

Поверхностные потенциалы позволяют для весьма широкого класса поверхностей (например, поверхностей класса Ляпунова) сводить краевые задачи к интегральным уравнениям.

Рассмотрим первую внутреннюю краевую задачу для уравнения  $\Delta u - \kappa^2 u = 0$  при граничном значении  $u|_{\Sigma} = f$ . Предположим, что искомую функцию можно представить в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = W(M) = \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial v_P} \left[ \frac{e^{-\kappa R}}{R} \right] d\sigma_P, \quad (14)$$

который, как было отмечено выше, удовлетворяет внутри  $T$  однородному уравнению  $\Delta u - \kappa^2 u = 0$ . Требуя выполнения граничного условия  $u|_{\Sigma} = f$ , приходим к следующему интегральному уравнению для определения функции  $\mu$ :

$$2\pi\mu(M) + \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial v_P} \left[ \frac{e^{-\kappa R}}{R} \right] d\sigma_P = f(M),$$

которое является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. На вопросах существования и единственности решения этого интегрального уравнения мы здесь не останавливаемся.

Для уравнения  $\Delta u - \kappa^2 u = 0$ , так же как и для уравнения Лапласа, применим метод конечных разностей.

### § 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения

**1. Уравнение  $\Delta v + cv = -f$  в неограниченном пространстве.** Рассмотрим решение неоднородного уравнения

$$\Delta v + cv = -f \quad (1)$$

в неограниченном пространстве. Для простоты изложения будем считать, что  $f$  отлична от нуля внутри некоторой ограниченной области (локальная функция). Характер решения этого уравнения существенно зависит от знака коэффициента  $c$ .

Остановимся сперва на случае  $c = -\kappa^2 < 0$ . Решение уравнения  $\Delta v - \kappa^2 v = -f$  можно представить в форме объемных потенциалов

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{\kappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}).$$

Таким образом, решение уравнения (1) без дополнительных условий в бесконечности определено неоднозначно. Будем искать, по аналогии с внешней задачей для уравнения Лапласа,

решение уравнения (1), обращающееся в нуль на бесконечности. Этому условию удовлетворяет функция  $v_1(M)$  и не удовлетворяет функция  $v_2(M)$ .

Докажем следующую теорему единственности:

*уравнение*

$$\Delta v - \kappa^2 v = -f$$

не может иметь более одного решения, обращающегося в нуль на бесконечности<sup>1)</sup>.

Допустим, что существуют два различных решения поставленной задачи  $\bar{v}(M)$  и  $\tilde{v}(M)$  и рассмотрим их разность  $w = \bar{v} - \tilde{v}$ . По предположению, найдется такая точка  $M_0$ , что  $w(M_0) = A \neq 0$ . Для определенности будем считать  $A > 0$ . В силу того, что  $w(M) \rightarrow 0$  в бесконечности, можно указать такое  $R_0$ , что при  $r > R_0$  функция  $w < A/2$ . Отсюда следует, что точка  $M_0$  лежит внутри  $T_{R_0}$  — сферы радиуса  $R_0$  — и что функция  $w(M)$  достигает своего максимального значения внутри  $T_{R_0}$ . Таким образом, мы приходим к противоречию с принципом максимального значения, имеющим место для нашего уравнения (см. § 1, п. 4). Теорема единственности доказана.

Рассмотрим теперь случай  $c = k^2 > 0$ .

*Функции*

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP})$$

по-прежнему являются решениями уравнения (1). Однако в этом случае обе функции убывают на бесконечности. Отсюда вытекает необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решение уравнения (1). Эти условия будут разобраны в пп. 2, 3 и 4 настоящего параграфа.

**2. Принцип предельного поглощения.** Задача о вынужденных колебаниях с затуханием приводит к уравнению

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} + \beta u_t - F(M, t) \quad (\beta > 0). \quad (2)$$

Будем считать, что функция  $F(M, t)$  является периодической по времени, т. е.  $F(M, t) = f(M) e^{i\omega t}$ . В этом случае уравнение (2) имеет периодические решения вида

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Под термином «функция, обращающаяся в нуль на бесконечности» мы понимаем следующее: каково бы ни было  $\varepsilon$ , найдется такое  $r(\varepsilon)$ , что для любой точки  $M(r, \theta, \phi)$ , для которой  $r > r(\varepsilon)$ ,  $|u(M)| < \varepsilon$ , т. е. мы предполагаем равномерное стремление к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Функция  $v(M)$ , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v + q^2 v = -f(M), \quad (4)$$

где  $q^2 = k^2 - i\beta\omega$  является комплексной величиной,  $k = \omega/a$ .

Будем называть уравнение (4) с комплексным значением коэффициента  $q^2$  уравнением с комплексным поглощением 1-го ( $\text{Im } q^2 < 0$ ) или 2-го типа ( $\text{Im } q^2 > 0$ ), в зависимости от знака мнимой части  $q^2$ , что соответствует временной зависимости  $e^{i\omega t}$  (1-го типа)  $e^{-i\omega t}$  (2-го типа).

Фундаментальные решения этого уравнения, зависящие только от  $r$ , имеют вид

$$\bar{v}_0(r) = \frac{e^{-iq_0 r}}{r} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{v}}_0(r) = \frac{e^{iq_1 r}}{r},$$

где

$$\begin{aligned} q = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - i\beta\omega} = \\ = \pm \left\{ \sqrt{\frac{V k^4 + \beta^2 \omega^2 + k^2}{2}} - i \sqrt{\frac{V k^4 + \beta^2 \omega^2 - k^2}{2}} \right\} = q_0 - iq_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Знаки корней выберем так, чтобы  $q_1 > 0$ . Следовательно,

$$\bar{v}_0(r) = \frac{e^{-iq_0 r}}{r} e^{-q_1 r}, \quad \bar{\bar{v}}_0(r) = \frac{e^{iq_1 r}}{r} e^{q_1 r}.$$

Условию ограниченности на бесконечности удовлетворяет только функция  $\bar{v}_0(r)$ ; функция  $\bar{\bar{v}}_0(r)$  неограниченно возрастает при  $r \rightarrow \infty$  и потому не имеет прямого физического смысла.

Объемный потенциал

$$\bar{v}(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-iq_0 R}}{4\pi R} e^{-q_1 R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}) \quad (6)$$

представляет единственное решение уравнения (4), обращающееся в нуль на бесконечности. Предел  $\bar{v}(M)$  при  $\beta \rightarrow 0$  равен

$$v(M) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{v}(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}),$$

так как при  $\beta \rightarrow 0$  имеем:  $q_0 \rightarrow k$  и  $q_1 \rightarrow 0$ . При выбранной нами временной зависимости  $e^{i\omega t}$  величина  $q_0 > 0$ , так как знак  $q_0$  связан со знаком  $q_1$  соотношением  $2q_0 q_1 = \beta\omega$ .

Если зависимость от времени взята в виде  $e^{-i\omega t}$  ( $\text{Im } q^2 > 0$ ), то положительному значению  $q_1$  будет соответствовать  $q_0 < 0$  и предел  $q_0$  при  $\beta \rightarrow 0$  равен  $-k$ .

Таким образом, дополнительным условием, позволяющим выделить решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -f,$$

соответствующее расходящимся волнам, является требование, чтобы функция  $v(M)$  являлась пределом ограниченного решения волнового уравнения с комплексным поглощением первого рода при стремлении к нулю коэффициента поглощения<sup>1)</sup>.

**3. Принцип предельной амплитуды.** С волновым уравнением

$$\Delta v + k^2 v = -f \quad (7)$$

чаще всего приходится встречаться при изучении установившихся колебаний, возбуждаемых периодическими силами (см. § 1, п. 1).

Рассмотрим уравнение колебаний с периодической правой частью

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F \quad (F = f e^{i\omega t}). \quad (8)$$

Для определенности решения к уравнению следует добавить некоторые начальные условия, например, нулевые:

$$\left. \begin{array}{l} u(M, 0) = 0, \\ u_t(M, 0) = 0. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Функция  $u(M, t)$  в начальной стадии процесса не будет строго периодической. Однако с течением времени в системе будут устанавливаться периодические колебания с частотой вынуждающей силы, т. е. решение  $u(M, t)$  примет вид

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t}, \quad (10)$$

$v(M)$  представляет предельную амплитуду колебаний, т. е.  $v(M) = \lim_{t \rightarrow \infty} u e^{-i\omega t}$ , и удовлетворяют уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f \quad \left( k = \frac{\omega}{a} \right),$$

Требование, чтобы  $v(M)$  было предельной амплитудой колебаний с нулевыми начальными данными, и представляет то дополнительное условие, которое надо присоединить к волновому уравнению для выделения единственного решения.

Таким образом, приходим к следующей задаче:

найти решение волнового уравнения  $\Delta v + k^2 v = -f$ , являющееся предельной амплитудой для решения уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f(M) e^{i\omega t} \quad (8*)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{array}{l} u(M, 0) = 0, \\ u_t(M, 0) = 0. \end{array} \right\} \quad (9)$$

<sup>1)</sup> См. А. Г. Свешников, Принцип излучения, ДАН 73, 5 (1950).

Представим предельную амплитуду в явной форме. Для этого найдем решение уравнения колебаний (8\*) с нулевыми начальными данными, пользуясь формулой

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{T_{at}^M} \frac{f(P) e^{i\omega(t - \frac{R}{a})}}{R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}),$$

полученной в главе V (§ 2, (5)). Здесь  $T_{at}^M$  — шар радиуса  $at$  с центром в точке  $M$ .

Пусть  $f(P)$  — локальная функция, отличная от нуля только внутри некоторой ограниченной области  $T_0$ . Тогда для предельной амплитуды  $v(M)$  получим выражение

$$\begin{aligned} v(M) &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(M, t) e^{-i\omega t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{T_{at}^M} \frac{e^{-ikR}}{R} f(P) d\tau_P = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{T_0} f(P) \frac{e^{-ikR}}{R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, предельная амплитуда представляется объемным потенциалом, определяемым главным решением  $e^{-ikR}/R$ , которое соответствует расходящимся волнам  $e^{i(\omega t - kR)}/R$ .

Принцип предельной амплитуды приводит математически к тому же результату, что и принцип предельного поглощения. Это и естественно, так как оба эти принципа выделяют решение, соответствующее расходящимся волнам.

**4. Условия излучения.** В предшествующих пунктах были рассмотрены общие физические основания, позволяющие найти решение волнового уравнения, соответствующее расходящимся волнам. Однако такой путь требовал обращения к решениям вспомогательных задач. Установим теперь аналитическое условие, характеризующее расходящуюся волну и выраженное непосредственно в терминах изучаемого решения волнового уравнения.

Плоские волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{u} &= f\left(t - \frac{x}{a}\right) — \text{прямая волна (идущая в положительном направлении оси } x); \\ \bar{\bar{u}} &= f\left(t + \frac{x}{a}\right) — \text{обратная волна (идущая в отрицательном направлении оси } x). \end{aligned}$$

Прямая волна характеризуется соотношением

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0,$$

обратная волна — соотношением <sup>1)</sup>)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0.$$

Для установившегося режима

$$u = v(x) e^{i\omega t}$$

эти соотношения принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + ik\bar{v} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - ik\bar{v} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{для прямой волны,} \\ \left( k = \frac{\omega}{a} \right) \text{для обратной волны.} \end{array} \quad (12)$$

Перейдем теперь к случаю сферических волн. Если сферическая волна возбуждается источниками, расположенными в ограниченной части пространства, то на больших расстояниях от источников сферическая волна подобна плоской волне, амплитуда которой убывает как  $1/r$ . Отсюда естественно считать, что расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять соотношению <sup>2)</sup>)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (13)$$

аналогично для сходящейся сферической волны

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (14)$$

Для амплитуды установившихся колебаний эти условия принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{для расходящихся сферических волн,} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{для сходящихся сферических волн.} \quad (16)$$

Соотношения (15) и (16) мы получили, предполагая, что на больших расстояниях всякая расходящаяся волна подобна плоской волне, амплитуда которой убывает как  $1/r$ . Убедимся в правильности этого утверждения.

<sup>1)</sup> Написанные соотношения представляют уравнения с частными производными 1-го порядка, решения которых имеют вид прямой и обратной волн.

<sup>2)</sup> В дальнейшем мы пользуемся двумя обозначениями:  $O(\xi)$  — величина, убывающая как  $\xi \rightarrow 0$ ,  $o(\xi)$  — величина более высокого порядка малости, чем  $\xi$  при  $\xi \rightarrow 0$ .

