

Пользуясь асимптотическим выражением для  $H_v^{(1)}$ , находим:

$$K_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + \dots \quad (23)$$

Формулы (23) и (18) показывают, что  $K_v(x)$  экспоненциально убывают, а  $I_v(x)$  экспоненциально возрастают при  $x \rightarrow \infty$ . Отсюда следует линейная независимость этих функций, а также возможность представлений любого решения уравнения (19) в виде линейной комбинации

$$y = AI_v(x) + BK_v(x).$$

В частности, если  $y$  ограничено на бесконечности, то  $A = 0$  и  $y = BK_v(x)$ ; если же  $y$  ограничено при  $x = 0$ , то  $B = 0$  и  $y = AI_v(x)$ .

Из линейной независимости  $I_v$  и  $K_v$  следует, что  $K_v(x)$  имеет при  $x = 0$  полюс  $v$ -го порядка ( $K_v \sim x^{-v}$ ) при  $v \neq 0$  и логарифмическую особенность при  $v = 0$ . В п. 4 показано, что

$$K_0(x) = \ln \frac{1}{x} + \dots \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

На рис. 107 даны графики  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$ . В отличие от  $J_v(x)$  и  $N_v(x)$  функции  $I_v(x)$  и  $K_v(x)$  являются монотонными ( $I_v(x)$  возрастает, а  $K_v(x)$  убывает с ростом  $x$ ).

Наиболее важное значение имеет функция

$$K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix).$$

**4. Функция  $K_0(x)$ .** Покажем, что для функции  $K_0(x)$  справедливо следующее интегральное представление:

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi \quad (x > 0). \quad (24)$$

Нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi \quad (24')$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(F) = F'' + \frac{1}{x} F' - F = 0. \quad (25)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F) &= \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} \left( \operatorname{ch}^2 \xi - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \xi - 1 \right) d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{sh}^2 \xi d\xi - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{ch} \xi d\xi = S_1 - S_2. \end{aligned}$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, получим:

$$S_2 = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{ch} \xi d\xi = \frac{\operatorname{sh} \xi}{x} e^{-x \operatorname{ch} \xi} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{sh}^2 \xi d\xi = S_1,$$

откуда и следует:

$$\mathcal{L}(F) = 0.$$

Полагая  $\operatorname{ch} \xi = \eta$ , преобразуем интеграл (24') для  $F(x)$  к виду

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta.$$

Пользуясь этой формулой, можно выяснить характер поведения функции  $F(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Производя еще раз замену переменной

$$x(\eta - 1) = \xi,$$

получаем:

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi \left( \frac{\xi}{x} + 2 \right)}} d\xi = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} F_1(x).$$

При  $x \rightarrow \infty$

$$\lim F_1(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}} d\xi = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (t = \sqrt{\xi}).$$

Следовательно, при больших значениях  $x$

$$F_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1 + \varepsilon),$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Отсюда получаем асимптотическую формулу

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + \dots, \quad (26)$$

где точками отмечены члены более высокого порядка малости. Введенная с помощью интеграла (24') функция  $F(x)$  является решением уравнения (25), ограниченным на бесконечности, поэтому

$$F(x) = BK_0(x).$$

Сравнение асимптотических формул для  $K_0(x)$  и  $F_0(x)$  показывает, что  $B = 1$  и, следовательно,

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi \quad (x > 0). \quad (24)$$

Выясним характер функции  $K_0(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Представим интеграл

$$K_0(x) = F(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta$$

в виде

$$K_0(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} d\lambda \quad (x\eta = \lambda).$$

Разбивая этот интеграл на три части

$$K_0(x) = \int_x^A \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} + \int_x^A \frac{(e^{-\lambda} - 1) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} + \int_A^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}},$$

где  $A$  — некоторая вспомогательная постоянная, видим, что первое слагаемое равно

$$\ln \frac{A + \sqrt{A^2 - x^2}}{x} = -\ln x + \dots,$$

а второе и третье слагаемые ограничены при  $x \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что

$$K_0(x) = -\ln x + \dots = \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad (27)$$

где точки означают слагаемые, остающиеся конечными при  $x = 0$ . Таким образом, функция  $K_0(x)$  является решением уравнения (25), имеющим логарифмическую особенность в точке  $x = 0$  и экспоненциально убывающим при  $x \rightarrow \infty$ .

Следующая задача дает физическую интерпретацию функции  $K_0(x)$ . Пусть в начале координат действует стационарный источник неустойчивого газа мощности  $Q_0$ . Стационарный процесс диффузии сопровождается распадом газа и описывается уравнением

$$\Delta u - \kappa^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \kappa^2 u = 0 \quad (28)$$

$$\left( \kappa^2 = \frac{\beta}{D^2} \right),$$

где  $\beta$  — коэффициент распада,  $D$  — коэффициент диффузии. Функция источника этого уравнения обладает круговой симметрией и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) - u = 0 \quad (x = \kappa r);$$

кроме того, функция источника имеет логарифмическую особенность в начале координат и ограничена на бесконечности. Отсюда следует, что функция источника пропорциональна  $K_0(\kappa r)$ :

$$\bar{G} = AK_0(\kappa r), \quad (29)$$

Для определения множителя  $A$  воспользуемся условием источника

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{K_\varepsilon} \left( -D \frac{\partial u}{\partial r} \right) ds = Q_0, \quad (30)$$

где интеграл слева выражает диффузионный поток через окружность  $K_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  с центром в источнике. Подставляя в это условие вместо  $u$  функцию  $\bar{G} = AK_0(xr)$  и учитывая логарифмическую особенность функции  $K_0(x)$  при  $x = 0$ , получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{K_\varepsilon} D \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} dS \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ D 2\pi \varepsilon A \frac{1}{\varepsilon} \right\} = 2\pi A D = Q_0.$$

Отсюда

$$A = \frac{Q_0}{2\pi D}$$

и

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(xr). \quad (31)$$

Интегральную формулу (24) для  $K_0(x)$  можно получить, исходя из простых физических соображений.

Рассмотрим нестационарную задачу диффузии газа с распадом. Пусть в начале координат находится источник постоянной мощности  $Q_0$ , действующий начиная с момента  $t = 0$ . Будем предполагать, что в начальный момент  $t = 0$  концентрация газа всюду равна нулю. Концентрация  $u(x, y, t)$  должна удовлетворять уравнению

$$D \Delta u - \beta u = u_t \quad (32)$$

и соответствующим дополнительным условиям. Уравнение (32) при помощи подстановки

$$u = \tilde{u} e^{-\beta t}$$

преобразуется в обычное уравнение диффузии

$$D \Delta \tilde{u} = \tilde{u}_t$$

для которого функция влияния точечного источника имеет вид

$$\tilde{G} = \frac{1}{(2 \sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}} \quad (D = a^2).$$

Таким образом, функция влияния мгновенного точечного источника для уравнения (32) равна

$$G = \frac{Q}{(2 \sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)}.$$

Функция влияния источника мощности  $Q_0$ , непрерывно действующего от  $t = 0$  до момента  $t$ , дается формулой

$$G = Q_0 \int_0^t \frac{1}{4\pi D(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)} d\tau.$$

Вводя новую переменную

$$\theta = t - \tau,$$

получаем:

$$G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Функция источника, соответствующая стационарной задаче, может быть найдена предельным переходом при  $t \rightarrow \infty$  в предыдущей формуле

$$\bar{G} = \lim_{t \rightarrow \infty} G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4D} \frac{1}{\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Преобразуем этот интеграл при помощи подстановки

$$\theta = Ce^{\xi},$$

где  $C$  — некоторая постоянная,

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{r^2}{4DC} e^{-\xi} + \beta C e^{\xi}\right]} d\xi.$$

Требуя, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{r^2}{4DC} = \beta C,$$

находим:

$$C = \frac{r}{2\sqrt{\beta D}} \quad \text{и} \quad \frac{r^2}{4DC} = \beta C = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{\kappa r}{2} \quad \left(\kappa^2 = \frac{\beta}{D}\right).$$

Отсюда следует, что стационарная функция источника имеет вид

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} \int_0^{\infty} e^{-\kappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(\kappa r).$$

Таким образом, рассмотренная здесь задача приводит к интегральному представлению (24) для функции  $K_0(x)$ .

