

**2. Принцип максимума.** Рассмотрим задачу (9) — (11). Разрешим уравнение (9) относительно  $y_0$  (см. рис. 88, а):

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_0 = \frac{1}{h_1^2}(y_1 + y_3) + \frac{1}{h_2^2}(y_2 + y_4) + \varphi_0, \quad x \in \omega_h. \quad (13)$$

Пусть  $0$  — нерегулярный узел (см. рис. 88, б). Тогда из уравнения  $\Lambda^*y + \varphi = 0$  следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_{1-}} \right) + \frac{1}{h_2} \left( \frac{y_2 - y_0}{h_2} - \frac{y_0 - y_4}{h_2} \right) &= -\varphi_0, \\ 2\left(\frac{1}{h_1 h_{1-}} + \frac{1}{h_2^2}\right)y_0 &= \frac{1}{h_1 h_1} y_1 + \frac{1}{h_2^2}(y_2 + y_4) + \tilde{\varphi}_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 + \frac{1}{h_1 h_{1-}} \mu(3)$ ,  $h_{1-}$  — расстояние между узлом  $0$  и граничным узлом  $3$ ,  $h_1 = 0,5(h_{1-} + h_1)$ . Из (13) и (14) видно, что обе формулы могут быть записаны в виде  $A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x)$  для всех  $x \in \omega_h = \omega_h + \overset{\circ}{\omega}_h$ , где суммирование проводится по всем узлам шаблона с центром в узле  $x$ , исключая сам узел  $x$ . Коэффициенты  $A(x)$  и  $B(x, \xi)$  удовлетворяют условиям  $A(x) > 0$ ,  $B(x, \xi) > 0$ ,

$$\sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) = A(x) \quad \text{при } x \in \overset{\circ}{\omega}_h.$$

Если  $y|_{\gamma_h} = 0$ , то по крайней мере один из коэффициентов  $B(x, \xi)$  в пограничной зоне  $\overset{\circ}{\omega}_h$  можно формально положить равным нулю, так что  $\sum_{\xi} B(x, \xi) = A(x) - D(x)$ ,  $D(x) > 0$ . Если, например, узел  $3$  (см. рис. 91, а) находится на  $\gamma_h$ , то  $D(x) = D(0) = \frac{1}{h_1 h_{1-}} \geq \frac{1}{h_1^2}$ , так как  $h_1 = 0,5(h_{1-} + h_1) \leq h_1$ . Если же два узла  $2$  и  $3$  (см. рис. 91, б) являются граничными, то  $D(x) = D(0) \geq \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}$ ,  $B(0, 2) = B(0, 3) = 0$ . Таким образом, при  $y|_{\gamma_h} = 0$  в  $\overset{\circ}{\omega}_h$  всегда выполнено условие

$$D(x) \geq \frac{1}{h^2}, \quad \text{где } h = \max(h_1, h_2). \quad (15)$$

Итак, рассмотрим задачу: требуется найти функцию  $y(x)$ , определенную на  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  и удовлетворяющую в  $\omega_h$  уравнению

$$\left. \begin{aligned} A(x)y(x) &= \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \\ A(x) &> 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) \leq A(x). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Справедлива следующая теорема (принцип максимума):

Если  $F(x) \leq 0$  всюду в  $\omega_h$ , то решение задачи (16) (не равное постоянной) не может принимать наибольшего положительного значения во внутренних узлах сетки  $\omega_h$ . Если же  $y(x) \not\equiv \text{const}$  и  $F(x) \geq 0$  в  $\omega_h$ , то  $y(x)$  не может принимать внутри  $\omega_h$  наименьшего отрицательного значения.

Доказательство. Пусть  $F(x) \leq 0$  во всех внутренних узлах. Допустим, что  $y(x)$  принимает положительное максимальное значение в некотором внутреннем узле. Так как  $y(x) \not\equiv \text{const}$ , то существует такая точка  $\bar{x} \in \omega_h$ , в которой  $y(\bar{x}) = \max y(x) = M_0 > 0$ , а в соседнем узле  $\xi \in \mathcal{W}'(\bar{x})$ , имеем  $y(\xi) < M_0$ . Уравнение (16) в узле  $\bar{x}$  перепишем в виде

$$\left[ A(\bar{x}) - \sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi) \right] y(\bar{x}) + \sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi) (y(\bar{x}) - y(\xi)) = F(\bar{x}). \quad (17)$$

Так как  $\sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi) (y(\bar{x}) - y(\xi)) \geq B(\bar{x}, \xi) (y(\bar{x}) - y(\xi)) > 0$ , то из (17) и (16) следует  $F(\bar{x}) > 0$ , что противоречит условию  $F(x) \leq 0$ . Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть доказывается аналогично.

Следствие 1. Если  $F(x) \geq 0$ ,  $x \in \omega_h$  и  $y|_{\gamma_h} \geq 0$ , то решение задачи (16) неотрицательно:  $y(x) \geq 0$  всюду в  $\bar{\omega}_h$ . В самом деле, пусть хотя бы в одном узле  $\bar{x} \in \omega_h$  функция  $y(x)$  отрицательна; тогда она должна принимать отрицательное наименьшее значение во внутреннем узле. Это невозможно, в силу принципа максимума (если только  $y(x) \not\equiv \text{const}$ ).

Следствие 2. Если  $F(x) \leq 0$ ,  $x \in \omega_h$  и  $y|_{\gamma_h} \leq 0$ , то  $y(x) \leq 0$ , для всех  $x \in \bar{\omega}_h$ .

Следствие 3. Однородное уравнение

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) y(\xi) \quad (18)$$

при однородном граничном условии  $y|_{\gamma_h} = 0$  имеет только тригонометрическое решение.

В самом деле при  $F \equiv 0$  следствия 1 и 2 дают соответственно  $y(x) \geq 0$ ,  $y(x) \leq 0$ , т. е.  $y(x) \equiv 0$ .

Таким образом, разностная задача (16) имеет единственное решение.

Следствие 4. Для решения однородного уравнения (18) верна оценка

$$\|y\|_0 \leq \|y\|_{0, \gamma}, \quad (19)$$

где  $\|y\|_0 = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|$ ,  $\|y\|_{0, \gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |y(x)|$  (решение уравнения (18) принимает наибольшее и наименьшее значение на границе  $\gamma_h$ ).

Имеет место следующая теорема сравнения:

Пусть  $y(x)$  — решение уравнения (16), а  $\bar{y}(x)$  — решение того же уравнения с правой частью  $\bar{F}(x) \geq 0$  и граничным значением  $\bar{y}|_{\gamma_h} \geq 0$ . Если выполнены условия  $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$  при  $x \in \omega_h$ ,  $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$  при  $x \in \gamma_h$ , то  $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$  для всех  $x \in \bar{\omega}_h$ .

Следствие 1 сразу дает  $\bar{y}(x) \geq 0$  всюду в  $\bar{\omega}_h$ . Функции  $u = \bar{y} + y$ ,  $v = \bar{y} - y$  удовлетворяют уравнению (16) с правыми частями  $F_u = \bar{F} + F$ ,  $F_v = \bar{F} - F$  и граничными значениями  $u|_{\gamma} = \bar{y} + y|_{\gamma}$ ,  $v|_{\gamma} = \bar{y} - y|_{\gamma}$ . Так как по условию  $F_u \geq 0$ ,  $u|_{\gamma} \geq 0$  и  $F_v \geq 0$ ,  $v|_{\gamma} \geq 0$ , то, в силу следствия 1,  $u \geq 0$  или  $y \geq -\bar{y}$ ,  $v \geq 0$  или  $y \leq \bar{y}$ , т. е.  $|y| \leq \bar{y}$  при  $x \in \omega_h$ .

**3. Оценка решения неоднородного уравнения.** Рассмотрим неоднородное уравнение

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (20)$$

с однородным граничным условием

$$y|_{\gamma} = 0.$$

Пусть выполнены условия

$$B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi} B(x, \xi) = A(x) - D(x), \quad D(x) \geq \delta > 0 \quad (21)$$

для всех  $x \in \omega_h$ .

Тогда для решения задачи (20), (21) верна оценка

$$\|y\|_0 \leq \frac{\|F\|_0}{\delta}. \quad (22)$$

В силу теоремы сравнения  $|y| \leq \bar{y}$ , где  $\bar{y}$  — решение задачи (20) с правой частью  $\bar{F} = |F|$ . Пусть  $\bar{y}(x)$  принимает наибольшее значение в узле  $\bar{x}$ . Так как  $\bar{y}(\bar{x}) > 0$ , то

$$A(\bar{x})\bar{y}(\bar{x}) = \sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi)\bar{y}(\xi) + |F(\bar{x})| \leq (A(\bar{x}) - D(\bar{x}))\bar{y}(\bar{x}) + |F(\bar{x})|,$$

$$\bar{y}(\bar{x}) \leq \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_0 \quad (\|\psi\|_0 = \max_{\bar{\omega}_h} |\psi|).$$

Учитывая, что  $\|y\|_0 \leq \bar{y}(\bar{x})$  и  $D \geq \delta$ , получаем (22). Заметим, что фактически нами получена оценка

$$\|y\|_0 \leq \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_0.$$

Предположим, что

$$D(x) \geq \delta > 0 \quad \text{при } x \in \omega_h^* \quad \text{и} \quad D(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \quad (23)$$

$$F(x) = 0 \quad \text{при } x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \quad F(x) = F^* \quad \text{при } x \in \omega_h^*. \quad (24)$$

Тогда для решения задачи (20), (23), (24) верна оценка

$$\|y\|_0 \leq \frac{1}{\delta} \|F^*\|_0. \quad (25)$$

В самом деле,  $\bar{y}(x) \geq 0$  в силу принципа максимума и не может иметь наибольшего значения в узлах  $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$ , в которых  $F(x) = 0$ . Предполагая, что  $\bar{x} \in \overset{\circ}{\omega}_h^*$  есть точка, в которой достигается максимум, получим оценку (25).

Наибольшие трудности при оценке решения задачи (21) возникают в случае  $D(x) = 0$  при  $x \in \omega_h$ . В этом случае строится мажорантная функция  $\bar{y}(x) \geq \|y\|_0$ , удовлетворяющая уравнению (20) с правой частью  $\bar{F}(x) \geq |F(x)|$ .

Итак, если выполнено условие  $D(x) \geq \delta > 0$ ,  $x \in \omega_h$ , то для решения задачи (20) — (21) верна оценка

$$\|y\|_0 \leq \|y\|_{0,\gamma} + \frac{\|F\|_0}{\delta}, \quad (26)$$

выражающая непрерывную зависимость решения от граничных данных и от правой части.

**4. Сходимость решения разностной задачи Дирихле.** Чтобы установить сходимость и порядок точности схемы (9) — (11), мы должны оценить решение задачи (12).

Погрешность аппроксимации в регулярных узлах  $\psi = (\Lambda u + \varphi) - (Lu + f) = O(|h|^2)$ , если  $u \in C^4$ , и в нерегулярных узлах  $\psi = \psi^* = O(|h|)$ .

Так как  $\|\psi^*\|_0 = O(|h|)$ , то для оценки  $z$  следует рассмотреть отдельно вклад в  $z$  за счет погрешности аппроксимации в нерегулярных узлах. Представим  $z$  в виде суммы  $z = \overset{\circ}{z} + z^*$ , где  $\overset{\circ}{z}$  и  $z^*$  — решение задачи

$$\Lambda \overset{\circ}{z} = -\overset{\circ}{\psi}, \quad x \in \omega_h, \quad \overset{\circ}{z}|_{\gamma_h} = 0, \quad \overset{\circ}{\psi} = \begin{cases} \psi, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ 0, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h^*; \end{cases} \quad (27)$$

$$\Lambda z^* = -\psi^*, \quad x \in \omega_h, \quad z^*|_{\gamma_h} = 0, \quad \psi^* = \begin{cases} 0, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ \psi, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h^*. \end{cases} \quad (28)$$

Так как  $z|_{\gamma_h} = 0$ , то  $D(x) \geq \frac{1}{h^2} = \delta > 0$  при  $x \in \overset{\circ}{\omega}_h^*$  и  $D(x) \geq 0$  при  $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$ .

Пользуясь (25), получаем

$$\|z^*\|_0 \leq h^2 \|\psi^*\|_0. \quad (29)$$

Для оценки  $\overset{\circ}{z}$  воспользуемся теоремой сравнения. Построим мажорантную функцию

$$U(x) = K(R^2 - r^2), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

где  $R$  — радиус круга с центром в точке  $(0, 0) \in G$ , содержащего область  $G$ ,  $K = \text{const} > 0$ . Вычислим разностные производные

$$\Lambda_1 r^2 = (r^2)_{\bar{x}_1, x_1} = (x_1^2)_{\bar{x}_1, x_1} = \frac{(x_1 + h_1)^2 - 2x_1^2 + (x_1 - h_1)^2}{h_1^2} = 2,$$

$\Lambda_2 r^2 = 2$  при  $x \equiv \omega_h$ . В нерегулярных узлах также имеем  $\Lambda_1 r^2 = 2$ . Таким образом,

$$\Lambda U = -K \Lambda r^2 = -4K \quad \text{при } x \equiv \omega_h = \overset{\circ}{\omega}_h + \omega_h^*.$$

Выберем  $K$  так, чтобы  $\|\psi\|_0 \leqslant 4K$ . Для этого достаточно положить  $K = \frac{1}{4}\|\overset{\circ}{\psi}\|_0$ . Учитывая, что  $U \geqslant 0$  при  $x \equiv \gamma_h$ ,  $U \leqslant KR^2 = = \frac{1}{4}R^2\|\overset{\circ}{\psi}\|_0$  и пользуясь теоремой сравнения, находим

$$\|\overset{\circ}{z}\|_0 \leqslant \|U\|_0 \leqslant \frac{1}{4}R^2\|\overset{\circ}{\psi}\|_0. \quad (30)$$

Объединяя неравенства (29) и (30) и учитывая, что  $\|z\|_0 \leqslant \|\overset{\circ}{z}\|_0 + \|z^*\|_0$ , получаем

$$\|z\|_0 \leqslant h^2\|\psi^*\|_0 + \frac{1}{4}R^2\|\overset{\circ}{\psi}\|_0. \quad (31)$$

Тем самым доказана теорема:

Для решения задачи (12) имеет место оценка (31).