1. В случае точечного источника, находящегося в начале координат, это утверждение совершенно очевидно, поскольку сама волна имеет вид

$$u(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} = v_0(r) e^{i\omega t},$$

так что

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Пусть сферическая волна возбуждается точечным источником, находящимся в некоторой точке  $M_0$ . Амплитуда сферической волны равна

$$v_0(M) = \frac{e^{-ikR}}{R},$$

где  $R$  — расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ , равное (рис. 82)

$$R = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \theta}.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho_0 \cos \theta}{R} \approx 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

В силу пункта 1

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{R}\right).$$

Проверим справедливость формулы (15):

$$\mathcal{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (15')$$

В самом деле,

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial v_0}{\partial R} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

так как

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} \cdot O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда и из пункта 1 следует:

$$\mathcal{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

что и требовалось доказать.

3. Покажем, что объемный потенциал

$$v(M) = \int_{\tilde{r}} f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}) \quad (16').$$

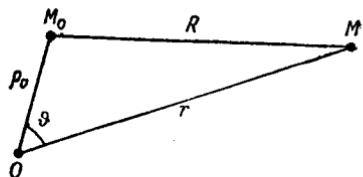


Рис. 82.

удовлетворяет условию (15). Очевидно, что

$$\mathcal{L}(v) = \int_T f(P) \mathcal{L}\left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right) d\tau_P = \int_T f(P) o\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Формула (11) представляет амплитуду расходящейся волны, возбуждаемой источниками, произвольно распределенными внутри ограниченной части пространства  $T$ . Мы видели, что функция  $v(M)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f(M)$$

и стремится к нулю как  $1/r$  на бесконечности; кроме того, как было показано, для нее на бесконечности выполняется соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

являющееся необходимым дополнительным условием.

Покажем, что

*существует единственное решение волнового уравнения*

$$\Delta v + k^2 v = -f(M),$$

где  $f(M)$  — локальная функция, удовлетворяющая на бесконечности условиям

$$\left. \begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \right\}^1 \quad (\alpha)$$

Допуская существование двух различных решений  $v_1$  и  $v_2$ , получаем, что их разность

$$w = v_1 - v_2$$

удовлетворяет однородному уравнению и условию ( $\alpha$ ). Пусть  $\Sigma_R$  — сфера радиуса  $R$ , который мы в дальнейшем устремим в бесконечность. Пользуясь основной формулой Грина для функций  $w(M)$  и  $v_0(M) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$ , будем иметь в точке  $M_0$ , лежащей внутри  $\Sigma$ ,

$$w(M_0) = \int_{\Sigma_R} \left( v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) d\sigma.$$

<sup>1)</sup> И. Н. Векуа показано, что первое из приведенных здесь двух условий является следствием второго; см. И. Н. Векуа, Труды Тб. Матем. ин-та 12 (1943).

Условие (а) для  $v_0(r)$  и  $w(M)$  дает:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} &= v_0 \left[ -ikw + o\left(\frac{1}{r}\right) \right] - w \left[ -ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right] = \\ &= v_0 o\left(\frac{1}{r}\right) - w o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$w(M_0) = \int_{\Sigma_R} o\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

откуда и следует, в силу произвольности точки  $M_0$ , единственность решения нашей задачи.

Условия

$$\left. \begin{array}{l} v = O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \end{array} \right\} \quad (\alpha)$$

часто называют **условиями излучения** или **условиями Зоммерфельда**.

Следует отметить, что для неограниченных областей, не совпадающих со всем пространством, условия на бесконечности могут иметь форму, отличную от условий Зоммерфельда.

Таким образом, соотношения (α) представляют аналитическую форму условий излучения для неограниченного пространства и не основаны на физическом принципе, который позволил бы сформулировать эти условия для областей более сложной формы.

Условия излучения, получающиеся при введении в волновое уравнение бесконечно малого комплексного поглощения, впервые были использованы В. С. Игнатовским<sup>1)</sup>. Принцип введения бесконечно малого комплексного поглощения легко применим для неограниченных областей различной формы и для более сложных задач.

Для задач на плоскости, связанных с уравнением

$$\Delta_2 v + k^2 v = 0, \quad (17)$$

условия излучения на бесконечности принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} v = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + ikv \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (18)$$

<sup>1)</sup> В. С. Игнатовский, Ann. d. Phys. 18 (1905).

Простейшими решениями этого уравнения являются функции Ханкеля нулевого порядка  $H_0^{(1)}(kr)$  и  $H_0^{(2)}(kr)$  (см. Дополнение II, ч. I, § 3).

Из асимптотических формул

$$H_v^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} [1 + O(\frac{1}{r})],$$

$$H_v^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} [1 + O(\frac{1}{r})]$$

и рекуррентных соотношений

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx} = -H_1^{(1)}(x), \quad \frac{dH_0^{(2)}}{dx} = -H_1^{(2)}(x)$$

видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция  $H_0^{(2)}(kr)$ .

Таким образом, функция  $H_0^{(2)}(kr)$  удовлетворяет уравнению (17), условиям излучения (18) и имеет логарифмическую особенность при  $r = 0$ . Поэтому функция  $H_0^{(2)}(kr)$ , как уже отмечалось в § 2, играет роль функции точечного источника для волнового уравнения (7) в случае двух независимых переменных. Решение неоднородного уравнения

$$\Delta_2 v + k^2 v = -f$$

выражается формулой

$$v(M) = -\frac{i}{4} \iint_S H_0^{(2)}(kR_{MP}) f(P) d\sigma_P,$$

где  $S$  — область, в которой функция  $f$  отлична от нуля.

#### § 4. Задачи математической теории дифракции

**1. Постановка задачи.** Распространение волновых процессов (электромагнитных, упругих, акустических и т. д.) сопровождается целым рядом типичных явлений (дифракция, преломление, отражение и т. д.). Решение задач, связанных с этими явлениями, проводится непосредственно или имеет много общего с решением волнового уравнения в неоднородной среде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 v = -\tilde{f} \quad (p > 0), \quad (1)$$

где  $p$  и  $\rho$  — параметры среды.

Наибольший интерес с точки зрения физических приложений представляет случай кусочно-постоянных параметров  $p$  и  $\rho$ . Соответствующая математическая задача состоит в следующем.

В неограниченном пространстве имеется ряд ограниченных областей  $T_i$  с постоянными параметрами  $p_i$  и  $\rho_i$ ; часть пространства  $T_0$ , внешняя по отношению к областям  $T_i$ , также однородна ( $p_0 = \text{const}$ ,  $\rho_0 = \text{const}$ ). Волновое уравнение внутри каждой области  $T_i$  принимает обычный вид

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = -f_i \quad \text{в } T_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2)$$

где  $v_i$  — значение искомой функции  $v$  внутри  $T_i$ ,

$$k_i^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{p_i}, \quad f_i = \frac{\tilde{f}}{p_i}$$

в области  $T_i$ . На поверхностях  $\Sigma_i$ , ограничивающих области  $T_i$ <sup>1)</sup> дифференциальные уравнения заменяются условиями сопряжения

$$\left. \begin{aligned} v_i &= v_0 && \text{на } \Sigma_i, \\ p_i \frac{\partial v_i}{\partial n} &= p_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} && \text{на } \Sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На бесконечности функция  $v_0$ , являющаяся решением волнового уравнения  $\Delta v + k_0^2 v = -f_0$  в  $T_0$ , должна удовлетворять условиям излучения

$$\left. \begin{aligned} v_0(M) &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ниже будет показана достаточность условий сопряжения и условий излучения для однозначного определения функции  $v$  во всем пространстве. Поставленная выше задача является простейшей задачей математической теории дифракции.

**2. Единственность решения задачи дифракции.** Докажем, что задача математической теории дифракции, сформулированная в п. 1, имеет единственное решение. Для упрощения записи будем предполагать, что однородность среды нарушается только одним телом  $T_1$ , ограниченным замкнутой поверхностью  $\Sigma_1$ , вне которой расположена область  $T_0$ . При этом мы не делаем предположения об односвязности области  $T_1$ .

Докажем следующую теорему:

может существовать только одна функция, удовлетворяющая:  
а) уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_0(v_0) &= \Delta v_0 + k_0^2 v_0 = -f_0 && \text{в } T_0, \\ \mathcal{L}_1(v_1) &= \Delta v_1 + k_1^2 v_1 = -f_1 && \text{в } T_1; \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

<sup>1)</sup> При этом мы рассматриваем для простоты тот случай, когда неоднородности  $T_i$  имеют общую границу только с окружающей средой.

б) условиям сопряжения на поверхности  $\Sigma_1$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ p_1 \frac{\partial v_1}{\partial v} &= p_0 \frac{\partial v_0}{\partial v}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

в) условиям излучения на бесконечности

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Допускается существование двух различных решений

$$\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_0\} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{v}} = \{\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_0\},$$

получаем, что их разность

$$w = \{w_1, w_0\},$$

где

$$w_1 = \bar{v}_1 - \bar{\bar{v}}_1, \quad w_0 = \bar{v}_0 - \bar{\bar{v}}_0$$

удовлетворяет однородным уравнениям и прежним дополнительным условиям

$$\mathcal{L}_0(w_0) = 0 \quad \text{в } T_0, \quad \mathcal{L}_1(w_1) = 0 \quad \text{в } T_1, \quad (2^*)$$

$$w_1 = w_0, \quad p_1 \frac{\partial w_1}{\partial v} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial v} \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (3^*)$$

$$w_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4^*)$$

Для функций  $w_0^*, w_1^*$ , комплексно-сопряженных к функциям  $w_0$  и  $w_1$ , очевидно, будут удовлетворяться однородные уравнения  $(2^*)$ , условия  $(3^*)$  и условия излучения

$$w_0^* = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - ikw_0^* = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (4^{**})$$

Пусть  $\Sigma_R$  — сфера достаточно большого радиуса  $R$ , охватывающая область  $T_1$ , и  $T_R$  — область, ограниченная поверхностями  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_R$ .

Применяя формулу Грина к функциям  $w_1$ ,  $w_1^*$  в области  $T_1$  и  $w_0$ ,  $w_0^*$  в области  $T_R$ , получаем:

$$\int_{T_1} (w_1 \mathcal{L}_1(w_1^*) - w_1^* \mathcal{L}_1(w_1)) d\tau = \int_{\Sigma_1} \left( w_1 \frac{\partial w_1^*}{\partial v_1} - w_1^* \frac{\partial w_1}{\partial v_1} \right) d\sigma = 0,$$

$$\int_{T_R} [w_0 \mathcal{L}_0(w_0^*) - w_0^* \mathcal{L}_0(w_0)] d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_1} \left( w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial v_0} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial v_0} \right) d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left( w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial v_0} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial v_0} \right) d\sigma = 0,$$

где  $\mathbf{v}_0$  — нормаль внешняя к области  $T_R$ ,  $\mathbf{v}_1$  — нормаль, внешняя к области  $T_1$ .

Очевидно,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1}$  на  $\Sigma_1$ .

Умножая первое равенство на  $p_1$ , второе на  $p_0$ , складывая их и пользуясь условиями сопряжения (3\*), находим:

$$\int_{\Sigma_R} \left( w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) d\sigma = 0.$$

Выражая из условий излучения производные

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial r} = ikw_0^* + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} = -ikw_0 + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

приходим к следующему равенству:

$$2ik \int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left[ w_0 o\left(\frac{1}{R}\right) - w_0^* o\left(\frac{1}{R}\right) \right] d\sigma = 0.$$

Второй интеграл при  $R \rightarrow \infty$  стремится к нулю, поэтому

$$\int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* d\sigma = \int_{\Sigma_R} |R w_0|^2 d\Omega \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad (d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi). \quad (5)$$

В Дополнении II, ч. II, § 4 показано, что функция

$$V_m(r, \theta, \varphi) = \xi_m^{(2)} Y_m(\theta, \varphi),$$

где

$$\xi_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho) \quad (\rho = k_0 r),$$

и  $Y_m(\theta, \varphi)$  — сферическая функция  $m$ -го порядка, удовлетворяет волновому уравнению

$$\mathcal{L}_0(V_m) = \Delta V_m + k_0^2 V_m = 0$$

и условию излучения

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} + ik_0 V_m = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Применим формулу Грина в области  $T_R$  к функциям  $w_0$  и  $V_m$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{T_R} [w_0 \mathcal{L}(V_m) - V_m \mathcal{L}(w_0)] d\tau = \\ &= \int_{\Sigma_1} \left( w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \mathbf{v}} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{v}} \right) d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left( w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \mathbf{v}} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{v}} \right) d\sigma = I_1 + I_R. \end{aligned}$$

Второе слагаемое  $I_R$  в силу условий излучения стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  (см. теорему § 3, п. 4). Так как первый интеграл  $I_1$  не зависит от  $R$ , то

отсюда следует, что  $I_1 = 0$  и, следовательно,  $I_R = 0$  при любом  $R$ , т. е.

$$\frac{d\zeta_m^{(2)}(k_0 r)}{dr} \Big|_{r=R} \cdot \int_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi) d\Omega - \zeta_m^{(2)} \Big|_{r=R} \cdot \int_{\Sigma_R} \frac{\partial w_0}{\partial r} Y_m(\theta, \varphi) d\Omega = 0.$$

Если обозначить

$$\int_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi) d\Omega = \alpha_m(k_0 R),$$

то можно написать:

$$\zeta_m^{(2)'}(k_0 R) \alpha_m(k_0 R) - \alpha_m'(k_0 R) \zeta_m^{(2)}(k_0 R) = 0,$$

откуда находим

$$\alpha_m(k_0 R) = \alpha_m \zeta_m^{(2)}(k_0 R),$$

где  $\alpha_m$  — постоянный множитель.