#### § 4. Представление цилиндрических функций в виде контурных интегралов

**1. Контуры интегралы.** Рассмотрим уравнение колебаний  $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) = a^2\Delta_2 u$  и будем искать его решение в виде  $u(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}$ ; для  $v(x, y)$  получим уравнение  $\Delta_2 v + k^2 v = 0$  ( $k = \omega/a$ ). Его частными решениями являются функции  $v = e^{\pm i k x}$  и  $v = e^{\pm i k y}$  — амплитуды плоских волн  $u = e^{i(\omega t \pm kx)}$  и  $u = e^{i(\omega t \pm ky)}$ , распространяющихся вдоль оси  $x$  и соответственно вдоль оси  $y$ . Плоская волна, распространяющаяся

в направлении  $l$ , очевидно, имеет вид

$$v = e^{-ik(lr)} = e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} = e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)},$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad l = l(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Если  $\alpha = \pi/2$ , то на оси  $y$  амплитуда волны, падающей под углом  $\varphi$  к оси  $x$ , равна

$$v = e^{-ikr \sin \varphi}. \quad (1)$$

Будем искать решение  $Z_v(x)$  уравнения Бесселя

$$L(y) = x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (2)$$

в виде суперпозиции плоских волн вида (1), считая при этом  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$  комплексными и обозначая  $kr = x$ . Положим

$$\begin{aligned} Z_v(x) &= \\ &= \int_C K(x, \varphi) \Phi_v(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_C e^{-ix \sin \varphi} \Phi_v(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C$  — некоторый контур на плоскости  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ ,  $K(x, \varphi) = e^{-ix \sin \varphi}$ ,  $\Phi_v(\varphi)$  — неопределенный пока фазовый множитель. Выберем  $C$  так, чтобы интеграл

(3) сходился, а  $\Phi_v(\varphi)$  так, чтобы этот интеграл удовлетворял уравнению Бесселя. Найдем сначала  $\Phi_v(\varphi)$ , предполагая, что интеграл (3) сходится и его можно дифференцировать под знаком интеграла. Вычислим  $L(K)$ . Замечая, что  $K_\varphi = -ix \cos \varphi K$ ,  $K_{\varphi\varphi} = ix \sin \varphi K - x^2 \cos^2 \varphi K$ ,  $K_x = -i \sin \varphi K$ ,  $K_{xx} = -\sin^2 \varphi K$ , получим  $x^2 K_{xx} + x K_x + x^2 K = K(x^2 \cos^2 \varphi - ix \sin \varphi) = -K_{\varphi\varphi}$ ,  $L(K) = -(v^2 K + K_{\varphi\varphi})$  и, следовательно,

$$L(Z_v) = - \int_C (K_{\varphi\varphi} + v^2 K) \Phi_v(\varphi) d\varphi.$$

Проинтегрируем по частям, считая, что подстановки обращаются в нуль (на бесконечности, если контур уходит в

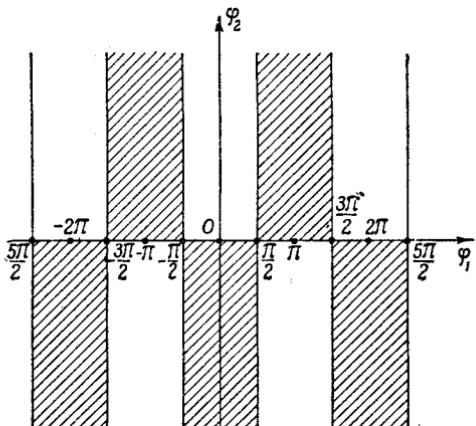


Рис. 95

бесконечность):

$$\begin{aligned} L(Z_v) = & - \int_C \{\Phi_v'' + v^2 \Phi_v\} K d\varphi - \int_C \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \Phi_v \frac{\partial K}{\partial \varphi} - K \frac{\partial \Phi_v}{\partial \varphi} \right\} d\varphi = \\ & = - \int_C \{\Phi_v'' + v^2 \Phi_v\} K d\varphi. \end{aligned}$$

Для того чтобы  $L(Z_v) = 0$ , достаточно, чтобы

$$\Phi_v'' + v^2 \Phi_v = 0.$$

Выберем  $\Phi_v = e^{iv\varphi}$ . Тогда  $Z_v(x) = \int_C e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi$ . Для сходимости этого интеграла достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re}(ix \sin \varphi) =$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re}(ix \sin(\varphi_1 + i\varphi_2)) = \\ &= -x \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 > 0 \\ &(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2). \end{aligned}$$

Это условие выполнено при  $x > 0$ , если

$$\varphi_2 < 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

либо  $\varphi_2 > 0$ ,

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

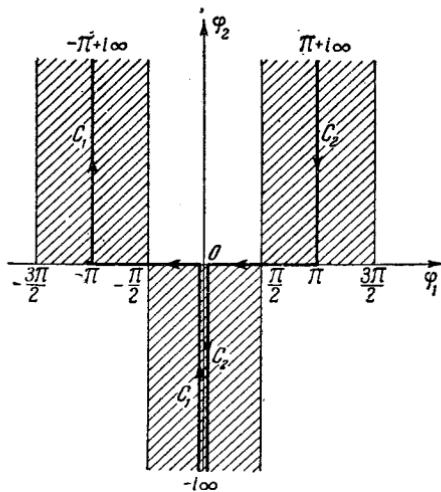


Рис. 96.

На рис. 95 области, по которым должен проходить контур, заштрихованы. В качестве контура  $C$  можно взять любой контур, асимптотические ветви которого лежат в заштрихованных областях.

**2. Функции Ханкеля.** Выберем два контура:  $C_1$  — контур, состоящий из луча  $(-i\infty, 0)$ , отрезка  $(0, -\pi)$  и луча  $(-\pi, -\pi + i\infty)$ , а контур  $C_2 = (i\infty + \pi, \pi) + (\pi, 0) + (0, -i\infty)$  (рис. 96). Соответствующие интегралы (3) определяют цилиндрические функции

$$H_v^{(k)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_k} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

В п. 4 будет показано, что определенные при помощи контурных интегралов (5) функции  $H_v^{(k)}(x)$  совпадают с функциями

Ханкеля, которые были введены в § 2. Для этого достаточно будет убедиться в том, что функции (5) имеют асимптотику

$$H_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ia_v} + \dots, \quad H_v^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ia_v} + \dots,$$

$$a_v = x - \frac{\pi}{2}, v - \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

Пользуясь определением (5) функций Ханкеля  $H_v^{(1,2)}(x)$ , можно получить для них рекуррентные формулы

$$H_{v+1}^{(k)} + H_{v-1}^{(k)} = \frac{2v}{x} H_v^{(k)}, \quad H_{v+1}^{(k)} - H_{v-1}^{(k)} = -2H_v^{(k)}(x), \quad k = 1, 2.$$

Выведем первую формулу. Замечая, что  $\Phi_{v+1} + \Phi_{v-1} = 2 \cos \varphi \Phi_v$ ,  $\Phi_v = e^{iv\varphi}$ , и интегрируя по частям, находим:

$$H_{v+1}^{(k)}(x) + H_{v-1}^{(k)}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_{C_k} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2v}{x\pi} \int_{C_k} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi = \frac{2v}{x} H_v^{(k)}(x).$$

Из (5) и формулы  $J_v(x) = \frac{1}{2}(H_v^{(1)} + H_v^{(2)})$  можно получить представление в виде контурного интеграла для функции Бесселя  $J_v(x)$ , полагая

$$J_v(x) = \frac{1}{2}(H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi, \quad (7)$$

где  $C_0 = C_1 + C_2$  — контур, состоящий из луча  $(\pi + i\infty, 0)$ , отрезка  $(\pi, -\pi)$  и луча  $(-\pi, -\pi + i\infty)$ . Направление обхода указано на рис. 96.

Чтобы убедиться в том, что интеграл (7) в самом деле дает функцию, совпадающую с введенной в § 1 функцией Бесселя, надо показать, что он разлагается в степенной ряд (15) § 1. Для этого нам понадобятся некоторые свойства гамма-функции.

**3. Некоторые свойства гамма-функции.** Гамма-функция  $\Gamma(s)$ , как известно, есть интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (8)$$

где  $s$  — вообще говоря, комплексный аргумент, причем  $\operatorname{Re} s > 0$ . Помимо элементарных свойств<sup>1)</sup>

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \text{ и т. д.,}$$

<sup>1)</sup> Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

нам понадобится свойство

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad (9)$$

В самом деле,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+t)} x^{s-1} t^{-s} dx dt.$$

Будем рассматривать этот интеграл как двойной интеграл и произведем замену переменных, полагая  $\xi = x + t$ ,  $\eta = x/t$ . Вычисляя  $\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x = -(1 + \eta)/t$ , получим  $dx dt = -\frac{t}{1+\eta} d\xi d\eta$  и

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi} \eta^{s-1} \frac{d\xi d\eta}{1+\eta} = \int_0^\infty \frac{\eta^{s-1} d\eta}{1+\eta}.$$

Интеграл, стоящий справа, вычисляется при помощи вычетов и равен  $\pi/\sin \pi s^1$ .