Из (31) видно, что если  $u \in C^{(2)}(\bar{G})$ , т. е. решение задачи имеет непрерывные в замкнутой области  $\bar{G} = G + \Gamma$  вторые производные, так что  $\|\psi\|_0 = \rho(|h|)$ ,  $\|\psi^*\|_0 = \rho(|h|)$ , где  $\rho(|h|) \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ , то схема (9) — (11) сходится:

$$\|z\|_0 = \|y - u\|_0 = \rho(|h|). \quad (32)$$

Если  $u \in C^{(4)}(G)$ , то справедливы оценки

$$\|\overset{\circ}{\psi}\|_0 \leqslant \frac{M_4}{12}|h|^2, \quad \|\psi^*\|_0 \leqslant \frac{2}{3}M_3h, \quad \text{где } M_s = \max_{\alpha, \bar{G}} \left| \frac{\partial^s u}{\partial x_\alpha^s} \right|, \quad (33)$$

( $a = 1, 2, s = 3, 4$ ). Применяя неравенство (31), видим, что для решения задачи (12) верна оценка

$$\|z\|_0 = \|y - u\|_0 \leqslant \frac{2}{3}M_3h^3 + \frac{M_4R^2}{48}|h|^2,$$

т. е. схема (9) — (11) равномерно сходится со скоростью  $O(|h|^2)$  (имеет 2-й порядок точности).

Заметим, что если  $y$  на  $\overset{\circ}{\omega}_h^*$  задавать при помощи линейной интерполяции (см. (7)), то  $\psi^* = O(1)$  и оценка (31) дает

$$\|y - u\|_0 = O(|h|^2), \quad (34)$$

т. е. и в этом случае схема (9) имеет 2-й порядок точности.

**5. Решение разностных уравнений методом простой итерации.** Для определения решения разностной задачи Дирихле (9) — (11) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений большого порядка, равного числу внутренних узлов сетки. При точном решении этой системы известными методами линейной алгебры требуется большое число арифметических действий и большой объем оперативной памяти машины. Поэтому систему уравнений решают итерационными методами, учитывающими специальный вид матрицы системы.

В этом пункте мы рассмотрим метод простой итерации (метод Якоби). Пусть  $h_1 = h_2 = h$ . Запишем уравнение (9) на шаблоне (рис. 88, a). В регулярном узле имеем:

$$v_0^{s+1} = \frac{s}{4} \left[ \frac{h}{h^2} v_1 + \frac{s}{h} (v_2 + v_4) + h^2 \Phi_0 \right], \quad (35)$$

где  $s = 0, 1, 2, \dots$  — номер итерации. В нерегулярном узле (см. рис. 91, a) в случае, когда узел  $\beta \in \gamma_h$ :

$$v_0^{s+1} = \frac{1}{4} \left[ \frac{h}{h^2} \frac{s}{h} v_1 + \frac{h}{h} \left( \frac{s}{h} (v_2 + v_4) \right) + \frac{h^2 h}{4h} \Phi_0 + \frac{h^2}{4h^2} \mu_3 \right], \quad (36)$$

где  $\mu_3 = \mu(\beta)$  — значение  $y|_{\gamma_h} = \mu$  в узле  $\beta$ .

При  $s = 0$  выбирается начальное приближение  $\overset{\circ}{v} = u_0$ . Пусть  $y$  — точное решение задачи (9) — (11),  $v^s$  —  $s$ -я итерация. Итерационный процесс сходится, если разность  $v^s - y = z^s$  стремится (по некоторой норме) к нулю при  $s \rightarrow \infty$ . Подставляя  $v^s = y + z^s$  в (35) и учитывая, что  $y_0 = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + h^2 \Phi_0)$ , получим для  $z$  однородное уравнение

$$z_0^{s+1} = \frac{s}{4} \left[ \frac{h}{h^2} z_1 + \frac{s}{h} (z_2 + z_4) \right], \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \quad (37)$$

$$z_0^{s+1} = \frac{1}{4} \left[ \frac{h}{h^2} \frac{s}{h} z_1 + \frac{h}{h} \left( \frac{s}{h} (z_2 + z_4) \right) \right], \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_h^*, \quad (38)$$

с условиями  $z|_{\gamma_h} = 0$  и начальным условием  $\overset{\circ}{z} = y - u_0$ , где  $\overset{\circ}{z}$  есть погрешность, допускаемая при выборе начального приближения.

Чтобы оценить  $\overset{\circ}{z}$ , надо выбрать норму  $\|\cdot\|$ , например:

$$\|z\|_{0, \overset{\circ}{\omega}} = \max_{x \in \overset{\circ}{\omega}_h} |z|, \quad \|z\|_2 = \left( \sum_{\overset{\circ}{\omega}_h} z^2 (i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2 \right)^{1/2}.$$

Будем говорить, что метод итераций (35) сходится, если  $\|v - \overset{s}{v}\| \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . Обычно задают точность  $\varepsilon > 0$ , с которой надо найти приближенное решение; при этом ставится требование

$$\|v - y\| \leq \varepsilon \|u_0 - y\|. \quad (39)$$

Если итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии, т. е.  $\|v - y\| \leq \rho \|v_{s-1} - y\| \leq \rho^s \|u_0 - y\|$ ,  $0 < \rho < 1$ , то условие (39) будет выполнено, если  $\rho^s < \varepsilon$ . Отсюда следует, что для уменьшения начальной невязки  $\|u_0 - y\|$  в  $\frac{1}{\varepsilon}$  раз достаточно сделать  $s_0 \geq \ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{\rho}$  итераций.

Метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии по норме  $\|\cdot\|_2$  (в среднем) в случае, когда  $\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2)$  — квадрат и  $h_1 = h_2 = h$ , знаменатель  $\rho = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2} < 1$  (при  $h < \frac{1}{2}$ ) зависит от шага  $h$  сетки.

При малых  $h$   $\ln \frac{1}{\rho} \approx \frac{\pi^2 h^2}{2}$  и, следовательно,  $s_0 \approx \frac{2}{\pi^2 h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ , т. е. число итераций пропорционально числу узлов  $N = \frac{1}{h^2}$  сетки. Так как на вычисление одной итерации по формулам (35), (36) затрачивается  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$  действий, то, чтобы получить решение задачи (9) — (11) с точностью  $\varepsilon$ , надо затратить  $O\left(\frac{1}{h^4} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$  арифметических действий. Заметим, что погрешность в определении решения исходной задачи есть сумма погрешности  $O(h^2)$  самой разностной схемы (9) и погрешности  $O(\varepsilon)$  метода итераций для решения (9). Чтобы обе эти погрешности были одного порядка, естественно выбирать  $\varepsilon = O(h^2)$ . Таким образом, для метода простой итерации

$$s_0 = O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{h}\right).$$

В настоящее время имеются методы, которые обеспечивают точность  $\varepsilon$ :

а) для прямоугольника с числом итераций  $s_0 \approx \ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}$  и общим объемом работы  $O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ;

б) для непрямоугольных областей с  $s_0 \approx \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}$  и общим объемом работы  $O\left(\frac{1}{h^3} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ .

Это — методы переменных направлений, которые мы рассмотрим в § 4, п. 3.

Сравнение с ними показывает, что метод простой итерации является слишком трудоемким. Поэтому, несмотря на свою простоту, он в настоящее время почти не используется при решении разностных задач для эллиптических уравнений.

#### § 4. Разностные методы решения задач с несколькими пространственными переменными

**1. Многомерные схемы.** В § 2 мы рассматривали разностные схемы для решения задачи Дирихле в случае двух измерений ( $x_1, x_2$ ). При написании разностных схем для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad (1)$$

первым шагом является аппроксимация оператора Лапласа. Пусть

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \quad \Lambda_a y = y_{x_a x_a}, \quad a = 1, 2, \quad (2)$$

— пятиточечный оператор на  $\omega_h$  с шагами  $h_1$  и  $h_2$ .

По аналогии с § 2, п. 2 двухслойные схемы для (1) возьмем в виде

$$\frac{y^{l+1} - y^l}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{l+1} + (1 - \sigma) y^l) + \varphi, \quad (3)$$

$$y^{l+1} = y_{i_1, i_2}^{l+1} = y(i_1 h_1, i_2 h_2, t_{l+1}).$$

Пусть  $\bar{G}$  — область на плоскости  $(x_1, x_2)$ , ограниченная кривой  $\Gamma$ . Введем в  $\bar{G} = G + \Gamma$  сетку  $\bar{\omega}_h$ , описанную в § 3. Будем рассматривать задачу

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t), \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_{\Gamma} = \mu(x, t). \end{array} \right\} \quad (4)$$

Ей поставим в соответствие разностную схему (3) с краевыми условиями

$$y|_{\gamma_h} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (5)$$

По аналогии с § 2 устанавливается, что схема (3) устойчива при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{8\tau} \text{ (если } h_1 = h_2 = h).$$

Отсюда следует, что явная схема ( $\sigma = 0$ )

$$\frac{y^{l+1} - y^l}{\tau} = \Lambda y^l + \varphi^{l+1} \quad \text{или} \quad y^{l+1} = y^l + \tau(\Lambda y^l + \varphi^{l+1}) \quad (6)$$

условно устойчива при  $\tau \leq \frac{h^2}{4}$  (в одномерном случае при  $\tau \leq h^2/2$ , см. § 2). Неявные схемы безусловно устойчивы при  $\sigma \geq 1/2$ . В случае трех измерений, когда  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , в (3) нужно подставить

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \Lambda_3 y, \quad \Lambda_a y = y_{\tilde{x}_a x_a}, \quad a = 1, 2, 3.$$

Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \text{ (при } h_1 = h_2 = h_3 = h).$$

Явная схема ( $\sigma = 0$ ) устойчива при  $\tau \leq h^2/6$ . Порядок аппроксимации  $\psi = (\Lambda u + \varphi - u_t) - \left( Lu + f - \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{1+\frac{1}{2}}$  зависит от  $\sigma$ :  $\psi = O(|h|^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = 0,5$ ,  $\psi = O(|h|^2 + \tau)$  при  $\sigma \neq 0,5$   $\left( |h|^2 = \sum_{a=1}^p h_a^2, p = 2, 3 \right)$  при любом числе измерений.

Краевые условия на  $y_h$  ставятся так же, как и в § 3 для задачи Дирихле. В нерегулярных узлах  $\omega_h^*$  оператор  $\Lambda$  ( $\Lambda \sim \Delta$ ) пишется на неравномерной сетке. Для схемы с опережением ( $\sigma = 1$ ) справедлив принцип максимума. Она равномерно сходится со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ .

Не представляет труда написание (по аналогии с § 2 и 3) схем повышенного порядка  $O(|h|^4 + \tau^2)$  аппроксимации; например, при  $p = 2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ) схема  $O(|h|^4 + \tau^2)$  имеет вид

$$y_{\bar{t}} = \Lambda_1(\sigma_1 y + (1 - \sigma_1) \ddot{y}) + \Lambda_2(\sigma_2 y + (1 - \sigma_2) \ddot{y}) \quad (f = 0),$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} - \frac{h_a^2}{12\tau}, \quad a = 1, 2 \quad (G - \text{прямоугольник}).$$

В случае уравнений с переменными коэффициентами для получения схем можно воспользоваться методом баланса на сетке  $\omega_h$ . Пусть, например, дано уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_p), \quad L = L_1 + L_2 + \dots + L_p, \\ L_a u &= \frac{\partial}{\partial x_a} \left( k_a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right), \quad a = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (7)$$

Пусть  $p = 2$ . Возьмем объем  $\left( \left( i_1 - \frac{1}{2} \right) h_1 \leq x_1 \leq \left( i_1 + \frac{1}{2} \right) h_1, \left( i_2 - \frac{1}{2} \right) h_2 \leq x_2 \leq \left( i_2 + \frac{1}{2} \right) h_2, t_j \leq t \leq t_{j+1} \right)$  и напишем для него

уравнение баланса тепла

$$\int \int_g (u^{j+1} - u^j) dx_1 dx_2 = \\ = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_C (W_1 dx_2 + W_2 dx_1) + \int \int_g \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x, t) dx_1 dx_2,$$

где  $g = ((i_1 - \frac{1}{2})h_1 \leq x_1 \leq (i_1 + \frac{1}{2})h_1, (i_2 - \frac{1}{2})h_2 \leq x_2 \leq (i_2 + \frac{1}{2})h_2)$  — прямоугольник,  $C$  — его граница,  $W_a = -k_a \frac{\partial u}{\partial x_a}$  — тепловой поток по направлению оси  $Ox_a$ . Заменяя интегралы и потоки разностными выражениями по аналогии с п. 8 § 2, приходим к схеме вида:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(t^{j+\frac{1}{2}})(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j) + \varphi^{j+1} \quad (8)$$

или

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sigma(\Lambda y)^{j+1} + (1 - \sigma)(\Lambda y)^j + \varphi^{j+1}, \quad (9)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_a y = (a_a y_{\bar{x}_a})_{x_a}, \quad (10)$$

т. е.  $\Lambda_a$  есть аналог разностного оператора  $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$ , аппроксимирующего  $Lu = (ku')'$  (см. § 2, п. 7). Коэффициент  $a_\alpha$  определяется из выражений вида (61) § 2, например:

$$a_1 = (a_1)_{i_1, i_2} = k_1 \left( \left( i_1 - \frac{1}{2} \right) h_1, i_2 h_2, t \right),$$

$$a_2 = (a_2)_{i_1, i_2} = k_2 \left( i_1 h_1, \left( i_2 - \frac{1}{2} \right) h_2, t \right) \text{ и т. д.}$$

Для  $\varphi = \varphi^{j+1}$  можно взять формулу  $\varphi^{j+1} = f(i_1 h_1, i_2 h_2, t_{j+\frac{1}{2}})$ . Если коэффициенты  $k_\alpha$  имеют разрывы при  $x_\alpha = \text{const}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , то простейшее выражение для  $a_\alpha$  имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{4} [k_1(i_1 h_1 - 0, i_2 h_2 - 0, t) + k_1(i_1 h_1 - 0, i_2 h_2 + 0, t) + \\ + k_1(i_1 h_1 + 0, i_2 h_2 + 0, t) + k_1(i_1 h_1 + 0, i_2 h_2 - 0, t)]$$

и аналогично для  $a_2$ .

Для полученных схем (8) справедливы результаты § 2, п. 8.

**2. Экономичные схемы.** При решении методом сеток многомерных уравнений большое значение имеет объем вычислительной работы, т. е. число арифметических действий для решения задачи с требуемой точностью. Посмотрим с этой точки зрения на схемы, полученные в предыдущем пункте.

Пусть  $G$  — квадрат ( $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$ ),  $\omega_h = \{(i_1 h, i_2 h), i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N\}$  — сетка с шагом  $h$ . Она имеет  $(N-1)^2 = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$  внутренних узлов. Рассмотрим явную схему (6) и неявную схему (3) при  $\sigma = 1$ . Обе схемы имеют один и тот же порядок точности. Число  $Q$  действий для определения  $y^{j+1}$  во всех узлах  $\omega_h$  на новом слое  $t = t_{j+1}$  пропорционально числу  $(N-1)^2$  узлов сетки  $\omega_h$ , т. е.

$$Q_{\text{яв}} = O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

В случае неявной схемы (3) при  $\sigma = 1$  для определения  $y^{j+1}$  нужно решить систему  $(N-1)^2$  уравнений. Это требует не менее чем  $Q_{\text{неяв}} = O\left(\frac{1}{h^4}\right)$  действий, т. е. значительно больше, чем для явной схемы.