Условие полноты сферических функций

$$\int_{\Sigma_R} |R w_0|^2 d\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} R^2 \alpha_m^2(k_0 R) \quad (6)$$

и формула (5) дают:

$$R \alpha_m(k_0 R) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Однако согласно асимптотической формуле

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) \approx \frac{1}{\rho} e^{-i\left(\rho - \frac{m+1}{2}\pi\right)},$$

произведение  $r \zeta_m^{(2)}(k_0 r)$  остается по модулю больше некоторого положительного числа при больших значениях  $r$ ; следовательно,  $\alpha_m = 0$ , т. е.  $\alpha_m(k_0 R) = 0$ ; отсюда в силу уравнения замкнутости (6) вытекает, что  $w_0 = 0$  на сфере  $\Sigma_{r_0}$ . Таким образом, если сфера  $\Sigma_{r_0}$  некоторого радиуса  $r_0$  охватывает область  $T_1$ , то вне этой сферы функция  $w = 0$ . Отсюда в силу аналитичности<sup>1)</sup> решения уравнения  $\mathcal{L} = 0$  заключаем, что функция  $w_0 = 0$  всюду в области  $T_0$ . Далее, из условий сопряжения следует, что на поверхности  $\Sigma_1$

$$w_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_1}{\partial v_1} = 0. \quad (7)$$

Основная формула Грина, примененная в области  $T_1$  к функции  $w_1$ , показывает, что

$$w_1(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left[ \frac{e^{-ik_1 R}}{R} \frac{\partial w_1(P)}{\partial v_1} - w_1(P) \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{e^{-ik_1 R}}{R} \right) \right] d\sigma = 0, \quad (8)$$

где  $R = R_{M P}$ , в любой точке  $M$  области  $T_1$ .

Итак мы убедились, что  $w(M) = 0$  во всем пространстве; это и доказывает теорему единственности.

<sup>1)</sup> Аналитичность функции  $w$  в области  $T_1$  следует из формулы (7) § 2 для комплексного значения  $x = ik$  и для поверхности  $\Sigma$ , целиком лежащей внутри  $T_1$ .

**3. Дифракция на сфере.** 1. Практически важным классом решений уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

являются плоские волны. Плоской волной, распространяющейся в каком-нибудь заданном направлении, называется решение, зависящее от времени и от одной пространственной координаты, отсчитываемой в направлении распространения. Например, плоская волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$ , удовлетворяет уравнению с двумя независимыми переменными

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

и имеет вид

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

В случае установившегося режима, когда зависимость от времени определяется множителем  $e^{i\omega t}$ , плоская волна имеет вид

$$u(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad (9)$$

где  $k = \omega/a$  — волновое число,  $|A|$  — амплитуда.

Плоская волна, распространяющаяся в направлении  $\vec{l}$ , где  $\vec{l}(l_x, l_y, l_z)$  — единичный вектор, может быть записана следующим образом:

$$u(x, y, z, t) = A e^{i[\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z)]} = A e^{i[\omega t - k\vec{l}r]}. \quad (10)$$

Функции

$$v(x) = A e^{-ikx}, \quad v(x, y, z) = A e^{-ik\vec{l}r}, \quad (11)$$

являющиеся решениями волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad (12)$$

обычно называются плоскими волнами.

В математической теории дифракции обычно изучаются возмущения поля в однородной среде, создаваемые наличием включений  $T_i$ , нарушающих однородность среды. Пусть  $\bar{v}(M)$  — поле в однородной среде, создаваемое заданными источниками, которые мы считаем расположеннымными вне области  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ); в частности, это могут быть достаточно удаленные источники, вызывающие появление плоских волн,

$$\bar{v}(x, y, z) = A e^{-ik\vec{l}r}. \quad (13)$$

Действительное поле  $v_0$ , имеющее место в области  $T_0$  при наличии неоднородностей, можно представить в виде суммы

$$v_0(M) = w_0(M) + \bar{v}_0(M),$$

где  $\bar{v}_0(M)$  — «падающая волна»,  $w_0(M)$  — дифрагированная или отраженная волна, представляющая возмущение внешнего поля  $\bar{v}$  неоднородностями  $T_i$ .

Будем искать в области  $T_0$  дифрагированное поле  $w_0(M)$ , а внутри  $T_i$  — «преломленное поле»  $v_i$ . Установим условия, определяющие искомые функции  $w_0$  и  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

а) функции  $w_0$  и  $v_i$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta w_0 + k_0^2 w_0 = 0 \quad \text{в } T_0, \quad (14)$$

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = 0 \quad \text{в } T_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

б) на границах раздела  $\Sigma_i$  областей  $T_i$  и  $T_0$  выполняются следующие условия сопряжения:

$$v_i = w_0 + \bar{v}_0 \quad \text{на } \Sigma_i, \quad (15)$$

где  $\bar{v}_0$  — заданная функция,

$$p_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} + f_i \quad \text{на } \Sigma_i, \quad (16)$$

где  $f_i = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \nu}$  — заданная функция;

в) отраженная волна  $w_0(M)$  на бесконечности ведет себя, как расходящаяся сферическая волна, т. е. удовлетворяет условию излучения

$$w_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Рассмотрим более подробно дифракцию плоской волны на сфере<sup>1)</sup>. Пусть в направлении оси  $z$  из бесконечности падает плоская волна

$$\bar{v}_0 = Ae^{-ikz} \quad (17)$$

на шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. Ищем отраженное и преломленное поля в виде разложения по сферическим функциям;  $\bar{v}_0$  и  $f = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}$ , входящие в правые части условий сопряжения, разложим по сферическим функциям.

Положим  $z = r \cos \theta$ ; тогда можно воспользоваться следующим разложением плоской волны по сферическим функциям:

$$e^{-ikr \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \psi_m(kr) P_m(\cos \theta), \quad (18)$$

где

$$\psi_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{m+\frac{1}{2}}(kr),$$

а  $J_{m+\frac{1}{2}}(kr)$  — функция Бесселя первого рода  $(m + \frac{1}{2})$ -го порядка,  $P_m(\cos \theta)$  — полином Лежандра  $m$ -го порядка. В самом деле, слева стоит решение волнового уравнения, зависящее только от  $z$ . Всякое решение волнового уравнения может быть представлено как сумма произведений сферических функций на  $\psi_m(kr)$ . Поскольку в нашем случае левая часть (18) обладает зональной симметрией, то

$$e^{-ikr \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(kr) P_m(\cos \theta), \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Аналогичные методы часто используются в квантовой механике в задачах о рассеянии частиц.

где  $C_m$  — неопределенные пока коэффициенты. Пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра и их нормой (см. Дополнение II, ч. II), получаем:

$$C_m \psi_m(\rho) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 e^{-i\rho\xi} P_m(\xi) d\xi \quad (20)$$

$(\rho = kr, \xi = \cos \theta).$

Найдем первый член асимптотического представления для интеграла, стоящего в правой части; сравнение его с первым членом асимптотического разложения функции  $\psi_m(\rho)$  позволит нам определить коэффициент  $C_m$ . Проинтегрируем  $m$  раз по частям, интегрируя каждый раз  $e^{-i\rho\xi}$  и дифференцируя  $P_m(\xi)$ . В результате получим разложение интеграла по степеням  $1/\rho$ . Сохраняя только первый член разложения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi) d\xi &\cong \frac{1}{-i\rho} [e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)]_{-1}^{+1} = \\ &= \frac{1}{-i\rho} (e^{-i\rho} P_m(1) - e^{i\rho} P_m(-1)) = \frac{1}{-i\rho} (e^{-i\rho} - (-1)^m e^{i\rho}) = \\ &= \frac{1}{-i\rho} (e^{-i\rho} - e^{-im\pi} e^{i\rho}) = \\ &= \frac{e^{-im\frac{\pi}{2}}}{-i\rho} \left[ e^{-i\left(\rho-m\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(\rho-m\frac{\pi}{2}\right)} \right] = 2(-i)^m \frac{\sin\left(\rho-\frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}. \end{aligned}$$

С другой стороны, как известно (см. Дополнение II, ч. I, § 1),

$$\psi_m(\rho) \cong \frac{\sin\left(\rho-\frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

Сравнивая эти выражения, находим из (20):

$$C_m = (2m+1)(-i)^m, \quad (21)$$

что и доказывает формулу (18).

Из (17) следует:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_0|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos \theta); \\ a_m &= A(2m+1)(-i)^m \psi_m(k_0 R); \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_m(\cos \theta); \\ b_m &= Ak_0 p_0 (2m+1)(-i)^m \psi'_m(k_0 R). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Отраженное и преломленное поля являются решениями волнового уравнения и, так же как и падающее поле, обладают зональной симметрией.

Поэтому функции  $v_1$  и  $w_0$  мы ищем в виде

$$v_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m(k_1 r) P_m(\cos \theta), \quad (24)$$

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \zeta_m(k_0 r) P_m(\cos \theta), \quad (25)$$

$$\zeta_m(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(r). \quad (26)$$

Перейдем теперь к определению коэффициентов разложения  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ . Пользуясь условием сопряжения и сравнивая коэффициенты при  $P_m(\cos \theta)$ , получаем:

$$\alpha_m \psi_m(k_1 R) - \beta_m \zeta_m(k_0 R) = a_m = A(2m+1)(-i)^m \psi_m(k_0 R),$$

$$p_1 k_1 \alpha_m \psi'_m(k_1 R) - p_0 k_0 \beta_m \zeta'_m(k_0 R) = b_m = A k_0 p_0 (2m+1)(-i)^m \psi'_m(k_0 R),$$

откуда

$$\alpha_m = A(2m+1)(-i)^m \frac{p_0 k_0 [\psi_m(k_0 R) \zeta'_m(k_0 R) - \zeta_m(k_0 R) \psi'_m(k_0 R)]}{p_0 k_0 \psi_m(k_1 R) \zeta'_m(k_0 R) - p_1 k_1 \psi'_m(k_1 R) \zeta_m(k_0 R)}, \quad (27)$$

$$\beta_m = A(2m+1)(-i)^m \frac{p_1 k_1 \psi_m(k_0 R) \psi'_m(k_1 R) - p_0 k_0 \psi'_m(k_0 R) \psi_m(k_1 R)}{p_0 k_0 \psi_m(k_1 R) \zeta'_m(k_0 R) - p_1 k_1 \psi'_m(k_1 R) \zeta_m(k_0 R)}. \quad (28)$$

3. Рассмотрим в качестве примера задачу о рассеянии звука твердым сферическим препятствием. Пусть на абсолютно твердую и неподвижную сферу радиуса  $R$  с центром в начале координат падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в направлении оси  $z$ . Звуковое давление  $p(x, y, z, t)$ , как было установлено в главе II, § 1, удовлетворяет уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \Delta p, \quad a^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0},$$

где  $a$  — скорость звука,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $p_0$  и  $\rho_0$  — давление и плотность среды в невозмущенном состоянии.

Давление в падающей плоской волне дается функцией

$$\bar{p}_0 = A e^{-i(\omega t - kz)} \left( k = \frac{\omega}{a} \right),$$

где  $A$  — постоянная.