Для гамма-функции имеет место представление в виде контурного интеграла (интеграла Римана — Ханкеля)

$$\Gamma(s) = (e^{i2\pi s} - 1)^{-1} \int_{\gamma} e^{-\Phi} \Phi^{s-1} d\Phi, \quad (10)$$

где  $\gamma$  — любой контур (на плоскости комплексного переменного  $\Phi = \varphi_1 + i\varphi_2$ ) указанного на рис. 97 вида; этот контур идет из  $+\infty$ , обходит вокруг точки  $\Phi = 0$  и возвращается опять на  $+\infty$ . Подынтегральная функция  $f(\Phi) = e^{-\Phi} \Phi^{s-1} = e^{-\Phi} e^{(s-1)\ln \Phi}$  комплексного переменного  $\Phi$  имеет точку ветвления  $\Phi = 0$ . Проведем разрез вдоль положительной части вещественной оси, полагая  $\arg \Phi = 0$  на верхнем берегу разреза и  $\arg \Phi = 2\pi$  на нижнем берегу разреза.

В силу теоремы Коши контур  $\gamma$  можно, без изменения величины интеграла  $\int_{\gamma} f(\Phi) d\Phi$ , произвольно деформировать, сохраняя об-

ход вокруг точки  $\Phi = 0$  и удерживая концы контура на  $+\infty$ . Выберем в качестве  $\gamma$  контур, состоящий из луча  $(+\infty, \varepsilon)$  на верхнем берегу разреза, окружности  $C_\varepsilon$  с центром  $\Phi = 0$  и радиусом  $\varepsilon$  и луча  $(\varepsilon, +\infty)$  вдоль нижнего берега. Тогда  $f(\Phi) = e^{-\Phi+(s-1)\ln \Phi}$  на верхнем берегу и  $f(\Phi) = e^{(s-1)2\pi i - \Phi+(s-1)\ln \Phi}$  на нижнем берегу, где  $\ln \Phi$  принимает вещественные значения,

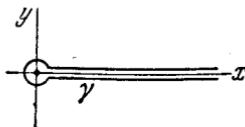


Рис. 97.

<sup>1)</sup> М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

так что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{-\Phi} \varphi^{s-1} d\varphi &= \\ &= \int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{-x} x^{s-1} dx + e^{(s-1)2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx + \int_{C_\varepsilon} e^{-\Phi} \varphi^{s-1} d\varphi. \quad (11) \end{aligned}$$

Покажем, что интеграл по  $C_\varepsilon$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\operatorname{Re} s > 0$ . В самом деле, на  $C_\varepsilon$   $|e^{-\Phi}|$  ограничен,

$$|\varphi^{s-1}| = e^{(s_0-1)\ln|\varphi|-s}, \arg \varphi = s_0 - 1 - s_1 \arg \varphi, \quad s = s_0 + is_1$$

и

$$\left| \int_{C_\varepsilon} e^{-\Phi} \varphi^{s-1} d\varphi \right| \leq A 2\pi \varepsilon^{s_0} e^{-s_1} \arg \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (s_0 > 0).$$

Поэтому предельный переход в (11) приводит к (10).

Формула (10) определяет справа от мнимой оси аналитическую функцию  $\Gamma(s)$ . В силу аналитического продолжения формула (10) справедлива на всей плоскости и  $\Gamma(s)$  представляется в виде частного двух целых функций. При  $s = -n$  ( $n \geq 0$ )  $\Gamma(s)$  имеет полюса.

Справедлива формула

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\Phi} \varphi^{-s-1} d\varphi. \quad (12)$$

Она следует из (9) и (10). В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s+1)} &= \frac{\sin \pi(s+1)}{\pi} \Gamma(-s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(-s) = \\ &= \frac{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}}{2\pi i (e^{-2\pi i s} - 1)} \int_{\gamma} e^{-\Phi} \varphi^{-s-1} d\varphi = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\Phi} \varphi^{-s-1} d\varphi. \end{aligned}$$

**4. Интегральное представление функции Бесселя.** Покажем теперь, что функция

$$J_v(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi \quad (13)$$

разлагается в ряд (15) § 1. Для этого преобразуем контур  $C_0$  (см. стр. 658), полагая  $\rho = \frac{x}{2} e^{-i(\Phi-\pi)}$  ( $x > 0$ ). Из таблицы

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi & i\infty + \pi & \pi & \frac{\pi}{2} & 0 & -\pi & -\pi + i\infty \\ \rho & \infty & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} & \frac{x}{2} e^{i\pi} & \frac{x}{2} e^{i2\pi} & \infty \end{array}$$

видно, что  $C_0$  преобразуется в контур  $\gamma$ , показанный на рис. 98, который состоит из луча  $(+\infty, x/2)$ , окружности  $C^*$  радиуса  $0,5x$  и луча  $(0,5x, +\infty)$ . Вычисляя

$$-ix \sin \varphi = -\frac{ix}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -\frac{x}{2} \left( \frac{x}{2\rho} e^{i\pi} - \frac{2\rho}{x} e^{-i\pi} \right) = \frac{x^2}{4\rho} - \rho,$$

преобразуем интеграл (13) к виду

$$J_v(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} e^{-\rho + \frac{x^2}{4\rho}} \left( \frac{x}{2\rho} \right)^v e^{iv\pi} \frac{d\rho}{\rho} \quad \left( d\varphi = \frac{i d\rho}{\rho} \right). \quad (14)$$

Разложим  $\exp(x^2/4\rho)$  в степенной ряд и подставим в (14):

$$J_v(x) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0,5x)^{2k+v}}{\Gamma(k+1)} e^{iv\pi} \int_{\gamma} e^{-\rho} \rho^{-(k+v+1)} d\rho.$$

Пользуясь затем формулой (12) для  $1/\Gamma(k+v+1)$ , получим

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(v+k+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+v}.$$

Таким образом, функция (13) есть функция Бесселя  $J_v(x)$ , введенная в § 1, п. 1. Преобразуем интеграл (13), разбив его на три части: по оси  $\varphi_1$  (от  $-\pi$  до  $\pi$ ) и по бесконечным ветвям. Для вычисления интеграла по ветвям  $(\pm\pi + i\infty)$  введем новую переменную, полагая соответственно  $\varphi = i\xi \pm \pi$ . В результате получаем для функции Бесселя  $v$ -го порядка следующее интегральное представление:

$$J_v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi - \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \sinh \xi - v\xi} d\xi. \quad (15)$$

Если  $v = n$  целое число, то  $\sin \pi v = 0$  и

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \varphi + in\varphi} d\varphi. \quad (16)$$

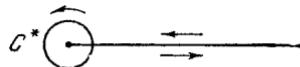


Рис. 98.

Отсюда, в частности, следует, что для плоской волны  $e^{-ix \sin \varphi}$  имеет место разложение в ряд Фурье

$$e^{-ix \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{-in\varphi},$$

так как (16) есть формула для коэффициента Фурье этого разложения. Полагая  $\varphi = \psi + \pi/2$  и учитывая, что, в силу периодичности подынтегральной функции в (16), интегрирование можно производить по любому промежутку длиною  $2\pi$ , получим вторую интегральную формулу:

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi + in\psi} d\psi, \quad (17)$$

которая соответствует следующему разложению плоской волны:

$$e^{-ix \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(x) e^{-in\varphi}.$$

В частности, при  $n = 0$  имеем:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi} d\psi. \quad (18)$$

**5. Интегральное представление  $K_v(x)$ .** Покажем, что для функции  $K_v(x)$  мнимого аргумента, определяемой по формуле (см. § 3),

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi v i} H_v^{(1)}(ix), \quad (19)$$

справедливо интегральное представление

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi - v\xi} d\xi, \quad x > 0, \quad (20)$$

Отсюда видно, что  $K_v(x)$  — вещественная монотонно убывающая положительная функция. При  $v = 0$  формула (20) дает