С другой стороны, неявная схема ( $\sigma = 1$ ) устойчива при любых  $\tau$  и  $h$ , а явная схема устойчива лишь при  $\tau \leq \frac{1}{4}h^2$ .

Возникает вопрос: нельзя ли найти такие схемы, которые сочетали бы лучшие качества явной (объем работы  $Q = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ ) и неявной (безусловная устойчивость) схем?

Такие схемы называют экономичными.

В последние годы предложено много экономичных схем для различных задач математической физики<sup>1)</sup>. Экономичные схемы позволили найти численное решение ряда сложнейших задач физики и техники, в отношении которых еще несколько лет назад были сомнения в возможности их приближенного решения даже с использованием самых совершенных быстродействующих вычислительных машин.

В случае одного пространственного переменного, как мы видели в § 2, неявные схемы приводят к системе уравнений (105), которые решаются методом прогонки. При этом для нахождения  $y^{j+1}$  требуется  $O\left(\frac{1}{h}\right)$  операций. Рассмотрим сетку  $\bar{\omega}_h$  с шагом  $h = 1/N$  в квадрате  $G(0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1)$ . Сетку можно представить как совокупность узлов, расположенных на «строках»  $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N$ , или как совокупность узлов, рас-

<sup>1)</sup> D. W. Peaceman, H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Industr. Math. Soc. 3, № 1, 28—41 (1955); J. Douglas, On numerical integration of  $u_{xx} + u_{yy} = u_t$  implicit methods. J. Industr. Math. Soc. 3, 42—65 (1955); Н. Н. Яненко, Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, Докл. АН СССР 125, № 6, 1207—1210 (1959); Е. Г. Дьяконов, Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2, № 4 (1962); А. А. Самарский, Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2, № 5 (1962).

положенных на «столбцах»  $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N$ . Всего имеется  $N + 1$  строка и  $N + 1$  столбец. Число узлов в каждой строке (столбце) равно  $N + 1$ .

Если на каждой строке (столбце) решать задачу вида (105) из § 2 методом прогонки при фиксированном  $i_2(i_1)$ , то для нахождения решения на всех строках (столбцах), т. е. во всех узлах сетки, потребуется число действий  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ , пропорциональное числу узлов  $\bar{\omega}_h$ . Основная идея экономичных методов и состоит в последовательном решении одномерных задач вида (105) из § 2 вдоль строк и вдоль столбцов.

Наиболее четко выражает эту идею продольно-поперечная схема (неявный метод переменных направлений):

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j + f^{j+\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{0.5\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + f^{j+\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Переход от слоя  $j$  к слою  $j + 1$  совершается в два этапа с шагами  $0.5\tau$ : сначала решается уравнение (11), неявное по направлению  $x_1$  и явное по  $x_2$ , затем уравнение (12), явное по  $x_1$  и неявное по  $x_2$ . Значение  $y^{j+\frac{1}{2}}$  является промежуточным.

Формулируем краевые и начальные условия для схемы (11) — (12) в случае, когда  $G = \{0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$  — квадрат,  $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$  — сетка с шагами  $h_1, h_2$ . Если краевые условия в (4) не зависят от  $t$ , т. е.  $\mu = \mu(x)$ , то полагаем  $y^{j+\frac{1}{2}}|_{y_h} = y^{j+1}|_{y_h} = \mu(x)|_{y_h}$ . Если же  $\mu = \mu(x, t)$  зависит от  $t$ , то для промежуточного значения  $y^{j+\frac{1}{2}}$  краевые условия при  $i_1 = 0, N_1$  задаются по формуле

$$y^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mu^{j+1} + \mu^j) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_2(\mu^{j+1} - \mu^j) = \bar{\mu} \text{ при } i_1 = 0, N_1, \quad (13)$$

для  $y^{j+1}$  ставятся обычные условия

$$y^{j+1} = \mu^{j+1} \text{ при } i_2 = 0, N_2. \quad (14)$$

Присоединяя сюда начальное условие

$$y^0 = u_0(x) \text{ при } j = 0, \quad (15)$$

получаем разностную задачу (11) — (15), соответствующую задаче (4).

Продольно-поперечная схема (11) — (12) безусловно устойчива (при любых  $\tau$  и  $h$ ) и имеет точность  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Подставим в (11), (12) вместо  $\Lambda_1 y$  и  $\Lambda_2 y$  их выражения

$$\Lambda_1 y = (\Lambda_1 y)_{i_1 i_2} = \frac{1}{h_1^2}(y_{i_1-1} - 2y_{i_1} + y_{i_1+1}),$$

$$\Lambda_2 y = (\Lambda_2 y)_{i_1 i_2} = \frac{1}{h_2^2}(y_{i_2-1} - 2y_{i_2} + y_{i_2+1})$$

(пишем только тот индекс ( $i_1$  или  $i_2$ ), который меняется). Тогда для  $y^{j+\frac{1}{2}} = \bar{y}$  и  $y^{j+1} = y$  получим краевые задачи

$$\left. \begin{array}{l} 0,5\gamma_1 y_{i_1-1}^{j+\frac{1}{2}} - (1 + \gamma_1) y_{i_1}^{j+\frac{1}{2}} + 0,5\gamma_1 y_{i_1+1}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{i_1}^{j+\frac{1}{2}}, \\ i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1 \quad (0 < i_2 < N_2), \\ y_{0, i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mu} |_{x_1=0}, \quad y_{N_1, i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mu} |_{x_1=N_1}, \quad \gamma_1 = \frac{\tau}{h_1^2}, \\ F_{i_1}^{j+\frac{1}{2}} = 0,5\gamma_2 (y_{i_2-1}^j + y_{i_2+1}^j) + (1 - \gamma_2) y_{i_2}^j + 0,5\tau f^{j+\frac{1}{2}}; \end{array} \right\} \quad (16)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} 0,5\gamma_2 y_{i_2-1}^{j+1} - (1 + \gamma_2) y_{i_2}^{j+1} + 0,5\gamma_2 y_{i_2+1}^{j+1} = -F_{i_2}^{j+1}, \\ i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \quad (0 < i_1 < N_1), \\ y_{i_1, 0}^{j+1} = \mu^{j+1} |_{x_2=0}, \quad y_{i_1, N_2}^{j+1} = \mu^{j+1} |_{x_2=N_2}, \quad \gamma_2 = \tau/h_2^2, \\ F_{i_2}^{j+1} = 0,5\gamma_1 (y_{i_1-1}^{j+\frac{1}{2}} + y_{i_1+1}^{j+\frac{1}{2}}) + (1 - \gamma_1) y_{i_1}^{j+\frac{1}{2}} + 0,5\tau f^{j+\frac{1}{2}}. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Здесь  $\bar{\mu}$  определяется по формуле (13). Пусть  $y^j$  и, следовательно,  $F^{j+\frac{1}{2}}$  известны. Фиксируем  $i_2 = 1$  и на этой строке по формулам прогонки решаем краевую задачу (16). Полагая затем  $i_2 = 2, \dots, N_2 - 1$ , последовательно найдем  $y^{j+\frac{1}{2}}$  во всех узлах  $\omega_h$ . После этого вычисляем  $F^{j+\frac{1}{2}}$  и вдоль столбцов  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$  решаем краевые задачи (17). В результате получаем значение  $y^{j+1}$  на новом слое. При переходе от слоя  $j + 1$  к слою  $j + 2$  процедура повторяется.

Из сказанного выше ясно, что при переходе от слоя  $j$  к слою  $j + 1$  затрачивается  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$  арифметических действий. Чтобы найти  $y^{j_0}$  при  $t_0 = j_0\tau$  по начальным данным, требуется, очевидно,  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)j_0 = O\left(\frac{1}{h^2\tau}\right)$  операций, т. е. число операций пропорционально числу использованных узлов пространственно-временной сетки  $\omega_{h\tau} = \{(i_1 h_1, i_2 h_2, j\tau)\}$ .

В случае уравнения (7) с переменными коэффициентами в (11) — (12) следует подставить, согласно (67) § 2, выражения  $\Lambda_a y = (a_a(x, t_{j+0,5}) y_{\bar{x}_a})_{\bar{x}_a}$ ,  $a = 1, 2$ ,  $L_a u - \Lambda_a u = O(h_a^2)$ .

Операторы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  действуют только вдоль строк и столбцов соответственно. Поэтому схемой (11) — (12) можно пользоваться и для произвольной области, полагая, например,  $\bar{\mu} = 0,5(\mu^j + \mu^{j+1})$ . Если  $G = G_1$  область, составленная из правильных треугольников, то при

$$\bar{\mu} = 0,5(\mu^j + \mu^{j+1}) - 0,25\tau L_2(\mu^{j+1} - \mu^j)$$

продольно-поперечная схема имеет точность  $O(\tau^2 + |h|^2)$ .

Схему (11) — (12) нельзя формально обобщить на случай трех пространственных переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Так построенная схема неустойчива.

Универсальным методом, пригодным для решения уравнения теплопроводности с переменными и даже разрывными коэффициентами в произвольной области  $G$  любого числа измерений, является локально-одномерный метод. В основе его лежит понятие суммарной аппроксимации схемы. Пусть дано уравнение (7). Будем искать его приближенное решение  $v^{j+1}$  при  $t = t_{j+1}$ , последовательно (при  $a = 1, 2, \dots, p$ ) решая одномерные уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_{(a)}}{\partial t} = L_a v_{(a)} + f_a, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad \sum_{a=1}^p f_a = f, \quad a = 1, 2, \dots, p, \quad (18)$$

с условиями  $v_{(a)}^j = v_{(a-1)}^{j+1}$ ,  $a = 2, \dots, p$ ,  $v_{(1)}^j = v^j$  и естественными краевыми условиями. Решением этой задачи, которую мы условно запишем в виде  $L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow L_p$ , является  $v^{j+1} = v_{(p)}^{j+1}$ . Зная  $v^0 = u_0(x)$ , находим  $v^{j+1}$ .

Каждое из уравнений номера  $a$  заменим двухслойной шестисточечной схемой с весом  $\sigma_a$  (при этом  $\frac{\partial v_{(a)}}{\partial t} \approx \frac{v_{(a)}^{j+1} - v_{(a)}^j}{\tau}$ ,  $L_a \sim \Lambda_a$ ,  $f_a \sim \Phi_a$ ) вида

$$\frac{v_{(a)}^{j+1} - v_{(a)}^j}{\tau} = \Lambda_a [\sigma_a v_{(a)}^{j+1} + (1 - \sigma_a) v_{(a)}^j] + \Phi_a.$$

Учитывая, что  $v_{(a)}^j = v_{(a-1)}^{j+1}$ , заменяя  $v$  на  $y$  и опуская индекс  $j+1$ , получим последовательность схем для одномерных уравнений теплопроводности (одномерных схем), которую мы назовем локально-одномерной схемой и условно запишем в виде  $\Lambda_1^{(\sigma_1)} \rightarrow \Lambda_2^{(\sigma_2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_p^{(\sigma_p)}$ . Напишем локально-одномерную схему для случая  $\sigma_a = 1$  ( $\Lambda_1^{(1)} \rightarrow \Lambda_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_p^{(1)}$ ):

$$\frac{y_{(a)} - y_{(a-1)}}{\tau} = \Lambda_a y_{(a)} + \Phi_a, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (19)$$

$$a = 1, 2, \dots, p, \quad y_{(0)} = y^j, \quad y_{(p)} = y^{j+1}.$$

Здесь  $\Lambda_a y = (a_a(x, t^*) y_{\bar{x}_a})_{x_a}$ ,  $\Phi_a = \Phi_a(x, t^*)$ , где  $t^*$  — любое значение  $t$  на отрезке  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ , например  $t^* = t_{j+1}$ . Правые части  $\Phi_a$  выбираются так, что  $\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_p = f(x, t^*) + O(|h|^2 + \tau)$ , например  $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0$ ,  $\Phi_p = f$ .

Формулируем краевые условия для  $y_{(a)}$ . Пусть  $G$  —  $p$ -мерная область в пространстве  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\Gamma$  — ее граница.

Построим по аналогии с § 3, п. 2 в  $G + \Gamma$  сетку  $\bar{\omega}_h$ . Возьмем любую точку  $x \in \bar{\omega}_h$  и проведем через нее прямую  $C_a$ , параллельную оси  $Ox_a$ . Рассмотрим тот простейший случай, когда  $C_a$  пересекает  $\Gamma$  в двух точках  $P_a^-$  и  $P_a^+$ . Множество всех точек  $P_a^-$  и  $P_a^+$  обозначим  $\gamma_h^a$ ,  $a = 1, 2, \dots, p$ . Если  $G = G_0 = \{0 \leq x_a \leq l_a, a = 1, 2\}$  — прямоугольник, то  $\gamma_h^a$  состоит из узлов  $(i_1 h_1; i_2 h_2)$ , лежащих на сторонах  $x_a = 0$  ( $i_a = 0$ ) и  $x_a = l_a$  ( $i_a = N_a$ ),  $a = 1, 2$ . Краевые условия для  $y_{(a)}$ , очевидно, задаются только на  $\gamma_h^a$ :

$$y_{(a)} = \mu(x, t^*) \quad \text{при } x \in \gamma_h^a, \quad a = 1, 2, \dots, p. \quad (20)$$

В начальный момент  $t = 0$  задано условие

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (21)$$

Условия (19) — (21) однозначно определяют  $y^j$  при всех  $j = 1, 2, \dots$  и  $x \in \bar{\omega}_h$ . Для нахождения  $y_{(a)}$  мы получаем уравнение  $y_{(a)} - \tau \Lambda_a y_{(a)} = F_a = y_{(a-1)} + \tau \varphi_a$  с краевыми условиями (20). Эта разностная задача решается методом прогонки вдоль строк или столбцов.

Схема (19) аппроксимирует уравнение (7) в суммарном смысле: погрешность аппроксимации  $\psi$  для локально-одномерной схемы есть сумма погрешностей аппроксимации  $\psi_a$  на решении  $u = u(x, t)$  для одномерных схем (19) номера  $a$ :

$$\psi = \sum_{a=1}^p \psi_a = O(|h|^2 + \tau), \quad \text{хотя все } \psi_a = O(1). \quad (22)$$

Схема (19) безусловно устойчива и равномерно сходится:

$$\max_{\bar{\omega}_h} |y^j - u^j| = O(|h|^2 + \tau). \quad (23)$$

В случае двух измерений ( $p = 2$ ) схема (19) имеет вид

$$\frac{1}{\tau} (y_{(1)} - y^j) = \Lambda_1 y_{(1)} + \varphi_1, \quad \frac{1}{\tau} (y^{j+1} - y_{(1)}) = \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi_2,$$

так как  $y_{(0)} = y^j$ ,  $y_{(2)} = y^{j+1}$ .

В схеме (19) не все направления равноправны. Симметризованная локально-одномерная схема

$$0,5\Lambda_1^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow 0,5\Lambda_p^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_p^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(1)},$$

как показывают численные эксперименты, обладает большей точностью по сравнению со схемой (19) с шагом  $0,5\tau$ .

