умова — Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi} |[\boldsymbol{EH}]| = \frac{c}{4\pi} EH$$

и проинтегрировать это выражение по сфере.

Из формул (29) и (30) следует, что в волновой зоне вещественная часть векторов H_φ и E_ϑ определяется выражением

$$H_\varphi = E_\vartheta = -\frac{\omega^2 \sin\vartheta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

откуда

$$S = \frac{p_0^2 \omega^4}{4\pi} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2 c^3} \cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Поток энергии через сферу радиуса R за время одного полного периода $T = 2\pi/\omega$ будет определяться выражением

$$\sum = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} SR^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2p_0^2\omega^4}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) dt$$

или

$$\sum = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Энергия, излучаемая гармоническим осциллятором, пропорциональна четвертой степени частоты

$$\sum \sim \omega^4$$

или

$$\sum \sim \frac{1}{\lambda^4},$$

где λ — длина волны.

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Распространение тепла в неограниченном пространстве

1. Функция температурного влияния. В главе III было показано, что процесс распространения тепла в однородном изотропном пространстве определяется уравнением теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \tag{1}$$

где $u(M, t)$ — температура точки $M(x, y, z)$ в момент t, ρ — плотность, c — коэффициент удельной теплоемкости, $k = \text{const}$ и $a^2 = k/c\rho$ — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности. Уравнение (1) допускает также диффузионное истолкование. В этом случае u — концентрация диффундирующего вещества, $a^2 = D$ — коэффициент диффузии.

Рассмотрим в неограниченном пространстве следующую задачу:

найти решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho} \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \quad -\infty < x,\ y,\ z < \infty,\ t > 0, \tag{2}$$

(f — плотность тепловых источников) при начальном условии

$$u(x,\ y,\ z,\ 0) = \varphi(x,\ y,\ z). \tag{3}$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде суммы

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 — решение однородного уравнения (1) с неоднородными начальными условиями, u_2 — решение неоднородного уравнения (2) с нулевыми начальными условиями. При изучении соответствующих одномерных задач мы видели, что для их решения достаточно определить функцию источника.

Построим функцию источника для уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве.

Предварительно докажем следующую лемму, которая будет нами использована в дальнейшем.

Если решение уравнения $\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$ *зависит только от* r *и* t, *то функция* $v = ru$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4}$$

В самом деле, записывая оператор Лапласа в сферической системе координат, видим, что функция $u = u(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

полагая затем $ru = v$, получаем для v уравнение (4)[1].

Пусть в начале координат помещен непрерывно действующий тепловой источник постоянной мощности q, а в остальном пространстве начальная температура равна нулю

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Очевидно, что в этом случае температура u является функцией только r и t.

Наличие теплового источника при $r = 0$ означает, что тепловой поток в единицу времени через сферу S_ε (с центром в $r = 0$ и радиусом ε при $\varepsilon \to 0$ равен q, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[- \iint_{S_\varepsilon} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right] = q.$$

Так как нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ в силу симметрии постоянна на поверхности S_ε, то

$$- k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \Big|_{r=\varepsilon} \to q \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

что означает наличие у производной $\frac{\partial u}{\partial r}$ при $r = 0$ особенности вида $-q/4\pi k r^2$. Следовательно, сама функция при $r = 0$ должна иметь особенность вида

$$u \sim \frac{q}{4\pi k r},$$

так что произведение $ru = v$ остается ограниченным при $r = 0$.

Функция v, определяемая условиями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0, \\ &v(r, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) Сравни с п. 1 § 1 главы V.

выражается формулой

$$v(r, t) = v_0\left[1 - \Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right] = q\frac{1}{4\pi k}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha$$

(см. формулу (33), гл. III, § 3). Следовательно, решение задачи о распространении температуры при непрерывно действующем источнике мощности q, помещенном в начале координат ($r = 0$), имеет вид

$$u(r, t) = qU(r, t) = q\frac{1}{4\pi k}\frac{1}{r}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha, \tag{6}$$

где $U(r, t)$ — температура, соответствующая единичному источнику ($q = 1$).

Чтобы перейти к случаю мгновенного источника, рассмотрим источник мощности q, помещенный в точку (ξ, η, ζ) и непрерывно действующий в течение промежутка времени τ.

Такой источник эквивалентен двум источникам мощности $+q$ и $-q$, первый из них включается при $t = 0$, второй — при $t = \tau$. Распределение температур при этом выражается формулой

$$u_\tau(r, t) = q[U(r, t) - U(r, t - \tau)].$$

За промежуток времени τ выделяется количество тепла $Q = q\tau$, поэтому

$$u_\tau(r, t) = \frac{Q}{\tau}[U(r, t) - U(r, t - \tau)].$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$ и считая Q постоянным, находим:

$$u_0(r, t) = \lim_{\tau\to 0} u_\tau(r, t) = Q\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi kr}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\frac{r}{4a^2\sqrt{a^2t^3}}a^2$$

или

$$u_0(r, t) = \frac{Q}{c\rho}G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta),$$

где

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}. \tag{7}$$

Функция $G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)$ есть **функция температурного влияния** мгновенного источника тепла. Она представляет собой температуру в точке x, y, z в момент времени t, вызываемую точечным источником мощности $Q = c\rho$, помещенным в момент $t = 0$ в точку (ξ, η, ζ).

Нетрудно убедиться в том, что

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1. \tag{8}$$

В самом деле, тройной интеграл (8) можно представить в виде произведения трех интегралов, каждый из которых равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 \qquad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

Из формулы (7) видно, что функция влияния G обладает свойством симметрии

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t; x, y, z),$$

являющимся выражением принципа взаимности: действие в точке (x, y, z) источника, находящегося в точке (ξ, η, ζ), равно действию в точке (ξ, η, ζ) такого же источника, помещенного в точку (x, y, z). Однако относительно переменной t такая симметрия не имеет места, что является выражением необратимости тепловых процессов во времени.

Определим вид функции влияния G в случае двух измерений. Пусть на прямой, параллельной оси z и проходящей через точку (ξ, η), расположен бесконечный линейный источник; обозначим через $\bar{Q} = \text{const}$ мощность источника, отнесенную к единице длины. Функция влияния G_2 такого источника не будет зависеть от z и вполне характеризуется своими значениями в плоскости (x, y). Вычислим функцию G_2. Пусть на элементе $d\zeta$ выделяется количество тепла

$$dQ = \bar{Q}\, d\zeta;$$

тогда распределение температуры в пространстве дается интегралом

$$\bar{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta).$$

Вычисляя интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\zeta = 2\sqrt{a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2\sqrt{\pi a^2 t} \qquad \left(\alpha = \frac{\zeta - z}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

получаем:

$$\bar{u} = \frac{\bar{Q}}{c\rho} G_2,$$

где

$$G_2(x, y, t; \xi, \eta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}}. \qquad (8')$$

Сопоставляя эту функцию с формулой (7), видим их сходство по структуре.

Аналогичным способом можно получить выражение для функции источника в одномерном случае. Рассматривая бесконечный плоский источник с постоянной плотностью $\overline{\overline{Q}}$, получаем:

$$\overline{\overline{u}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\overline{Q}}\, d\eta\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = \frac{\overline{\overline{Q}}}{c\rho} G_1(x, t, \xi),$$

где

$$G_1(x, t; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

— функция источника для одного измерения.

В главе III были даны графики, характеризующие поведение функции влияния $G(x, t; \xi)$. Качественная характеристика функции источника, данная в гл. III, имеет место и для пространственного случая.

2. Распространение тепла в неограниченном пространстве. Используем теперь функцию источника, полученную в предыдущем пункте, для решения задачи о распространении начальной температуры в неограниченном пространстве.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, \quad y, z < \infty, \quad t > 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \qquad (3)$$

Начальное температурное состояние, очевидно, можно представить как результат суперпозиции действия мгновенных источников, создающих начальную температуру. Рассмотрим элемент объема $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, содержащий точку (ξ, η, ζ). Для создания начальной температуры $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, необходимо в объеме $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ поместить количество тепла $dQ = c\rho\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Это сосредоточенное количество тепла создаст в точке (x, y, z) в момент t температуру

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (9)$$

В силу принципа суперпозиции решение нашей задачи может быть получено интегрированием (9) по всему пространству

$$u(x, y, z, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (10)$$

Формула (10) получена нами в результате наводящих рассуждений, не определяющих границы ее применимости и не имеющих доказательной силы.

Докажем, что

если функция φ кусочно-непрерывна и ограничена, $|\varphi| < A$, то функция u, определяемая выражением

$$u(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (10')$$

1) *ограничена во всем пространстве:* $|u| < A$;

2) *является решением уравнения теплопроводности при* $t > 0$;

3) *при* $t = 0$ *непрерывна в точках непрерывности функции* φ *и удовлетворяет условию* $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$.

Для доказательства того, что (10′) удовлетворяет уравнению (1), воспользуемся известной леммой (см. § 3 главы III).

Если $U(x, y, z, t; \xi)$ при любом значении параметра ξ является решением уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, где $\mathscr{L}(u)$ — линейный дифференциальный оператор, то функция

$$u(x, y, z, t) = \int U(x, y, z, t; \xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

также будет решением уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, если производные функции u, входящие в оператор $\mathscr{L}(u)$, можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

В нашем случае $U = G$ удовлетворяет уравнению теплопроводности при любых ξ, η, ζ и $t > 0$. Как известно, дифференцирование по параметру под знаком несобственного интеграла возможно, если: 1) производная по параметру от подынтегральной функции непрерывна и 2) интеграл, полученный после формального дифференцирования, равномерно сходится.

Произведя формальное дифференцирование интеграла (10′) по x, получим:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{x-\xi}{2a^2 t}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (11)$$

Подынтегральная функция непрерывна при $\bar{t} > t > 0$, а наличие множителя $e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}$ обеспечивает равномерную

сходимость, если φ ограничено: $|\varphi| < A$. Аналогичные результаты мы получим при повторном дифференцировании по x и при дифференцировании по t; то же относится и к дифференцированию по y и z. Таким образом, функция G удовлетворяет всем условиям леммы при $t > 0$. Следовательно, функция u при $t > 0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Ограниченность функции u, определяемой формулой (10′), которую мы перепишем в виде

$$u(M, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(M, M', t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'}$$

$$(M = M(x, y, z), \quad M' = M'(\xi, \eta, \zeta)),$$

устанавливается непосредственно, если принять во внимание равенство (8):

$$|u| < A \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G\,d\tau = A. \tag{12}$$

Перейдем к доказательству непрерывности $u(x, y, z, t)$ при $t = 0$.

Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, являющуюся точкой непрерывности функции φ, и докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t < \delta(\varepsilon). \tag{13}$$

Построим вспомогательную область T_1, содержащую точку M_0; ее размеры будут определены ниже; остальную часть пространства обозначим через T_2. Принимая во внимание равенства

$$u(M, t) = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'} + \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'},$$

$$\varphi(M_0) = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\,\varphi(M_0)\,d\tau_{M'} + \varphi(M_0) \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\,d\tau_{M'},$$

а также положительность функции $G(M, M', t)$, будем иметь:

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| \leqslant J_1 + J_2, \tag{14}$$

где

$$J_1 = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\,|\varphi(M') - \varphi(M_0)|\,d\tau_{M'}, \tag{15}$$

$$J_2 = 2A \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\,d\tau_{M'}. \tag{16}$$

Из непрерывности функции φ в фиксированной точке M_0 следует: каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое $\delta'(\eta) > 0$, что

$$|\varphi(M') - \varphi(M_0)| < \eta, \quad \text{если} \quad |\overline{M'M_0}| < \delta'(\eta).$$

Следовательно, если диаметр области T_1 не превосходит $\delta'(\varepsilon/3)$, то

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{3} \iiint\limits_{T_1} G\, d\tau_{M'} < \frac{\varepsilon}{3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G\, d\tau = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Остановимся теперь подробно на выборе области T_1. В качестве T_1 мы можем выбрать сферу с центром в точке $M(x, y, z)$, что удобно для оценки интеграла J_2. Оценка (17) интеграла J_1 сохраняет силу, если радиус этой сферы выбрать равным

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \text{и если} \quad |\overline{MM_0}| < \rho_0.$$

Переходя к сферической системе координат с центром в точке M, получаем:

$$\iiint\limits_{T_1} G\, d\tau = 4\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int\limits_0^{\rho_0} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{\rho_0}{2\sqrt{a^2 t}}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 1 \left(\alpha = \frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_{T_2} G\, d\tau = 1 - \iiint\limits_{T_1} G\, d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad \overrightarrow{t \to 0},$$

т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta''(\varepsilon)$, что

$$\iiint\limits_{T_2} G\, d\tau < \frac{\varepsilon}{3A},$$

и, следовательно,

$$J_2 < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{18}$$

если только $t < \delta''(\varepsilon)$.

Выбирая из чисел $\frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $\delta''(\varepsilon)$ наименьшее и обозначая его через $\delta(\varepsilon)$, будем иметь неравенство

$$|u(M, t)-\varphi(M_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}|<\delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t<\delta(\varepsilon), \tag{13}$$

которое и доказывает непрерывность $u(M, t)$ при $t=0$ во всякой точке M_0 непрерывности функции $\varphi(M)$.

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$u_t=a^2\Delta u+\frac{f}{c\rho}, \quad -\infty<x, y, z<\infty, \ t>0,$$

при нулевом начальном условии $u(x, y, z, 0)=0$. Рассмотрим точку (ξ, η, ζ) в момент времени $\tau<t$. Количество тепла, выделяющегося в элементе $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ за время $d\tau$ и равное

$$dQ=f\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

вызывает в точке (x, y, z) в момент времени t температуру

$$\frac{1}{c\rho}G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем написать решение поставленной задачи в виде

$$u(x, y, z, t)=$$

$$=\int_0^t\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{1}{c\rho}G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau. \tag{19}$$

На доказательстве справедливости этой формулы и выяснении условий ее применимости мы не останавливаемся.

Задачи для полупространства с однородными граничными условиями первого и второго рода решаются методом отражения.

§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах

1. Схема метода разделения переменных. Ранее мы рассматривали распространение тепла в неограниченном пространстве. При изучении распространения тепла в ограниченном теле необходимо к уравнению и начальному условию добавить условия на границе тела, которые в простейших случаях являются граничными условиями первого, второго или третьего рода.

Рассмотрим простейшую задачу с однородным граничным условием первого рода:

найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2\Delta u \ \text{внутри} \ T \quad \text{при} \ t>0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

и граничным условием

$$u|_{\Sigma} = 0,$$

где Σ — *граница области* T.

Решение этой задачи может быть получено обычным методом разделения переменных, изложенным применительно к уравнению $u_{tt} = a^2 \Delta u$ в главе V, § 3; применение этого метода к нашей задаче проходит совершенно аналогично.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

найти нетривиальное решение уравнения

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \text{ в } T \quad \text{при } t > 0, \tag{2}$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u|_{\Sigma} = 0$$

и представимое в виде произведения

$$u(M, t) = v(M) T(t) \not\equiv 0.$$

Разделяя переменные обычным способом, приходим к следующим условиям, определяющим функции $v(M)$ и $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v + \lambda v = 0 \quad \text{в } T, \quad v(M) \not\equiv 0, \\ v = 0 \quad \text{на } \Sigma \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \tag{4}$$

Для функции v получаем задачу на отыскание собственных значений, с которой мы встречались при рассмотрении колебаний ограниченных объемов (см. гл. V, § 3, п. 1).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — собственные значения, а $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ — собственные функции задачи (3). Функции $\{v_n\}$ образуют ортогональную систему.

Соответствующие функции $T_n(t)$ имеют вид

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t},$$

и вспомогательная задача имеет нетривиальное решение

$$u_n(M, t) = C_n v_n(M) e^{-a^2 \lambda_n t}. \tag{5}$$

Общее решение исходной задачи может быть представлено в виде

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n t} v_n(M). \tag{6}$$

Удовлетворяя начальному условию

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \tag{7}$$

находим коэффициенты

$$C_n = \frac{\int\limits_T \varphi(M') v_n(M') d\tau_{M'}}{\| v_n \|^2},$$

где

$$\| v_n \| = \left[\int\limits_T v_n^2(M') d\tau_{M'} \right]^{1/2} \text{ — норма функции } v_n.$$

Функция (6) и представляет решение задачи.

Уравнение

$$u_t - a^2 \Delta u = f(M, t) \quad \left(f = \frac{F}{c\rho} \right) \tag{8}$$

при однородных граничном и начальном условиях может быть также решено методом разделения переменных.

Полагая, как обычно,

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(M) \tag{9}$$

и разлагая функцию $f(M, t)$ по собственным функциям $v_n(M)$

$$f(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(M), \quad f_n(t) = \frac{1}{\| v_n \|^2} \int\limits_T f(M', t) v_n(M') d\tau_{M'}, \tag{10}$$

получаем для определения $T_n(t)$ уравнение

$$T_n' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t) \tag{11}$$

с начальным условием $T_n(0) = 0$, если $u(M, 0) = 0$, решение которого имеет вид

$$T_n(t) = \int\limits_0^t e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Отсюда получаем:

$$u(M, t) = \int\limits_0^t \int\limits_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} \frac{v_n(M) v_n(M')}{\| v_n \|^2} \right\} f(M', \tau) d\tau_{M'} d\tau. \tag{13}$$

Выражение в фигурных скобках, очевидно, соответствует функции влияния мгновенного источника мощности $Q = c\rho$,

помещенного в точку M' в момент τ,

$$G(M, t, M', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\| v_n \|^2} e^{-a^2\lambda_n (t-\tau)}. \tag{14}$$

Решение первой краевой задачи $\bar{u}$ для уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями $\bar{u}|_\Sigma = \mu$ легко приводится к решению u неоднородного уравнения с однородными граничными условиями $u|_\Sigma = 0$, если положить

$$\bar{u} = u + \Phi, \tag{15}$$

где Φ — произвольная (достаточно гладкая) функция, принимающая значения μ на Σ (см. главу III, § 2). Весьма часто встречающийся случай постоянных граничных значений, $\mu_0 = \mathrm{const}$, приводится к задаче с однородными граничными условиями, если ввести функцию

$$\bar{u} = u + \mu_0 \quad (\Phi = \mathrm{const} = \mu_0),$$

представляющую отклонение от стационарного решения.

Таким образом, основная трудность при решении задач о распространении тепла в ограниченной области состоит в нахождении собственных функций и собственных значений для данной области.

Форма решения (6), полученная методом разделения переменных, удобна для исследования достаточно развитой стадии процесса при больших t. В самом деле, собственные значения λ_n для любой области быстро возрастают с номером n. Поэтому при $t > 0$ ряд быстро сходится и, начиная с некоторого момента, первый отличный от нуля член преобладает над суммой остальных членов

$$u(M, t) \approx C_1 v_1(M) e^{-a^2\lambda_1 t}. \tag{16}$$

Это соответствует тому физическому факту, что, независимо от начального распределения, начиная с некоторого момента, в теле устанавливается «регулярный» температурный режим, при котором «профиль» температуры не меняется во времени и амплитуда убывает по экспоненте с возрастанием времени. Этот факт положен в основу нестационарных методов определения коэффициента температуропроводности. В самом деле, измеряя температуру тела в произвольной точке M_0, находим, что

$$\ln | u(M_0, t) | \approx -a^2\lambda_1 t + \ln | C_1 v_1(M) |. \tag{17}$$

График этой функции изображается, начиная с некоторого момента времени, прямой линией с угловым коэффициентом $-a^2\lambda_1$. Зная величину λ_1, зависящую от формы области, можно найти коэффициент температуропроводности.

2. Остывание круглого цилиндра. Рассмотрим задачу об остывании бесконечно длинного цилиндра радиуса r_0, имеющего некоторую начальную температуру, если на его поверхности поддерживается температура, равная нулю. Предположим, что начальная температура не зависит от z (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Тогда, очевидно, и в дальнейшем температура не будет зависеть от z и меняется только в поперечном сечении S цилиндра. Выбирая в этом сечении полярную систему координат с полюсом, находящимся в центре круга S, мы приходим к задаче об определении функции $u(r, \varphi, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{18}$$

начальному условию

$$u(r, \varphi, 0) = \Phi(r, \varphi) \tag{19}$$

и граничному условию

$$u(r_0, \varphi, t) = 0. \tag{20}$$

Как мы видели, решение задачи такого типа может быть представлено в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M), \tag{21}$$

где суммирование распространяется на все собственные функции задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad v \not\equiv 0, \\ &v(r_0, \varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эта задача на собственные значения была исследована нами при изучении колебаний круглой мембраны (см. главу V, § 3). Каждому собственному значению

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \tag{23}$$

соответствуют две собственные функции

$$\bar{v}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi \quad \text{и} \quad \bar{\bar{v}}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\varphi, \tag{24}$$

квадраты нормы которых равны

$$\| \bar{v}_{nm} \|^2 = \| \bar{\bar{v}}_{nm} \|^2 = \pi \frac{\varepsilon_n r_0^2}{2} \left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения

$$J_n(\mu) = 0. \tag{26}$$

Пользуясь выражениями для v и λ, получаем:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{C}_{nm} \cos n\varphi + \bar{\bar{C}}_{nm} \sin n\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{-a^2 \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{27}$$

где коэффициенты $\bar{C}_{nm}$ и $\bar{\bar{C}}_{nm}$ определяются начальной функцией

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\varphi \, r \, d\varphi \, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ \bar{\bar{C}}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\varphi \, r \, d\varphi \, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2} \left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Если начальная температура Φ зависит только от r, то двойной ряд (27) заменяется однократным рядом

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) e^{-a^2 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{29}$$

где

$$C_m = \frac{2 \int_0^{r_0} \Phi(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r \, dr}{r_0^2 \left[J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)\right]^2} \qquad (J_1 = -J_0'), \tag{30}$$

а $\mu_m^{(0)}$ — m-й корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Остановимся подробнее на задаче об остывании равномерно нагретого цилиндра при нулевой температуре на поверхности. Если начальная температура

$$u(r, 0) = \Phi = u_0,$$

то

$$C_m = \frac{2u_0 \int\limits_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{r_0^2 \left[J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)\right]^2} = \frac{2u_0}{\mu_m^{(0)} J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)}, \tag{30'}$$

так как $\alpha J_0(\alpha) = [\alpha J_1(\alpha)]'$. Таким образом мы получаем:

$$\frac{u(r, t)}{u_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\mu_m^{(0)}\rho\right)}{\mu_m^{(0)} J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)} e^{-\left(\mu_m^{(0)}\right)^2 \theta} \quad \left(\rho = \frac{r}{r_0},\ \theta = \frac{a^2 t}{r_0^2}\right). \tag{31}$$

В таблицах цилиндрических функций (см. стр. 725, таблицу 3) даются численные значения как для корней $\mu_m^{(0)}$, так и для $J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)$.