Рассматривая установившийся процесс

$$p(x, y, z, t) = p(x, y, z) e^{-i\omega t},$$

получаем для  $p(x, y, z)$  волновое уравнение

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

На поверхности сферы  $S_R$  в силу ее абсолютной твердости должна равняться нулю нормальная составляющая скорости  $u$ . Проекция скорости на направление нормали  $n$  связана с давлением следующим уравнением:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n},$$

которое в стационарном случае дает

$$u_n = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

Отсюда получаем граничное условие

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_R} = 0.$$

Полагая  $p = \bar{p}_0 + w$ , где  $w(x, y, z)$  — давление рассеянной волны, получаем для определения  $w$  следующие условия:

а) функция  $w(x, y, z)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta w + k^2 w = 0;$$

б) на поверхности сферы  $S_R$  выполняется граничное условие

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{S_R} = - \left. \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial n} \right|_{S_R};$$

в) рассеянная волна  $w$  ведет себя на бесконечности, как расходящаяся сферическая волна, т. е. удовлетворяет условию излучения при  $r \rightarrow \infty$ ,

$$w(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + ikw = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Нетрудно видеть, что эта задача является частным случаем рассмотренной выше задачи дифракции и соответствует значению параметра  $p_1 = 0$ . Полагая в формулах (25) и (28)  $p_1 = 0$ , получаем:

$$\beta_m = -A(2m+1)(-i)^m \frac{\psi'_m(k_0 R)}{\zeta'_m(k_0 R)} \quad (29)$$

и

$$w = -A \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \frac{\psi'_m(k_0 R)}{\zeta'_m(k_0 R)} \zeta_m(k_0 r) P_m(\cos \theta). \quad (30)$$

Если длина волны велика по сравнению с размерами шара, т. е.  $k_0 R \ll 1$ , то в формуле (29) можно воспользоваться разложениями функций  $\psi_m(kR)$  и  $\zeta_m(kR)$  в ряды, которые следуют из разложений функций  $J_{m+\frac{1}{2}}(kR)$  и  $H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR)$  по степеням малого аргумента  $kR$  (см. Дополнение II, ч. I, §§ 1 и 3):

$$\psi_0(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} \left( \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{5/2}}{\Gamma(5/2)} \right), \quad \psi_1(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{3/2}}{\Gamma(5/2)},$$

$$\zeta_0(kR) \cong i \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} \frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}; \quad \zeta_1(kR) \cong -i \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} \frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}.$$

Так как

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(5/2) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi},$$

то получаем:

$$\psi_0(kR) \cong 1 - \frac{(kR)^2}{6}, \quad \psi_1(kR) \cong \frac{kR}{3},$$

$$\zeta_0(kR) \cong \frac{i}{kR}, \quad \zeta_1(kR) \cong \frac{i}{(kR)^2},$$

откуда следует

$$\psi'_0(kR) \cong -\frac{kR}{3}, \quad \psi'_1(kR) \cong \frac{1}{3},$$

$$\zeta'_0(kR) \cong -\frac{i}{(kR)^2}, \quad \zeta'_1(kR) \cong -\frac{2i}{(kR)^3}.$$

Подставляя в формулу (29) найденные выражения для  $\psi'_m$  и  $\zeta'_m$ , находим:

$$\beta_0 = i \frac{A}{3} (kR)^3, \quad \beta_1 = -\frac{A}{2} (kR)^3.$$

Нетрудно видеть, что следующие коэффициенты пропорциональны  $(kR)^5$ , поэтому при рассеянии длинных волн ( $kR \ll 1$ ) возмущение  $w$  приближенно представляется двумя первыми членами ряда (30)

$$\left. \begin{aligned} w &\cong \beta_0 \zeta_0(kr) + \beta_1 \zeta_1(kr) \cos \theta \\ [P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

На больших расстояниях от возмущающей сферы ( $kr \gg 1$ ) в так называемой « дальней » или « волновой » зоне для функций  $\zeta_0(kr)$  и  $\zeta_1(kr)$  имеем асимптотические представления

$$\zeta_0(kr) \cong \frac{i}{kr} e^{-ikr}, \quad \zeta_1(kr) \cong -\frac{1}{kr} e^{-ikr}, \quad (32)$$

которые вытекают из асимптотических представлений функций Ханкеля.

Подставляя в формулу (31) выражения (32) для  $\zeta_0(kr)$  и  $\zeta_1(kr)$  и заменя  $\beta_0$  и  $\beta_1$  их приближенными значениями, получим:

$$w \cong -\frac{Ak^2 R^3}{3r} \left( 1 - \frac{3}{2} \cos \theta \right) e^{-ikr}. \quad (33)$$

Обратимся теперь к вычислению интенсивности рассеянной волны; эта величина определяется как среднее значение потока энергии (вектора Умова), равного произведению избыточного звукового давления  $w$  на скорость  $u$ , причем под  $w$  и  $u$  следует понимать действительные части соответствующих выражений. В нашем случае

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 \cos(\omega t - kr), \\ u &= u_0 \cos(\omega t - kr), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где  $w_0$  и  $u_0$  — соответствующие амплитуды.

Вычислим интенсивность звука  $I$  в волновой зоне, сохраняя при этом главные члены асимптотических разложений,

$$I = \frac{u_0 w_0}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kr) dt = \frac{u_0 w_0}{2} \quad \left( T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ — период} \right).$$

Из уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial r}$$

и формулы (34) находим:

$$u_0 = \frac{w_0}{ap}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{w_0^2}{2ap} = \frac{A^2 k^4 R^6}{18apr^2} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta\right)^2.$$

Обозначая мощность, рассеянную сферой в конус  $d\theta$ , через

$$2\pi r^2 \Sigma(\theta) \sin \theta d\theta,$$

будем иметь:

$$\Sigma(\theta) = \frac{A^2 k^4 R^6}{18ap} \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta\right)^2.$$

Полярная диаграмма интенсивности рассеянного шаром звука приведена

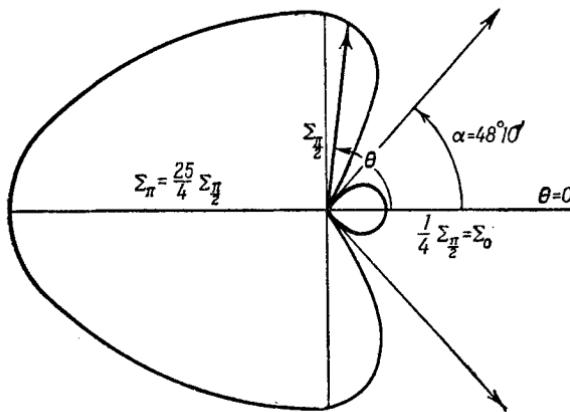


Рис. 83.

на рис. 83 (масштабы не соблюдены). Если

$$\cos \theta = +\frac{2}{3}, \quad \theta = \alpha = 48^\circ 10',$$

то в направлении  $\theta = \alpha$  рассеяние отсутствует.

## ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

1. Найти функцию влияния стационарного точечного источника газа, предполагая, что газ распадается в процессе диффузии. Решить задачу для диффузии в пространстве и на плоскости.

2. Решить ту же задачу в полуплоскости  $y > 0$ , считая, что при  $y = 0$  концентрация равна нулю.

3. а) Решить внутреннюю и внешнюю задачи для уравнения

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0,$$

если на сфере  $r = r_0$  задано граничное условие  $u|_{r=r_0} = A \cos \theta$ .

В случае внешней задачи сформулировать условия на бесконечности, обеспечивающие единственность решения.

Рассмотреть аналогичные задачи, предполагая, что

$$u|_{r=r_0} = F(\theta).$$

б) Решить аналогичные задачи для уравнения с двумя независимыми переменными, когда граничные условия заданы на окружности радиуса  $r_0$  и имеют вид

$$u|_{r=r_0} = A \cos \varphi$$

и, соответственно,

$$u|_{r=r_0} = F(\varphi).$$

4. Решить задачи 3 а), б) для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

В случае внутренней задачи исследовать вопрос о том, при каких значениях  $r_0$  существует единственное решение ( $k$  считать заданным).

Сформулировать условия, гарантирующие единственность решения как для двух, так и для трех независимых переменных.

5. На глубине  $h$  под поверхностью земли находится среда, в которой с постоянной плотностью распределено радиоактивное вещество. Найти концентрацию эманации, считая, что концентрация ее на поверхности равна нулю.

6. Найти собственные частоты мембранны, имеющей форму кольца, радиусы которого равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ), считая что  $v|_{r=a} = 0$  и  $v|_{r=b} = 0$ . Показать, что предел первого собственного значения при  $a \rightarrow 0$  равен первому собственному значению круглой мембранны радиуса  $b$  с закрепленной границей.

7. Найти собственные колебания и собственные частоты для эндовибратора цилиндрической формы, считая стенки эндовибратора идеально проводящими. Рассмотреть ту же задачу в акустической интерпретации.

*Указание.* В случае электромагнитных колебаний ввести поляризационный потенциал (см. приложение I к гл. VII).

8. Определить электромагнитное поле точечного диполя в неограниченном пространстве, считая, что величины поля пропорциональны  $e^{i\omega t}$ . Исследовать асимптотическое поведение решения на больших расстояниях (в волновой зоне). Решить ту же задачу для диполя, находящегося над идеально проводящей поверхностью (вертикальный диполь).

*Указание.* Ввести поляризационный потенциал.

9. Поставить задачу о распространении электромагнитных волн внутри бесконечного цилиндрического радиоволновода произвольного сечения с идеально проводящими стенками. Рассмотреть волну электрического типа, распространяющуюся вдоль круглого цилиндрического волновода и имеющую наибольшую длину. Найти поле, вычислить поток энергии через сечение, перпендикулярное к основанию (см. приложение I к гл. VII).

10. Решить неоднородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f$$

в неограниченной цилиндрической области круглого сечения, на поверхности которой имеют место однородные граничные условия первого рода или второго рода, и построить функцию источника (см. приложение II к гл. VII).

11. Построить функцию источника в случае первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

- а) в полупространстве  $z > 0$ ;
- б) на полуплоскости  $y > 0$ ;
- в) внутри слоя  $-l \leq z \leq l$ .

12. Решить задачу о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном идеально проводящем цилиндре. Решить эту же задачу в акустической интерпретации.

13. Найти собственные электромагнитные колебания сферического эндовибратора с идеально проводящими стенками. Рассмотреть случаи колебаний типа  $TE$  и  $TM$  (см. приложение II к гл. VII).

14. Найти собственные электромагнитные колебания эндовибратора, представляющего собой область, заключенную между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров.

*Указание.* Для поляризационного потенциала  $\Pi_{n,m}$  воспользоваться формулой, аналогичной формуле (14) приложения II к гл. VII.

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

### I. Волны в цилиндрических трубах

1. При конструировании различного рода радиоустановок приходится решать важную задачу о передаче электромагнитной энергии от передатчика к передающей антенне или, наоборот, от антенны к приемнику. Вопросы трансляции электромагнитной энергии встречаются также и в ряде других практических задач современной радиотехники.

До последнего времени эта задача удовлетворительно решалась с помощью двухпроводной линии, представляющей собой два металлических провода, между которыми распространяется электромагнитная волна. Но оказывается, что наряду с недостатками, свойственными вообще передающим линиям, такая двухпроводная линия излучает электромагнитную энергию, причем это излучение увеличивается с повышением частоты радиоволн. Поэтому такой вид передающей линии становится мало удобным в области ультракоротких радиоволн.

В последние годы в технике ультракоротких (сантиметровых и дециметровых) радиоволн для передачи энергии применяются совершенно другие передающие устройства — полые металлические трубы (радиоволноводы), внутри которых происходит распространение радиоволн. Такие передающие устройства, обладая малыми потерями, являются очень удобными линиями передач<sup>1)</sup>.

Математическая теория распространения радиоволн по трубам была заложена еще Рэлеем, изучавшим распространение акустических волн в трубах. Интенсивное развитие теория радиоволноводов получила в последние годы, особенно в работах

<sup>1)</sup> Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, ч. I, Гостехиздат, 1946.

советских ученых. В настоящее время свойства круглого, прямоугольного и других типов волноводов изучены достаточно хорошо.

Рассмотрим сначала свойства радиоволноводов произвольного поперечного сечения, а затем проиллюстрируем их на ряде конкретных примеров. Итак, рассмотрим цилиндрическую трубу, неограниченно простирающуюся вдоль оси  $z$ . Будем предполагать стенки трубы идеально проводящими. Обозначим  $\Sigma$  — поверхность,  $S$  — поперечное сечение трубы и  $C$  — контур, ограничивающий это сечение. Предположим, что: 1) характеристики среды, заполняющей такой волновод,  $\varepsilon$  и  $\mu$  равны 1,  $\sigma = 0$ ; 2) внутри волновода отсутствуют источники поля; 3) поля периодически меняются по закону  $e^{-i\omega t}$ .

Уравнения Максвелла в этом случае принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Поскольку стенки волновода являются идеально проводящими, тангенциальная компонента  $E_t$  на стенке волновода равна нулю

$$E_t|_{\Sigma} = 0. \quad (2)$$

Покажем, что *внутри волновода могут распространяться бегущие электромагнитные волны*. Будем искать решение уравнений (1) в виде

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi, \\ \mathbf{H} = -ik \operatorname{rot} \Pi, \end{array} \right\} \quad (3)$$

где  $\Pi$  — поляризационный потенциал. Рассмотрим случай, когда вектор  $\Pi$  имеет лишь одну компоненту, направленную вдоль оси  $z$  ( $H_z = 0$ ). В этом случае уравнения (1) после подстановки в них выражений (3) дадут:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \quad (4)$$

$$(\Pi = \Pi z).$$

Условие (2) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$\Pi|_{\Sigma} = 0. \quad (5)$$

Ищем решение в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z), \quad (6)$$

где  $M$  — точка, лежащая в поперечном сечении  $S$ . Подставляя (6) в (4), приходим к выводу, что  $\psi(M)$  является собственной функцией задачи о колебаниях мембраны, закрепленной по контуру, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \psi + \lambda \psi &= 0 \text{ внутри } S, \\ \psi|_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — двумерный оператор Лапласа.