Можно построить ряд симметричных схем, имеющих второй порядок точности по  $\tau$ . Оказывается, что схема (11) — (12)

также является симметричной локально-одномерной схемой вида

$$0,5\Lambda_2^{(0)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(0)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(1)}$$

с

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,5\bar{f}, \quad \varphi_3 = 0,5\bar{f}, \quad \varphi_4 = 0.$$

В этом можно убедиться, если исключить  $y_{(1)}$  и  $y_{(3)}$  (сложив 1-е и 2-е, 3-е и 4-е уравнения) и обозначить  $y_{(2)} = y^{j+1/2}$ .

Напишем одну из симметричных локально-одномерных схем с  $\psi = O(|h|^2 + t^2)$  для трех измерений ( $p = 3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ):

$$0,5\Lambda_1^{(0)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(0,5)} \rightarrow \Lambda_3^{(0,5)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(0,5)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(1)}. \quad (24)$$

Эта схема, изученная И. В. Фрязиновым, является обобщением схемы (11) — (12) на трехмерный случай.

Нетрудно написать локально-одномерную схему для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial x_a} \left( k_a(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) + f(u). \quad (25)$$

Достаточно заменить каждую из одномерных схем (19) любой из схем, рассмотренных в § 2, п. 12, для одномерных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left( k_a(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) + f_a(u), \quad \sum_{a=1}^p f_a(u) = f(u). \quad (26)$$

Так, например, для двумерного случая  $p = 2$  достаточно в (19) заменить  $\Lambda_1 y_{(1)}$  и  $\Lambda_2 y^{j+1}$  выражениями ( $y^{j+1} = y_{(2)}$  при  $p = 2$ )

$$\Lambda_1 y_{(1)} = (a_1(y_{(1)}) y_{(1)}|_{\bar{x}_1})_{\dot{x}_1}, \quad \Lambda_2 y^{j+1} = (a_2(y^{j+1}) y^{j+1}|_{\dot{x}_2})_{\ddot{x}_2}, \quad (27)$$

$$a_1(y) = k_1 \left( \frac{y_{i_1-1} + y}{2} \right), \quad a_2(y) = k_2 \left( \frac{y_{i_2-1} + y}{2} \right)$$

и положить  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = f(y_{(1)})$ .

На равномерной сетке  $\Lambda_\alpha y$ , очевидно, имеет вид ( $\alpha = 1, 2$ )

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha^2} \left[ (a_\alpha(y))_{i_\alpha+1} (y_{i_\alpha+1} - y) - a_\alpha(y) (y - y_{i_\alpha-1}) \right]. \quad (28)$$

Для определения  $y_{(1)}$  и  $y^{j+1}$  получаем нелинейные трехточечные задачи, которые решаются по аналогии с п. 12, § 2 методом итераций с использованием формул прогонки для каждой итерации. Если в (27) положить  $a_1 = a_1(y^j)$  и  $a_2 = a_2(y_{(1)})$ , то получим для определения  $y_{(1)}$  и  $y^{j+1}$  линейные краевые задачи, которые решаются сразу путем прогонки по строкам и по столбцам соответственно.

Приведем два примера.

Пример 1. Расчет двумерной температурной волны. Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k_2(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad k_a(u) = \kappa_a u^{\sigma_a}, \quad a = 1, 2, \quad (29)$$

с параметрами  $\sigma_1 = 4$ ,  $\kappa_1 = 4$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\kappa_2 = 0,25$  и для расчета используем точное решение

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 0,5 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x_1 - 2x_2)}} & \text{при } t \geq x_1 + 2x_2, \\ 0 & \text{при } t \leq x_1 + 2x_2. \end{cases} \quad (30)$$

Сетка грубая:  $h_1 = h_2 = 1$ ; число узлов  $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 20 = 600$ . Из решения взяты начальные значения, т. е.  $u(x_1, x_2, 0) \equiv 0$ , и краевые условия на прямых  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = 30$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_2 = 20$ .

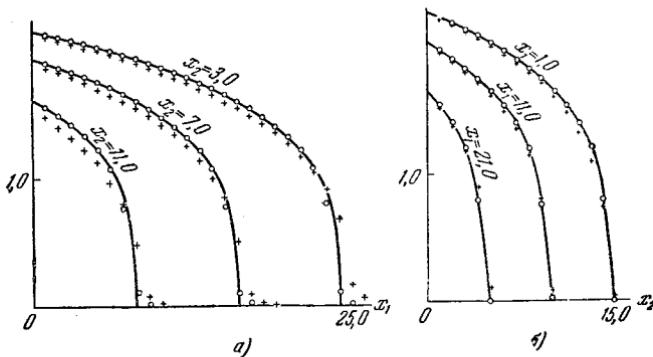


Рис. 92.

Расчеты проводились по локально-одномерной схеме (19) с операторами  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , определяемыми формулами (27): а) шагом  $\tau = 0,2$ ; б) шагом  $\tau = 1,0$ ; в) шагом  $\tau = 2,0$ . Некоторые результаты при  $t = 30$  нанесены на рис. 92, где крестиками обозначены результаты варианта в), точками — варианта а), сплошные линии — это аналитическое решение<sup>1)</sup>.

Пример 2. Расчет задачи о фазовом переходе (задачи Стефана). Предположим, что имеется две фазы 1, 2 с коэффициентами теплоемкости  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$  и теплопроводности  $k_1(u)$ ,  $k_2(u)$ . В каждой из фаз температура  $u(x, t)$  удовлетворяет

<sup>1)</sup> См. ссылку на стр. 596.

уравнению теплопроводности

$$c_s(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial x_a} \left( k_s(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) + f(x, t), \quad s = 1, 2, \quad (31)$$

$$x = (x_1, \dots, x_p), \quad p = 1, 2, 3,$$

где  $f(x, t)$  — плотность тепловых источников. На границе раздела фаз температура  $u(x, t) = u^*$  постоянна и равна температуре  $u^*$  их фазового перехода, тепловые потоки разрывны и их разность равна  $\lambda v$ , где  $\lambda$  — теплота фазового перехода,  $v$  — скорость фронта границы фаз. В одномерном случае условия на границе  $x = \xi(t)$  раздела фаз имеют вид

$$u(\xi + 0, t) = u(\xi - 0, t) = u^*, \quad k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - k_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} = \lambda \frac{d\xi}{dt}, \quad (32)$$

если в фазе 1  $u < u^*$ , а в фазе 2  $u > u^*$ .

Вводя  $\delta$ -функцию Дирака, запишем уравнение (31) в виде

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u^*)) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial x_a} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) + f, \quad (33)$$

$$c = \begin{cases} c_1, & u < u^*, \\ c_2, & u > u^*, \end{cases} \quad k = \begin{cases} k_1, & u < u^*, \\ k_2, & u > u^*. \end{cases}$$

Условия на границе фаз (в частности, условия (32) при  $p = 1$ ) следуют из уравнения (33).

Для решения задачи Стефана применяется метод сглаживания:  $\delta$ -функция приближенно заменяется  $\delta$ -образной функцией  $\delta(u - u^*, \Delta)$ , отличной от нуля только на интервале  $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$  и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{u^*-\Delta}^{u^*+\Delta} \delta(u - u^*, \Delta) du = 1.$$

Вводя эффективную теплоемкость

$$\tilde{c}(u) = c(u) + \lambda \delta(u - u^*, \Delta)$$

и эффективный коэффициент  $\tilde{k}(u)$ , совпадающий с  $k_1(u)$  при  $u < u^* - \Delta$  и с  $k_2(u)$  при  $u > u^* + \Delta$ , мы получаем для определения  $u$  квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\tilde{c}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{a=1}^p \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \tilde{k}(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right) + f \quad (34)$$

с соответствующими краевыми условиями на границе  $\Gamma$  области  $G$ , в которой ищется решение.

Так как «размазывание» проводится по температуре, то оно применимо для любого числа измерений и любого числа фаз.

Для решения уравнения (34) применяется локально-одномерная схема (19), (27).

Отметим, что  $\delta(u - u^*, \Delta)$  выбирается таким образом, чтобы  $\tilde{c}(u)$  вблизи  $u = u^*$  имело наиболее простой вид: «ступеньки», параболы и т. д.

Были получены численные решения следующих задач, имеющих точные аналитические решения<sup>1)</sup>:

1) задачи с косым плоским фронтом (рис. 93);

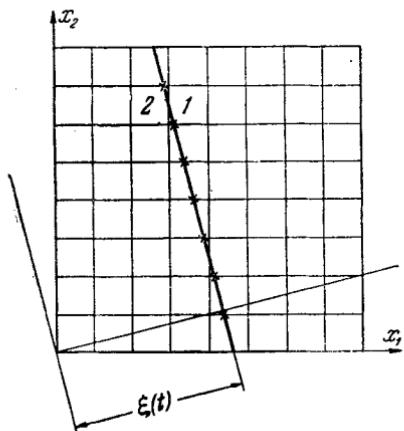


Рис. 93.

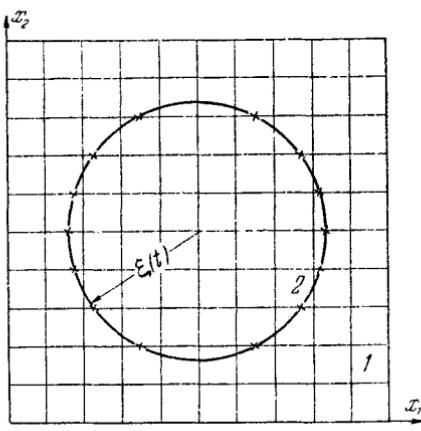


Рис. 94.

2) осесимметрической задачи, в которой граница фаз есть окружность (рис. 94).

Решение этих задач проводилось в прямоугольной системе координат. Результаты расчета показаны на рис. 93 и 94. Сплошные линии — границы раздела фаз, крестики — расчетные точки, в которых  $u = u^*$ .

**3. Итерационные методы переменных направлений для решения разностной задачи Дирихле.** Решение уравнения теплопроводности  $\partial u / \partial t = \Delta u$  с однородными краевыми условиями стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. гл. III и VI) и, следовательно,

<sup>1)</sup> А. А. Самарский, Б. Д. Моисеенко, Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 5, № 5 (1965); см. также Б. М. Будак, Е. Н. Соловьева, А. Б. Успенский, Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана, там же.

решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

с правой частью и краевыми значениями, не зависящими от  $t$  (со стационарными неоднородностями), при  $t \rightarrow \infty$  стремится к решению задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (35)$$

Этим же свойством обладают и решения разностных задач (33), соответствующих уравнению теплопроводности. Поэтому разностные схемы для уравнения теплопроводности используются в качестве итерационных методов для приближенного решения разностной задачи Дирихле

$$\Lambda v = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad (36)$$

рассмотренной в § 3.

Метод простой итерации § 3, п. 5 есть явная схема (6) для уравнения теплопроводности (1) (при  $f = f(x)$ ) с фиксированным шагом  $\tau = \frac{1}{4} h^2$  (в случае, когда  $G = G_0$  — прямоугольник и  $h_1 = h_2 = h$ ). При этом  $y^j$  — итерация номера  $j$ ,  $y(x, 0) = u_0(x)$  — начальное приближение. Число итераций для явной схемы  $s_0 = s_0(\epsilon) = O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\epsilon}\right)$ . Значительно меньшего числа итераций требует продольно-поперечная схема (неявная схема переменных направлений):

$$y^{s+\frac{1}{2}} - \tau_{s+\frac{1}{2}} \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} = y^s + \tau_{s+\frac{1}{2}} \Lambda_2 y^s + \tau_{s+\frac{1}{2}} f, \quad y^{s+\frac{1}{2}}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} y^{s+1} - \tau_{s+1} \Lambda_2 y^{s+1} = \\ = y^{s+\frac{1}{2}} + \tau_{s+1} \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \tau_{s+1} f, \quad y^{s+1}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad y^0 = y_0(x). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь  $s$  — номер итерации ( $s = 0, 1, \dots, s_0 - 1$ ),  $y^{s+\frac{1}{2}}$  — промежуточное значение (подитерация),  $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}$ ,  $\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}$ ,  $\tau_{s+\frac{1}{2}}$  и  $\tau_{s+1}$  — итерационные параметры, зависящие от номера итерации. Для нахождения  $y^{s+\frac{1}{2}}$  применяется прогонка по строкам, для  $y^{s+1}$  — по столбцам. Параметры  $\tau_{s+\frac{1}{2}}$  и  $\tau_{s+1}$  выбираются так, чтобы число итераций  $s_0 = s_0(\epsilon)$  было минимальным. В случае, когда  $G = G_0 = (0 \leq x_a \leq l_a, a = 1, 2)$  — прямоугольник, задача о выборе оптимального набора параметров  $\{\tau_{s+\frac{1}{2}}\}$  и  $\{\tau_{s+1}\}$  решена.

Пусть

$$\delta_a = \frac{4}{h_a^2} \sin^2 \frac{\pi h_a}{2l_a} \quad \text{и} \quad \Delta_a = \frac{4}{h_a^2} \cos^2 \frac{\pi h_a}{2l_a}$$

— наименьшее и наибольшее собственные значения оператора  $\Lambda_a$  ( $a = 1, 2$ ). Проведем замену

$$\tau_{s+\frac{1}{2}} = \frac{m\omega_{s+1} + r}{1 + p\omega_{s+1}}, \quad \tau_{s+1} = \frac{m\omega_{s+1} - r}{1 - p\omega_{s+1}}, \quad (39)$$

где  $p$  и  $r$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} p &= \frac{\kappa - \xi}{\kappa + \xi}, \quad \kappa = \frac{\Delta_1 - \delta_1}{\Delta_2 + \delta_1} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_2 + \delta_1)(\Delta_1 + \delta_2)}}, \\ r &= \frac{1}{2\Delta_1 \Delta_2} (\Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2)p), \quad m = r + \frac{1-p}{\Delta_1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Оценим число итераций  $s_0(\epsilon)$  по формуле

$$s_0(\epsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\epsilon} \ln \frac{4}{\eta}, \quad \text{где } \eta = \frac{1-\xi}{1+\xi}. \quad (41)$$

Зная  $s_0$ , вычисляем параметры

$$\omega_j = \frac{(1+20)(1+\theta^{\sigma_j})}{20^{0.5\sigma_j}(1+\theta^{1-\sigma_j}+\theta^{1+\sigma_j})}, \quad j = 1, 2, \dots, s_0, \quad (42)$$

где

$$\theta = \frac{1}{16} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2\right), \quad \sigma_j = \frac{2j-1}{2s_0}, \quad j = 1, 2, \dots, s_0,$$

после чего по формулам (39) находим  $\tau_{s+\frac{1}{2}}$  и  $\tau_{s+1}$  («набор параметров по Жордану»).