В частности,

$$\mu_1^{(0)} = 2{,}40, \quad J_1\left(\mu_1^{(0)}\right) = 0{,}52,$$

$$\mu_2^{(0)} = 5{,}52, \quad J_1\left(\mu_2^{(0)}\right) = 0{,}34.$$

Ряд (31) сходится быстро и при больших t можно ограничиться первым членом этого ряда. В частности, на оси цилиндра

$$\left.\frac{u(r, t)}{u_0}\right|_{r=0} = \frac{2}{2{,}40 \cdot 0{,}52} e^{-(2{,}40)^2 \theta} = 1{,}60 e^{-5{,}76\theta} \quad \left(\theta = \frac{a^2 t}{r_0}\right). \tag{32}$$

3. Определение критических размеров. В главе III было показано, что процесс диффузии неустойчивого газа, скорость распада которого пропорциональна концентрации, приводит к уравнению

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta < 0). \tag{33}$$

Большой интерес представляют процессы диффузии при наличии цепных реакций. Цепные реакции характеризуются тем, что частицы диффундирующего вещества, вступая в реакцию с окружающей средой, «размножаются». Так, например, при столкновении нейтронов с «активными» ядрами урана происходит реакция деления ядер, сопровождающаяся появлением новых нейтронов, число которых больше единицы. Эти нейтроны в свою очередь вступают в реакцию с другими активными ядрами, вызывая их деление с выделением новых нейтронов и т. д. Таким образом происходит процесс размножения нейтронов, носящий характер цепной реакции.

Рассматривая описанный процесс в «диффузионном приближении», мы приходим к следующему уравнению:

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta > 0), \tag{33''}$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества (нейтронов), пропоциональных концентрации (плотности нейтронов).

Рассмотрим следующую задачу:
найти решение уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad \text{внутри } T, \tag{33}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(M, 0) = \varphi(M) \tag{34}$$

и граничному условию

$$u|_\Sigma = 0. \tag{35}$$

С помощью подстановки

$$u(M, t) = \bar{u}(M, t) e^{\beta t} \tag{36}$$

уравнение (33) переходит в уравнение (1); начальные и граничные условия при этом остаются неизменными. Таким образом, искомая функция u имеет вид

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(\beta - a^2\lambda_n)t} v_n(M), \tag{37}$$

где C_n определяются начальной функцией по формуле (10). В случае $\beta < 0$ (диффузия с распадом) показатели ряда (37) меньше соответствующих показателей ряда (6). Это означает, что при наличии распада убывание концентрации происходит быстрее по сравнению со случаем чистой диффузии ($\beta = 0$). В случае $\beta > 0$ (диффузия с размножением), если хотя бы один из показателей $\beta - a^2\lambda > 0$, т. е. $\beta > a^2\lambda_1$, то с течением времени будет происходить, вообще говоря ($C_1 \neq 0$), нарастание концентрации по экспоненциальному закону (цепная реакция). Величина β является характеристикой вещества (коэффициент размножения), а λ_1 существенно зависит от формы и размеров области. Будем говорить, что некоторая область $T_{кр}$ имеет при заданном β критические размеры, если $\lambda_1 = \beta/a^2$. Определим критические размеры для бесконечного слоя, цилиндра и сферы.

1. Бесконечный слой $0 \leqslant x \leqslant l$. Считая задачу одномерной, имеем (см. главу II, § 3):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Критическая толщина слоя $l_{кр}$, начиная с которой будет происходить процесс лавинного нарастания концентрации u, определяется из условия

$$l_{кр} = \frac{a\pi}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{3{,}14a}{\sqrt{\beta}} \quad (\beta > 0). \tag{38}$$

2. Бесконечный цилиндр. Считая задачу плоской, видим, что наименьшее значение λ соответствует собственной

функции, обладающей радиальной симметрией, и равно

$$\lambda_1^{(0)} = \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_0}\right)^2 \quad (\mu_1^{(0)} = 2{,}4048).$$

Отсюда для критического диаметра получаем формулу

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\mu_1^{(0)} a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{4{,}80a}{\sqrt{\beta}}. \tag{39}$$

3. Сфера. Наименьшее значение λ соответствует собственной функции, обладающей сферической симметрией, и равно

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2, \tag{40}$$

откуда для критического диаметра $D_{\text{кр}}$ получаем формулу

$$D_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{6{,}28a}{\sqrt{\beta}}. \tag{40}$$

§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами

1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника. Для уравнения теплопроводности можно ставить краевые задачи для областей с границами, перемещающимися со временем.

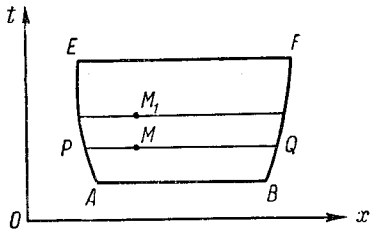

Рис. 78.

Для простоты будем рассматривать эту задачу для уравнения с одной геометрической переменной

$$\mathscr{L}(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0, \tag{1}$$

хотя все изложенное ниже может быть перенесено на случай многих переменных.

Рассмотрим область $BAEF$ (рис. 78), ограниченную характеристиками AB и EF ($t = \text{const}$) и кривыми, определяемыми уравнениями

$$x = \chi_1(t) \quad (\text{для } AE)$$

и

$$x = \chi_2(t) \quad (\text{для } BF).$$

Первая краевая задача для этой области состоит в определении решения уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющего начальному и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u = \varphi(x) \quad \text{на } AB, \\ &u|_{x=\chi_1(t)} = \mu_1(t), \quad u|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из принципа максимального значения непосредственно следует, что эта задача не может иметь более одного непрерывного решения. Аналогично могут быть поставлены и другие краевые задачи.

Установим формулу Грина для уравнения (1) и интегральное представление решений этой задачи.

Рассмотрим оператор

$$\mathscr{M}(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}; \tag{3}$$

интегрируя выражение

$$\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi) = a^2 (\psi \varphi_x - \varphi \psi_x)_x - (\varphi \psi)_t$$

по некоторой области $PABQ$ (рис. 78), где $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые функции, и пользуясь формулой Грина, получим:

$$\iint [\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi)]\, dx\, dt = \oint \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right],$$

где правый интеграл берется по замкнутому контуру $PABQ$. Если $\mathscr{L}(\varphi) = 0$ и $\mathscr{M}(\psi) = 0$, то, выписывая подробнее правую часть, получим:

$$\int\limits_{PQ} \varphi\psi\, dx = \int\limits_{AB} \varphi\psi\, dx + \int\limits_{BQ} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right] - \\ - \int\limits_{AP} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]. \tag{4}$$

Пусть $\varphi(x, t) = u(x, t)$ — какое-либо решение уравнения теплопроводности $\mathscr{L}(u) = 0$, а $\psi = G_0(x, t, \xi, \tau)$ — функция источника для этого уравнения на неограниченной прямой

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - \tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \tag{5}$$

часто называемая **фундаментальным решением уравнения теплопроводности**. Функция $G_0(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}(G_0) = 0$ по переменным x, t и сопряженному уравнению $\mathscr{M}(G_0) = 0$ по переменным ξ, τ.

Пусть $M(x, t)$ — некоторая фиксированная точка внутри области $BAEF$, в которой мы хотим определить значение функции $u(x, t)$, а M_1 — точка с координатами $x, t + h$, где $h > 0$. Проводя через точку M характеристику PQ, заменяя в формуле (4) x на ξ, t на τ и применяя ее затем к области $ABQP$ (рис. 78) и функциям

$$\varphi = u(\xi, \tau) \quad \text{и} \quad \psi(\xi, \tau) = G_0(x, t + h, \xi, \tau), \tag{6}$$

будем иметь:

$$\int\limits_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}}\, u(\xi, t)\, d\xi = \\ = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, G_0(x, t + h, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau\right]. \tag{7}$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ и учитывая непрерывность по h функции $G_0(x, t+h, \xi, \tau)$ и $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ на $PABQ$, а также равенство

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = u(x, t)\ ^{1)}, \tag{8}$$

если (x, t) лежит на отрезке PQ, получаем основную интегральную формулу

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} u(\xi, \tau)\, G_0(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + \int\limits_{BQ+PA} a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau, \tag{9}$$

дающую представление произвольных решений уравнения теплопроводности. Перепишем ее еще раз более подробно

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{BQ+PA} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \frac{\partial u}{\partial \xi} d\tau -$$

$$- a^2 \int\limits_{BQ+PA} u(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \right) d\tau. \tag{9'}$$

Эта формула не дает решений краевых задач, так как для вычисления правой части надо знать значения не только u, но и $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ вдоль дуг AE и BF.

При помощи преобразования, подобного тому, которое было выполнено для уравнения Лапласа при введении функции источника, можно исключить из этой формулы $\frac{\partial u}{\partial \xi}$.

Пусть v — какое-либо решение сопряженного уравнения $\mathscr{M}(v) = 0$, обращающееся в нуль на PQ, и u — решение уравнения теплопроводности $\mathscr{L}(u) = 0$. Применяя формулу (4) к функциям v и u для области $PABQ$, получим:

$$0 = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, v(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\tau \right]. \tag{10}$$

Вычитая из (9), равенство (10), будем иметь:

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau \right], \tag{11}$$

где

$$G(x, t, \xi, \tau) = G_0(x, t, \xi, \tau) - v. \tag{12}$$

Если функцию v выбрать так, чтобы

$$G = 0 \quad \text{на} \quad PA \quad \text{и} \quad BQ,$$

то получим интегральное представление для $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{AB} u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{AP} u \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau - a^2 \int\limits_{BQ} u \frac{\partial G}{\partial \xi} d\tau. \tag{13}$$

---

[1]) См. главу III, § 3.

Формула (13) дает решение краевой задачи (1)—(2), в условиях которой задаются значения функции u на AP и BQ, а также на прямой AB.

Остановимся подробнее на рассмотрении функции G. Она определяется при помощи представления (12), где функция $v(\xi, \tau)$ характеризуется следующими условиями:

1° $v(\xi, \tau)$ определена в области $PABQ$ и для $\tau < t$ удовлетворяет сопряженному уравнению $\mathscr{M}(v) = 0$.

2° $v = 0$ на PQ, т. е. при $\tau = t$.

3° $v(\xi, \tau) = -G_0(x, t, \xi, \tau)$ на PA и QB.

В силу этих условий функция v зависит от параметров x, t, так что $v = v(x, t, \xi, \tau)$, и для ее определения надо решить краевую задачу для уравнения $\mathscr{M}(v) = 0$, которая эквивалентна решению краевой задачи типа (2) для уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, в чем легко убедиться изменением знака у τ. Таким образом, при представлении функции $u(x, t)$ с помощью формулы (11), дающей решение краевой задачи (2), основная трудность заключается в нахождении функции $v(x, t, \xi, \tau)$.