Обозначим через  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\psi_n\}$  систему собственных значений и собственных функций этой задачи. Частное решение задачи (4) имеет вид

$$\Pi_n(M, z) = \psi_n(M) f_n(z),$$

где функция  $f_n(z)$  определяется из уравнения

$$f_n'' + (k^2 - \lambda_n) f_n = 0. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8)

$$f_n(z) = A_n e^{i \gamma_n z} + B_n e^{-i \gamma_n z} \quad (\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}). \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что член  $A_n e^{i \gamma_n z}$  соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , второй же член в формуле (9) — волне, бегущей в обратном направлении.

Рассматривая лишь волну, бегущую в одном направлении, положим

$$f_n(z) = A_n e^{i \gamma_n z},$$

тогда получим решение в виде

$$\Pi_n(M, z) = A_n \psi_n(M) e^{i \gamma_n z} \quad (10)$$

где  $A_n$  — постоянная, определяемая из условий возбуждения полей.

Подставляя выражение (10) в формулы (3) и восстанавливая множитель  $e^{-i \omega t}$ , найдем составляющие поля в виде

$$F_n(M) e^{i(\gamma_n z - \omega t)}, \quad (11)$$

где  $F_n$  — функция, выражающаяся через собственную функцию мембранны  $\psi_n(M)$  или ее производные.

Если  $k^2 > \lambda_n$ , то  $\gamma_n$  вещественно и выражение (11) представляет собой бегущую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$  с фазовой скоростью

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \lambda_n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \lambda_n/k^2}} > c.$$

Групповая скорость волны, очевидно, равна

$$u = \frac{c^2}{v} = c \sqrt{1 - \lambda_n/k^2} < c,$$

т. е. в пустом волноводе имеет место дисперсия.

Если  $k^2 < \lambda_n$ , то  $\gamma_n = ix_n$  ( $x_n > 0$ ) и вместо выражения (11) получаем затухающую волну

$$F_n(M) e^{-i\omega t - \gamma_n z}, \quad (12)$$

распространяющуюся вдоль оси  $z$  в положительном направлении.

Так как собственные частоты  $\lambda_n$  мембранные неограниченно возрастают с увеличением номера  $n$ , то какова бы ни была частота  $\omega$ , начиная с некоторого номера  $n = N$ , будем иметь:

$$k^2 < \lambda_n.$$

Следовательно, в волноводе может распространяться лишь конечное число бегущих волн. Если  $k^2 < \lambda_1$ , то в волноводе не может существовать ни одной бегущей волны.

Для того чтобы в волноводе заданной формы и размеров могла распространяться хотя бы одна бегущая волна, должно, очевидно, выполняться условие

$$\lambda_1 < k^2 \text{ или } \Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где  $\Lambda$  — длина волны, распространяющейся в трубе.

Для волновода прямоугольного сечения со сторонами  $a$  и  $b$  имеем:

$$\lambda_n = \lambda_{mn} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad (13)$$

и, следовательно, бегущая волна может существовать лишь при условии

$$k > \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad \text{или} \quad \Lambda < \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \quad (14)$$

Решениями уравнений Максвелла могут быть также поля с равной нулю  $z$ -составляющей электрического поля

$$E_z = 0. \quad (15)$$

Вводя вектор  $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_z$  и полагая

$$\hat{E} = ik \operatorname{rot} \hat{\Pi}; \quad \hat{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\Pi} + k^2 \hat{\Pi} \quad (16)$$

$$(\hat{E}_z = 0),$$

убеждаемся, что функция  $\Pi(M, z)$  должна определяться из уравнения

$$\Delta \hat{\Pi} + k^2 \hat{\Pi} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 \hat{\Pi} + \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial z^2} + k^2 \hat{\Pi} = 0 \quad (17)$$

и граничного условия

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial v} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \quad (18)$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, найдем решения этой задачи

$$\hat{\Pi}_n = \hat{A}_n \hat{\psi}_n(M) e^{i \hat{\psi}_n z} \quad (\hat{\psi}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}), \quad (19)$$

которым соответствуют решения уравнения Максвелла вида

$$\hat{F}_n(M) e^{i(\hat{\psi}_n z - \omega t)}.$$

Здесь  $\hat{\psi}_n(M)$  и  $\hat{\lambda}_n$  означают собственные функции и собственные частоты мембранны  $S$  со свободной границей

$$\begin{aligned} \Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n &= 0 \quad \text{в} \quad S, \\ \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial v} &= 0 \quad \text{на} \quad C. \end{aligned}$$

Таким образом, в волноводе могут существовать электромагнитные поля двух типов  $\{E, H\}$  и  $\{\hat{E}, \hat{H}\}$ , определяемые по формулам (3) и (16). Принята следующая терминология: говорят об электрических волнах (или волнах типа  $TM$ ), если  $H_z = 0$ , или о магнитных волнах (типа  $TE$ ), если  $E_z = 0$ . Мы убедились, что в волноводе могут существовать волны  $TE$  и  $TM$ . Можно показать<sup>1)</sup>, что любое поле в волноводе представимо в виде суммы полей  $TE$  и  $TM$ . Отсюда следует, что произвольное поле в волноводе можно определить, если известны две скалярные функции  $\Pi(M, z)$  и  $\hat{\Pi}(M, z)$ .

2. Найдем величину энергии, уносимой бегущей волной, например типа  $TM$ .

Для этого вычислим величину потока вектора Умова — Пойнтинга через сечение  $S$ :

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \iint_S [EH^*]_z dS, \quad (20)$$

где  $H^*$  — вектор, комплексно-сопряженный вектору  $H$ ,  $S$  — перпендикулярное сечение волновода.

<sup>1)</sup> А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Вестник МГУ, вып. 7 (1948).

Введем прямоугольную систему координат  $x, y, z$ . Тогда

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \int \int_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dx dy. \quad (21)$$

Выразим составляющие поля через поляризационный потенциал  $\Pi$  по формулам

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, & E_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \\ H_x^* &= ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial y}, & H_y^* &= -ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial x} \end{aligned}$$

и подставим их значения в равенство (21)

$$W_z = -\frac{c}{8\pi} ik \int \int_S \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \Pi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \frac{\partial \Pi^*}{\partial y} \right) dx dy. \quad (22)$$

Функция  $\Pi$  и сопряженная ей функция  $\Pi^*$  согласно (10) представимы в виде

$$\Pi(M, z) = A_n \psi_n(M) e^{i \gamma_n z},$$

$$\Pi^*(M, z) = A_n^* \psi_n(M) e^{-i \gamma_n z},$$

где  $\psi_n$  — собственная функция закрепленной мембраны ( $\psi_n|_c = 0$ ). Отсюда следует, что вместо (22) можно написать

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{ck}{8\pi} \gamma_n |A_n|^2 \int \int_S \left[ \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \frac{ck}{8\pi} \gamma_n |A_n|^2 \int_S (\nabla \psi_n)^2 dS. \end{aligned}$$

Применяя первую формулу Грина

$$\int_S (\nabla \psi_n)^2 dS = - \int_S \int \psi_n \Delta_2 \psi_n dS + \int_c \psi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial v} ds = \lambda_n \int_S \int \psi_n^2 dS = \lambda_n,$$

получаем выражение для потока энергии бегущей волны номера  $n$

$$W_z = \frac{ck}{8\pi} |A_n|^2 \gamma_n \lambda_n. \quad (23)$$

Если одновременно распространяется несколько волн, то  $W_z$  будет равно сумме слагаемых вида (23).

Перейдем теперь к задаче о возбуждении электромагнитных полей в волноводе заданными токами<sup>1)</sup>.

3. Пусть в некотором объеме  $V_0$  внутри волновода  $\Sigma$  заданы токи  $j(M, z) e^{-iwt}$ , меняющиеся во времени по гармоническому

<sup>1)</sup> А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 27, вып. 11, 12 (1947).

закону. Найдем поля, возбуждаемые этими токами. В силу принципа суперпозиции полей достаточно, очевидно, решить задачу о возбуждении волновода элементарным диполем произвольной ориентации.

Чтобы дать представление о методе решения поставленной выше общей задачи, рассмотрим более простой случай возбуждения волновода линейным током  $I = I_0(z)e^{-i\omega t}$ , заданным на отрезке  $L$ , параллельном оси  $z$ .

Для определения электромагнитных полей, возбужденных в волноводе, надо использовать:

- 1) уравнения Максвелла (1),
- 2) граничные условия

$$E_{\text{tang}} = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

3) условие излучения в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности,

- 4) условие возбуждения, которое мы берем в виде<sup>1)</sup>

$$\oint_{K_\epsilon} H_s ds = \frac{4\pi}{c} I_0 \quad \text{или} \quad H_s \approx \frac{2I_0}{c\rho}, \quad (24)$$

где  $K_\epsilon$  — окружность радиуса  $\epsilon (\epsilon \rightarrow 0)$ , охватывающая линию  $L$ ,  $\rho = |\overrightarrow{MM_0}|$ , где  $M_0$  — точка на токе,  $M$  — точка на окружности  $K_\epsilon$ . Иными словами, электромагнитное поле на токе должно иметь особенность определенного типа.

Перейдем к потенциалу  $\Pi$ , воспользовавшись для этого формулами (3). Пусть  $(M_0, \xi)$  — произвольная точка на токе. Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  с центром в точке  $(M_0, \xi)$  и вычислим  $H_s$ , пользуясь уравнением (3),

$$H_s = ik \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Отсюда и из (24) следует, что в точке  $(M_0, \xi)$  функция  $\Pi$  должна иметь логарифмическую особенность

$$\Pi \approx -\frac{2I_0}{ikc} \ln \frac{1}{\rho}. \quad (25)$$

Таким образом, функция  $\Pi(M, z)$  должна удовлетворять волновому уравнению (4), граничному условию  $\Pi = 0$  на  $\Sigma$ , условию излучения и условию возбуждения (25).

Будем искать решение этой задачи в виде

$$\Pi = K \int_L \Pi_0(M, M_0; z, \xi) I_0(\xi) d\xi, \quad (26)$$

<sup>1)</sup> См. главу V, приложение II, п. 3.

где  $\Pi_0(M, M_0; z, \zeta)$  — функция источника, определяемая как решение уравнения

$$\Delta \Pi_0 + k^2 \Pi_0 = 0$$

по переменным  $(M, z)$  и  $(M_0, \zeta)$ , удовлетворяющее граничному условию

$$\Pi_0 = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

условию излучения и имеющее особенность типа  $\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$  при совпадении аргументов, т. е. представимое в виде суммы

$$\Pi_0(M, M; z, \zeta) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + v(M, M_0; z, \zeta)$$

$$(r = \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}, \rho = |\overrightarrow{MM_0}|),$$

где  $v$  — регулярная функция, определяемая из волнового уравнения и граничного условия

$$v = -\frac{e^{+ikr}}{4\pi r} \quad \text{на } \Sigma.$$

Нетрудно видеть, что функция  $\Pi(M, z)$ , определяемая по формуле (26), будет иметь логарифмическую особенность, и условие возбуждения выполнится, если положить нормирующий множитель

$$K = -\frac{4\pi}{ikc}.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc} \int_L \Pi_0(M, M_0; z, \zeta) I_0(\zeta) d\zeta.$$

В частности, для элемента тока длины  $\Delta l$

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc} I_0 \cdot \Delta l \cdot \Pi_0.$$

Следовательно,  $\Pi_0$  имеет физический смысл поляризационного потенциала, соответствующего возбуждению элементом тока, помещенным в точке  $(M_0, \zeta)$  параллельно оси волновода.

Таким образом, задача определения поля в волноводе полностью сведена к построению функции источника  $\Pi_0$  первой краевой задачи для уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$  внутри бесконечного цилиндра.