Применяется и другой, более грубый, способ выбора параметра  $\omega_j$  — циклический набор параметров с  $n_0$  параметрами в цикле и  $k_0$  циклов, так что  $\omega_{j+kn_0} = \omega_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_0$ . Параметры  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_0}$  образуют геометрическую прогрессию  $\omega_{j+1} = q\omega_j$ , знаменатель которой  $q = 0,16$ ,

$$n_0 = \left[ \ln \frac{1}{\eta} / \ln \frac{1}{q} \right] + 1, \quad k_0 = \left[ \ln \frac{1}{\epsilon} / \ln \frac{1}{\bar{\rho}} \right] + 1,$$

где  $[a]$  — целая часть числа  $a > 0$ ,  $\bar{\rho} = 0,186$ .

При выборе параметров обоими способами для  $s_0(\epsilon)$  верна оценка  $s_0 = O(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\epsilon})$ , где  $h = \min(h_1, h_2)$ , но циклический набор приводит к несколько большему числу итераций. Зато такого типа наборы можно строить в случае трех измерений.

Для схемы  $O(|h|^4)$  при  $p = 2, 3$  также можно указать наборы параметров, при которых  $s_0 = O(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\epsilon})$ .

В случае областей более сложной формы пользуются схемой (37) — (38) с постоянными параметрами  $\tau^{(1)} = \tau_{s+\frac{1}{2}}$  и  $\tau^{(2)} = \tau_{s+1}$ .

Пусть, например,  $G = G_1$  — ступенчатая область, составленная из прямоугольников со сторонами, параллельными осям

координат,  $l_\alpha$  — диаметр области  $G_1$  по направлению  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) и можно ввести сетку  $\bar{\omega}_h$  — равномерную по  $x_1$  и  $x_2$  с шагами  $h_1$  и  $h_2$ . Собственные значения оператора  $\Delta_a y = y_{\bar{x}_{\alpha x_\alpha}}$  лежат на интервале  $(\delta_\alpha, \Delta_\alpha)$ ,

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}.$$

Полагая  $\delta_1 + c_0 = \delta'_1$ ,  $\Delta_1 + c_0 = \Delta'_1$ ,  $\delta_2 - c_0 = \delta'_2$ ,  $\Delta_2 - c_0 = \Delta'_2$  и определяя  $\omega = (\delta_2 \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1) / (\delta'_1 + \delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2)$  из условия  $\delta'_1 \Delta'_1 = \delta'_2 \Delta'_2$ , получим для  $\tau^{(1)}$  и  $\tau^{(2)}$  формулы

$$\tau^{(1)} = \frac{\omega}{1 + \omega c_0}, \quad \tau^{(2)} = \frac{\omega}{1 - \omega c_0}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta'_1 \Delta'_1}} = \frac{1}{\sqrt{\delta'_2 \Delta'_2}}. \quad (43)$$

Число итераций  $s_0 = \left[ \ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{\rho} \right] + 1$ , где

$$\rho = (1 + \sqrt{\eta'_1})^{-1} (1 - \sqrt{\eta'_1}) \cdot (1 - \sqrt{\eta'_2}) (1 + \sqrt{\eta'_2})^{-1},$$

$$\eta'_\alpha = \delta'_\alpha / \Delta'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\text{т. е. } s_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Метод переменных направлений (37) — (38) с постоянными параметрами  $\tau^{(1)} = \tau_{s+\frac{1}{2}}$  и  $\tau^{(2)} = \tau_{s+1}$  пригоден и в случае областей более сложной формы, а также для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. В формулах (43) изменяются лишь выражения для  $\delta_\alpha$  и  $\Delta_\alpha$ .

Однако продольно-поперечная схема (37) — (38) применима лишь для двух измерений. По числу итераций ей эквивалентна двухпараметрическая попеременно-треугольная схема («схема бегущего счета» или «явный метод переменных направлений»), пригодная для любого числа измерений и для области сложной формы и для уравнений с переменными коэффициентами. Эта схема может быть записана в виде

$$y^{s+\frac{1}{2}} + \omega R_1 y^{s+\frac{1}{2}} = y^s + \omega R_2 y^s + \omega^2 R_1 R_2 y^s + \tau (\Lambda y^s + \varphi) = F^s, \quad (44)$$

$$y^{s+1} + \omega R_2 y^{s+1} = y^{s+\frac{1}{2}} =$$

$$= F^{s+\frac{1}{2}}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad y^{s+\frac{1}{2}}|_{\gamma_h} = y^{s+1}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad (45)$$

где

$$R_1 \dot{y} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \quad R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{x_\alpha},$$

$p$  — число измерений. Для простоты изложения предполагаем, что  $G = G_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, \dots, p\}$  —  $p$ -мерный

параллелепипед, сетка  $\tilde{\omega}_h$  равномерна по каждому  $x_\alpha$ ,

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\tilde{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Параметры  $\omega$  и  $\tau$  находятся по формулам

$$\omega = \frac{2}{V\delta\Delta}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{где } \gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\omega}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad (46)$$

а  $\delta$  и  $\Delta$  — границы спектра оператора  $\Lambda$ , равные

$$\delta = 4 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = 4 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}.$$

Поясним алгоритм нахождения  $y^{s+1/2}$  и  $y^{s+1}$  из (44)–(45) для  $p = 2$ . Из (44)–(45) при  $p = 2$  находим

$$y^{s+1/2} = K \left( \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha^2} y^{s+1/2}_{t_\alpha-1} + F^s \right), \quad y^{s+1/2}|_{\tilde{\omega}_h} = \mu(x), \quad K = \left( \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha^2} + 1 \right)^{-1}, \quad (47)$$

$$y^{s+1} = K \left( \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha^2} y^{s+1}_{t_\alpha+1} + F^{s+1/2} \right), \quad y^{s+1}|_{\tilde{\omega}_h} = \mu(x). \quad (48)$$

Пусть  $G = G_0 = (0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2)$ . Счет  $y^{s+1/2}$  начинается из левого нижнего угла  $(0, 0)$  и идет либо по строкам, либо по столбцам. Счет  $y^{s+1}$  начинается из верхнего правого угла  $(l_1, l_2)$  и ведется либо по строкам, либо по столбцам. В самом деле, значение в узле  $(h_1, h_2)$  сразу находится по формуле (47), так как  $y^{s+1/2}(h_1, 0) = \mu(h_1, 0)$  и  $y^{s+1/2}(0, h_2) = \mu(0, h_2)$  известны. Зная  $y^{s+1/2}(h_1, h_2)$ , можно найти  $y^{s+1/2}(h_1, 2h_2)$  или  $y^{s+1/2}(2h_1, h_2)$ , и т. д. Таким образом,  $y^{s+1/2}$  и  $y^{s+1}$  находятся во всех узлах  $x \in \tilde{\omega}_h$  по рекуррентным формулам (47)–(48) с затратой числа действий, пропорционального числу узлов. Число итераций есть величина  $O\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta}} \ln \frac{1}{\epsilon}\right) = O\left(\frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\epsilon}\right)$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Более подробно см. А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, глава VIII, «Наука», 1971. Там же дан список литературы.

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**1. Введение.** Метод разделения переменных для уравнений с частными производными приводит к задаче Штурма — Лиувилля. Для уравнений с постоянными коэффициентами и граничными условиями первого рода, которые рассматриваются в гл. II, III, V, мы получаем задачу на собственные значения, или задачу Штурма — Лиувилля:

найти значения  $\lambda$ , при которых однородное уравнение  $\Delta v + \lambda v = 0$  в области  $T$  с однородным условием  $v|_{\Sigma} = 0$  на границе  $\Sigma$  имеет нетривиальные решения  $v(P) \not\equiv 0$  (собственные функции).

Если  $T$  — отрезок  $0 \leq x \leq l$ , прямоугольник ( $0 \leq x \leq l_1$ ,  $0 \leq y \leq l_2$ ) или параллелепипед ( $0 \leq x \leq l_1$ ,  $0 \leq y \leq l_2$ ,  $0 \leq z \leq l_3$ ), то собственные функции  $v_n(P)$  выражаются через тригонометрические функции.

Если  $T$  — круг, цилиндр или шар, то для нахождения собственных функций вводятся новые специальные функции — цилиндрические и сферические функции.

Рассмотрим отдельные случаи.

1. Круг  $0 \leq r \leq r_0$ . В полярных координатах  $(r, \varphi)$

$$\Delta_2 v + \lambda v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad 0 < r < r_0,$$

$$v|_{r=r_0} = 0, \quad v \not\equiv 0. \quad (1)$$

Функцию  $v$  ищем в виде  $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ . Подставим  $v = R\Phi$  в уравнение и разделим переменные:

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \quad \text{где } \mu = \text{const.}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left( \lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad R(r_0) = 0.$$

В силу однозначности решения  $\Phi(\varphi)$  должна быть периодической функцией, т. е.  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ . Это условие дает  $\mu = n^2$ , где  $n$  — целое число. Полагая  $x = \sqrt{\lambda}r$ , приходим к уравнению цилиндрических функций или уравнению Бесселя

$n$ -го порядка:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad \text{или} \quad y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (2)$$

причем  $R(r) = y(\sqrt{\lambda} r)$ . При  $n = 0$  получаем уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + y = 0 \quad \text{или} \quad y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0,$$

которое соответствует случаю решений задачи (1), обладающих осевой симметрией.

Решения уравнения (2) называют цилиндрическими функциями. К уравнению (2) приводят также задачи для уравнения Лапласа и волнового уравнения в случае, когда область  $T$  есть круговой цилиндр.

2. Шар  $0 \leqslant r \leqslant r_0$ . Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad v|_{r=r_0} = 0. \quad (3)$$

В сферических координатах

$$\Delta v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} v, \quad \Delta_{\theta, \varphi} v = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \quad (4)$$

Положим  $v = R(r)w(\theta, \varphi)$  и проведем разделение переменных:

$$\frac{(r^2 R')' + \lambda r^2 R}{R} = - \frac{\Delta_{\theta, \varphi} w}{w} = \mu,$$

откуда следует

$$\Delta_{\theta, \varphi} w + \mu w = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 R')' + \left( \lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad R(r_0) = 0. \quad (6)$$

Подстановка  $x = \sqrt{\lambda} r$ ,  $y = R/\sqrt{x}$  приводит (6) к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left( 1 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0, \quad v^2 = \mu - \frac{1}{4}.$$

Для функции  $w(\theta, \varphi)$ , определенной на сфере, мы получили уравнение (5), которое имеет ограниченное решение (сферические функции) только при  $\mu = n(n+1)$ . Таким образом, при разделении переменных для оператора Лапласа в сферической системе координат мы приходим к сферическим функциям. В частном случае, когда  $w = w(\theta)$  не зависит от  $\varphi$ , уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d}{ds} \left( (1 - s^2) \frac{dw}{ds} \right) + \mu w = 0, \quad \text{где} \quad s = \cos \theta, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1. \quad (7)$$

Это уравнение Лежандра, имеющее только при  $\mu = n(n+1)$  ограниченное решение (полиномы Лежандра). Сферические функции выражаются через производные полиномов Лежандра и тригонометрические функции.

В квантовой механике часто встречаются полиномы Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

**2. Общее уравнение теории специальных функций.** Уравнения для простейших специальных функций могут быть записаны в виде

$$Ly + \lambda \rho(x) y = 0, \quad a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \quad (8)$$

$$Ly = \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y, \quad k(x) \geq 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Простейшая краевая задача  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = y(l) = 0$ , соответствующая  $a = 0$ ,  $b = l$ ,  $q = 0$ ,  $k = \rho = \text{const}$ , определяет тригонометрические функции. Рассмотрим уравнения для других специальных функций.

1) Уравнение Бесселя (2), или  $(xy')' + \left( \lambda x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0$ , соответствует  $k(x) = x$ ,  $\rho(x) = x$ ,  $q(x) = \frac{n^2}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = r_0$ .

2) При  $k(x) = 1 - x^2$ ,  $\rho = 1$ ,  $q = 0$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$  получаем уравнение Лежандра

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0. \quad (9)$$

3) Уравнение присоединенных функций Лежандра

$$[(1 - x^2)y']' - \frac{m^2}{1 - x^2}y + \lambda y = 0 \quad (10)$$

соответствует  $k(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) = \frac{m^2}{1 - x^2}$ ,  $\rho = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

4) Уравнение Чебышева — Эрмита

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0 \quad \text{или} \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (11)$$

соответствует  $k(x) = e^{-x^2}$ ,  $q(x) = 0$ ,  $\rho(x) = e^{-x^2}$ ,  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ .

5) Уравнение Чебышева — Лагерра

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0 \quad \text{или} \quad y'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0 \quad (12)$$

соответствует  $k(x) = xe^{-x}$ ,  $q = 0$ ,  $\rho = e^{-x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = \infty$ .

Характерной особенностью указанных уравнений является обращение в нуль коэффициента  $k(x)$ , по крайней мере, на одном из концов интервала  $(a, b)$ . Это свойство  $k(x)$ , как будет показано ниже, играет важную роль для постановки краевых задач для уравнения (8).

Рассмотрим поведение решений уравнения (8) вблизи особой точки, в которой  $k(x)$  обращается в нуль.

**3. Поведение решений в окрестности  $x = a$ , если  $k(a) = 0$ .**  
Рассмотрим случай, когда  $a$  конечно.

Если в уравнении (8)  $q(x) - \lambda\varphi(x)$  заменить функцией  $q(x)$ , то все результаты, полученные ниже для уравнения

$$Ly = (k(x)y')' - q(x)y = 0, \quad k(x) > 0 \text{ при } a < x < b, \quad (8')$$

будут справедливы и для уравнения (8).

**Лемма 1.** Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — два линейно-независимых решения уравнения (8'), коэффициент которого  $k(x)$  имеет вид

$$k(x) = (x - a)\varphi(x), \quad \varphi(a) \neq 0, \quad (13)$$

где  $\varphi(x) > 0$  — непрерывная на  $(a, b)$  функция. Если  $y_1(x)$  — ограниченное решение, представимое в виде

$$y_1(x) = (x - a)^n u(x), \quad n \geq 0, \quad (14)$$

где  $u(x)$  — непрерывная на  $(a, b)$  функция и  $u(a) \neq 0$ , то второе решение  $y_2(x)$  при  $x \rightarrow a$  является неограниченным.

Заметим, что  $y_2(x)$  можно представить в виде квадратуры через линейно-независимое решение  $y_1(x)$ . В самом деле, из  $0 = y_2 Ly_1 - y_1 Ly_2 = [k(y_2 y'_1 - y_1 y'_2)]'$  следует, что вронскиан функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  равен  $y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = C/k(x)$ , где  $C \neq 0$ , так как  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линейно-независимы. После деления на  $y_1^2$  получим  $(y_2/y_1)' = C/k y_1^2$ . Интегрируя это уравнение от  $x_0$  до  $x$ , получим

$$y_2(x) = y_1(x) \left[ \int_{x_0}^x \frac{C da}{k(a) y_1^2(a)} + C_1 \right], \quad \text{где } C_1 = \text{const.}$$

В силу линейной независимости  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  можно считать  $C_1 = 0$ . Кроме того, можно положить  $C = 1$ , так как решение однородного уравнения определено с точностью до постоянного множителя. В результате будем иметь

$$\bar{y}_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{da}{k(a) y_1^2(a)},$$

причем  $x_0$  выберем так, чтобы  $y_1(a)$  не обращалось в нуль на интервале  $a < \alpha < x_0$ .