Рассмотрим функцию $\bar{v}(x, t, \xi, \tau)$, определяемую условиями:

1° $\bar{v}(x, t, \xi, \tau)$ определена в области $PABQ$ для $t > \tau$ и, как функция переменных x, t, удовлетворяет уравнению теплопроводности $\mathscr{L}(v) = 0$.

2° $\bar{v} = 0$ на AB, т. е. при $t = \tau$.

3° $\bar{v} = -G_0$ на AP и BQ.

Докажем, что $v(x, t, \xi, \tau) = \bar{v}(x, t, \xi, \tau)$.

Рассмотрим функцию $\bar{G}(x, t, \xi, \tau) = G_0 + \bar{v}$. Очевидно, что для любого решения $\bar{u}$ уравнения $\mathscr{M}(u) = 0$ имеет место формула, аналогичная (9),

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \int\limits_{BQPA} \bar{u} G_0 \, dx + a^2 \left(\bar{u} \frac{\partial G_0}{\partial x} - G_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dt, \tag{9''}$$

а также формула, аналогичная (13),

$$\bar{u}(\xi, \tau) = \int\limits_{PQ} \bar{u} \bar{G} \, dx + a^2 \int\limits_{BQ} \bar{u} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} \, dt - a^2 \int\limits_{AP} \bar{u} \frac{\partial \bar{G}_0}{\partial x} \, dt. \tag{13'}$$

Эти формулы могут быть получены из формул (9) и (13) изменением знака у τ, так как при этом уравнение $\mathscr{M} = 0$ переходит в уравнение $\mathscr{L} = 0$.

Применяя формулу (13) к области $PQRS$ (рис. 79), где RS — отрезок прямой, соответствующий ординате θ, где $t > \theta > \tau$, и к непрерывному в этой области решению $u(x, t) = \bar{G}(x, t, \xi, \theta)$ уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, получим:

$$\bar{G}(x, t, \xi, \tau) = \int\limits_{RS} \bar{G}(x', \theta, \xi, \tau) \, G(x, t, x', \theta) \, dx',$$

так как интегралы по RP и SQ в силу 3° равны нулю.

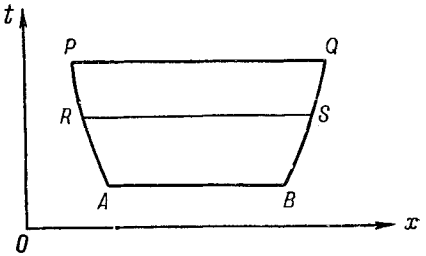

Рис. 79.

Применяя аналогично формулу (13′) к области $ARSB$ и непрерывному в этой области решению $\bar{u}(\xi, \tau) = G(x, t, \xi, \tau)$ уравнения $\mathscr{M}(u) = 0$, получим:

$$G(x, t, \xi, \tau) = \int\limits_{RS} G(x, t, x', \theta) \, \bar{G}(x', \theta, \xi, \tau) \, dx',$$

так как интегралы по BS и AR равны нулю. Сравнение этих формул дает, что

$$G(x, t, \xi, \tau) \equiv \overline{G}(x, t, \xi, \tau).$$

Это равенство доказывает, что функция G, рассматриваемая как функция x, t, имеет при $t = \tau$ и $x = \xi$ особенность, характерную для функции источника, равна нулю при $t = \tau$ и $x \neq \xi$, удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}_{x,t}(G) = 0$ внутри $APQB$ и обращается в нуль на AP и BQ. Такую функцию естественно назвать **функцией влияния точечного источника** для уравнения теплопроводности в области $APQB$.

Итак, *любое решение уравнения теплопроводности может быть представлено формулой* (13) *при помощи функции источника.*

Если задано неоднородное уравнение $\mathscr{L}(u) = f(x, t)$, то в формуле (13) к правой части следует прибавить слагаемое

$$\iint\limits_S G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

2. Решение краевой задачи. Полученная выше формула (13) дает решение краевой задачи для ограниченного отрезка с подвижными концами. Если же концы отрезка AB неподвижны, то дуги AE и BF заменяются отрезками прямых, параллельных оси t. Область S в этом случае имеет вид прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Из общей формулы (11) можно предельным переходом получить формулу Пуассона, дающую решение уравнения теплопроводности с заданным начальным условием на бесконечной прямой.

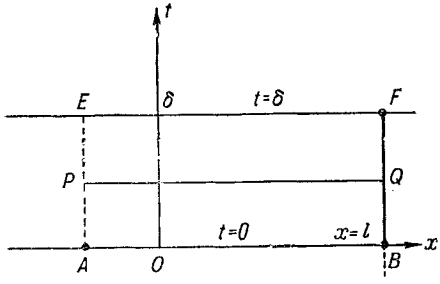

Рис. 80.

Предположим, что в части полосы, ограниченной двумя характеристиками $t = 0$ и $t = \delta$, проходящими через точки A и E (рис. 80), функции u и u_x удовлетворяют неравенствам

$$|u(x, t)|\, e^{-Kx^2} < N$$

и

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| e^{-Kx^2} < N, \qquad \text{(A)}$$

где $K > 0$ и $N > 0$ — некоторые числа. Заменим дугу BQ отрезком прямой $x = l$, где l — положительное число, которое в дальнейшем будем неограниченно увеличивать. При этом мы будем исходить из формулы (9), которую перепишем в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau - u(\xi, \tau) \frac{x-\xi}{2(t-\tau)}\, d\tau\right].$$

Рассмотрим интеграл по отрезку BQ

$$\int\limits_{BQ} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} - u(l, \tau) \frac{x-l}{2(t-\tau)}\right] d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}}\, d\tau - \int\limits_0^t u(l, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}} (x-l)\, d\tau}{4\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}\,(t-\tau)} = I_1 + I_2$$

и покажем, что он стремится к нулю при $l \to \infty$.

Оценим интеграл I_1 при больших значениях l

$$|I_1| \leqslant \frac{Na^2}{2\sqrt{\pi a^2}} e^{Kl^2 - \frac{l^2}{16a^2\delta}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}} \quad \left(\text{если } x < \frac{l}{2} \text{ и } (t-\tau) < \delta\right).$$

Очевидно, что $|I_1| \to 0$ при $l \to \infty$, так как K — фиксированное число, а δ может быть выбрано как угодно малым числом, например так, что

$$K < \frac{1}{16a^2\delta}.$$

Аналогично доказывается, что $|I_2| \to 0$ при $l \to \infty$.

Если для функции $u(x, t)$ и ее производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ неравенства (А) выполняются также при отрицательных x, то можно принять за кривую AE отрезок прямой $x = -l$ и, повторяя изложенные выше рассуждения, убедиться в том, что при предельном переходе интеграл по PA в формуле (9) стремится к нулю. В результате мы приходим к известной нам из главы III, § 3 формуле Пуассона [1])

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{t}} u(\xi, 0)\, d\xi.$$

Рассматривая полубесконечную область и предполагая, что для функции источника $G(x, t, \xi, \tau)$ выполнены неравенства (А), с помощью аналогичных рассуждений найдем:

$$u(x, t) = -\int_{PA} a^2\mu(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x_A} d\tau + \int_{x_A}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x, t, \xi, 0)\, d\xi, \tag{14}$$

где

$$\mu(t) = u(x_A, t) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

Как нетрудно убедиться, функция источника для полубесконечной прямой $x \geqslant 0$ может быть получена методом отражения и равна

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right],$$

так как она представима в виде (12), удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным x, t и обращается в нуль при $x = 0$:

$$G(0, t, \xi, \tau) = 0.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

---

[1]) Приведенные рассуждения нельзя рассматривать как вывод этой формулы, так как мы основывались на ней при выводе формулы (9).

и, подставляя ее значение в (14), получим формулу

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a^2 x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau, \qquad (15)$$

которая определяет функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < \infty, \quad t > 0)$$

и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= \mu(t) \end{aligned} \qquad (0 < x < \infty).$$

3. Функция источника для отрезка. Решение уравнения теплопроводности на ограниченном отрезке $0 < x < l$ дается формулой (11), которая после замены дуг PA и BQ отрезками прямых и сдвига начала координат в точку A принимает вид

$$G(x, t; \xi, \tau) =$$

$$= a^2 \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} \mu_1(\tau)\, d\tau - a^2 \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=l} \mu_2(\tau)\, d\tau + \int_0^l G(x, t, \xi, 0)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

где

$$\mu_1(t) = u(0, t), \quad \mu_2(t) = u(l, t), \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

Функция источника $G(x, t, \xi, \tau)$ для отрезка может быть построена методом отражения. Помещая положительные источники в точках $2nl + \xi$ и отрицательные источники в точках $2nl - \xi$, представим функцию источника с помощью ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G_0(x, t, 2nl + \xi, \tau) - G_0(x, t, 2nl - \xi, \tau)], \qquad (16)$$

где

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

— функция источника для неограниченной прямой.

Сходимость ряда, а также выполнение граничных условий $G|_{x=0} = 0$ и $G|_{x=l} = 0$ устанавливаются без труда.

В § 2 главы III была получена иная форма представления функции источника

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (17)$$

Докажем эквивалентность обоих представлений.

Формулу (17) можно рассматривать как разложение функции $G(x, t, \xi, \tau)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $(0, l)$

$$G(x, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x, t, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{18}$$

Вычислим коэффициенты Фурье G_n функции G, определяемой рядом (16),

$$G_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t, \xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^l G_0(x, t, 2nl + \xi_1, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi_1 \, d\xi_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^l G_0(x, t, 2nl - \xi_2, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi_2 \, d\xi_2 \right\}.$$

Вводя новые переменные интегрирования

$$\xi' = 2nl + \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi'' = 2nl - \xi_2,$$

получим:

$$G_n = \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{2nl}^{(2n+1)l} G_0(x, t, \xi', \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi' \, d\xi' + \right.$$

$$\left. + \int_{(2n-1)l}^{2nl} G_0(x, t, \xi'', \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi'' \, d\xi'' \right.,$$

откуда следует, что

$$G_n = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, t, \xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - \tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Введем переменную

$$\lambda = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 (t - \tau)}}.$$

Тогда

$$d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 (t - \tau)}}; \quad \sin \frac{\pi n}{l} \xi = \sin \frac{\pi n}{l} \left(x + 2\sqrt{a^2 (t - \tau)} \, \lambda\right) =$$

$$= \sin \frac{\pi n}{l} x \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t - \tau)} \, \lambda + \cos \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t - \tau)} \, \lambda;$$

$$G_n = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n}{l} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t - \tau)} \, \lambda \, d\lambda +$$

$$+ \frac{2}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \sin \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t - \tau)} \, \lambda \, d\lambda.$$

Второй интеграл равен нулю, так как под интегралом стоит нечетная относительно начала координат функция.

Первый интеграл является частным случаем интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda,$$

равного

$$I(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

В нашем случае $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}$, так что

$$I = \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)}$$

и

$$G_n = \frac{2}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Подставляя найденное выражение для коэффициентов Фурье G_n в формулу (18), сразу же получаем второе представление (17) для функции источника G. Тем самым эквивалентность двух разных представлений (16) и (17) доказана.

§ 4. Тепловые потенциалы

1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя. Как мы видели, всякое решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде (рис. 79):

$$u(x, t) = \int_{AB} G_0 u \, d\xi - \int_{AP} G_0 u \, d\xi + \int_{BQ} G_0 u \, d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau.$$

Займемся изучением отдельных слагаемых этой суммы и докажем в первую очередь, что каждое из них в отдельности удовлетворяет уравнению теплопроводности. Действительно, первое слагаемое является интегралом Пуассона, для которого это уже было доказано.