Для построения функции источника может быть применен метод, изложенный в главе VI, § 2. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(M, z), \tag{27}$$

где  $f(M, z)$  — заданная функция с граничным условием

$$u|_{\Sigma} = 0.$$

Будем искать функцию  $u(M, z)$  в виде ряда

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \psi_n(M), \quad (28)$$

где  $\psi_n(M)$  — нормированные собственные функции мембраны  $S$

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0, \quad \psi_n|_C = 0. \quad (7)$$

Разлагая  $f(M, z)$  в ряд

$$f(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \psi_n(M), \quad f_n(z) = \int_S \int f(M', z) \psi_n(M') d\sigma_{M'} \quad (29)$$

и подставляя выражения (28) и (29) в уравнение (27), получаем уравнение

$$u_n''(z) - p_n^2 u_n(z) = -f_n(z), \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}. \quad (30)$$

Решение этого уравнения, как нетрудно заметить, представляется формулой

$$u_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n |z-\xi|}}{2p_n} f_n(\xi) d\xi, \quad (31)$$

которая в силу формулы (29) может быть записана в виде

$$u_n(z) = \int_S \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n |z-\xi|}}{2p_n} f(M', \xi) \psi_n(M') d\sigma_{M'} d\xi. \quad (31')$$

Подставляя это выражение в формулу (28) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(M, z) = \int_T \int \int \Pi_0(M, M', z - \xi) f(M', \xi) d\sigma_{M'} d\xi, \quad (32)$$

где

$$\Pi_0(M, M', z - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \psi_n(M')}{2p_n} e^{-p_n |z - \xi|}. \quad (33)$$

Ряд для  $\Pi_0(M, M', z - \xi)$  при  $z \neq \xi$  расходится и абсолютно

сходится в силу оценок для собственных функций<sup>1)</sup> и присутствия экспоненциального множителя. Функция  $\Pi(M, M', z - \xi)$  в точке  $(M = M', z = \xi)$  имеет особенность типа  $1/r$ . На доказательстве последнего утверждения мы не останавливаемся<sup>2)</sup>. Из сказанного выше следует, что

$$G(M, M', z - \xi) = \Pi_0(M, M', z - \xi),$$

т. е. функция источника  $\Pi_0$  имеет вид

$$\Pi_0(M, M', z - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M) \psi_n(M')}{2p_n} e^{-p_n|z-\xi|}.$$

Из формулы (33) следует, что поле в этом случае представится в виде суперпозиции волн вида (11) и (12). Из замечания на стр. 526 следует, что ряд (33) будет состоять из конечного числа слагаемых вида

$$B_n \psi_n(M) e^{i\gamma_n|z-\xi|} \quad (\text{бегущие волны}) \quad (\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}, \quad p_n = -i\gamma_n)$$

и из бесконечного числа слагаемых вида

$$B'_n \psi_n(M) e^{-p_n|z-\xi|} \quad (\text{затухающие волны}),$$

где

$$B'_n = \frac{\psi_n(M')}{2p_n}, \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}, \quad \lambda_n > k^2.$$

Для определения полей надо воспользоваться формулами (26) и (3).

<sup>1)</sup> Для собственных функций  $\psi_n(M)$  имеет место равномерная оценка  $|\psi_n(M)| \leq A\lambda_n$ , где  $A$  — постоянная, не зависящая ни от точки  $M$ , ни от индекса  $n$ . В самом деле, краевая задача (7) равносильна интегральному уравнению  $\psi_n(M) = \lambda_n \int_S \int G(M, M') \psi_n(M') d\sigma_{M'}$ , где  $G(M, M')$  — функция источника для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  при граничном условии  $u|_c = 0$ . Из этого интегрального уравнения вытекает в силу неравенства Буняковского

$$|\psi_n| \leq |\lambda_n| \sqrt{\int_S \int G^2(M, M') d\sigma_{M'} \int_S \int \psi_n^2(M') d\sigma_{M'}} \leq A |\lambda_n|,$$

так как

$$\int_S \int \psi_n^2(M') d\sigma_{M'} = 1; \quad \int_S \int G^2(M, M') d\sigma_{M'} \leq A^2.$$

Аналогичным методом получаются оценки для производных

$$\left| \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right| \leq B \lambda_n^2, \quad \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right| \leq B \lambda_n^2.$$

<sup>2)</sup> См. А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 27, вып. 11 (1947).

Задача о возбуждении волновода элементом магнитного тока, параллельным оси  $z$  (бесконечно малая петля с электрическим током в плоскости  $S_{z=\xi}$ ), приводит нас ко второй функции источника

$$\hat{\Pi}_0(M, M'; z - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M) \hat{\psi}_n(M')}{2\hat{\rho}_n} e^{-\hat{\rho}_n |z - \xi|}, \quad \hat{\rho}_n = \sqrt{\lambda_n - k^2},$$

удовлетворяющей граничному условию  $\frac{\partial \hat{\Pi}_0}{\partial v} = 0$  на  $\Sigma$ . При этом  $H_z = 0$ ;  $\hat{\Pi} = -\frac{4\pi}{ikc} k\Delta l \hat{\Pi}_0$  ( $k\Delta l$  — момент элемента магнитного тока).

Аналогичным методом можно решить задачу о возбуждении произвольно ориентированным диполем (элементом тока), найдя особенности полей в этом случае. Соответствующие функции  $\Pi$  будут определяться по формуле, аналогичной формуле (33). В случае поверхностных и объемных токов функции  $\Pi$  даются поверхностными и объемными интегралами (по аналогии с (26)). Дальнейшее вычисление полей производится по формулам (3).

Тем самым задача о возбуждении любого цилиндрического волновода произвольными заданными токами решается полностью. Чтобы использовать общие формулы для волновода определенного сечения, достаточно найти собственные колебания мембранны, имеющей форму перпендикулярного сечения волновода.

Приведем выражения для ортонормированных собственных функций прямоугольной мембранны со сторонами  $a$  и  $b$ :

$$\psi_n(M) = \psi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y;$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y \quad (\varepsilon_j = 2, j \neq 0; \varepsilon_0 = 1);$$

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Для круглой мембранны радиуса  $a$  имеем:

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{J_n \left( \mu_{mn} \frac{r}{a} \right)}{|J'_n(\mu_{mn})|} \cos n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{\hat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\hat{\mu}_{mn}^2 - n^2}} \frac{J_n \left( \frac{\hat{\mu}_{mn}}{a} r \right)}{|J_n(\hat{\mu}_{mn})|} \cos n\varphi,$$

где  $\mu_{mn}$  — корень уравнения  $J_n(\mu) = 0$ ;  $\lambda_{mn} = \mu_{mn}^2/a^2$ ,  $\hat{\mu}_{mn}$  — корень уравнения  $J'_n(\mu) = 0$ ;  $\hat{\lambda}_{mn} = \hat{\mu}_{mn}^2/a^2$ .

## II. Электромагнитные колебания в полых резонаторах

В последние годы в радиотехнике получили широкое распространение объемные резонаторы или эндовибраторы, представляющие собой металлические полости, заполненные диэлектриком (в частности, воздухом). В эндовибраторах могут существовать стационарные электромагнитные поля (стоячие волны), называемые собственными электромагнитными колебаниями.

В радиотехнике ультракоротких волн применяются эндовибраторы весьма сложной формы. Общая проблема определения собственных колебаний эндовибраторов произвольной формы чрезвычайно сложна, однако для эндовибраторов простейшей формы решение получается в явном виде. Так как стенки изготавливаются из хорошо проводящего металла, то при расчете собственных колебаний обычно предполагают стенки идеально проводящими. Поправки на конечную проводимость можно получить, используя граничные условия Леонтовича. В дальнейшем мы будем предполагать, что стенки эндовибратора являются идеально проводящими и все величины поля меняются во времени по закону  $e^{-i\omega t}$ .

Не ставя своей целью дать исчерпывающее изложение теории эндовибраторов, остановимся на некоторых общих вопросах теории этих колебательных систем.

**1. Собственные колебания цилиндрического эндовибратора.** Проблема определения собственных электромагнитных колебаний состоит в нахождении нетривиальных решений уравнений Максвелла<sup>1)</sup>, точнее в определении собственных частот  $\omega$ , при которых система однородных уравнений Максвелла с однородными краевыми условиями имеет нетривиальные решения, а также самих нетривиальных решений.

Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \text{div } \mathbf{E} = 0, \\ \text{div } \mathbf{H} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

внутри полости  $T$ , на поверхности которой  $\Sigma$  выполняются условия

$$E_t = 0 \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial H_y}{\partial v} = 0; \quad (3)$$

оба эти условия, как нетрудно показать, эквивалентны.

<sup>1)</sup> Множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду опускаем.

Приведем расчет собственных колебаний для эндовибратора, представляющего «отрезок» цилиндрического волновода произвольного сечения, ограниченный двумя боковыми стенками  $z = \pm l$  (ось  $z$  параллельна образующей цилиндра).

Так же как и в цилиндрическом волноводе, в рассматриваемом эндовибраторе возможны колебания и электрического типа ( $H_z = 0$ ) и магнитного типа ( $E_z = 0$ ).

Для волн электрического типа положим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{grad div } \Pi + k^2 \Pi, \\ \mathbf{H} &= -ik \text{rot } \Pi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\Pi = \Pi \mathbf{i}_z$  ( $\mathbf{i}_z$  — единичный вектор, направленный по оси  $z$ ) — поляризационный вектор-потенциал, у которого отлична от нуля лишь составляющая по оси  $z$ . Из формулы (4) сразу видно, что в этом случае  $H_z = 0$ .

Функция  $\Pi$ , как обычно, удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0. \quad (5)$$

Выберем на поверхности  $\Sigma$  локальную прямоугольную систему координат  $(s, v, i_z)$ , где  $v$  — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности,  $s$  — по касательной к контуру  $C$ , ограничивающему перпендикулярное сечение  $S$  цилиндрического эндовибратора.

В силу граничных условий (2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} E_s|_{\Sigma} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial s \partial z} \Big|_{\Sigma} = 0, \\ E_z|_{\Sigma} &= \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Оба эти равенства будут удовлетворены, если потребовать, чтобы

$$\Pi|_{\Sigma} = 0. \quad (7)$$

При  $z = \pm l$  из (2) получаем условия

$$\left. \begin{aligned} E_s|_{z=\pm l} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial s \partial z} \Big|_{z=\pm l} = 0, \\ E_v|_{z=\pm l} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v \partial z} \Big|_{z=\pm l} = 0, \end{aligned} \right.$$

для выполнения которых достаточно положить

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} \Big|_{z=\pm l} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, мы приходим к следующей краевой задаче:  
найти нетривиальные решения волнового уравнения

$$\Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \quad (6')$$

с однородными граничными условиями

$$\Pi|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{z=\pm l} = 0. \quad (8)$$

Как и в случае цилиндрического волновода (см. стр. 524), решение ищем в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z). \quad (9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6') и используя условие (7), получаем для функции  $\psi(M)$  задачу о собственных колебаниях закрепленной мембранны,

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \text{ в } S, \quad (10)$$

$$\psi = 0 \text{ на } C. \quad (11)$$

Для определения функции  $f(z)$  после разделения переменных получаем уравнение

$$f'' + (k^2 - \lambda) f = 0 \quad (12)$$

с граничным условием

$$f'(\pm l) = 0, \quad (13)$$

вытекающим из условия (8).

Следует иметь в виду, что здесь, в отличие от задачи для волноводов,  $k^2$  не является заданной величиной, а входит в уравнение в качестве параметра. Мы должны найти те значения  $k^2$ , при которых задача (6) — (8) допускает нетривиальное решение.

Решая уравнение (12) с условиями (13), находим собственные функции

$$f_m(z) = A_m \cos \frac{\pi m}{2l} (l - z),$$

соответствующие собственным значениям

$$\mu_m = \left( \frac{\pi m}{2l} \right)^2 \quad (m = 0, 1, \dots),$$

где

$$\mu_m = k_m^2 - \lambda.$$

Краевая задача (10) — (11) дает спектр собственных значений  $\{\lambda_n\}$  с соответствующей системой нормированных собственных функций  $\{\psi_n(M)\}$ . Отсюда вытекает, что в эндовибраторе могут существовать только такие колебания, собственные или

резонансные частоты которых равны

$$\omega_{mn} = c \sqrt{\lambda_n + \mu_m}.$$

Этим частотам соответствует система собственных функций

$$\Pi_{n,m}(M, z) = \bar{A}_{n,m} \psi_n(M) \cos \frac{\pi m}{2l} (l - z) \quad (14)$$

или

$$\Pi_{n,m}(M, z) = A_{n,m} \psi_n(M) f_m(z), \quad (14')$$

где

$$f_m(z) = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2l}} \cos \frac{\pi m}{2l} (l - z), \quad \epsilon_m = \begin{cases} 2; & m \neq 0; \\ 1; & m = 0, \end{cases}$$

— нормированные к единице функции. Решение определено с точностью до амплитудного множителя  $A_{n,m}$ , который находится из условий возбуждения колебания данного типа.

Если собственные функции мембранны  $\psi_n(M)$  известны, то по формулам (14) и (4) можно вычислить компоненты поля.