Подставляя вместо  $k(x)$  и  $y_1(x)$  их выражения и пользуясь теоремой о среднем, найдем (заменив  $\tilde{y}_2$  на  $y_2$ ):

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (x-a)^n u(x) \int_{x_0}^x \frac{da}{(a-a)^{2n+1} \varphi(a) u^2(a)} = \\ &= \frac{(x-a)^n u(x)}{\psi(x^*)} \int_{x_0}^x \frac{da}{(a-a)^{2n+1}} = \\ &= \frac{(x-a)^n u(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \frac{-1}{2n(a-a)^{2n}} \Big|_{x_0}^x & \text{при } n > 0, \\ \ln(a-a) \Big|_{x_0}^x & \text{при } n = 0, \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

где  $\psi = \varphi(x) u^2(x)$ ,  $x^* \in (x, x_0)$ . Представим  $y_2(x)$  в виде

$$y_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{u(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} -\frac{1}{2n(x-a)^n} & \text{при } n > 0, \\ \ln(x-a) & \text{при } n = 0; \end{cases} \\ f_2(x, x_0) &= \frac{u(x)(x-a)^n}{\psi(x^*)} \begin{cases} \frac{1}{2n(x_0-a)^{2n}} & \text{при } n > 0, \\ -\ln(x_0-a) & \text{при } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $f_2(x, x_0)$  при  $x \rightarrow a$  остается ограниченной, а  $|f_1(x)| \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow a$  либо как  $\frac{1}{(x-a)^n}$ , либо как  $|\ln(x-a)|$ .  
Фактически доказана следующая

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1. Если  $y_1(a) \neq 0$ , т. е.  $n = 0$ , то  $y_2(x)$  имеет при  $x = a$  логарифмическую особенность:

$$y_2(x) \sim \ln(x-a) \quad \text{при } y_1(a) \neq 0 \quad (n=0).$$

Если  $y_1(x)$  имеет при  $x = a$  нуль  $n$ -го порядка:  $y_1(x) = (x-a)^n u(x)$ ,  $n > 0$ , то  $y_2(x)$  имеет при  $x = a$  полюс порядка  $n$ :

$$y_2(x) \sim (x-a)^{-n}, \quad \text{если } y_1(x) \sim (x-a)^n, \quad n > 0.$$

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия леммы 1 и коэффициент  $q(x)$  либо ограничен, либо стремится к  $\infty$  при  $x \rightarrow a$ , так что

$$q(x) = \frac{q_0(x)}{(x-a)^\sigma}, \quad \sigma \geq 0, \quad q_0(a) \neq 0,$$

$q_0(x)$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция. Тогда для ограниченного решения  $y_1(x)$  вида (14) выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} k(x) \frac{dy_1}{dx}(x) = 0, \quad (16)$$

если, кроме того, имеет место неравенство

$$n > \sigma - 1.$$

В самом деле, фиксируем некоторое значение  $x_1$ ,  $a < x_1 < b$ , и проинтегрируем (8') от  $x$  до  $x_1$ ,  $a < x < x_1$ :

$$k(x)y'_1(x) = k(x_1)y'_1(x_1) - \int_x^{x_1} q(\alpha)y_1(\alpha)d\alpha = Q(x).$$

Подставляя сюда выражения для  $y_1(x)$  и  $q(x)$ , найдем:

$$Q(x) = k(x_1)y'_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{q_0(\alpha)u(\alpha)}{(a-\alpha)^{\sigma-n}} d\alpha, \quad n \geq 0.$$

Отсюда видно, что  $Q(x)$  — непрерывная на отрезке  $a \leq x \leq x_1$  функция, если  $\sigma - n < 1$  или  $n > \sigma - 1$ . Переходя к пределу при  $x \rightarrow a$ , видим, что существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = Q(a)$  и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow a} k(x)y_1(x) = Q(a).$$

Покажем, что  $Q(a) = 0$ . Для этого выразим  $y_1(x)$  через  $Q(x)$ :

$$y_1(x) = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\alpha)}{k(\alpha)} d\alpha = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\alpha)}{(a-\alpha)\varphi(\alpha)} d\alpha.$$

Отсюда видно, что  $y_1(x)$  может быть ограничена в точке  $x = a$  лишь при условии  $Q(a) = 0$ , откуда и следует (16).

**4. Постановка краевых задач.** Перейдем к постановке краевых задач для уравнения

$$Ly + \lambda \rho y = 0 \quad \text{и} \quad Ly = 0 \quad (17)$$

в промежутке  $(a, b)$ , на одном или обоих концах которого  $k(x)$  обращается в нуль. Если  $k(a) = 0$  и выполнено условие (13), то при  $x = a$  мы будем требовать ограниченности вида (14) решения уравнений (17). При этом не требуется, чтобы решение  $y(x)$  при  $x = a$  принимало заданное значение.

Общее решение уравнений (17) есть  $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ , где  $y_1$  и  $y_2$  — любые линейно-независимые решения уравнения (17),  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Если  $y_1(x)$ ,

удовлетворяет условию ограниченности (14) при  $x = 0$ , то  $y_2(x)$  при  $x \rightarrow a$  обращается в бесконечность (лемма 1). Поэтому из требования ограниченности (14), которое мы будем записывать формально в виде

$$|y(a)| < \infty \quad (18)$$

и называть естественным условием ограниченности (поскольку оно является следствием структуры оператора  $L$ ), сразу следует  $B = 0$ .

В результате мы приходим к следующей краевой задаче:

Найти собственные значения и собственные функции  $y(x) \not\equiv 0$  уравнения

$$(ky')' - qy + \lambda \rho y = 0, \quad k(x) > 0, \quad a < x < b, \quad (19)$$

где  $k(x)$  имеет вид (13), при условии ограниченности (14) или (18) и обычном условии, например, первого рода:

$$y(b) = 0 \quad \text{при } x = b.$$

Если  $k(a) = 0$  и  $k(b) = 0$  (например, для уравнения Лежандра), то на обоих концах интервала  $(a, b)$  ставится условие ограниченности, так что  $y_1(x) = (x - a)^{n_1} (b - x)^{n_2} u(x)$ , где  $n_1 \geq 0$ ,  $n_2 \geq 0$ ,  $u(a) \neq 0$ ,  $u(b) \neq 0$ ,  $u(x)$  — непрерывная на  $(a, b)$  функция; это условие формально записываем в виде

$$|y(a)| < \infty, \quad |y(b)| < \infty.$$

Если интервал  $(a, b)$  бесконечен, как, например,  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$  для уравнения Чебышева — Эрмита или  $a = 0$ ,  $b = \infty$  для уравнения Чебышева — Лагерра, то при  $a = -\infty$  или при  $b = \infty$  в этом случае условие ограниченности (18) заменяется более слабым требованием: решение на бесконечности не должно возрастать сильнее, чем конечная степень  $x$ .

Формулируем общие свойства собственных функций и собственных значений поставленной краевой задачи (18) — (20).

1. Существует бесчиселенное множество собственных значений  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ , которым соответствуют собственные функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$

2. При  $q \geq 0$  все собственные значения не отрицательны:

$$\lambda_n \geq 0.$$

3. Собственные функции  $y_n(x)$  и  $y_m(x)$ , соответствующие разным собственным значениям  $\lambda_n$  и  $\lambda_m$ , ортогональны между собой с весом  $\rho(x)$ :

$$(y_n, y_m) = \int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = 0.$$

4. Имеет место теорема разложимости: функция  $f(x)$  разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям  $y_n(x)$  данной задачи

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad f_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)},$$

если: 1)  $f(x)$  имеет при  $a < x < b$  непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производные;

2)  $f(x)$  удовлетворяет граничным условиям задачи; при этом, если  $k(a) = 0$ , то

$$\begin{aligned} |f(a)| &< \infty \quad \text{при } 0 \leq q(a) < \infty, \\ f(a) &= 0 \quad \text{при } q(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty. \end{aligned}$$

Свойства 2 и 3 доказываются так же, как и в гл. II, § 3, с помощью формул Грина. При этом используется ограниченность в точке  $x = a$  функции  $y_n(x)$ , а также следующее из леммы 3 равенство  $\lim_{x \rightarrow a} k(x) y'_n(x) = 0$ , в силу чего подстановки

в формулах Грина при  $x = a$  обращаются в нуль. Доказательство свойств 1 и 4 обычно проводится с помощью теории интегральных уравнений. Для того чтобы 1 и 4 имели место, достаточно, чтобы  $k(x)$  была непрерывной, а  $q(x)$  — либо непрерывной, либо имела вид  $q_1(x)/(x - a)$ , где  $q_1(x)$  — непрерывная функция. Для изучаемых ниже классов специальных функций эти условия выполнены.

Краевая задача (19)–(20) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

где  $K(x, \xi) = G(x, \xi) \sqrt{\rho(x) \rho(\xi)}$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)} y(x)$ , а  $G(x, \xi)$  — функция Грина для оператора  $L$ . В случае  $k(a) = 0$ ,  $k(b) \neq 0$ ,  $y(b) = 0$  функция Грина определяется так:

1.  $G(x, \xi)$  — непрерывная функция  $x$  при фиксированном  $\xi$ ;  $a \leq \xi \leq b$ .

2. Первая производная  $\frac{dG}{dx}$  испытывает скачок при  $x = \xi$ :

$$k(x) \left. \frac{dG}{dx}(x, \xi) \right|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = k(\xi) [G'(\xi + 0, \xi) - G'(\xi - 0, \xi)] = -1.$$

3.  $L_x G(x, \xi) = 0$  во всех точках  $a < x < b$ , кроме  $x = \xi$ .

4.  $G(x, \xi)$  удовлетворяет граничным условиям

$$|G(a, \xi)| < \infty, \quad G(b, \xi) = 0.$$

Из определения  $G(x, \xi)$  следует  $G(x, \xi) > 0$  при  $x, \xi \in (a, b)$ ,  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$  (симметрия).

Перейдем к изучению конкретных специальных функций: цилиндрических и сферических функций, а также полиномов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

## ЧАСТЬ I

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

#### § 1. Цилиндрические функции

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \\ \text{или} \quad & \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

называемому уравнением цилиндрических функций  $n$ -го порядка. Это уравнение часто называют также уравнением Бесселя  $n$ -го порядка.

Характерными задачами (см. главы V, VI и VII), приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2)$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных). Вводя полярные координаты, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (3)$$

Полагая  $u = R\Phi$  и разделяя в (3) переменные, получаем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) R = 0$$

и

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0.$$

Условие периодичности для  $\Phi(\varphi)$  дает  $\lambda = n^2$ , где  $n$  — целое число. Полагая затем  $x = kr$ , приходим к уравнению цилиндрических функций

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad R(r) = y(kr)$$

или

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

В случае решений волнового уравнения (2), обладающих радиальной (цилиндрической) симметрией, мы получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \left( x \cdot \frac{dy}{dx} \right) + y = 0 \quad \text{или} \quad y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$

## 1. Степенные ряды. Уравнение Бесселя $v$ -го порядка

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1)$$

или

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (1')$$

( $v$  — произвольное действительное или комплексное число, действительную часть которого мы можем считать неотрицательной) имеет особую точку при  $x = 0$ . Поэтому решение  $y(x)$  следует искать в виде степенного ряда<sup>1)</sup>

$$y(x) = x^\sigma (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots), \quad (4)$$

начинающегося с  $x^\sigma$ , где  $\sigma$  — характеристический показатель, подлежащий определению. Подставляя ряд (4) в уравнение (1') и приравнивая нулю коэффициенты при  $x^\sigma, x^{\sigma+1}, \dots, x^{\sigma+k}$ , получим уравнение для определения  $\sigma$  и систему уравнений для определения коэффициентов  $a_k$ :

$$\left. \begin{array}{l} a_0(\sigma^2 - v^2) = 0, \\ a_1[(\sigma + 1)^2 - v^2] = 0, \\ a_2[(\sigma + 2)^2 - v^2] + a_0 = 0, \\ \vdots \quad \vdots \\ a_k[(\sigma + k)^2 - v^2] + a_{k-2} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

$(k = 2, 3, \dots).$

Так как мы можем предположить, что  $a_0 \neq 0$ , то из первого уравнения (5) следует, что

$$\sigma^2 - v^2 = 0 \quad \text{или} \quad \sigma = \pm v. \quad (6)$$

Перепишем  $k$ -е уравнение (5)  $k > 1$  в виде

$$(\sigma + k + v)(\sigma + k - v) a_k + a_{k-2} = 0. \quad (7)$$

Оставим пока в стороне тот случай, когда  $\sigma + v$  или  $\sigma - v$  (и соответственно  $-2v$  или  $2v$ ) равно отрицательному целому числу.

<sup>1)</sup> См. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959; Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1965.

Тогда из второго уравнения (5), в силу (6), будем иметь

$$a_1 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) дает рекуррентную формулу для определения  $a_k$  через  $a_{k-2}$ :

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + v)(\sigma + k - v)}. \quad (9)$$

Отсюда и из (8) заключаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Если  $v$  вещественно, то при  $\sigma = -v$  решение обращается в бесконечность в точке  $x = 0$ .

Остановимся на случае  $\sigma = v$ . Из (9) следует, что каждый четный коэффициент может быть выражен через предыдущий:

$$a_{2m} = -a_{2m-2} \frac{1}{2^{2m} m! (v+1)(v+2)\dots(v+m)}. \quad (10)$$

Последовательное применение этой формулы позволяет найти выражение  $a_{2m}$  через  $a_0$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (v+1)(v+2)\dots(v+m)}. \quad (11)$$

Воспользуемся свойством гамма-функции  $\Gamma(s)$ <sup>1)</sup>

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \dots = s(s-1)\dots(s-n)\Gamma(s-n).$$

Если  $s$  — целое число, то

$$\Gamma(s+1) = s!$$

Коэффициент  $a_0$  до сих пор оставался произвольным. Если  $v \neq -n$ , где  $n > 0$  — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)} \quad (12)$$

и используя отмеченное выше свойство гамма-функций, получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+v} \Gamma(k+1) \Gamma(k+v+1)}. \quad (13)$$

Если же  $\sigma = -v$ ,  $v \neq n$ , где  $n > 0$  — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^{-v} \Gamma(-v+1)}, \quad (12')$$

получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-v} \Gamma(k+1) \Gamma(k-v+1)}. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

Ряд (3), соответствующий  $\sigma = v \geq 0$ , с коэффициентами (12) и (13)

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} \quad (15)$$

называется функцией Бесселя первого рода  $v$ -го порядка. Ряд

$$J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v}, \quad (16)$$

соответствующий  $\sigma = -v$ , представляет второе решение уравнения (1), линейно независимое от  $J_v(x)$ . Ряды (15) и (16), очевидно, сходятся на всей плоскости  $x$ .