Докажем, что для внутренних точек области $PABQ$ уравнению теплопроводности удовлетворяют интегралы

$$V = a^2 \int_{AP} G_0 \nu \, d\tau = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) \, d\tau \qquad (\xi = \chi_1(\tau)),$$

$$W = 2a^2 \int_{AP} \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \mu \, d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) \, d\tau.$$

Функции V и W называются тепловыми потенциалами (простого слоя и двойного слоя соответственно).

Производные функций V и W вычисляются при помощи дифференцирования под знаком интеграла, так как подстановка, входящая при дифференцировании по t, равна нулю. Например,

$$G_0(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\,\mu(\tau)\Big|_{\tau=t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}}\,e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mu(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0$$

в силу того, что $x \neq \chi_1(t)$. Таким образом, дифференцирование по параметрам x, t будет относиться к функции G_0, которая является решением уравнения теплопроводности. Изучение остальных слагаемых проходит аналогично.

Рассмотрим теперь поведение функций V, W на кривой AP $(x = \chi_1(t))$. Очевидно, что интеграл V непрерывен при переходе точки (x, t) через кривую AP, так как этот интеграл сходится равномерно (см. главу IV, § 5). Докажем, что W претерпевает разрыв при переходе через кривую AP, причем

$$W|_{x=\chi_1(t)+0} = W|_{x=\chi_1(t)} + \mu(t),$$

$$W|_{x=\chi_1(t)-0} = W|_{x=\chi_1(t)} - \mu(t).$$

Это доказательство будет проведено в предположении дифференцируемости $\chi_1(t)$ и функции $\mu(t)$.

Рассмотрим сперва W при постоянной плотности $\mu(t) = \mu_0$

$$W^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mu_0\,d\tau$$

и вспомогательный интеграл

$$\tilde{V}^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mu_0\,d\tau,$$

являющийся, в силу сделанного выше замечания, непрерывной функцией в точках дуги AP.

Разность $W^0 - \tilde{V}^0$ вычисляется непосредственно

$$W^0(x,t) - \tilde{V}^0(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[\frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\right]\mu_0\,d\tau =$$

$$= \mu_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\chi_1(t_0)}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\alpha_0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha \qquad \left(\alpha = \frac{x-\chi_1(\tau)}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}}\right),$$

где

$$\alpha_0 = +\infty, \quad \text{если } x > \chi_1(t),$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \text{если } x = \chi_1(t) = x_0,$$

$$\alpha_0 = -\infty, \quad \text{если } x < \chi_1(t).$$

При $x \to x_0 \pm 0$ мы получаем:

$$[W^0(x_0 \pm 0, t) - W^0(x_0, t)] - [\tilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \tilde{V}(x_0, t)] = \\ = \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \pm \mu_0.$$

В силу непрерывности $\tilde{V}$ имеем:

$$\tilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \tilde{V}(x_0, t) = 0.$$

Таким образом,

$$W^0(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu_0.$$

Если $\mu(t)$ не постоянна, то

$$W(x, t) = W^0(x, t) - \psi(x, t),$$

где

$$\psi(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} [\mu(t) - \mu(\tau)]\, d\tau.$$

В силу сделанных предположений о дифференцируемости функции $\mu(t)$ этот интеграл имеет такую же особенность при $\tau = t$, как и V, сходится равномерно и является непрерывной функцией на кривой AP. Таким образом, предел $W(x, t)$ при $x = x_0 \pm 0$ равен

$$W(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно убедиться, что производная $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t)$, подобно $W(x, t)$, разрывна при $x = x_0$. Эта производная равна

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

и равна $-W(x, t)$ с плотностью

$$\mu(t) = \frac{\nu(t)}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 \pm 0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) \pm \frac{\nu(t)}{2},$$

где интеграл

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x_0 - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x_0-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

равен полусумме производных V в точке x_0 справа и слева:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 + 0, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x_0 - 0, t)\right].$$

Отметим, что функция $V(x, t)$ в самой точке x_0 не имеет производной.

На этом мы заканчиваем исследование потенциалов вдоль AP. Свойства потенциалов вдоль кривой BQ совершенно аналогичны.

2. Решение краевых задач. Тепловые потенциалы являются удобным аналитическим аппаратом для решения краевых задач.

Рассмотрим сперва первую краевую задачу для полуограниченной области $x \geqslant \chi(t)$:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad x \geqslant \chi_1(t),\ t \geqslant t_0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \geqslant \chi_1(t_0);$$
$$u[\chi_1(t); t] = \mu(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(x) = 0$, так как, беря разность между $u(x, t)$ и произвольным решением уравнения теплопроводности $v(x, t)$, удовлетворяющим тому же начальному условию, получим новую функцию, для которой $\varphi(x) = 0$, а граничное значение по-прежнему будет известно.

Предполагая, что приведение к нулевому начальному условию уже сделано, представим решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2} W(x, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \bar{\mu}(\tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(t)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau;$$

эта функция удовлетворяет уравнению при $x > \chi_1(t)$, ограничена в бесконечности и имеет нулевое начальное значение при любом выборе $\bar{\mu}(t)$. При $x = \chi_1(t)$ она разрывна и ее предельное значение при $x = \chi_1(t) + 0$ должно быть равно $\mu(t)$

$$\frac{\bar{\mu}(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau = \mu(t).$$

Это соотношение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода для нахождения функции $\bar{\mu}(\tau)$, определяющей искомое решение $u(x, t)$. Существование решения всегда имеет место в силу общей теории, если кривая $x = \chi_1(t)$ определяется дифференцируемой функцией.

Это уравнение особенно просто, если граница нашей области неподвижна: $\chi_1(t) = x_0$. В этом случае интеграл обращается в нуль и

$$\bar{\mu}(t) = 2a^2 \mu(t),$$

так что искомое решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \frac{x - x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

С этой формулой мы уже встречались дважды (см. главу III, § 3 и главу VI, § 3, п. 2), однако только здесь дано доказательство того, что эта функция удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям.

Вторая и третья краевые задачи решаются аналогично при помощи потенциала. Рассмотрим краевую задачу для ограниченной области, беря дополнительные условия в виде

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \chi_1(0) < x < \chi_2(0),$$
$$u[\chi_1(t); t] = \mu_1(t), \qquad u[\chi_2(t); t] = \mu_2(t) \quad (t > 0).$$

Считая, что начальное значение приведено к нулю: $\varphi(x) = 0$, представим решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2}(W_1 + W_2) =$$
$$= \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\,\bar{\mu}_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_2(\tau), \tau)\,\bar{\mu}_2(\tau)\,d\tau.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению и нулевому начальному условию при любом выборе функции $\bar{\mu}_1(t)$ и $\bar{\mu}_2(t)$. Она разрывна при $x = \chi_1(t)$ и $x = \chi_2(t)$ и ее предельные значения при $x = \chi_1(t) + 0$ и $x = \chi_2(t) - 0$ должны быть равны $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, что дает систему уравнений

$$\frac{\bar{\mu}_1(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_1(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_2(\tau)\,d\tau = \mu_1(t);$$

$$-\frac{\bar{\mu}_2(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_2(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_1(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_2(t) - \chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_2(\tau)\,d\tau = \mu_2(t).$$

Эта система является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, всегда имеющей решение.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

1. Сфера радиуса R_0 в начальный момент заполнена газом концентрации u_0; вне сферы концентрация равна нулю. Найти функцию u, характеризующую процесс диффузии газа в неограниченном пространстве. Решить ту же задачу для полупространства при наличии газонепроницаемой границы $z = 0$.

2. Решить задачу о нагревании сферы радиуса R_0, если начальная температура равна нулю, а на границе поддерживается постоянная температура.

3. Найти температуру шара, на поверхности которого происходит теплообмен со средой нулевой температуры, если начальная температура постоянна и равна u_0.

4. Однородное твердое тело ограничено двумя концентрическими сферами с радиусами a и $2a$. Внутренняя поверхность тела теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

Найти распределение температуры в теле в момент t, если начальная температура тела равна u_0.

5. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью. Написать выражение для функции точечного источника в неограниченном пространстве.

6. Рассмотреть стационарную задачу диффузии в подвижной среде, считая скорость движения постоянной и пренебрегая диффузией вдоль направления движения среды (задача о газовой атаке). Написать функцию источника для полупространства, считая, что плоскость $z = 0$ газонепроницаема.

7. Построить функцию теплового источника для слоя, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = l$, а также для клина с раствором π/n (n — целое число) при нулевых граничных условиях. Решение исследовать.

8. Найти функцию влияния мгновенного источника тепла мощности Q, равномерно распределенного на поверхности сферы радиуса a.

9. Решить задачу о нагревании бесконечного цилиндра, начальная температура которого равна нулю, а на поверхности поддерживается постоянная температура. Пользуясь таблицами функций Бесселя, найти профиль температуры (взяв на радиусе десять точек) и среднюю температуру по сечению для больших моментов времени. Построить соответствующие графики.

10. Рассмотреть задачу о намагничивании бесконечного цилиндра постоянным магнитным полем, параллельным оси цилиндра. Пользуясь таблицами бесселевых функций, подсчитать величину потока индукции через поперечное сечение цилиндра.

11. Построить функцию мгновенного точечного источника тепла для бесконечной цилиндрической области произвольного сечения при граничных условиях первого рода. Рассмотреть частный случай поперечного сечения круглой формы.

Указание. Представить решение в виде

$$u(M, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t)\, \psi_n(M),$$

где $\psi_n(M)$ — собственная функция поперечного сечения цилиндра.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

I. Диффузия облака

Рассмотрим процесс диффузии газового облака, образующегося при разрыве снаряда.

При разрыве снаряда выделяется некоторое количество дыма Q, который распространяется во все стороны, образуя облако. Облако сначала растет, затем оно светлеет по краям, его темная непрозрачная часть уменьшается, все облако светлеет, начинает «таять» и, наконец, исчезает. Эта картина особенно отчетливо видна в ясный день на фоне голубого неба.

Процесс распространения дымового облака можно трактовать как процесс диффузии дыма от мгновенного точечного источника мощности Q в неограниченном пространстве. Такой процесс диффузии носит не молекулярный, а турбулентный характер; ему соответствует некоторый эффективный коэффициент

турбулентной диффузии D. Мы не учитываем здесь начальный разброс дыма, а также практически совершенно не существенное влияние земли. В этих предположениях концентрация дыма дается формулой

$$u(x, y, z, t) = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \quad (D = a^2),$$

если начало координат поместить в точку разрыва снаряда.

Остановимся на вопросе о видимости облака. Время, за которое облако полностью «растает», зависит от поглощения света в атмосфере и от порога чувствительности измерительного прибора (глаз, фотопленка и т. д.).

Как известно, интенсивность света, проходящего через однородные слои газа, приближенно равна

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

где I_0 — первоначальная интенсивность света, $\alpha = \alpha_0 u$ — коэффициент поглощения, пропорциональный концентрации поглощающего газа ($\alpha_0 = \text{const}$), u — концентрация газа в слое, l — толщина слоя.