Если поперечное сечение  $S$  эндовибратора представляет собой прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , то будем иметь:

$$\psi_n(M) = \psi_{p,q}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi p}{a} x \sin \frac{\pi q}{b} y \quad (p, q = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\lambda_n = \lambda_{p,q} = \pi^2 \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right),$$

$$\Pi_{n,m} = A_{m,p,q} \sqrt{\frac{2\epsilon_m}{abl}} \sin \frac{\pi p}{a} x \sin \frac{\pi q}{b} y \cos \frac{\pi m}{2l} (l - z).$$

В этом случае наименьшей собственной частоте

$$\omega_{0,1,1} = c \sqrt{\lambda_{1,1}} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

соответствует максимальная допустимая длина волны

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

В частности, при  $b = a$  наибольшая длина волны

$$\Lambda_0 = a \sqrt{2}$$

равна диагонали квадрата, получающегося в перпендикулярном сечении. Следовательно, в таком эндовибраторе возможны лишь собственные колебания с частотой

$$\omega \geq \omega_{0,1,1}$$

или длиной волны

$$\Lambda \leqslant \Lambda_0.$$

Совершенно аналогично находятся собственные колебания магнитного типа ( $E_z = 0$ ). В этом случае полагаем

$$\mathbf{E} = ik \operatorname{rot} \hat{\Pi},$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\Pi} + k^2 \hat{\Pi},$$

где

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_z.$$

Для определения  $\hat{\Pi}(M, z)$  получаем уравнение (6) с граничными условиями

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (7')$$

$$\hat{\Pi} \Big|_{z=\pm l} = 0, \quad (8')$$

решая которые находим:

$$\hat{\Pi}_{n, m} = \hat{A}_{n, m} \hat{\psi}_m(M) \sin \frac{\pi m}{2l} (l - z). \quad (15)$$

В этом случае под  $\hat{\psi}_n(M)$  следует понимать собственные функции мембранны  $S$  при граничном условии  $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v} = 0$  на  $C$ .

**2. Электромагнитная энергия собственных колебаний.** Вычислим энергию электрического и магнитного полей в стоячей волне в цилиндрическом эндовибраторе.

Для простоты ограничимся случаем волны электрического типа. Учитывая в формулах (4) зависимость  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  от времени по закону  $e^{-i\omega t}$  и беря только действительную часть, получаем:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial x} \cos \omega t, \\ E_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial y} \cos \omega t, \\ E_z &= \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi \right) \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -k \frac{\partial \Pi}{\partial y} \sin \omega t, \\ H_y &= k \frac{\partial \Pi}{\partial x} \sin \omega t, \\ H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для вычисления энергии электрического и магнитного полей воспользуемся известными формулами

$$\mathcal{E}_{\text{эл}}(t) = \frac{c}{8\pi} \int_T \int \int \mathbf{E}^2 d\tau, \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_{\text{м}}(t) = \frac{c}{8\pi} \int_T \int \int \mathbf{H}^2 d\tau, \quad (19)$$

где интегрирование производится по объему  $T$  эндовибратора.

Подставляя в формулу (18) выражения (16) и пользуясь формулой (14'), будем иметь<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{эл}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} \cos^2 \omega t \left\{ \int_S \int \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma \int_{-l}^l [f'(z)]^2 dz + \right. \\ \left. + \int_S \int \Psi^2 d\sigma \int_{-l}^l (f'' + k^2 f)^2 dz \right\}. \end{aligned}$$

Производя несложные вычисления, получим:

$$\int_{-l}^l [f'(z)]^2 dz = f' f' \Big|_{-l}^l - \int_{-l}^l f f'' dz = (k^2 - \lambda) \int_{-l}^l f^2 dz = k^2 - \lambda, \quad (19')$$

$$\int_{-l}^l (f'' + k^2 f)^2 dz = \lambda^2 \int_{-l}^l f^2 dz = \lambda^2, \quad (20)$$

так как в силу нормировки функций  $f$

$$\int_{-l}^l f^2 dz = 1. \quad (21)$$

Для вычисления интегралов по  $S$  воспользуемся первой формулой Грина, уравнением для функции  $\Psi_n$ , граничными условиями и условием нормировки

$$\begin{aligned} \int_S \int \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_S \int (\nabla_2 \Psi)^2 d\sigma = \\ = - \int_S \int \Psi \Delta_2 \Psi d\sigma + \int_C \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial v} ds = \lambda \int_S \int \Psi^2 d\sigma = \lambda, \quad (22) \end{aligned}$$

где  $\nabla_2$  — оператор «набла» в плоскости  $S$ ,  $\Delta_2$  — двумерный оператор Лапласа. В результате получаем выражение для энергии

<sup>1)</sup> Значки  $t, n$  мы временно опускаем.

электрического поля

$$\mathcal{E}_{\text{эл}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} k^2 \lambda \cos^2 \omega t. \quad (23)$$

Для энергии магнитного поля в силу формул (17), (19) и (14') имеем:

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \int_S \int \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \int_{-l}^l f^2 dz \sin^2 \omega t,$$

откуда, учитывая равенства (21) и (22), находим:

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda \sin^2 \omega t. \quad (24)$$

Полная энергия электромагнитного поля, очевидно, не меняется во времени:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{эл}}(t) + \mathcal{E}_m(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda. \quad (25)$$

Из формул (23) и (24) видно, что в стоячей волне происходит взаимное превращение электрической энергии в магнитную и обратно, причем средняя за период энергия электрического поля

$$\bar{\mathcal{E}}_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathcal{E} \quad (26)$$

равна средней энергии магнитного поля

$$\bar{\mathcal{E}}_m = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathcal{E}. \quad (27)$$

**3. Возбуждение колебаний в эндомивраторе.** Для возбуждения поля в эндомивраторе внешним источником надо ввести через щель в его оболочке элемент связи. Таким элементом связи может быть либо виток, либо стержень, действующий как маленькая антenna. Для того чтобы элемент связи не возмущал поля в эндомивраторе, необходимо, чтобы его размеры были много меньше длины волны. Возможны и другие способы возбуждения эндомивратора, например пучком электронов, пронизывающим полость эндомивратора (через отверстия в его стенках).

Решение задачи о возбуждении эндомивратора антенной, помещенной внутрь, или в предельном случае элементарным диполем, требует учета конечной проводимости стенок. В противном случае установившийся процесс невозможен. Учет конечной проводимости стенок может быть произведен с помощью условий Леонтьевича.

Мы рассмотрим здесь задачу о возбуждении сферического эндомивратора диполем, допускающую простое аналитическое

решение<sup>1)</sup>. Пусть в центре сферы радиуса  $r_0$  помещен диполь, колеблющийся с частотой  $\omega$  и амплитудой 1 и направленный вдоль оси  $z$ . Требуется найти поле внутри сферы, учитывая конечную проводимость стенок.

В этом случае поля  $E$  и  $H$  можно выразить через функцию  $U$ :

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{i}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \\ E_\theta &= -\frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \\ H_\phi &= \frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Остальные компоненты  $E_\phi$ ,  $H_r$ ,  $H_\theta$  равны нулю.

Так как диполь направлен по оси  $z$  ( $\theta = 0$ ), то поля, очевидно, не должны зависеть от угла  $\phi$ .

Функция  $U$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + U = 0, \quad (29)$$

где  $\rho = kr$ , причем  $U$  имеет при  $\rho \rightarrow 0$  особенность вида

$$\frac{ie^{ikr}}{r^2} = \frac{ik^2 e^{ip}}{\rho^2}. \quad (30)$$

На поверхности сферы ( $\rho = \rho_0$ ) должно выполняться условие Леоновича

$$E_\theta = aH_\phi, \quad (31)$$

где

$$a = \mu k d \sqrt{\frac{i}{2}} \quad \left( d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} \right) \quad (32)$$

— эффективная глубина скин-слоя.

Из соотношений (31) и (28) вытекает граничное условие для функции  $U$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho U) - i\rho_0 a U \right]_{\rho=\rho_0} = 0$$

или

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} + (1 - i\rho_0 a) U \Big|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (33)$$

Решением уравнения (29), имеющим особенность (30), очевидно, является функция

$$U = -k^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} [H_{1/2}^{(1)}(\rho) + CJ_{1/2}(\rho)] P_1(\cos \theta),$$

<sup>1)</sup> См. С. М. Рытов, ДАН СССР 51, вып. 2 (1946).

где  $P_1(\cos \theta)$  — полином Лежандра первого порядка,  $H_{y_1}^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода,  $J_{y_1}$  — функция Бесселя,

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$H_{y_1}^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} \left( \frac{1}{i\rho} - 1 \right), \quad J_{y_1}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \left( \frac{\sin \rho}{\rho} - \cos \rho \right).$$

Постоянная  $C$  определяется из граничного условия (33)

$$C = -e^{ip_0} \frac{1 - \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho_0} + a \left( \frac{1}{i\rho_0} - 1 \right)}{i \left[ \frac{\cos \rho_0}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{1}{\rho_0^2} \right) \sin \rho_0 - ia \left( \frac{\sin \rho_0}{\rho_0} - \cos \rho_0 \right) \right]}.$$

Полученное решение можно использовать для определения величины потерь в стенках. Мощность, поглощаемая в стенках,

$$Q = \frac{\mu \omega d}{16\pi} \int_0^\pi |H_\phi|^2 2\pi \rho_0^2 \sin \theta d\theta$$

вычисляется непосредственно и равна  $Q = \frac{\mu \omega k^4 d}{6} \frac{1}{|B - iaA|^2}$ , где

$$A = \frac{\sin \rho_0}{\rho_0} - \cos \rho_0, \quad B = \frac{\cos \rho_0}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{1}{\rho_0^2} \right) \sin \rho_0.$$

Если диполь расположен не в центре сферы, то расчет полей сильно осложняется, однако решение может быть получено в виде рядов.

### III. Скин-эффект

Переменный ток в отличие от постоянного не распределяется равномерно по сечению проводника, а имеет большую плотность у его поверхности. Это явление называют скин-эффектом<sup>1)</sup> (по-английски *skin* — кожа).

Рассмотрим, для простоты, бесконечный однородный цилиндрический провод ( $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ ), по которому течет переменный ток. Будем предполагать, что полный ток  $I = I_0 e^{i\omega t}$ , протекающий через сечение провода, известен.

Пренебрегая токами смещения по сравнению с током проводимости<sup>2)</sup> и считая процесс установившимся, т. е. зависящим

<sup>1)</sup> И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

<sup>2)</sup> Отметим, что внутри проводников, в частности внутри металлов, плотность токов смещения ничтожно мала по сравнению с плотностью токов проводимости:  $j_{cm} \ll j = \sigma E$ . В нашем случае последнее условие эквивалентно требованию  $\epsilon\omega \ll \sigma$ . Ввиду того, что для твердых металлов проводимость  $\sigma \approx 10^{17}$  абс. ед., токами смещения можно пренебречь для всех частот, используемых в технике.

от времени по закону  $e^{i\omega t}$ , получим, после сокращения на множитель  $e^{i\omega t}$ , уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik\mu \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

где  $k = \omega/c$ . Уравнения (3) и (4) в данном случае, очевидно, следуют из уравнений (1) и (2).

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, z, \varphi)$ , так чтобы ось  $z$  совпадала с осью провода. Тогда в силу осевой симметрии тока все величины можно считать зависящими только от переменной  $r$ .

Так как в нашем случае вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль оси  $z$ , то из уравнений (1) и (2) будем иметь:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_\varphi) = \frac{4\pi\sigma}{c} E_z, \quad (1')$$

$$\frac{d}{dr} E_z = ik\mu H_\varphi. \quad (2')$$

Исключая отсюда  $H_\varphi$ , найдем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dE_z}{dr} \right) = i \frac{4\pi\sigma\mu k}{c} E_z. \quad (5)$$

Введем граничное условие на поверхности провода при  $r = R$ . Для этого воспользуемся тем, что нам известен полный ток  $I_0$ , протекающий по цилиндру.

Запишем первое уравнение Максвелла (1) в интегральной форме:

$$\oint_C H_s ds = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

где  $C$  — контур, охватывающий провод,  $H_s$  — тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{H}$  на  $C$ . Если в качестве такого контура взять окружность  $r = R$ , то получим:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(R) d\varphi = \frac{4\pi}{cR} I_0$$

или

$$H_\varphi(R) = \frac{2I_0}{cR}. \quad (6)$$

Отсюда, пользуясь соотношением (2), находим:

$$\left. \frac{dE_z}{dr} \right|_{r=R} = \frac{2ik\mu}{cR} I_0. \quad (7)$$

Таким образом, мы должны решить уравнение Бесселя

$$E_z''(r) + \frac{1}{r} E_z'(r) + (\alpha \sqrt{-i})^2 E_z(r) = 0 \quad \left( \alpha^2 = \frac{4\pi c \mu \omega}{c^2} \right) \quad (5')$$

при граничном условии

$$E_z'(R) = \frac{2ik\mu}{cR} I_0 \quad (7')$$

и условии ограниченности при  $r = 0$

$$|E_z(0)| < \infty. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (5') имеет вид

$$AJ_0(ar\sqrt{-i}) + BN_0(ar\sqrt{-i}), \quad (9)$$

где  $J_0$  и  $N_0$  — функции Бесселя первого и второго рода (см. Дополнение II, ч. I),  $A$  и  $B$  — постоянные, подлежащие определению.