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi. \quad (21)$$

Для доказательства (20) обратимся к (19) и представлению (5) для функции  $H_v^{(1)}$ . Пусть  $C_{1,\psi}$  — контур (рис. 99), у которого вертикальные части пути  $C_1$  вместо  $-\pi$  и  $0$  имеют абсциссы  $-\pi - \psi$  и  $\psi$  ( $\psi < 0$ ); в частности,  $C_{1,0} = C_1$ . В силу теоремы Коши замена  $C_1$  в (5) контуром  $C_{1,\psi}$  не влияет на значение интеграла, если при больших  $|\varphi_2|$  выполнено условие сходимости интеграла  $\operatorname{Re}(-ix \sin \varphi) < 0$ , где  $x = x_1 + ix_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i + i\varphi_2$ . В силу (19) нас интересует функция Ханкеля  $H_v^{(1)}(ix)$  чисто мнимого аргумента. Условие сходимости при  $x_1 = 0$ ,  $x = ix_2$ ,  $\varphi = \psi$  имеет вид  $x_2 \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 < 0$  или  $x_2 \sin \psi \leq 0$ . Мы

выберем контур  $C_{1, -\pi/2}$  при  $\psi = -\pi/2$ . Заменим  $x_2$  на  $x$  и введем новую переменную интегрирования  $\xi$ , положив  $\varphi = -\frac{\pi}{2} + i\xi$ :

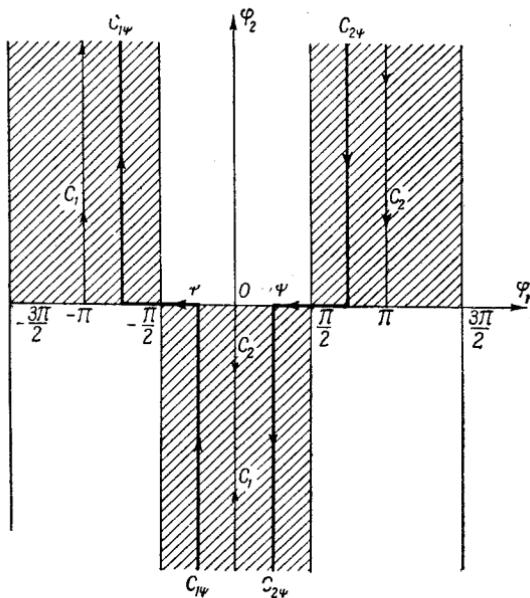


Рис. 99.

тогда  $d\varphi = id\xi$ ,  $\sin \varphi = \cos i\xi = \operatorname{ch} \xi$  и интеграл (5) по  $C_{1, \psi}$  примет вид

$$H_v^{(1)}(ix) = \frac{1}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}\pi v i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi - v \xi} d\xi.$$

Отсюда и из (19) следует (20).

**6. Асимптотические формулы для цилиндрических функций.** Пользуясь методом перевала<sup>1)</sup>, покажем, что для функций  $H_v^{(1, 2)}(x)$ , определяемых при помощи контурных интегралов (5), справедливы при больших значениях вещественного аргумента  $x > 0$  следующие асимптотические формулы:

$$\left. \begin{aligned} H_v^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x > 0, \\ H_v^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

<sup>1)</sup> М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

Отсюда, в силу п. 4 § 1, будет следовать, что функции (5) тождественно совпадают с функциями Ханкеля, введенными в § 3 при помощи формул (12), (13).

Из формул  $H_v^{(1)} = J_v + iN_v$ ,  $H_v^{(2)} = J_v - iN_v$  и (22) следуют асимптотические формулы для функций Бесселя  $J_v(x)$  и функций Неймана  $N_v(x)$ :

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2} v - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (23)$$

$$N_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2} v - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \quad (24)$$

Напомним, что в п. 4 мы доказали тождественность функций  $J_v(x)$ , введенных при помощи контурных интегралов, с функциями  $J_v(x)$ , введенными в § 1 при помощи рядов.

При выводе асимптотических формул (22) мы будем пользоваться контурными интегралами (5). Рассуждения достаточно провести для  $H_v^{(1)}(x)$ . Подынтегральная функция

$$e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi}, \quad x > 0,$$

в формуле (5) не имеет особенностей в конечной части плоскости комплексного переменного  $\varphi$ .

Поэтому, в силу теоремы Коши, контур интегрирования в конечной плоскости можно произвольно деформировать при условии, что асимптоты ветвей контура, уходящих в бесконечность,

лежат в тех же заштрихованных полосах плоскости  $\varphi$ , как и для контура  $C_1$ . Если выбранный контур  $\bar{C}_1$  целиком лежит в заштрихованной области (рис. 100), то во всех точках, где  $\sin \varphi \neq 0$ , подынтегральная функция экспоненциально стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ , так как  $\operatorname{Im} \sin \varphi < 0$ . Если отдельные части контура проходят по незаштрихованной области, то на этих частях в подынтегральном выражении происходят сложные интерференционные явления.

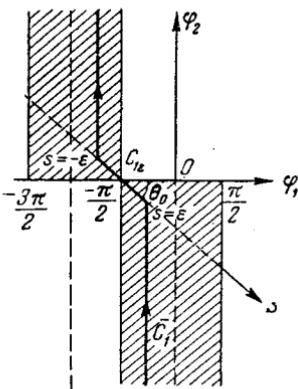


Рис. 100.

Для выяснения асимптотического поведения функции  $H_v^{(1)}(x)$  при больших значениях аргумента  $x$  целесообразно контур  $\bar{C}_1$  выбрать так, чтобы он целиком лежал в заштрихованной области. Такой контур очевидно пройдет через точку  $-\pi/2$ , в которой действительная часть  $\operatorname{Re}(-i \sin \varphi) = \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi$  обращается в нуль. При  $x \rightarrow \infty$  подынтегральная функция в окрестности этой точки не стремится

равномерно к нулю, поэтому главной частью интеграла по  $\bar{C}_1$  при  $x \rightarrow \infty$  является интеграл по малой дуге, содержащей точку  $\varphi = -\pi/2$ . С этой точки зрения  $\bar{C}_1$  следует выбрать так, чтобы на нем множитель  $e^{-ix \sin \varphi}$  убывал наиболее быстро при удалении от точки  $\varphi = -\pi/2$ . Рассмотрим «топографию» функции  $e^{-ix \sin \varphi}$  в окрестности  $\varphi = -\pi/2$ . Положим  $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{i\theta}$ . Для малых значений  $s$  найдем:

$$\begin{aligned}-i \sin \varphi &= i \cos(se^{i\theta}) = i \left(1 - \frac{s^2}{2} e^{2i\theta} + \dots\right) = \\ &= \frac{s^2}{2} \sin 2\theta + i \left(1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\theta\right) + \dots\end{aligned}$$

Для действительной части  $\operatorname{Re}(-i \sin \varphi) = \frac{1}{2} s^2 \sin 2\theta$  точка  $s = 0$  является седловой точкой: в заштрихованных полосах эта функция отрицательна, в незаштрихованных областях — положительна, а при  $s = 0$  ( $\varphi = -\pi/2$ ) обращается в нуль. Направление  $\theta = \theta_0 = -\pi/4$ , очевидно, будет направлением наибыстрейшего спуска (убывания) для функции  $\frac{s^2}{2} \sin 2\theta$ . Отсюда следует, что и для модуля функции  $e^{-ix \sin \varphi}$  точка  $s = 0$  является седловой, а  $\theta_0 = -\pi/4$  соответствует направлению наибыстрейшего спуска.

Выберем контур  $C_1$  так, чтобы он содержал прямолинейный отрезок  $\bar{C}_{1e}$  ( $-e < s < e$ ), проходящий через точку  $s = 0$  ( $\varphi = -\pi/2$ ) под углом  $\theta_0 = -\pi/4$ , а его ветви, уходящие в бесконечность, целиком лежали в заштрихованных областях (рис. 100).

Подынтегральная функция в (5) экспоненциально убывает при удалении от точки  $s = 0$ . Поэтому с точностью до экспоненциально убывающего слагаемого можно написать:

$$H_v^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{C}_1} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi \approx \frac{1}{\pi} \int_{-e}^e e^{x \left(-\frac{s^2}{2} + i\right) - iv \frac{\pi}{2}} ds e^{-i \frac{\pi}{4}},$$

так как вдоль  $\bar{C}_{1e}$   $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{-i\pi/4}$ ,  $d\varphi = e^{-i\frac{\pi}{4}} ds$ ,  $-i \sin \varphi \approx -\frac{s^2}{2} + i$ ,  $e^{iv\varphi} \approx e^{-\frac{iv\pi}{2}}$ , а  $s$  изменяется от  $-e$  до  $e$ . Введем обозначения  $\xi = s\sqrt{x/2}$ ,  $d\xi = \sqrt{x/2} ds$ ,  $a = \sqrt{x/2}$ . Тогда

$$H_v^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} e^{i \left(x - \frac{\pi}{2} - v - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{-ea}^{ea} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Если  $x \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup>, т. е.  $\alpha \rightarrow \infty$ , то  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ .

Отсюда находим первый член асимптотической формулы (22). Следующие члены разложения можно получить, если взять члены более высокого порядка малости относительно  $s$ . Оценка  $O\left(\frac{1}{x^{s/2}}\right)$  для остаточных членов в (22) следует из п. 4 § 1.

Отметим, что изложенный выше метод перевала или метод седловой точки применим для получения асимптотического разложения ряда других функций, представимых в виде контурных интегралов, а также для  $H_v^{(1, 2)}(x)$  при  $v \approx x \rightarrow \infty$ .

## § 5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя

**1. Интеграл Фурье — Бесселя.** Найдем разложение заданной функции  $f(r)$  в интеграл по функциям Бесселя. Интеграл Фурье для функции  $f(x)$  и соответственно для функции двух переменных  $f(x, y)$ , как известно, имеет вид

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\mu(x-\xi)} d\xi, \quad (1)$$

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\mu' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{i\mu(x-\xi)+i\mu'(y-\eta)} d\xi d\eta. \quad (2)$$

Вводя полярные координаты с помощью соотношений

$$x = r \cos \varphi, \quad \xi = \rho \cos \psi, \quad \mu = \lambda \cos \xi,$$

$$y = r \sin \varphi; \quad \eta = \rho \sin \psi; \quad \mu' = \lambda \sin \xi,$$

получим:

$$d\xi d\eta = \rho d\rho d\psi, \quad d\mu d\mu' = \lambda d\lambda d\xi,$$

$$\mu x + \mu' y = \lambda r \cos(\xi - \varphi), \quad \mu \xi + \mu' \eta = \lambda \rho \cos(\psi - \xi).$$

Предполагая, что  $f(x, y)$  имеет вид

$$f(x, y) = \hat{f}(r) e^{inx}, \quad (3)$$

где  $n$  — целое число, и преобразовывая с помощью написанных

<sup>1)</sup> Ошибка, допускаемая при замене конечных пределов бесконечными, имеет экспоненциальный характер убывания, так как

$$\int_z^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \approx e^{-z^2}/2z.$$

выше соотношений интеграл Фурье (2), находим:

$$\begin{aligned} f(r) e^{in\varphi} &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\rho) \rho d\rho \lambda d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r \cos(\xi - \varphi) + in(\xi - \varphi)} d\xi \cdot e^{in\varphi} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda \rho \cos(\psi - \xi) + in(\psi - \xi)} d\psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся формулами (см. (16), (17) § 4 п. 4)

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos \xi + in\xi} e^{-i\frac{\pi n}{2}} d\xi, \quad \left( \xi = \varphi - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz \cos \xi' + in\xi'} e^{i\frac{\pi n}{2}} d\xi' \quad (\xi = \pi + \xi'). \quad (6)$$

Так как подынтегральные выражения в (5) и (6) являются периодическими функциями  $\xi$  и  $\xi'$  и интегрировать поэтому можно по любому промежутку длиной  $2\pi$ , то можно написать:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \cos(\xi - \xi_0) + in(\xi - \xi_0)} d\xi = J_n(z) e^{i\frac{\pi n}{2}}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz \cos(\xi' - \xi'_0) + in(\xi' - \xi'_0)} d\xi' = J_n(z) e^{-i\frac{\pi n}{2}}, \quad (8)$$

где  $\xi_0$  и  $\xi'_0$  — произвольные числа. Подставляя (7) и (8) в (4) и сокращая обе части на  $e^{in\varphi}$ , получаем интеграл Фурье — Бесселя:

$$f(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\rho) J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda \rho d\rho \quad (9)$$

или

$$f(r) = \int_0^\infty \varphi(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad \text{где } \varphi(\lambda) = \int_0^\infty f(\rho) J_n(\lambda\rho) \rho d\rho.$$

Для того чтобы разложение в интеграл Фурье — Бесселя было возможно, достаточно потребовать от функции  $f(r)$ , определенной в промежутке  $(0, \infty)$ , выполнения следующих условий:

- 1)  $f(r)$  непрерывна в промежутке  $(0, \infty)$ ;
- 2)  $f(r)$  имеет конечное число максимумов и минимумов во всяком конечном промежутке;

3) существует интеграл

$$\int_0^\infty \rho |f(\rho)| d\rho.$$

На доказательстве этого мы не останавливаемся.

**2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя.** В различных приложениях часто встречаются определенные интегралы, содержащие бесселевы функции

К числу наиболее распространенных интегралов этого типа принадлежит интеграл

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (z > 0). \quad (10)$$

Для доказательства этой формулы заменим  $J_0$  ее интегральным выражением ((16) § 4) и затем изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-z\lambda} d\lambda \int_{-\pi}^\pi e^{-i\rho\lambda \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi d\varphi \int_0^\infty e^{-(z+i\rho \sin \varphi)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\varphi}{z + i\rho \sin \varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{z d\varphi}{z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{\rho \sin \varphi d\varphi}{z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z d\varphi}{z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = 0$$

в силу нечетности подынтегрального выражения.

Полагая сначала  $\operatorname{tg} \varphi = \xi$ , а затем  $\sqrt{\frac{z^2 + \rho^2}{z^2}} \xi = \eta$ , получаем:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z d\varphi}{z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{2z}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{z^2(1 + \xi^2) + \rho^2 \xi^2} = \frac{2}{\pi \sqrt{z^2 + \rho^2}} \int_0^\infty \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}; \end{aligned}$$

тем самым формула (10) доказана. Пользуясь (10), сразу же находим:

$$\int_0^\infty J_1(\rho\lambda) e^{-z\lambda} d\lambda = \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{z}{V z^2 + \rho^2} \right). \quad (11)$$

Полагая в формулах (10) и (11)  $z = ia$  и разделяя действительную и мнимые части, получаем ряд следствий:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \cos a\lambda d\lambda &= \frac{1}{V\rho^2 - a^2}, \\ \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \sin a\lambda d\lambda &= 0, \\ \int_0^\infty J_1(\rho\lambda) \cos a\lambda d\lambda &= \frac{1}{\rho}, \\ \int_0^\infty J_1(\rho\lambda) \sin a\lambda d\lambda &= \frac{a}{\rho V\rho^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \text{при } \rho > a; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \cos a\lambda d\lambda &= 0, \\ \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \sin a\lambda d\lambda &= \frac{1}{V a^2 - \rho^2} \end{aligned} \right\} \text{при } a > \rho; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty J_1(\rho\lambda) \cos a\lambda d\lambda &= \frac{1}{\rho} \left( 1 - \frac{a}{V a^2 - \rho^2} \right), \\ \int_0^\infty J_1(\rho\lambda) \sin a\lambda d\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } a > \rho. \quad (13')$$

Докажем вторую интегральную формулу

$$B_2 = \int_0^\infty J_v(\lambda\rho) e^{-iz\lambda} \lambda^{v+1} d\lambda = \frac{1}{2t} \left( \frac{\rho}{2t} \right)^v e^{-\frac{\rho^2}{4t}}. \quad (14)$$

Подставим в эту формулу вместо  $J_v$  степенной ряд и произведем почленное интегрирование ( $t > 0!$ ):

$$B_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+v} \int_0^{\infty} \lambda^{2k+2v+1} e^{-t\lambda^2} d\lambda.$$

Вычисляя вспомогательный интеграл

$$\int_0^{\infty} \lambda^{2k+2v+1} e^{-t\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2t^{k+v+1}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{k+v} d\xi = \frac{1}{2t^{k+v+1}} \Gamma(k+v+1),$$

получаем:

$$B_2 = \frac{1}{2t} \left(\frac{\rho}{2t}\right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\rho^2}{4t}\right)^k = \frac{1}{2t} \left(\frac{\rho}{2t}\right)^v e^{-\frac{\rho^2}{4t}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что вычисление  $B_1$  можно провести аналогично, разлагая бесселеву функцию в ряд и производя затем почленное интегрирование.