Если имеется два слоя толщины l_1 и l_2 с разными концентрациями газа u_1 и u_2, то

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 u_1 l_1} e^{-\alpha_0 u_2 l_2} = I_0 e^{-\alpha_0 (u_1 l_1 + u_2 l_2)}.$$

Отсюда ясно, что интенсивность света, проходящего через облако с непрерывно меняющейся концентрацией дыма, будет определяться формулой

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 \int u\, dl}.$$

Видимость облака определяется отношением I/I_0, зависящим от величины $\int u\, dl$.

Пусть δ — порог чувствительности инструмента наблюдения; тогда при

$$\frac{I_0 - I}{I_0} < \delta \quad \text{или} \quad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta$$

облако становится невидимым; при

$$\frac{I_0 - I}{I_0} > 1 - \delta \quad \text{или} \quad \frac{I}{I_0} < \delta$$

облако кажется совершенно непрозрачным. Если

$$\delta < \frac{I}{I_0} < 1 - \delta,$$

то облако кажется наблюдателю частично прозрачным. Степень прозрачности зависит от величины отношения

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha_0 \int u\,dl},$$

т. е. от величины интеграла $\int u\,dl$.

Направим теперь ось z по лучу зрения и будем считать, что наблюдатель находится в бесконечности. При этом облако проектируется на плоскость (x, y). Для оценки видимости различных участков облака, соответствующих точкам (x, y), вычислим интеграл

$$\int u\,dl = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z, t)\,dz = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\,dz =$$

$$= Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}.$$

Если количество дыма по лучу зрения мало́

$$\int u\,dl < \frac{\delta}{\alpha_0}, \quad \text{то} \quad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta,$$

и соответствующий участок полностью прозрачен. Если количество дыма по лучу зрения велико

$$\int u\,dl > \frac{\Delta}{\alpha_0}, \quad \text{то} \quad \frac{I}{I_0} < e^{-\Delta} = \delta,$$

т. е. при надлежащем выборе $\Delta = \ln\frac{1}{\delta}$ соответствующий участок облака совершенно непрозрачен. При

$$\frac{\delta}{\alpha_0} \leqslant \int u\,dl < \frac{\Delta}{\alpha_0}$$

условие

$$\alpha_0 \int u\,dl = \delta \quad \text{или}$$

$$\alpha_0 Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\right)^2 e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} = \delta$$

$$(\rho^2 = x^2 + y^2)$$

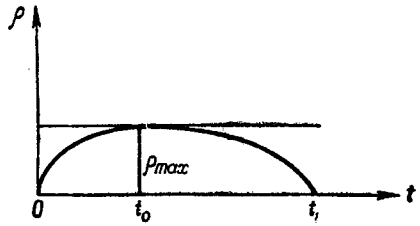

Рис. 81.

определяет границу облака, за пределами которой оно становится невидимым. Радиус облака, очевидно, равен

$$\rho = 2\sqrt{-Dt\ln\frac{\delta 4\pi Dt}{Q\alpha_0}} \quad \text{(рис. 81).}$$

При малых значениях t радиус облака (ρ) мал и растет вместе с t; при

$$t = t_0 = \frac{\alpha_0 Q}{4\pi e \delta D}$$

ρ достигает максимума

$$\rho_{max} = 2\sqrt{Dt_0} = \sqrt{\frac{\alpha_0 Q}{\pi e \delta}},$$

при $t > t_0$ радиус облака ρ уменьшается и при

$$t_1 = \frac{Q\alpha_0}{\delta 4\pi D}$$

обращается в нуль (облако исчезает).

Наблюдая процесс расплывания облака, можно определить коэффициент турбулентной диффузии D в свободной атмосфере (например, из формулы для t_1 или для t_0).

II. О размагничивании цилиндра с обмоткой

Рассмотрим задачу о размагничивании цилиндра с обмоткой. Такая задача возникает в связи с теорией баллистического гальванометра [1]).

При включении или выключении магнитного поля в обмотке возникает индукционный ток. При точной постановке задачи нужно учитывать обратное воздействие этого тока на поле внутри цилиндра. Однако это тормозящее действие обмотки обычно не учитывается и задачу решают с упрощенными граничными условиями.

Познакомимся, прежде всего, с такой упрощенной постановкой задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр радиуса R, на поверхности которого намотана проводящая обмотка. Цилиндр находится в однородном магнитном поле H_0, параллельном оси цилиндра Oz. В момент $t = 0$ поле выключается.

Внутри цилиндра, очевидно, будет удовлетворяться уравнение

$$\Delta H = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t} \quad (H = H_z), \tag{1}$$

где

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

В силу осевой симметрии поля

$$H_z = H(r, t)$$

---

[1]) Б. А. Введенский, Журнал Русского физико-химического общества 55, 1 (1923).

и уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1'}$$

Если пренебречь влиянием индукционного тока в обмотке на процесс размагничивания цилиндра, граничное условие на его поверхности будет иметь вид

$$H(R,\ t)=0 \quad (t>0). \tag{2}$$

При $t=0$

$$H(r,\ 0)=H_0. \tag{2'}$$

Решение уравнения (1′) при граничном условии (2) без труда получается методом разделения переменных (см. стр. 465)

$$H(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2H_0}{\mu_k^{(0)}J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}\,e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2 a^2 t}\,J_0\left(\mu_k^{(0)}\frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка, $\mu_k^{(0)}$ — k-й корень уравнения

$$J_0(\mu)=0. \tag{4}$$

Так как a^2 весьма велико, то для достаточно больших t можно ограничиться в формуле (3) первым членом (регулярный режим)

$$H(r,\ t)\cong 1{,}60\cdot H_0 e^{-5{,}77\frac{a^2}{R^2}t}\,J_0\left(2{,}4\frac{r}{R}\right). \tag{5}$$

Отсюда для потока индукции получаем:

$$\Phi(t)=2\pi\int_0^R \mu H(r,\ t)\,r\,dr\cong\frac{4}{\mu_1^2}\,\Phi_0 e^{-\mu_1^2\frac{a^2}{R^2}t}, \tag{6}$$

где Φ_0 — начальный поток (при $t=0$), $\mu_1=\mu_1^{(0)}$.

Формулой (6) пользуются для практических расчетов при измерениях с помощью баллистического гальванометра.

Чтобы определить область применимости этой формулы, следует решить указанную выше задачу, учитывая тормозящее действие обмотки[1]).

Электродвижущая сила индукции в контуре (витке) L, как известно, равна

$$\mathscr{E}^{\text{инд}}=\oint_L E_l\,dL.$$

---

[1]) Эта задача была решена В. Н. Никитиной.

Преобразуем контурный интеграл, используя для этой цели теорему Стокса, второе уравнение Максвелла и уравнение (1)

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = \iint\limits_S \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\, dS = -\frac{\mu}{c} \iint\limits_S \frac{\partial H}{\partial t}\, dS =$$

$$= -\frac{c}{4\pi\sigma} \iint\limits_S \Delta H\, dS = -\frac{c}{4\pi\sigma} \oint\limits_L \frac{\partial H}{\partial \nu}\, dl$$

или

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{cR}{2\sigma} \frac{dH}{d\nu}(R, t). \tag{7}$$

Здесь S — поперечное сечение цилиндра, L — контур, ограничивающий S, ν — нормаль к контуру L.

Граничные условия на поверхности цилиндра запишутся в виде условия скачка поля

$$H(R-0, t) - H(R+0, t) = \frac{4\pi}{c} nJ,$$

где J — индукционный ток в обмотке, n — число витков на единицу длины цилиндра. Отсюда, учитывая, что $H(R+0, t) = 0$,

$$J = \frac{\mathscr{E}^{\text{инд}}}{\rho l},$$

где ρ — линейное сопротивление обмотки, l — длина одного витка, получаем:

$$H(R, t) = H(R-0, t) = \frac{4\pi}{c} n \frac{\mathscr{E}^{\text{инд}}}{\rho l}. \tag{8}$$

Сопоставляя соотношения (7) и (8), окончательно приходим к граничному условию

$$H(R, t) + \frac{n}{\rho\sigma} H_r(R, t) = 0.$$

Таким образом, мы должны решить уравнение

$$H_{rr} + \frac{1}{r} H_r = \frac{1}{a^2} H_t \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$H(r, 0) = H_0,$$

$$H(R, t) + \alpha H_r(R, t) = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{n}{\rho\sigma}\right).$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая

$$H(r, t) = X(r)\, T(t).$$

Для функции $X(r)$ и $T(t)$ получим условия

$$X'' + \frac{1}{r} X' + \lambda^2 X = 0; \tag{10}$$

$$X(R) + \alpha X'(R) = 0 \qquad (X(0) < \infty),$$

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0, \tag{11}$$

где λ^2 — параметр разделения.

Из второго уравнения сразу же находим:

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Частными решениями уравнения (10) являются функции $J_0(\lambda r)$ и $N_0(\lambda r)$ (см. Дополнение II, ч. I), однако условию ограниченности при $r = 0$ удовлетворяет лишь $J_0(\lambda r)$. Поэтому

$$X(r) = AJ_0(\lambda r).$$

Граничное условие при $r = R$ дает уравнение для определения собственных значений

$$J_0(\lambda R) + \alpha \frac{dJ_0(\lambda R)}{dR} = 0$$

или

$$J_0(y) - \beta y J_1(y) = 0,$$

где

$$\beta = \alpha/R, \quad y = \lambda R. \tag{12}$$

Корни этого уравнения могут быть найдены либо графически, либо разложением функций Бесселя в ряд по степеням $y = \lambda R$.

Обозначим y_k корни уравнения (12), так что

$$\lambda_k = y_k/R.$$

Общее решение нашей задачи будет иметь вид

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(y_k \frac{r}{R}\right) e^{-(y_k/R)^2 a^2 t}. \tag{13}$$

Коэффициенты A_k находим из начального условия

$$A_k = \frac{\int\limits_0^R H_0 J_0\left(r \frac{y_k}{R}\right) r\, dr}{\int\limits_0^R J_0^2\left(r \frac{y_k}{R}\right) r\, dr} = \frac{2H_0 J_1(y_k)}{y_k\left[J_0^2(y_k) + J_1^2(y_k)\right]}. \tag{14}$$

Члены ряда (13) быстро убывают, так как $a^2 = c^2/4\pi\mu\sigma$ велико ($\sim 10^{13} - 10^{14}$). Поэтому с достаточной степенью точности можно ограничиться первым членом

$$H(r, t) \cong \frac{2H_0 J_1(y_1) J_0\left(y_1 \frac{r}{R}\right)}{y_1\left[J_0^2(y_1) + J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{15}$$

что приводит к следующему выражению для потока:

$$\Phi(t) \cong \Phi_0 \frac{4J_1^2(y_1)}{y_1^2\left[J_0^2(y_1)+J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{16}$$

где

$$\Phi_0 = NH_0\pi R^2 \quad (N \text{ — полное число витков в обмотке}).$$

Расчеты приводят к следующим формулам потока для различных значений параметра β:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0{,}804\,\Phi_0 e^{-4{,}75\theta} & \text{при} \quad \beta = 0{,}1, \\ 0{,}872\,\Phi_0 e^{-3{,}96\theta} & \text{»} \quad \beta = 0{,}2, \\ 0{,}912\,\Phi_0 e^{-3{,}35\theta} & \text{»} \quad \beta = 0{,}3, \end{cases} \qquad \theta = \frac{a^2}{R^2} t,$$

позволяющим проследить за тормозящим действием тока на спадание поля в цилиндре. С увеличением β, т. е. с увеличением тока в обмотке, скорость убывания потока уменьшается. При $\beta = 0$ естественно приходим к выражению (6) для потока, являющемуся, таким образом, нулевым приближением.