Функция  $N_0$  имеет логарифмическую особенность при  $r = 0$ . Поэтому в силу условия (8)  $B = 0$  и, следовательно,

$$E_z(r) = AJ_0(ar\sqrt{-i}). \quad (10)$$

Коэффициент  $A$  определим из граничного условия (7):

$$A = \frac{2\sqrt{-i} k \mu I_0}{ac R J_1(\alpha R \sqrt{-i})}. \quad (11)$$

Отсюда для плотности тока

$$j = \sigma E_z$$

получаем:

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha \sqrt{-i}}{2\pi R J_1(\alpha R \sqrt{-i})} J_0(ar\sqrt{-i}). \quad (12)$$

В правой части этой формулы стоят функции Бесселя от комплексного аргумента

$$x\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} x,$$

Обычно пользуются для этих функций следующими обозначениями:

$$J_0(x\sqrt{-i}) = \text{ber}_0 x + i \text{bei}_0 x;$$

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \text{ber}_1 x + i \text{bei}_1 x.$$

Нетрудно найти выражения для вещественных функций  $\text{ber } x$  и  $\text{bei } x$ , пользуясь разложением функций Бесселя в ряд. Например,

$$\begin{aligned} J_0(x\sqrt{-i}) &= J_0(xi\sqrt{i}) = \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 (-1)i}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 (-1)}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 i}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots = \\ &= \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots \right\} + i \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\text{ber}_0 x = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots; \quad (13)$$

$$\text{bei}_0 x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \quad (14)$$

Нетрудно убедиться подобным же образом, что

$$\text{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1! 2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2! 3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3! 4!} + \dots \right\}, \quad (15)$$

$$\text{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1! 2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2! 3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3! 4!} - \dots \right\}. \quad (16)$$

В приложениях встречаются также производные

$$\text{ber}'_0 x, \quad \text{bei}'_0 x,$$

причем

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \sqrt{-i} (\text{bei}'_0 x - i \text{ber}'_0 x). \quad (17)$$

Пользуясь введенными функциями, выражение (12) для тока можно записать в виде

$$j(r) = \frac{I_0 a}{2\pi R} \frac{\text{ber}_0 ar + i \text{bei}_0 ar}{\text{bei}'_0 ar - i \text{ber}'_0 ar},$$

или

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \left\{ \frac{(\text{ber}_0 \alpha r \text{bei}'_0 \alpha R - \text{bei}_0 \alpha r \text{ber}'_0 \alpha R)}{(\text{bei}'_0 \alpha R)^2 + (\text{ber}'_0 \alpha R)^2} + i \frac{(\text{bei}_0 \alpha r \text{bei}'_0 \alpha R + \text{ber}_0 \alpha r \text{ber}'_0 \alpha R)}{(\text{bei}'_0 \alpha R)^2 + (\text{ber}'_0 \alpha R)^2} \right\}. \quad (18)$$

Вычисляя абсолютную величину этого выражения, получим:

$$|j(r)| = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \sqrt{\frac{(\text{ber}_0 \alpha r)^2 + (\text{bei}_0 \alpha r)^2}{(\text{ber}'_0 \alpha R)^2 + (\text{bei}'_0 \alpha R)^2}}. \quad (19)$$

Величиной, характеризующей распределение тока по сечению, является отношение

$$\frac{|j(r)|}{|j(R)|} = \sqrt{\frac{(\text{ber}_0 \alpha r)^2 + (\text{bei}_0 \alpha r)^2}{(\text{ber}'_0 \alpha R)^2 + (\text{bei}'_0 \alpha R)^2}}. \quad (20)$$

Произведем расчет распределения тока по сечению для двух частот  $\omega_1 = 314$  (50 периодов в сек.),  $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$  ( $5 \cdot 10^5$  периодов в сек.).

Все изложенные выше выкладки были произведены в гауссовой симметричной системе. Поэтому при переходе к системе СГСЭ следует учесть, что  $\mu_{\text{СГСЭ}} = \mu_{\text{гаусс}} \frac{1}{c^2}$ . Все остальные величины, входящие в формулы (12), (18), (19) и (20), в обеих системах (гауссовой и СГСЭ) совпадают. Поэтому в системе СГСЭ

$$a^2 = 4\pi\mu\sigma\omega.$$

Для меди  $\sigma = 57 \cdot 10^5$  СГСЭ, поэтому  $\alpha_1 = 0,4444$  (для  $\omega_1$ ),  $\alpha_2 = 44,44$  (для  $\omega_2$ ). Вычислим отношение модулей токов (20) для низкой частоты  $\omega_1 = 314$  для двух значений  $r:r = 0$  и  $r = 0,5 R$ . При этом  $R$  положим равным единице.

Имея в виду<sup>1</sup>), что

$$\text{ber}_0 0 = 1,$$

$$\text{bei}_0 0 = 0,$$

$$\text{ber}_0 0,222 = 1 - 0,000036 + \dots = 0,999964,$$

$$\text{bei}_0 0,222 = 0,0123 - 0,000002 + \dots = 0,012300,$$

$$\text{ber}_0 0,444 = 1 - 0,00061 + \dots = 0,99939,$$

$$\text{bei}_0 0,444 = 0,493 - 0,0003 + \dots = 0,4930,$$

<sup>1)</sup> См. также Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, формулы, графики, таблицы, «Наука», 1964.

найдем, что

$$\left. \frac{j(0)}{j(R)} \right|_{R=1} = 0,9994, \quad \left. \frac{j(0,5R)}{j(R)} \right|_{R=1} = 0,9999,$$

т. е. при небольшой частоте ток распределяется по сечению приблизительно равномерно (скин-эффект отсутствует).

Рассмотрим теперь второй случай:  $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$ . Так как  $\alpha$  велико, то для расчета удобнее исходить не из разложений функций  $\operatorname{ber}$  и  $\operatorname{bei}$  в ряды, а из асимптотических формул

$$J_0(ar\sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ar}} e^{\frac{ar}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

$$J_0(ar\sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ar}} e^{\frac{ar}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{ar}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

откуда получаем, задаваясь значениями  $r = 0,9R$ ;  $R = 1$ :

$$\left| \frac{j(0,9R)}{j(R)} \right|_{R=1} = \sqrt{\frac{1}{0.9}} e^{-\frac{44}{\sqrt{2}}} \approx 0,047.$$

Этот результат свидетельствует о чрезвычайно быстром уменьшении плотности тока по мере углубления внутрь проводника при высоких частотах. Отметим в заключение, что скин-эффектом широко пользуются на практике для закалки металлов.

#### IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли

Проблемы, связанные с распространением радиоволн как в свободном пространстве, так и при наличии поверхностей различного рода, имеют огромное теоретическое и практическое значение. Этим вопросам посвящено чрезвычайно большое количество работ советских и иностранных авторов.

Мы рассмотрим задачу о влиянии земли на распространение радиоволн, излучаемых вертикальным диполем. При этом землю будем считать плоской<sup>1)</sup>.

Пусть над поверхностью земли на расстоянии  $h$  в точке  $P_0$  находится диполь, излучающий периодические колебания частоты  $\omega$ . Примем плоскость земли за плоскость  $z = 0$  и направим ось  $z$  по оси диполя (рис. 84). Положим,

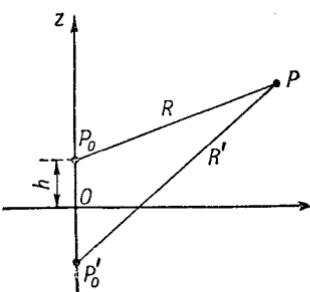


Рис. 84.

<sup>1)</sup> Эта задача была впервые решена Зоммерфельдом в 1909 г. Первонаучальное решение Зоммерфельда содержало ошибку, которая была исправлена В. А. Фоком.

что в атмосфере ( $z > 0$ )  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ ,  $\sigma_0 = 0$ . Предположим далее, что земля ( $z < 0$ ) характеризуется диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , проводимостью  $\sigma$ , а магнитная проницаемость  $\mu$  может быть принята равной единице;  $\epsilon$  и  $\sigma$  будем считать постоянными.

Наша задача заключается в отыскании напряженности поля, создаваемого диполем. Процесс распространения электромагнитных волн описывается уравнением Максвелла.

Как было показано в Приложении II к гл. V, решение уравнений Максвелла может быть сведено к решению волнового уравнения для поляризационного потенциала  $\Pi^1$ :

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0, \quad (1)$$

где

$$k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; & z > 0; \\ k_3^2 = \frac{\epsilon \omega^2 + i 4\pi \sigma \omega}{c^2}; & z < 0. \end{cases}$$

Потенциал  $\Pi$  связан с напряженностями поля соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi, \\ \mathbf{H} &= -i \frac{k^2}{k_0} \operatorname{rot} \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В нашем случае вектор  $\Pi$  направлен параллельно излучающему диполю

$$\Pi = (0, 0, \Pi_z); \quad \Pi_z = \Pi_z(r, z). \quad (3)$$

Положив

$$n^2 = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

получим:

$$k_3^2 = n^2 k_0^2.$$

Соотношения (2) и (3) дают:

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}; \quad H_\varphi = -ik_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \quad \text{при } z > 0, \quad (4)$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_3}{\partial z}; \quad H_\varphi = -\frac{ik_3^2}{k_0} \frac{\partial \Pi_3}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \quad \text{при } z < 0. \quad (5)$$

Чтобы получить граничные условия при  $z = 0$ , воспользуемся условием непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей полей. Эти условия, как показывают формулы

<sup>1)</sup> Так как рассматривается установившийся процесс, то временной множитель  $e^{-i\omega t}$  можно опустить,

(4) и (5), будут выполнены, если положить:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_3}{\partial z}; \quad \Pi_0 = n^2 \Pi_3 \quad \text{при } z=0. \quad (6)$$

Будем искать решение уравнения (1) при граничных условиях (6) в виде суперпозиции частных решений вида

$$J_0(\lambda r) e^{\pm \mu z} \quad (k^2 = \lambda^2 - \mu^2).$$

Для неограниченной области вместо дискретного спектра собственных значений  $\lambda$  получается непрерывный спектр. Поэтому решение  $\Pi$  можно искать в виде

$$\Pi = \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\pm \mu z} d\lambda; \quad (7)$$

знак у  $\mu$  должен быть выбран таким образом, чтобы обеспечивалась сходимость интеграла (7). Остающаяся пока неопределенной функция  $F(\lambda)$  представляет собой амплитудный множитель отдельных колебаний.

Воспользуемся интегральным представлением потенциала (см. Дополнение II, ч. I, § 5)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \\ (\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}). \quad (8)$$

Рассмотрим две различные области:

а) Воздух ( $z > 0$ ). Поле в этой области будет иметь вид

$$\Pi_0 = \Pi_{\text{перв}} + \Pi_{\text{втор}},$$

где

$$\Pi_{\text{перв}} = \frac{e^{ikR}}{R} \quad (9)$$

— потенциал поля первичного возбуждения, создаваемого симметрическим диполем, а  $\Pi_{\text{втор}}$  — потенциал поля вторичного возбуждения, создаваемого возникающими в земле токами.

Используя представления (7), (8) и (9), мы можем записать:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{\text{перв}} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{\text{втор}} &= \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $F(\lambda)$  — пока что неопределенная функция.

б) Земля ( $z < 0$ ). В этой области имеет место только вторичное возбуждение, которое мы можем записать в виде

$$\Pi_3 = \int_0^\infty F_3(\lambda) J_0(\lambda r) e^{\mu_3 z - \mu h} d\lambda, \quad (11)$$

где  $\mu_3^2 = k_3^2 - \lambda^2$ . Так как  $z < 0$ , то знак показателя экспоненты обеспечит сходимость интеграла.

Для определения функций  $F(\lambda)$  и  $F_3(\lambda)$  воспользуемся граничными условиями (6), которые дают:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu h} [\lambda - \mu F(\lambda) - \mu_3 F_3(\lambda)] d\lambda &= 0, \\ \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu h} [\lambda + \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_3(\lambda)] \frac{d\lambda}{\mu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Условия (12) будут выполнены, если мы положим

$$\left. \begin{aligned} \mu F(\lambda) + \mu_3 F_3(\lambda) &= \lambda, \\ \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_3(\lambda) &= -\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решая уравнение (13), найдем  $F(\lambda)$  и  $F_3(\lambda)$  в виде

$$\left. \begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 - \frac{2\mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} \right); \\ F_3(\lambda) &= \frac{2\lambda}{n^2 \mu + \mu_3}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Подставляя полученное выражение (14) в формулы (10) и (11), получим следующие выражения для поляризационного потенциала поля вертикального диполя:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_0 &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu|z+h|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} - \\ &\quad - 2 \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}; \\ \Pi_3 &= 2 \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{\mu_3 z - \mu h} \frac{\lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_3}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Обозначая через  $R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$  расстояние от точки наблюдения до диполя, через  $R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$  расстояние от точки наблюдения до зеркального отражения диполя в пло-