Рассмотрим теперь тот случай, когда  $v$  равно половине целого числа.

Пусть  $v^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ , где  $n \geq 0$  — целое число. Полагая в формулах (5)

$\sigma = n + \frac{1}{2}$ , получим:

$$2(n+1)a_1 = 0,$$

$$k(k+2n+1)a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k > 1),$$

так что

$$a_1 = 0,$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n+1)}.$$

Последовательно применяя эту формулу, найдем:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2 \cdot 4 \cdots (2k)(2n+3)(2n+5) \cdots (2n+2k+1)}.$$

Полагая здесь  $v = n + \frac{1}{2}$ , получаем формулу (11).

Положив, далее,

$$a_0 = \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)},$$

получим формулу (13).

Пусть

$$\sigma = -n - \frac{1}{2},$$

тогда уравнения (5) для  $a_k$  принимают вид

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 1(-2n) &= 0, \\ \vdots &\vdots \vdots \\ k(k-1-2n)a_k + a_{k-2} &= 0. \end{aligned}$$

По-прежнему все коэффициенты  $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$  равны нулю, но для  $a_{2n+1}$  получаем уравнение  $0 \cdot a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0$ , которое удовлетворяется при любом значении  $a_{2n+1}$ . При  $k > n$  коэффициент  $a_{2k+1}$  определяется равенством

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-n} a_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5) \dots 2 \cdot 4 \dots (2k-2n)}.$$

Полагая  $a_{2n+1} = 0$ ,  $a_0 = \frac{1}{2^{-\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}$ , получаем формулу (14).

Таким образом, при  $v = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)$  не требуется никакого изменения в определении функции  $J_v(x)$ . Формулы (15) и (16) остаются в силе.

Отметим, что формула (16) определяет  $J_{-v}(x)$  лишь для нецелых значений  $v$ , поскольку определение  $a_0$  по формулам (12) при целых отрицательных  $v = -n$  лишено смысла. Продолжим по непрерывности (16) на целые значения  $v = n$ . Поскольку  $\Gamma(k-n+1) = \pm\infty$  для  $k \leq k_0 = n-1$ , суммирование (16) фактически начинается со значений  $k = k_0 + 1 = n$ . Изменяя в (16) индекс суммирования  $k = n + k'$ , получаем:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x),$$

так как суммирование начинается с  $k' = 0$ .

Выпишем в качестве примера ряды для функций Бесселя первого рода нулевого ( $n = 0$ ) и первого ( $n = 1$ ) порядков:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

Функции  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  наиболее часто встречаются в приложениях и для них имеются подробные таблицы<sup>1)</sup>. На стр. 726 приводятся графики  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ .

Функции  $J_n(x)$  и  $J_{-n}(x)$  ( $n$  — целое число), как мы видели, линейно зависимы

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Для нецелых значений  $v$  функций  $J_v(x)$  и  $J_{-v}(x)$  линейно независимы. В самом деле,  $J_v(x)$  имеет нуль а  $J_{-v}(x)$  — полюс  $v$ -го порядка в точке  $x = 0$ . Таким образом, если  $v$  — нецелое

<sup>1)</sup> Во всех таблицах специальных функций всегда имеются таблицы для бесселевых функций первого рода (см., например, Е. Янке и Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, формулы, графики, таблицы, «Наука», 1964, где  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  даны с пятью знаками для значений  $x$  в интервале от 0 до 14,9).

число, то всякое решение  $y_v(x)$  уравнения Бесселя (1) может быть представлено в виде линейной комбинации функций  $J_v(x)$  и  $J_{-v}(x)$

$$y_v(x) = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x).$$

Если ищется ограниченное решение уравнения (1), то  $C_2 = 0$  и

$$y_v(x) = C_1 J_v(x) \quad \text{при } \operatorname{Re} v > 0.$$

**2. Рекуррентные формулы.** Установим следующие соотношения, существующие между функциями Бесселя первого рода различных порядков,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{J_v(x)}{x^v} \right) = - \frac{J_{v+1}(x)}{x^v}, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dx} (x^v J_v(x)) = x^v J_{v-1}(x). \quad (18)$$

Эти формулы проверяются непосредственным дифференцированием рядов для бесселевых функций. Покажем, например, справедливость соотношения (17)

$$\begin{aligned} x^v \frac{d}{dx} \left( \frac{J_v(x)}{x^v} \right) &= x^v \frac{1}{2^v} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}}{k! \Gamma(k+v+1)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k) \Gamma(k+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(v-1)}. \end{aligned}$$

В последней сумме  $k$  меняются от 1 до  $\infty$ . Введем новый индекс суммирования  $l = k - 1$ , который будет меняться от 0 до  $\infty$ . Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} x^v \frac{d}{dx} \left( \frac{J_v(x)}{x^v} \right) &= \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\Gamma(l+1) \Gamma[l+(v+1)+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{[2l+(v+1)]} = -J_{v+1}(x), \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (17). Справедливость формулы (18) доказывается аналогично.

Отметим два важных частных случая рекуррентных формул. При  $v = 0$  из (17) следует:

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (19)$$

Для случая  $v = 1$  формула (18) дает:

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x) \quad \text{или} \quad xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Установим рекуррентные формулы, связывающие  $J_v(x)$ ,  $J_{v+1}(x)$  и  $J_{v-1}(x)$ . Производя дифференцирование в (17) и (18), получаем:

$$\frac{vJ_v(x)}{x} - J'_v(x) = J_{v+1}(x), \quad (17')$$

$$\frac{vJ_v(x)}{x} + J'_v(x) = J_{v-1}(x). \quad (18')$$

Складывая и вычитая (17') и (18'), находим рекуррентные формулы

$$\left. \begin{aligned} J_{v+1}(x) + J_{v-1}(x) &= \frac{2v}{x} J_v(x), \\ J_{v+1}(x) - J_{v-1}(x) &= -2J'_v(x). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

С помощью формулы (21) можно вычислять  $J_{v+1}(x)$ , если известны  $J_v(x)$  и  $J_{v-1}(x)$ :

$$J_{v+1}(x) = -J_{v-1}(x) + \frac{2vJ_v(x)}{x}. \quad (21')$$

**3. Функции полуцелого порядка.** Найдем выражения для функций  $J_{1/2}(x)$  и  $J_{-1/2}(x)$ :

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2m}, \quad (22)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2+2m}. \quad (23)$$

Пользуясь свойством гамма-функции, находим:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{2^{m+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2^m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Подставляя (24) в формулы (22) и (23), получаем:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad (25)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что сумма в (25) представляет собой разложение  $\sin x$ , а сумма в (26) — разложение  $\cos x$  по степеням  $x$ . Таким образом,  $J_{1/2}(x)$  и  $J_{-1/2}(x)$  выражаются через элементарные функции

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad (27)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (28)$$

Рассмотрим функции  $J_{n+1/2}(x)$ , где  $n$  — целое число. Из (21') следует:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( -\cos x + \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ -\sin x + \frac{3}{x} \left[ \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \pi) \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right) + \cos(x - \pi) \cdot \frac{3}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно формулу (21') найдем:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left( x - \frac{n\pi}{2} \right) P_n \left( \frac{1}{x} \right) + \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} \right) Q_n \left( \frac{1}{x} \right) \right\}, \quad (29)$$

где  $P_n \left( \frac{1}{x} \right)$  — многочлен степени  $n$  относительно  $\frac{1}{x}$ , а  $Q_n \left( \frac{1}{x} \right)$  — многочлен степени  $n - 1$ . Отметим, что  $P_n(0) = 1$ ,  $Q_n(0) = 0$ .

**✓4. Асимптотический порядок цилиндрических функций.** Решения уравнения Бесселя обычно называют цилиндрическими функциями. В п. 1 была определена одна из цилиндрических функций — функция Бесселя.

Основным свойством цилиндрических функций является их поведение при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$  (асимптотическое поведение). Ниже будет показано, что любая цилиндрическая функция однозначно определяется своей асимптотикой при  $x \rightarrow \infty$ , точнее, главным членом асимптотического разложения.

Докажем, что любая вещественная цилиндрическая функция при больших  $x$  представима в виде

$$y_v(x) = v_\infty \frac{\sin(x + \delta_\infty)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right), \quad (30)$$

где  $v_\infty \neq 0$ ,  $\delta_\infty$  — некоторые постоянные,  $O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$  означает члены порядка не ниже  $\frac{1}{x^{1/2}}$ .

Полагая

$$y = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}, \quad (31)$$

вычисляя производные  $y' = -0,5x^{-\frac{1}{2}}v + x^{-\frac{1}{2}}v'$ ,  $y'' = x^{-\frac{1}{2}}v'' - x^{-\frac{3}{2}}v' + 0,75x^{-\frac{5}{2}}v$  и подставляя их в уравнение Бесселя, получим уравнение

$$v'' + \left(1 - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)v = 0, \quad (32)$$

являющееся частным случаем уравнения

$$v'' + (1 + \rho(x))v = 0, \quad (33)$$

где

$$\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (34)$$

Положим

$$v = \gamma \sin(x + \delta), \quad v' = \gamma \cos(x + \delta), \quad (35)$$

где  $\gamma(x)$  и  $\delta(x)$  — некоторые функции  $x$ , причем  $\gamma(x) \neq 0$  ни в одной точке, иначе  $v$  и  $v'$  одновременно обращались бы в нуль и  $v(x)$  было бы тождественно равно нулю. Пользуясь (35) и (33), будем иметь:

$$v' = \gamma \cos(x + \delta) = \gamma' \sin(x + \delta) + \gamma(\delta' + 1) \cos(x + \delta),$$

$$v'' = \gamma' \cos(x + \delta) - \gamma(\delta' + 1) \sin(x + \delta) = -(1 + \rho)\gamma \sin(x + \delta).$$

Отсюда находим:

$$\delta' = \rho \sin^2(x + \delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (36)$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\delta'}{\operatorname{tg}(x + \delta)} = -\rho \sin(x + \delta) \cos(x + \delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (37)$$

Покажем, что существуют предельные значения  $\gamma$  и  $\delta$  при  $x \rightarrow \infty$

В самом деле,

$$\delta(x) = \delta(a) - \int_a^x \delta'(s) ds,$$

откуда, в силу (36), следует, что существует предел  $\lim_{a \rightarrow \infty} \delta(a) = \delta_\infty$  и

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (38)$$

Аналогично находим из (37)

$$\gamma(x) = \gamma_\infty \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad (39)$$

причем  $\gamma_\infty \neq 0$ .

Таким образом, всякое решение уравнения (33), и, следовательно, уравнения (32) при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид

$$v(x) = v_\infty \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (40)$$

Тем самым установлена справедливость асимптотической формулы (30) для любой цилиндрической функции  $y_v(x)$ .

Покажем, что не может существовать двух различных цилиндрических функций с одинаковой асимптотикой. В самом деле, пусть  $\bar{y}_v(x)$  и  $\tilde{y}_v(x)$  — две различные цилиндрические функции, для которых

$$\bar{v}_\infty = \bar{\gamma}_\infty, \quad \bar{\delta}_\infty = \bar{\delta}_\infty. \quad (41)$$

Разность этих функций

$$\tilde{y}_v(x) = \bar{y}_v(x) - \bar{\tilde{y}}_v(x) \not\equiv 0$$

также является цилиндрической функцией, имеющей, в силу (41), следующую асимптотику:

$$\tilde{y}_v(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Однако это противоречит формуле (30) для любой цилиндрической функции  $\tilde{y}_v(x)$ .

Следовательно,  $\tilde{y}_v(x) \equiv 0$  и  $\bar{y}_v(x) \equiv \bar{\tilde{y}}_v(x)$ .

Решением уравнения Бесселя может быть и комплексная функция  $Z_v(x) = \bar{Z}_v(x) + i\bar{\bar{Z}}_v(x)$ , где  $\bar{Z}_v(x)$  и  $\bar{\bar{Z}}_v(x)$  — вещественные цилиндрические функции. Из предыдущего следует, что комплексная цилиндрическая функция также однозначно определяется своей асимптотикой при  $x \rightarrow \infty$ .

Значения постоянных  $v_\infty$  и  $\delta_\infty$  определяются с помощью дополнительных исследований, которые дают

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ для всех } v.$$

В § 1, п. 3 для  $v = n + 1/2$  была получена формула (29), из которой следует, что

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \quad (42)$$

В § 4 будет дан вывод асимптотической формулы для функции  $J_v(x)$ :

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (43)$$

где  $v$  — любое неотрицательное число ( $v \geq 0$ ). Формула (43) имеет место и при произвольном  $v$ , так что

$$J_{-v}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x + \frac{\pi}{2} v - \frac{\pi}{4} \right) + O \left( \frac{1}{x^{3/2}} \right). \quad (44)$$

## § 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя

Простейшая краевая задача для уравнения Бесселя на отрезке  $[0, r_0]$  связана с задачей о собственных колебаниях круглой мембранны

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

$$v(r, \varphi)|_{r=r_0} = 0, \quad |v(r, \varphi)| < \infty, \quad v(r, \varphi) \not\equiv 0. \quad (2)$$

Полагая  $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$  и разделяя переменные (см. Введение), получаем:

$$\Phi'' + v\Phi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{v}{r^2} \right) R = 0, \quad R(r_0) = 0. \quad (4)$$

Условие периодичности для  $\Phi(\varphi)$  дает  $v = n^2$ , где  $n$  — целое число. Таким образом, функция  $R(r)$  должна определяться из уравнения Бесселя

$$\mathcal{L}[R] + \lambda r R = 0 \quad \left( \mathcal{L}[R] = \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} R \right) \quad (5)$$

при граничном условии

$$R(r_0) = 0 \quad (6)$$

и естественном граничном условии ограниченности в точке  $r = 0$

$$|R(0)| < \infty. \quad (7)$$

Полагая

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda} r, \\ y(x) &= R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (8)$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y(x) \not\equiv 0 \quad (9)$$

при дополнительных условиях

$$y(\sqrt{\lambda} r_0) = 0, \quad (10)$$

$$|y(0)| < \infty. \quad (11)$$

Отсюда находим

$$y(x) = AJ_n(x). \quad (12)$$

В силу граничного условия  $y(r_0) \sqrt{\lambda} = 0$  имеем:

$$J_n(\mu) = 0 \quad (\mu = r_0 \sqrt{\lambda}). \quad (13)$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней  $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_m^{(n)}, \dots$ <sup>1)</sup>, т. е. уравнение (1) имеет бесчисленное множество собственных значений

$$\lambda_m^{(n)} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

которым соответствуют собственные функции

$$R(r) = AJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \quad (15)$$

краевой задачи (5) — (7).

Из способа построения собственных функций видно, что всякое нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи дается формулой (15).