В теории баллистического гальванометра важно знать время τ спадания потока от Φ_0 до значений, определяемых чувствительностью гальванометра, которое характеризует инерционность прибора. Пусть γ — относительная чувствительность гальванометра, т. е. гальванометр может регистрировать лишь значения $\Phi \geqslant \gamma\Phi_0$. Величину τ, очевидно, можно найти, полагая в формуле

$$\Phi(t) = a\Phi_0 e^{-bt},$$

$$\Phi = \gamma\Phi_0 \quad \text{в момент } t = \tau.$$

Из сравнения полного решения (16) с грубым решением (6) видно, что коэффициент в формуле (6) завышен. Это означает завышенное значение чувствительности прибора при одном и том же значении τ.

Приводимая ниже таблица содержит значения τ для различных β, в том числе и для $\beta = 0$, при $\gamma = 10^{-3}$.

	R	a^2/R^2	τ ($\beta=0$)	τ ($\beta=0{,}1$)	τ ($\beta=0{,}2$)	τ ($\beta=0{,}3$)
Железо $\mu = 500$ $\sigma = 10^5$ *ом*$^{-1}$*см*$^{-1}$	1 *см*	1,59	0,71	0,888	1,15	1,28
Альсифер $\mu = 2000$ $\sigma = 1{,}3 \cdot 10^4$ *ом*$^{-1}$*см*$^{-1}$	1 *см*	5,12	0,217	0,272	0,330	0,405

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА (продолжение)

§ 1. Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv = 0$

1. Установившиеся колебания. Весьма широкий класс вопросов, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, электромагнитными и т. д.) приводит к так называемому волновому уравнению

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad (k^2 = c > 0). \tag{1}$$

Рассмотрим в качестве примера мембрану S, закрепленную по границе C и колеблющуюся под действием периодических во времени сил. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\Delta_2 \bar{u} = \frac{1}{a^2}\, \bar{u}_{tt} - F_0(x, y) \cos \omega t. \tag{2}$$

При изучении периодических процессов удобно пользоваться комплексными функциями, заменяя (2) уравнением

$$\Delta_2 u = \frac{1}{a^2}\, u_{tt} - F_0(x, y)\, e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Функция $\bar{u}$, очевидно, является вещественной частью функции u из (3).

Будем искать установившиеся колебания, имеющие вид

$$u = v e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Для амплитуды установившихся колебаний v получаем следующее уравнение:

$$\Delta_2 v + k^2 v = -F_0(x, y) \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right), \tag{5}$$

к которому надо добавить граничное условие

$$v\,|_C = 0. \tag{6}$$

Если контур мембраны C не закреплен, а совершает периодические колебания с той же частотой ω

$$u\,|_C = f_0 e^{i\omega t}, \tag{6'}$$

то для функции v на контуре C имеет место неоднородное граничное условие

$$v|_C = f_0. \tag{6''}$$

Как было уже отмечено выше, задачи об установившихся колебаниях характерны также для акустики и теории электромагнитного поля. Кроме того, часто встречаются задачи об установившихся колебаниях в неоднородной среде, в частности, в кусочно-однородной среде (когда, например, в пространстве имеются отдельные области, нарушающие однородность). К этому кругу вопросов относятся задачи теории дифракции, на которых мы остановимся ниже.

2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях. При диффузии некоторых газов (например, эманации радия) происходит реакция распада молекул диффундирующего газа. Скорость реакции распада обычно принимают пропорциональной концентрации газа. При написании уравнения диффузии это эквивалентно наличию отрицательных источников газа. В случае стационарного процесса диффузии мы приходим к уравнению

$$D\Delta v + cv = 0 \qquad (c < 0), \tag{7}$$

где D — коэффициент диффузии. Как было указано в главе VI, § 2, п. 3, большой интерес представляет случай $c > 0$, соответствующий диффузии при наличии цепных реакций, ведущих к размножению диффундирующих частиц. В стационарном случае мы получаем при этом уравнение

$$\Delta v + cv = 0 \qquad (c > 0),$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества, пропорциональных концентрации $v(x, y, z)$.

3. Диффузия в движущейся среде. В главе IV была рассмотрена задача о диффузии газа в неподвижной среде. Рассмотрим задачу о диффузии газа в заданном стационарном потоке, скорость которого в точке $M(x, y, z)$ имеет компоненты $\vartheta_1(x, y, z)$, $\vartheta_2(x, y, z)$, $\vartheta_3(x, y, z)$. Количество газа, протекающего через элементарную площадку $d\sigma$ в точке $M(x, y, z)$, равно

$$dQ = -D\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}\,u\,d\sigma + u\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}\,d\sigma,$$

где $u(x, y, z)$ — концентрация газа в единице объема, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, нормальный к площадке $d\sigma$, D — коэффициент диффузии в точке (x, y, z), $\boldsymbol{\vartheta}(x, y, z)$ — вектор скорости потока.

Составляя уравнение сохранения вещества для некоторого объема T с границей Σ, получаем:

$$\int_\Sigma [-D\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}\,u + u\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}]\,d\sigma = 0.$$

Преобразуем поверхностный интеграл в объемный, пользуясь формулой Остроградского

$$\int_T [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta)]\, d\tau = 0.$$

Отсюда в силу произвольности объема T вытекает уравнение диффузии в заданном потоке

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta) = 0 \tag{8}$$

или в скалярной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta_1) - \frac{\partial}{\partial y}(u\vartheta_2) - \frac{\partial}{\partial z}(u\vartheta_3) = 0. \tag{8'}$$

К такому же уравнению приводит задача о распространении тепла в движущейся среде.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в полупространстве $z \geqslant 0$ имеется воздушный поток с постоянной скоростью u_0, направленной по оси x. Считая коэффициент диффузии постоянным, получаем из (8) уравнение

$$D\Delta u - u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

являющееся простейшим вариантом уравнения газовой атаки.

Полагая

$$u = ve^{\mu x}$$

и выбирая затем

$$\mu = u_0/2D,$$

получим для функции $v(x, y, z)$ уравнение

$$\Delta v + cv = 0, \quad \text{где} \quad c = -\frac{u_0^2}{4D} < 0.$$

4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv = 0$. Как было показано в главе I в связи с изучением канонических форм уравнений с постоянными коэффициентами, всякое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\Delta v + cv = 0. \tag{9}$$

Свойства решения уравнения (9) существенно зависят от знака коэффициента c, что физически очевидно, если иметь в виду диффузионную интерпретацию этого уравнения.

Остановимся на вопросе единственности решения первой краевой задачи уравнения (9). Для уравнения $\Delta v + cv = 0$ при $c < 0$ имеет место принцип максимального значения в следующей форме:

решение $v(M)$ уравнения $\Delta v + cv = 0$ $(c < 0)$, определенное внутри некоторой области T с границей Σ, не может достигать во внутренних точках области T положительных максимальных (и отрицательных минимальных) значений.

В самом деле, допустим, что в некоторой точке M_0, лежащей внутри T, функция $v(M)$ достигает положительного максимального значения $[v(M_0) > 0]$. Тогда в точке M_0

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0$$

и, следовательно, $\Delta v \leqslant 0$, что находится в противоречии с отрицательностью коэффициента c и положительностью $v(M_0)$ [1].

Из принципа максимального значения автоматически следует единственность решения первой краевой задачи для уравнения (9).

Может существовать только одно решение уравнения $\Delta v + cv = 0$ $(c \leqslant 0)$, определенное и непрерывное в замкнутой области $T + \Sigma$, принимающее на границе Σ заданные значения

$$v|_\Sigma = f.$$

Действительно, допуская существование двух различных решений v_1 и v_2, рассматривая их разность $v_1 - v_2$ и проводя рассуждения способом, изложенным выше (см. главы III и IV), мы приходим к противоречию с принципом максимального значения.

Если $c = 0$, то мы получаем первую краевую задачу для уравнения Лапласа, единственность решения которой была доказана.

Если $c > 0$, то единственность может не иметь места. Рассматривая в главе V задачу о собственных значениях краевой задачи

$$\Delta v + \lambda v = 0, \qquad v|_\Sigma = 0,$$

мы убедились на примерах в существовании нетривиальных решений (собственных функций) при $\lambda > 0$. Очевидно, что вопрос о множественности или единственности решения первой краевой задачи эквивалентен вопросу о том, совпадает ли c с одним из собственных значений λ_n рассматриваемой области T.

---

[1]) Сравнить с доказательством принципа максимального значения для уравнения теплопроводности.

§ 2. Функции влияния точечных источников

1. Функции влияния точечных источников. Теория потенциалов, развитая в главе IV для уравнения Лапласа, может быть распространена и на уравнение $\Delta v + cv = 0$. Для построения функций влияния точечного источника рассмотрим решение v_0, зависящее только от r. Оператор Лапласа для функции $v_0(r)$ в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_0}{dr}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2(rv_0)}{dr^2},$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dr^2}+cw=0 \qquad (w=v_0r).$$

Вводя обозначение $c=k^2$ для $c>0$ и $c=-\varkappa^2$ для $c<0$, получаем:

$$\frac{d^2w}{dr^2}+k^2w=0 \qquad (c>0), \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\varkappa^2w=0 \qquad (c<0). \tag{1'}$$

Из уравнения (1) находим:

$$w=C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr} \tag{2}$$

и, соответственно,

$$v_0=C_1\frac{e^{ikr}}{r}+C_2\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{3}$$

В случае вещественного k получаем два линейно-независимых решения e^{ikr}/r и e^{-ikr}/r, которым соответствуют вещественные линейно-независимые решения

$$\frac{\cos kr}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\sin kr}{r}.$$

При $c<0$ $(c=-\varkappa^2)$, пользуясь уравнением (1′), получаем два действительных линейно-независимых решения

$$\frac{e^{-\varkappa r}}{r} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\varkappa r}}{r} \qquad (\varkappa>0). \tag{4}$$

Функции

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r} \qquad (c>0) \quad \text{и} \quad \frac{e^{\pm\varkappa r}}{r} \qquad (c<0)$$

при $r=0$ терпят разрыв непрерывности, обращаясь в бесконечность как $1/r$. Такой же характер особенности имела функция источника для уравнения Лапласа $(c=0)$, пропорциональная $1/r$.

Рассмотрим поведение этих функций на бесконечности. Случай $c < 0$ соответствует процессу, сопровождающемуся поглощением (ср. уравнение диффузии (7) § 1). Одно из решений $e^{-\varkappa r}/r$ экспоненциально стремится к нулю на бесконечности, что в терминах задачи диффузии означает убывание концентрации, вызываемое поглощением. Это убывание происходит тем сильнее, чем больше коэффициент $|c| = \varkappa^2$, характеризующий интенсивность поглощения. Второе решение экспоненциально возрастает на бесконечности и физического смысла для задачи в неограниченной области не имеет (его можно было бы интерпретировать как наличие источника в бесконечности).

Случай $c = k^2 > 0$ соответствует установившимся волновым процессам (см. § 1, п. 1). Функция v представляет амплитуду функции

$$u(M, t) = v(M)\, e^{i\omega t},$$

удовлетворяющей уравнению колебаний (§ 1).