Рассмотрим интеграл

$$C = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-V\sqrt{\lambda^2-k^2}|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \lambda d\lambda. \quad (15)$$

Нетрудно убедиться, что он является решением уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Функция

$$v_0 = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r = \sqrt{\rho^2 + z^2})$$

также удовлетворяет волновому уравнению ( $r > 0$ )

$$\Delta v_0 + k^2 v_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv_0) + k^2 v_0 = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} + k^2 v_0 = 0.$$

Разложим функцию  $v_0(\rho) = e^{ik\rho}/\rho$  в интеграл Фурье — Бесселя:

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda, \quad (16)$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) d\rho. \quad (17)$$

Для вычисления функции  $F(\lambda)$  воспользуемся формулами (12)

$$F(\lambda) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) (\cos k\rho + i \sin k\rho) d\rho = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, & \text{если } \lambda > k, \\ \frac{i}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, & \text{если } k > \lambda. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \quad (18)$$

т. е. функция

$$v_0 = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

совпадает с интегралом  $C(\rho, z)$  при  $z = 0$ . Итак, обе функции

$$v_0(\rho, z) \quad \text{и} \quad C(\rho, z)$$

являются решениями волнового уравнения, совпадают при  $z = 0$  и имеют в точке  $z = 0$ ,  $\rho = 0$  одинаковую особенность.

Отсюда следует, что они тождественно равны друг другу, т. е.

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-V\sqrt{\lambda^2 - k^2}|z|}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (19)$$

Полученная формула широко применялась А. Зоммерфельдом в физических исследованиях и часто называется формулой Зоммерфельда.

## ЧАСТЬ II

### СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферические функции были введены в связи с изучением решений уравнения Лапласа и, в частности, с теорией потенциала. В § 1 мы рассматриваем полиномы Лежандра, которые используются затем для построения шаровых и сферических функций (§ 2). Сферические функции являются весьма мощным аппаратом для решения многих задач математической физики.

## § 1. Полиномы Лежандра

**1. Производящая функция и полиномы Лежандра.** Полиномы Лежандра тесно связаны с фундаментальным решением уравнения Лапласа  $\frac{1}{R}$ , где  $R$  — расстояние точки  $M$  от фиксированной точки  $M_0$ . Пусть  $r$  и  $r_0$  — радиусы-векторы точек  $M$  и  $M_0$ , а  $\theta$  — угол между ними (рис. 101). Очевидно, можно написать

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \theta}} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} & \text{для } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} & \text{для } r > r_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x = \cos \theta$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) и  $\rho = \frac{r}{r_0} < 1$  или  $\rho = \frac{r_0}{r} < 1$  (в обоих случаях  $\rho$  меньше единицы).

Функция

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} \quad (0 < \rho < 1, -1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

называется производящей функцией полиномов Лежандра.

Разложим функцию  $\Psi(\rho, x)$  в ряд по степеням  $\rho$ :

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \rho^n. \quad (3)$$

Коэффициенты  $P_n(x)$  разложения (3) являются полиномами  $n$ -й степени и называются полиномами Лежандра.

В силу теоремы Коши из формулы (3) следует, что

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n} \right|_{\rho=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (4)$$

где  $C$  — любой замкнутый контур в плоскости комплексного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$ , содержащий точку  $\zeta = 0$ . Полагая  $\sqrt{1 - 2x\xi + \xi^2} = 1 - \xi z$ , найдем  $\zeta = 2(z - x)/(z^2 - 1)$ ,  $d\zeta = 2(1 - \xi z) dz/(z^2 - 1)$ ,  $\Psi(\zeta, x) d\zeta = 2 dz/(z^2 - 1)$ .

Формула (4) примет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_{C_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad (5)$$

где  $C_1$  — любой контур, окружающий точку  $z = x$ .

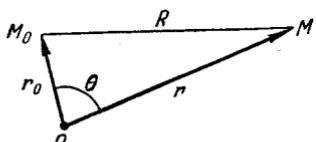


Рис. 101.

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{z - x} dz = (x^2 - 1)^n$$

и пользуясь формулой для производной

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_{C_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{z - x} dz = n! \int_{C_1} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz,$$

получаем из (5) формулу для  $P_n(x)$ :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (6)$$

Из формулы (6) непосредственно видно, что: 1)  $P_n(x)$  есть полином степени  $n$ ; 2)  $P_n(x)$  содержит только степени  $x$  той четности, что и номер  $n$ , так что

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (7)$$

Полагая  $x = 1$ , находим:

$$\Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1 - \rho} = 1 + \rho + \dots + \rho^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) \rho^n,$$

т. е.  $P_n(1) = 1$ , и, в силу (7),

$$P_n(-1) = (-1)^n. \quad (7')$$

Формула (6) называется дифференциальной формулой для полиномов Лежандра или формулой Родрига.

Заметим, что из (1) и (3) следует разложение потенциала

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta) & \text{при } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (8)$$

**2. Рекуррентные формулы.** Дифференцируя  $\Psi(\rho, x)$  по  $\rho$  и  $x$ , получим два тождества:

$$(1 - 2\rho x + \rho^2) \Psi_\rho - (x - \rho) \Psi = 0, \quad (9)$$

$$(1 - 2\rho x + \rho^2) \Psi_x - \rho \Psi = 0. \quad (10)$$

Запишем левую часть формулы (9) в виде степенного ряда относительно  $\rho$ , подставив в нее ряд (3) для  $\Psi$  и ряд  $\Psi_\rho =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) \rho^n$ . Коэффициент при  $\rho^n$  полученного ряда,

в силу (9), равен нулю при всех  $x$ :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (11)$$

Это тождество есть рекуррентная формула, связывающая три последовательных полинома. Она позволяет найти последовательно все  $P_n(x)$  ( $n > 1$ ), если учесть, что (6) дает

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Так, например, полагая в (11)  $n = 1$ , найдем  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ .

Выведем еще две рекуррентные формулы:

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

или

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \quad (12)$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \quad (13)$$

Исключив из (9) и (10)  $\Psi$ , получим тождество  $\rho\Psi_\rho - (x-\rho)\Psi_x = 0$ , из которого сразу следует (12), если в левую часть этого тождества подставить ряд (3) и приравнять нулю коэффициент при  $\rho^n$ . Дифференцируя затем (11) по  $x$  и исключая  $P'_{n-1} = xP'_n - nP_n$ , получим  $P'_{n+1} - xP'_n - (n+1)P_n = 0$  или (13) после замены  $n+1$  на  $n$ .

**3. Уравнение Лежандра.** Найдем дифференциальное уравнение, решением которого является  $P_n(x)$ . Для этого исключим  $P_{n-1}$  и  $P'_{n-1}$  из (12) и (13). Сначала подставим  $P'_{n-1}$  из (12) в (13):

$$P'_n - xP'_{n-1} - nP_{n-1} = (1-x^2)P'_n + nxP_n - nP_{n-1} = 0,$$

затем продифференцируем полученное тождество по  $x$  и еще раз применим формулу (12) для  $P'_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} [(1-x^2)P'_n]' + nxP'_n + nP_n - nP'_{n-1} &= \\ &= [(1-x^2)P'_n] + nxP'_n + nP_n - (nxP'_n - n^2P_n) = 0. \end{aligned}$$

В результате приходим к уравнению

$$[(1-x^2)P'_n]' + n(n+1)P_n = 0. \quad (14)$$

Тем самым доказано, что полиномы Лежандра  $P_n(x)$  являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям  $\lambda_n = n(n+1)$ , следующей задачи:

найти такие значения  $\lambda$ , для которых на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  существуют нетривиальные решения уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (15)$$

ограниченные при  $x = \pm 1$  и удовлетворяющие условию нормировки  $y(1) = 1$ .

**4. Ортогональность полиномов Лежандра.** Уравнение Лежандра (15) является частным случаем (при  $q = 0$ ,  $\rho = 1$ ,  $k(x) = 1 - x^2$ ) рассмотренного во Введении уравнения

$$(k(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0. \quad (16)$$

Поэтому к нему применима общая теория для уравнения (16). Из этой теории следует:

1) полиномы Лежандра разных порядков ортогональны между собой:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad \text{при } m \neq n;$$

2) второе линейно независимое решение уравнения Лежандра при  $\lambda = n(n+1)$  обращается в бесконечность при  $x = \pm 1$  как  $\ln(1 \mp x)$ .

Система ортогональных полиномов, как известно, является замкнутой<sup>1)</sup>. Поэтому уравнение Лежандра не имеет нетри-

1) Система ортогональных функций  $\{\varphi_n\}$  называется замкнутой, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.