Из общей теории уравнений вида  $\mathcal{L}[y] + \lambda y = 0$ , рассмотренных выше (см. Введение), следует ортогональность системы собственных функций

$$\left\{ J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \right\}$$

с весом  $r$ :

$$\int_{r_0}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0} r\right) J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} r\right) r dr = 0 \quad \text{при } m_1 \neq m_2. \quad (16)$$

Вычислим норму собственных функций  $R_1(r) = J_n(\alpha_1 r)$ , где  $\alpha_1 = \mu_m^{(n)}/r_0$ . Попутно будет получено условие ортогональности (16). Для этого рассмотрим функцию  $R_2(r) = J_n(\alpha_2 r)$ , где  $\alpha_2$  — произвольный параметр.

Функции  $R_1(r)$  и  $R_2(r)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_1}{dr} \right) + \left( \alpha_1^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_2}{dr} \right) + \left( \alpha_2^2 r - \frac{n^2}{r} \right) R_2 = 0,$$

причем  $R_1(r_0) = 0$ , а  $R_2(r)$  уже не удовлетворяет этому граничному условию. Вычитая из первого уравнения второе, предварительно умножив их, соответственно, на  $R_2(r)$  и  $R_1(r)$ , и

<sup>1)</sup> На стр. 725 дана таблица корней уравнения  $J_0(\mu) = 0$ , в частности первый корень  $\mu_1^{(0)} = 2,4048$ .

интегрируя затем по  $r$  в пределах от 0 до  $r_0$ , будем иметь:

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \int_0^{r_0} r R_1(r) R_2(r) dr + [r(R_2 R'_1 - R_1 R'_2)] \Big|_0^{r_0} = 0,$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0} R_1 R_2 r dr &= -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0) \alpha_1 J'_n(\alpha_1 r_0) - r_0 J_n(\alpha_1 r_0) \alpha_2 J'_n(\alpha_2 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = \\ &= -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0) \alpha_1 J'_n(\alpha_1 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя к пределу при  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$  и раскрывая неопределенность в правой части, получаем выражение для квадрата нормы:

$$\|R_1\|^2 = \|J_n(\alpha_1 r)\|^2 = \int_0^{r_0} r R_1^2(r) dr = \frac{r_0^2}{2} [J'_n(\alpha_1 r_0)]^2$$

или

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r dr = \frac{r_0^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2. \quad (18)$$

В частности, квадрат нормы функции  $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$  равен

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}).$$

Если положить  $\alpha_2 = \frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} \neq \alpha_1 = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$ , то из формулы (17) сразу следует условие (16) ортогональности функций Бесселя.

Отметим, что имеются таблицы нулей  $\mu_m^{(0)}$  функции  $J_0(\mu)$  и соответствующих им значений  $J_1(\mu_m^{(0)})$  (см. стр. 725). Приведем несколько первых значений  $\mu_m^{(0)}$ :  $\mu_1^{(0)} = 2,4048$ ,  $\mu_2^{(0)} = 5,5201$ ,  $\mu_3^{(0)} = 8,6531$ ,  $\mu_4^{(0)} = 11,7915$ .

Из асимптотической формулы (42) § 2 следует, что с возрастанием номера  $m$  нуля  $\mu_m^{(n)}$  разность  $\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)}$  должна стремиться к  $\pi$ . Это можно проследить даже для приведенных выше значений  $\mu_m^{(0)}$  (например,  $\mu_3^{(0)} - \mu_2^{(0)} = 3,1330$ ,  $\mu_4^{(0)} - \mu_3^{(0)} = 3,1384$ ,  $\mu_7^{(0)} - \mu_6^{(0)} = 3,1405$  и т. д.).

В силу общих свойств собственных функций краевых задач (стр. 630) имеет место теорема разложимости:

всякая дважды дифференцируемая функция  $f(r)$ , ограниченная при  $r = 0$  и обращающаяся в нуль при  $r = r_0$ , может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right),$$

где

$$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) r dr}{\| J_n \|^2}, \quad \| J_n \|^2 = \frac{r_0^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2.$$

Вторая краевая задача для уравнения Бесселя:

$$\mathcal{L}(R) + \lambda r R = 0, \quad R(r) \neq 0,$$

$$R'(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty$$

решается аналогично. Собственные функции и собственные значения также будут выражаться формулами (15) и (14), где под  $\mu_m^{(n)}$  следует понимать корень номера  $m$  уравнения

$$J'_n(\mu) = 0.$$

Собственные функции задачи ортогональны между собой с весом  $r$  (см. (16)) и имеют квадрат нормы, равный

$$\int_0^{r_0} J_n^2 \left( \frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0} \right) r dr = \frac{r_0^2}{2} \left[ 1 - \frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2} \right] J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

Аналогично решается и третья краевая задача. В этом случае для определения  $\mu_m^{(n)}$  получается уравнение вида

$$J'_n(\mu) = \mu h J_n(\mu).$$

### § 3. Различные типы цилиндрических функций

**1. Функции Ханкеля.** Наряду с функциями Бесселя первого рода  $J_v(x)$  большое значение для приложений имеют другие специальные виды решений уравнения Бесселя. К их числу относятся прежде всего функции Ханкеля первого и второго рода  $H_v^{(1)}(x)$  и  $H_v^{(2)}(x)$ , являющиеся комплексно-сопряженными решениями уравнения Бесселя. С точки зрения физических приложений основной характеристикой функций Ханкеля является асимптотическое поведение при больших значениях аргумента. Поэтому мы определим функции Ханкеля как

цилиндрические функции, обладающие следующей асимптотикой:

$$H_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} + \dots, \quad (1)$$

$$H_v^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} + \dots, \quad (2)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно  $1/x$ . Условия (1), (2), в силу п. 4 § 1, определяют  $H_v^{(1)}$  и  $H_v^{(2)}$  однозначно. Разделяя действительную и мнимую части, представим функцию Ханкеля в виде

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iN_v(x), \quad (3)$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iN_v(x), \quad (4)$$

где функции

$$J_v(x) = \frac{1}{2} [H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)], \quad (3')$$

$$N_v(x) = \frac{1}{2i} [H_v^{(1)}(x) - H_v^{(2)}(x)] \quad (4')$$

имеют асимптотический характер

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, \quad (5)$$

$$N_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, \quad (6)$$

что следует из формул (1) и (2).

Как будет показано ниже (см. п. 4. § 4), введенная здесь функция  $J_v(x)$  является функцией Бесселя первого рода, рассмотренной в § 1. Мнимая часть  $N_v(x)$  функции Ханкеля называется функцией Неймана или цилиндрической функцией второго рода  $v$ -го порядка.

Формулы (3) и (4) устанавливают связь между функциями Ханкеля, Бесселя и Неймана, аналогичную связи между показательной функцией мнимого аргумента, синусом и косинусом (формула Эйлера). Асимптотические формулы (1), (2), (5) и (6) подчеркивают эту аналогию.

При изучении решений уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

мы видели, что амплитуда  $v(x, y)$  установившихся колебаний

$$u(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = \Delta v + k^2 v = 0 \quad \left( k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \right).$$

Если решение волнового уравнения обладает радиальной симметрией  $v(x, y) = v(r)$ , то, как было отмечено в § 1, функция  $v(kr)$  удовлетворяет уравнению Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, функции

$$H_0^{(1)}(kr) e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(\omega t + kr)} \frac{1}{V_i} + \dots \quad \left( V_i = e^{i\frac{\pi}{4}} \right), \quad (7)$$

$$H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(\omega t - kr)} V_i + \dots \quad (8)$$

являются решениями уравнения колебаний, имеющими характер цилиндрических волн. Функция  $H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}$  соответствует расходящимся цилиндрическим волнам, а функция  $H_0^{(1)}(kr) e^{i\omega t}$  — сходящимся цилиндрическим волнам<sup>1)</sup>.

Вторым важным свойством цилиндрических функций является их поведение при  $x \rightarrow 0$ . В силу леммы 1 Введения функции  $H_v^{(1,2)}$  и  $N_v$  при  $x \rightarrow 0$  обращаются в бесконечность (так как  $J_v(0)$  конечно), точнее,  $H_0^{(1)}(x)$ ,  $H_0^{(2)}(x)$ ,  $N_0(x) \sim \ln \frac{1}{x}$ , так как  $J_0(0) = -1 \neq 0$ ;  $H_v^{(1)}(x)$ ,  $H_v^{(2)}(x)$ ,  $N_v(x) \sim \frac{1}{x^v}$  при  $v > 0$ , так как  $J_v(x) \sim x^v$  при  $x \rightarrow 0$ .

Функции Ханкеля и Неймана нулевого порядка являются фундаментальными решениями уравнения  $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ , так как они имеют нужную логарифмическую особенность при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$  (см. гл. VII). Приведем (без доказательства) точные выражения для главных членов разложения этих функций в окрестности точки  $x = 0$ :

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots,$$

$$H_0^{(2)} = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots$$

**2. Функции Ханкеля и Неймана.** Как было отмечено в п. 1, всякое решение уравнения Бесселя нецелого порядка  $v$  выражается через функции  $J_v$  и  $J_{-v}$ . Установим связь между функциями  $H_v^{(1)}$ ,  $H_v^{(2)}$ ,  $N_v$  и  $J_v$ ,  $J_{-v}$ .

<sup>1)</sup> Если взять временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , то расходящимся волнам соответствует  $H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}$ , а сходящимся  $-H_0^{(2)}(kr) e^{-i\omega t}$ .

Так как всякое решение уравнения Бесселя при нецелом  $v$  можно представить в виде линейной комбинации функций  $J_v(x)$  и  $J_{-v}(x)$ , то

$$H_v^{(1)}(x) = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), \quad (9)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, подлежащие определению. Для главных членов асимптотических разложений, очевидно, имеет место аналогичное равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} &= C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем аргумент второго слагаемого к виду  $\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right)$ :

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left[\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + \pi v\right] = \\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \cos \pi v - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \sin \pi v. \end{aligned}$$

Сокращая обе части равенства (10) на  $\sqrt{2/\pi x}$  и пользуясь формулой Эйлера для левой части, получаем

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= (C_1 + C_2 \cos \pi v) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) - C_2 \sin \pi v \sin\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 + C_2 \cos \pi v = 1, \quad -C_2 \sin \pi v = i$$

или

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{i \sin \pi v}; \\ C_1 &= -\frac{\cos \pi v - i \sin \pi v}{i \sin \pi v} = -C_2 e^{-i\pi v}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), находим:

$$H_v^{(1)}(x) = -\frac{1}{i \sin \pi v} [J_v(x) e^{-i\pi v} - J_{-v}(x)]. \quad (12)$$

Аналогично

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{i \sin \pi v} [J_v(x) e^{i\pi v} - J_{-v}(x)]. \quad (13)$$

Пользуясь формулой (4'), определяющей  $N_v(x)$ , получаем из (12) и (13):

$$N_v(x) = \frac{J_v(x) \cos \pi v - J_{-v}(x)}{\sin \pi v}. \quad (14)$$

Формулы (12), (13) и (14) получены нами для нецелых значений  $v$ . Для целого значения  $v = n$  функции Ханкеля и Неймана могут быть определены из (12), (13) и (14) с помощью предельного перехода при  $v \rightarrow n$ . Переходя в этих формулах к пределу при  $v \rightarrow n$  и раскрывая неопределенность по известному правилу, будем иметь:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\partial J_v}{\partial v} \right)_{v=n} - (-1)^n \left( \frac{\partial J_{-v}}{\partial v} \right)_{v=n} \right], \quad (12')$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\partial J_v}{\partial v} \right)_{v=n} - (-1)^n \left( \frac{\partial J_{-v}}{\partial v} \right)_{v=n} \right], \quad (13')$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\partial J_v}{\partial v} \right)_{v=n} - (-1)^n \left( \frac{\partial J_{-v}}{\partial v} \right)_{v=n} \right]. \quad (14')$$

Пользуясь представлением функций  $J_v$  и  $J_{-v}$  в виде степенных рядов, можно получить аналогичные представления для  $N_v(x)$ , а также  $H_v^{(1)}(x)$  и  $H_v^{(2)}(x)$ .

Формулы (12) и (13) можно рассматривать как аналитическое определение функций Ханкеля. Существуют, однако, и другие способы введения функций Ханкеля. В § 6 будет дано представление функций Ханкеля в виде контурных интегралов.

Если  $v = n + 1/2$ , то функции Ханкеля и Неймана выражаются в конечном виде через элементарные функции. В частности, при  $v = 1/2$  имеем:

$$N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} H_{1/2}^{(1)}(x) &= J_{1/2}(x) + iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{1/2}^{(2)}(x) &= J_{1/2}(x) - iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

**3. Функции мнимого аргумента.** Цилиндрические функции можно рассматривать не только при действительных, но и при комплексных значениях аргумента. В настоящем пункте мы рассмотрим цилиндрические функции первого рода от чисто мнимого аргумента.

Подставляя в ряд, определяющий  $J_v(x)$ , значение  $ix$  вместо  $x$ , получаем:

$$J_v(ix) = i^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = i^v I_v(x), \quad (15)$$

где

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} \quad (16)$$

— вещественная функция, связанная с  $J_v(ix)$  соотношением

$$I_v(x) = i^{-v} J_v(ix) \quad \text{или} \quad I_v(x) = e^{-\frac{1}{2}\pi v i} J_v(ix).$$

В частности, при  $v=0$

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (17)$$

Из ряда (16) видно, что  $I_v(x)$  являются монотонно возрастающими функциями, имеющими при  $x=0$  нуль  $v$ -го порядка. Пользуясь асимптотической формулой (5), получим, что для  $I_v(x)$  должна иметь место асимптотическая формула

$$I_v(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \quad (18)$$

при больших значениях аргумента  $x$ .

Аналогично вводится  $I_{-v}(x)$ . Функции  $I_v$  и  $I_{-v}$  при нецелом  $v$  линейно независимы, так как в точке  $x=0$   $I_v(x)$  ( $v>0$ ) имеет нуль  $v$ -го порядка, а  $I_{-v}(x)$  — полюс  $x^{-v}$ . Если  $v=n$  — целое число, то  $I_{-n}(x)=I_n(x)$ .

Цилиндрические функции мнимого аргумента являются решениями уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (19)$$

и, в частности, функция  $I_0(x)$  удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0. \quad (20)$$

Наряду с функцией  $I_v(x)$  рассматривают функцию Макдональда  $K_v(x)$ , определяемую с помощью функции Ханкеля чисто мнимого аргумента

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi v i} H_v^{(1)}(ix). \quad (21)$$

$K_v(x)$  является вещественной функцией  $x$ . В самом деле, формулы (12) и (13) дают

$$\begin{aligned} K_v(x) &= \frac{\pi}{2 \sin \pi v} [I_{-v}(x) - I_v(x)] \quad \text{при } v \neq n, \\ K_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2} \left[ \left( \frac{\partial I_{-v}}{\partial v} \right)_{v=n} - \left( \frac{\partial I_v}{\partial v} \right)_{v=n} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$