Одно из главных решений уравнения (1)

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r},$$

который имеет характер сферической волны, расходящейся от источника в точке $r = 0$. Второе решение

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r},$$

имеющему характер сферической волны, приходящей из бесконечности в точку $r = 0$ (сходящиеся волны). Очевидно, что это решение при изучении процессов, возбуждаемых точечным источником в неограниченном пространстве, прямого физического смысла не имеет.

Отметим, что функцию $v(M)$ можно рассматривать как амплитуду колебаний типа $e^{i\omega t}$ или $e^{-i\omega t}$. Мы брали временной фактор первого типа. Во втором случае расходящаяся волна имеет вид

$$u_0(r, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r},$$

т. е. ей соответствует второе решение

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Первое же решение

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

при этом физического смысла не имеет.

2. Интегральное представление решения. Для уравнения (9), § 1 при $c \neq 0$ можно написать формулы, аналогичные формулам Грина, которые были установлены для уравнения Лапласа. Вводя обозначение

$$\mathscr{L}(u) = \Delta u + cu, \tag{5}$$

сразу же получаем формулу

$$\int_T (u\mathscr{L}(v) - v\mathscr{L}(u))\, d\tau = \int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma, \tag{6}$$

являющуюся аналогом и прямым следствием второй формулы Грина (см. главу IV, § 2). Подставляя сюда вместо v одну из «функций точечного источника», например $e^{-\varkappa R}/R$, и повторяя дословно все рассуждения главы IV, § 2, приходим к аналогу основной формулы Грина

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right) - \frac{e^{-\varkappa R}}{R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_T f(M) \frac{e^{-\varkappa R}}{R}\, d\tau_M \quad (R = R_{MM_0}), \tag{7}$$

где $u(M)$ — решение неоднородного уравнения $\mathscr{L}(u) = -f(M)$.

Для случая $c = k^2$ имеет место аналогичная формула

$$u(M_0) = \\ = -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M + \frac{1}{4\pi} \int_T f(M) \frac{e^{-ikR}}{R}\, d\tau_M, \tag{7'}$$

которая была получена в главе V как следствие формулы Кирхгоффа.

Введем понятие функции источника уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$ для заданной области T с границей Σ. Пусть $v(M)$ — решение уравнения $\mathscr{L}(v) = 0$, регулярное всюду в T. Формула (6) дает

$$0 = -\int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma + \int_T fv\, d\tau. \tag{8}$$

Складывая (8) с равенством (7), получим:

$$u(M_0) = -\int_\Sigma \left[u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R}+v\right) - \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R}+v\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]d\sigma_M +$$

$$+\int_T \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R}+v\right) f(M)\,d\tau_M \qquad (R = R_{MM_0}). \tag{9}$$

Эта формула справедлива для произвольного решения $v(M)$ уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = 0$, регулярного в области T. Пользуясь произволом выбора функции v, получаем:

$$u(M_0) = -\int_\Sigma u(M)\frac{\partial G(M_0, M)}{\partial\nu}\,d\sigma_M + \int_T G(M_0, M) f(M)\,d\tau_M, \tag{10}$$

где

$$G(M_0, M) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \tag{11}$$

— функция источника, обладающая следующими свойствами:

1) $G(M, M_0)$ обращается в бесконечность при $M = M_0$ как $1/4\pi R$, что следует из формулы (11);

2) $G(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}(u) = 0$ всюду в T, кроме точки M_0;

3) $G(P, M_0) = 0$ в точках P, лежащих на границе Σ.

Вопрос о существовании функции источника связан с вопросом о существовании функции v, удовлетворяющей уравнению

$$\mathscr{L}(v) = 0 \text{ в } T$$

и граничному условию

$$u = -\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} \text{ на } \Sigma.$$

Очевидно, что функция $G(M, M_0)$ однозначно определена для любой области, допускающей единственное решение первой краевой задачи. В частности, при $c = -\varkappa^2 < 0$ эта функция определена для любой области. В простейших случаях функцию источника можно найти в явной форме, пользуясь методом, аналогичным методу электростатических изображений [1]).

Так, например, для полупространства $z > 0$ функция источника имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} - \frac{e^{-\varkappa R_1}}{4\pi R_1}, \tag{12}$$

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$R_1 = R_{MM_1} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2},$$

[1]) Для сферы метод электростатических изображений неприменим при $c \neq 0$.

где $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ — изображение в плоскости $z=0$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о применимости предыдущих формул для неограниченной области, что, впрочем, без труда может быть установлено в случае $c<0$. Задачи для неограниченного пространства при $c>0$ связаны с «принципом излучения» и будут рассмотрены в следующем параграфе.

Для функции источника $G(M, M_0)$, определенной для произвольной области T, имеет место принцип взаимности, выражаемый равенством

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Доказательство этого свойства является буквальным повторением соответствующего доказательства для случая уравнения Лапласа (глава IV, § 4).

В случае двух независимых переменных уравнение для функции $v_0(r)$ имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_0}{dr}\right) + k^2 v_0 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} + k^2 v_0 = 0,$$

т. е. является уравнением Бесселя нулевого порядка, общее решение которого может быть записано следующим образом (см. Дополнение II):

$$v_0(r) = C_1 H_0^{(1)}(kr) + C_2 H_0^{(2)}(kr),$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ — функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода.

Функции $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ при $r=0$ имеют логарифмическую особенность:

$$\left.\begin{aligned} H_0^{(1)}(\rho) &= \frac{-2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho} + \ldots, \\ H_0^{(2)}(\rho) &= \frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho} + \ldots, \end{aligned}\right. \qquad (\rho = kr),$$

где точками обозначены слагаемые, остающиеся конечными при $\rho=0$. На бесконечности (при $\rho\to\infty$) поведение функций Ханкеля определяется асимптотическими формулами

$$H_0^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $1/\rho$.

Таким образом, уравнение $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ имеет два фундаментальных решения

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

имеющих логарифмическую особенность и соответствующих функциям e^{ikr}/r и e^{-ikr}/r для пространства.

Выбор той или иной фундаментальной функции зависит от вида условий излучения на бесконечности (см. § 3, п. 4). Если временная зависимость берется в виде $e^{i\omega t}$, то функция $H_0^{(2)}(kr)$ определяет расходящуюся цилиндрическую волну. При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ расходящуюся волну определяет функция $H_0^{(1)}(kr)$.

Если $c = -\varkappa^2 < 0$, то линейно-независимыми решениями уравнения

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} - \varkappa^2 v_0 = 0$$

являются цилиндрические функции мнимого аргумента

$$I_0(\varkappa r) \quad \text{и} \quad K_0(\varkappa r),$$

Первая из этих функций $I_0(\varkappa r)$ ограничена при $r = 0$ и экспоненциально возрастает при $r \to \infty$; функция $K_0(\varkappa r)$ имеет в точке $r = 0$ логарифмическую особенность

$$K_0(\rho) = \ln\frac{1}{\rho} + \ldots$$

и тем самым является искомым фундаментальным решением. На бесконечности она убывает по закону

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, e^{-\rho} + \ldots$$

Мы не останавливаемся подробно на формулах Грина и понятии функции источника G в случае двух независимых переменных, так как изложение этого было бы повторением предыдущего.

3. Потенциалы. В главе IV были рассмотрены потенциалы для уравнения $\Delta u = 0$. Такого же типа потенциалы могут быть построены и для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Будем называть объемным потенциалом (для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$) интеграл

$$V(M) = \int\limits_T \rho(P)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\, d\tau_P,$$

$$R = R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad d\tau_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad (13)$$

где $\rho(P)$ — плотность потенциала.

Сформулируем кратко основные свойства объемного потенциала, доказательство которых проводится по аналогии с главой IV.

1. Вне области T функция $V(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0.$$

2. Внутри области T интеграл (13) сходится, сходятся также интегралы, получающиеся при помощи формального дифференцирования $V(M)$ под знаком интеграла

$$\int\limits_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ и т. д.}$$

3. Функция $V(x, y, z)$ дифференцируема, и ее первые производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\limits_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ и т. д.}$$

Дифференцируемость функции $V(x, y, z)$ доказывается в предположении только ограниченности функции ρ. Отсюда, в частности, следует дифференцируемость V и в точках поверхности Σ, ограничивающей область T, где, как правило, имеет место разрыв плотности $\rho(M)$.

4. Во внутренних точках области T, в окрестности которых плотность ρ дифференцируема, вторые производные объемного потенциала V существуют, и потенциал V удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \varkappa^2 V = -4\pi\rho(M).$$

5. Первые производные объемного потенциала представляются равномерно сходящимися интегралами в предположении равномерной ограниченности ρ. Поэтому первые производные являются непрерывными функциями во всем пространстве, включая точки поверхности Σ.

Объемные потенциалы позволяют представить решение краевой задачи для неоднородного уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ в виде суммы

$$u(M) = V(M) + u_1(M),$$

где $V(M)$ — объемный потенциал с плотностью $\rho = f/4\pi$, $u_1(M)$ — решение краевой задачи для однородного уравнения $\Delta u_1 - \varkappa^2 u_1 = 0$.

Перейдем к обзору свойств потенциалов простого и двойного слоя. Назовем потенциалом двойного слоя

интеграл

$$W(M)=\int_{\Sigma}\mu(P)\frac{\partial}{\partial\nu_P}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right]d\sigma_P \quad (R=R_{MP}), \tag{14}$$

где $\mu(P)$ — поверхностная плотность потенциала W.

Перечислим основные свойства потенциала двойного слоя, отсылая за их доказательством к главе IV § 5.

1. Вне поверхности Σ потенциал двойного слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению $\Delta W-\varkappa^2 W=0$.

2. Потенциал двойного слоя сходится в точках границы, если Σ принадлежит к классу поверхностей Ляпунова.

3. Функция W разрывна в точках поверхности Σ и имеют место соотношения

$$W_{\text{в}}(M_0)=W(M_0)+2\pi\mu(M_0),$$
$$W_{\text{н}}(M_0)=W(M_0)-2\pi\mu(M_0).$$

Здесь $W_{\text{в}}(M_0)$ — предельное значение функции $W(M)$ при стремлении M к M_0 изнутри области T, $W_{\text{н}}(M_0)$ — предельное значение $W(M)$ при стремлении M к M_0 снаружи T. Потенциал простого слоя, определяемый поверхностным интегралом

$$V(M)=\int_{\Sigma}\rho(P)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}d\sigma_P \quad (R=R_{MP}), \tag{15}$$

обладает следующими свойствами:

1. Вне поверхности Σ потенциал простого слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению $\Delta V-\varkappa^2 V=0$.

2. Интеграл равномерно сходится на Σ и определяет функцию $V(M)$, непрерывную во всем пространстве.

3. Нормальные производные потенциала простого слоя для поверхностей класса Ляпунова удовлетворяют соотношениям (ср. (48), § 5 главы IV)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)_{\text{в}}=U_0+2\pi\rho(M_0),$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)_{\text{н}}=U_0-2\pi\rho(M_0),$$

где

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)_{\text{в}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)_{\text{н}}$$

— предельные значения для нормальной производной изнутри и, соответственно, извне Σ в точке M_0 на поверхности Σ (ν — внешняя нормаль)

$$U_0(M_0)=\int_{\Sigma}\rho(P)\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right]d\sigma_P \quad (R=R_{M_0P}).$$