Система ортогональных функций  $\{\varphi_n\}$  называется полной в промежутке  $(a, b)$ , если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций  $\{\varphi_n\}$ . Иными словами, какого бы ни было  $\varepsilon > 0$ , всегда можно указать такую линейную комбинацию функций

$$S_n = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n,$$

что

$$\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Для полной системы функций  $\{\varphi_n\}$  имеет место соотношение

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2,$$

где  $f_n$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x)$

$$\left( f_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(\xi)\varphi_n(\xi)d\xi \right).$$

Замкнутость есть следствие полноты. Пусть дана некоторая полная система ортогональных функций  $\{\varphi_n(x)\}$ . Допустим, что существует непрерывная функция  $f(x) \not\equiv 0$ , ортогональная ко всем  $\varphi_n(x)$ . Тогда в силу полноты

виальных ограниченных решений ни при каком  $\lambda \neq n(n+1)$ . В самом деле, если бы существовало решение  $y(x)$  для  $\lambda \neq n(n+1)$ , то оно было бы ортогонально во всем  $P_n(x)$ . Отсюда, в силу замкнутости системы ортогональных полиномов  $\{P_n(x)\}$ , следует, что  $y(x) \equiv 0$ . Тем самым доказано, что мы нашли все ограниченные нетривиальные решения уравнения Лежандра.

**5. Норма полиномов Лежандра.** Вычислим норму  $\|P_n\|$  полиномов  $P_n(x)$ :

$$\|P_n\| = \left( \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим рекуррентную формулу (11) дважды: сначала выразим из нее (предварительно заменив в (11)  $n+1$  на  $n$ )  $P_n$  через  $P_{n-1}$  и  $P_{n-2}$ , а затем  $xP_n$  — через  $P_{n+1}$  и  $P_{n-1}$ . Учитывая ортогональность полиномов  $P_n$ ,  $P_{n-1}$ ,  $P_{n-2}$ , получим:

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 P_n(x) \{(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)\} dx = \\ &= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 (xP_n) P_{n-1} dx = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Последовательное применение этой формулы дает  $\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1} \|P_0\|^2$ . Подставив сюда  $\|P_0\|^2 = \|1\|^2 = 2$ , находим квадрат нормы

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \quad \text{и} \quad \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (17)$$

системы функций  $\{\varphi_n\}$  должно иметь место равенство

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2 = 0,$$

так как  $f_n = 0$  по предположению. Отсюда следует, что  $f \equiv 0$ , что противоречит сделанному допущению, т. е. система  $\{\varphi_n(x)\}$  является замкнутой.

Полнота и, тем самым, замкнутость системы ортогональных полиномов  $\{P_n(x)\}$  является следствием теоремы Вейерштрасса о возможности равномерной аппроксимации непрерывной функции при помощи полиномов: какова бы ни была непрерывная функция  $f(x)$ , заданная в промежутке  $(a, b)$ , и каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , существует такой полином  $Q_n(x)$ , что

$$|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon. \quad (A)$$

В самом деле, представляя полином  $Q_n(x)$  в виде линейной комбинации ортогональных полиномов  $\{P_n(x)\}$  и пользуясь неравенством (A), мы получим условие полноты системы ортогональных полиномов.

Таким образом,

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \quad (18)$$

**6. Нули полиномов Лежандра.** С помощью формулы Родрига (6) можно доказать теорему:

Полином Лежандра  $P_n(x)$  имеет  $n$  нулей, расположенных на интервале  $-1 < x < 1$ , а его производная  $k$ -го порядка  $k \leq n$ , имеет  $n - k$  нулей внутри интервала  $(-1, 1)$  и не обращается в нуль на его концах.

Действительно, функция  $w = (x^2 - 1)^n$  обращается в нуль на концах интервала  $(-1, 1)$ . Ее производная  $w'(x)$  обращается в нуль при  $x = 1$  и  $x = -1$  и по теореме о нуле производной имеет хотя бы один нуль внутри интервала  $(-1, 1)$ . Вторая производная  $w''(x)$  имеет, по крайней мере, два нуля внутри интервала и не обращается в нуль на его концах (рис. 102). Продолжая рассуждения, приходим к заключению, что  $n$ -я производная  $w^{(n)}(x)$  имеет, по крайней мере,  $n$  нулей на интервале  $(-1, 1)$  или, точнее, ровно  $n$  нулей, так как она есть полином  $n$ -й степени. Первая часть утверждения доказана. Производная  $P_n'(x)$  по той же теореме должна иметь, по крайней мере,  $n - 1$  нуль внутри  $(-1, 1)$ , но она есть полином  $(n - 1)$ -й степени и потому имеет ровно  $n - 1$  нуль внутри интервала. Далее заключаем, что  $\frac{d^n}{dx^n} P_n(x)$  имеет  $n - k$  нулей внутри интервала  $(-1, 1)$ .

**7. Ограниченнность полиномов Лежандра.** Покажем, что полиномы Лежандра  $P_n(x)$  равномерно ограничены для всех значений аргумента  $-1 \leq x \leq 1$ :

$$|P_n(x)| \leq 1.$$

Для этого нам понадобится интегральное представление

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x + i\sqrt{1-x^2} \sin \phi]^n d\phi. \quad (19)$$

Выведем формулу (19). Возьмем в (5) в качестве контура  $C_1$  окружность радиуса  $R = \sqrt{1-x^2}$  ( $|x| < 1$ ) с центром в точке

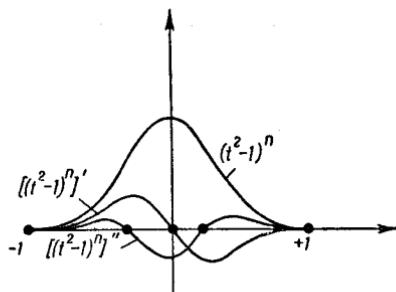


Рис. 102.

$z = x$ . Тогда  $z = x + \sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$ ,  $dz = i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}d\varphi$ ,  $(z-x)^{n+1} = (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\varphi}$ ,  $z^2-1 = x^2-1 + (1-x^2)e^{2i\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi} = \sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}[2x + \sqrt{1-x^2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})] = 2\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}[x + i \times \sqrt{1-x^2}\sin\varphi]$ . Подставляя эти выражения в (5), получим (19). Если  $-1 \leq x \leq 1$ , то  $|x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi| \leq 1$  и из (19) сразу следует ограниченность  $P_n(x)$ .

## § 2. Присоединенные функции Лежандра

**1. Присоединенные функции.** Рассмотрим следующую задачу:

найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

при условии ограниченности

$$|y(\pm 1)| < \infty. \quad (2)$$

Уравнение (1) является частным случаем уравнения (8), рассмотренного во Введении, при  $k(x) = 1-x^2$ ,  $q(x) = m^2/(1-x^2)$ ,  $\rho = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ . Так как коэффициент  $k(x) = 1-x^2$  обращается в нуль на обоих концах отрезка  $-1 \leq x \leq 1$ , то естественное условие ограниченности ставится при  $x = -1$  и  $x = 1$ . В силу леммы 2 Введения решение  $y(x)$  задачи (1) должно при  $x = \pm 1$  иметь нули порядка  $v$ , где  $v = m/2$ . Отсюда следует, что решение задачи (1) естественно искать в виде

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} v(x), \quad v(\pm 1) \neq 0. \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (1), найдем:

$$(1-x^2)v'' - 2(m+1)v' + [\lambda - m(m+1)]v = 0. \quad (4)$$

Это же уравнение получается для производной  $\frac{d^m z}{dx^m}$  решения уравнения Лежандра (15) § 1, если его продифференцировать  $m$  раз. Нетривиальное ограниченное решение  $z = P_n(x)$  уравнения Лежандра существует лишь при  $\lambda = n(n+1)$ , где  $n$  — целое положительное число. Отсюда следует, что

$$v(x) = \frac{d^m P_n}{dx^m}, \quad \lambda = n(n+1) \quad (5)$$

есть решение уравнения (2), а функция

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m} \quad (6)$$

есть собственная функция задачи (1), соответствующая собственному значению

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

$P_n^{(m)}(x)$  называется присоединенной функцией Лежандра  $m$ -го порядка. Очевидно, что  $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$ ,  $P_n^{(m)}(x) \not\equiv 0$  лишь при  $m \leq n$ .

**2. Норма присоединенных функций.** Согласно общей теореме на стр. 630 присоединенные функции  $P_n^{(m)}$  образуют ортогональную систему. Вычислим норму  $\|P_n^{(m)}\|$  присоединенных функций. Попутно будет доказана их ортогональность. Умножим уравнение (4) на  $(1-x^2)^m$  и учтем (5). После замены  $m+1$  на  $m$  получим:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \right] = -[\lambda - m(m-1)] (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n}{dx^{m-1}}. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^1 P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^m P_k}{dx^m} dx.$$

Интегрирование по частям дает:

$$L_{n,k}^m = \left[ \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d^m P_n}{dx^m} (1-x^2)^m \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d^m P_n}{dx^m} \right] dx.$$

Подстановка обращается в нуль, а подынтегральный член, в силу (8) и (7), преобразуется к виду

$$L_{n,k}^m = [n(n+1) - m(m-1)] L_{n,k}^{m-1} = (n+m)(n-m+1) L_{n,k}^{m-1}.$$

Из этой рекуррентной формулы следует

$$\begin{aligned} L_{n,k}^m &= (n+m)(n+m-1) \dots (n+1)n \dots (n-m+1) L_{n,k}^0 = \\ &= \frac{(n+m)!}{n!} \frac{n!}{(n-m)!} L_{n,k}^0 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L_{n,k}^{(0)}. \end{aligned}$$

Выражение для  $L_{n,k}^0$  дается формулой (18) § 1, так как  $P_n^{(0)} = P_n$ . В результате получаем:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при } k = n, \end{cases} \quad (9)$$

т. е. присоединенные функции ортогональны между собой и квадрат нормы присоединенной функции  $P_n^{(m)}$  равен

$$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (10)$$

**3. Замкнутость системы присоединенных функций.** Докажем, что система присоединенных функций  $\{P_n^{(m)}(x)\}$  полностью исчерпывает все ограниченные решения уравнения (1).

В самом деле, при  $\lambda = n(n+1)$  решение, линейно независимое с  $P_n^{(m)}(x)$ , обращается в бесконечность при  $x = \pm 1$ . Ограниченнное же решение при  $\lambda \neq n(n+1)$  должно быть ортогонально ко всем  $P_n^{(m)}(x)$ .

Для того чтобы убедиться, что не существует ограниченных решений уравнения (1), отличных от  $P_n^{(m)}(x)$ , достаточно установить, что система присоединенных функций  $\{P_n^{(m)}(x)\}$  замкнута, т. е. что не существует никакой непрерывной функции, не равной тождественно нулю, которая была бы ортогональна ко всем функциям системы.

**Лемма.** *Любая функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  и обращающаяся в нуль на его концах при  $x = 1$  и  $x = -1$ , может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинацией из присоединенных функций любого порядка  $m$ .*

Заметим, прежде всего, что производные полиномов Лежандра  $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$  являются полиномами степени  $n - m$ . Поскольку любой полином по степеням  $x$  может быть представлен в виде линейной комбинации этих полиномов, то, в силу теоремы Вейерштрасса, любая функция  $\bar{f}(x)$ , непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$ , может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности при помощи линейной комбинации  $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ :

$$\left| \bar{f}(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{если } n_0 > N(\varepsilon).$$

Умножая это неравенство на  $(1 - x^2)^{m/2}$ , получаем, что

$$\left| f_1(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{если } n_0 > N(\varepsilon),$$

где

$$f_1(x) = \bar{f}(x)(1 - x^2)^{m/2}, \quad (11)$$

т. е. любая функция  $f(x)$ , представленная в виде (11), где  $\bar{f}(x)$  — функция, непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$ , может быть

равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинацией присоединенных функций.

Будем говорить, что функция  $f_1(x)$  принадлежит классу  $H_1$ , если она непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и тождественно равна нулю в малых окрестностях точек  $x = -1$  и  $x = 1$ .

$$f_1(x) = 0 \quad \text{при } |1 - \delta| \leq |x| \leq 1.$$

Так как для каждой функции  $f_1(x)$  класса  $H_1$  функция

$$\tilde{f}(x) = \frac{f_1(x)}{(1 - x^2)^{m/2}}$$

является непрерывной на  $[-1, 1]$ , то тем самым лемма доказана для функций класса  $H_1$ .

Рассмотрим некоторую функцию  $f(x)$ , непрерывную на отрезке  $[-1, 1]$ , обращающуюся в нуль на концах. Очевидно, что эту функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи функции  $f_1(x)$  из класса  $H_1$  с точностью до  $\varepsilon/2$ :

$$|f(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аппроксимируя  $f_1(x)$  линейной комбинацией из присоединенных функций с точностью до  $\varepsilon/2$ ,

$$\left| f_1(x) - \sum_1(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_1(x) = \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x),$$

получаем неравенство

$$|f(x) - \sum_1(x)| < \varepsilon,$$

которое и доказывает лемму.

С помощью этой леммы легко доказывается полнота системы присоединенных функций, а тем самым и ее замкнутость.

Напомним, что система функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется полной на некотором отрезке  $[a, b]$ , если любую функцию  $F(x)$ , непрерывную на  $[a, b]$ , можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации этих функций

$$\int_a^b \left[ F(x) - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \varphi_n(x) \right]^2 dx < \varepsilon, \quad \text{если } n_0 > N(\varepsilon).$$

Очевидно, что всякую функцию, непрерывную на отрезке  $[-1, 1]$ , можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи функции  $f(x)$ , непрерывной на  $[-1, 1]$  и

обращающейся в нуль при  $x = \pm 1$ :

$$\int_{-1}^1 [F(x) - f(x)]^2 dx < \epsilon'.$$

Беря линейную комбинацию присоединенных функций, равномерно аппроксимирующих функцию  $f(x)$

$$|f(x) - \sum_i(x)| < \epsilon'',$$

и пользуясь неравенством

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

получим:

$$\int_{-1}^1 [F(x) - \sum_i]^2 dx \leq 2 \int_{-1}^1 [F(x) - f(x)]^2 dx + 2 \int_{-1}^1 [f(x) - \sum_i]^2 dx < \epsilon,$$

$$(\text{если } 2\epsilon' + 4(\epsilon'')^2 \leq \epsilon),$$

что доказывает полноту, а тем самым и замкнутость системы присоединенных функций.

### § 3. Гармонические полиномы и сферические функции

**1. Гармонические полиномы.** Гармоническим полиномом называется однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что первые два однородных гармонических полинома имеют вид

$$u_1(x, y, z) = Ax + By + Cz,$$

$$u_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$

где  $A, B, C$  — произвольные коэффициенты.

Определим число линейно-независимых однородных гармонических полиномов степени  $n$

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} a_{p, q, r} x^p y^q z^r. \quad (2)$$

Целая однородная функция степени  $n$  имеет  $(n+1)(n+2)/2$  коэффициентов. Действительно, правую часть равенства (2) можно представить в виде

$$a_{0, 0, n} z^n + (a_{1, 0, n-1} x + a_{0, 1, n-1} y) z^{n-1} \dots +$$

$$+ (a_{n-1, 0, 1} x^{n-1} + a_{n-2, 1, 1} x^{n-2} y + \dots + a_{0, n-1, 1} y^{n-1}) z +$$

$$+ (a_{n, 0, 0} x^n + a_{n-1, 1, 0} x^{n-1} y + \dots + a_{0, n, 0} y^n) z^0.$$

При  $z^n$  имеется один коэффициент, при  $z^{n-1}$  — два, ..., при  $z$  имеем  $n$  коэффициентов, а при  $z^0$  число коэффициентов равняется  $(n+1)$ , так что общее число коэффициентов равно

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (3)$$

Уравнение (1) налагает на коэффициенты  $n(n-1)/2$  линейных однородных соотношений, так как  $\Delta u_n$  — однородная функция степени  $n-2$ . Таким образом, полином должен иметь не менее чем  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n+1$  независимых коэффициентов. Если бы указанные  $(n-1)n/2$  соотношения оказались линейно-зависимыми, то число независимых коэффициентов было бы больше  $2n+1$ .

Покажем, что только  $2n+1$  коэффициентов линейно независимы. Коэффициенты  $\alpha_{p,q,r}$  однородного полинома можно представить в виде

$$\alpha_{p,q,r} = \frac{1}{p! q! r!} \frac{\partial^n u_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}.$$

Если  $u_n$  — гармонический полином, то  $\alpha_{p,q,r}$  при  $r \geq 2$  можно выразить через коэффициенты  $\alpha_{p,q,0}$  и  $\alpha_{p,q,1}$ , число которых в точности равно  $2n+1$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \alpha_{p,q,r} &= \frac{1}{p! q! r!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r-2}} \left[ \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right] = \\ &= \frac{1}{p! q! r!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^{r-2}} \left[ -\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \right] = \\ &= \beta_1 \alpha_{p+2,q,r-2} + \beta_2 \alpha_{p,q+2,r-2}. \end{aligned}$$

Поступая аналогично с коэффициентами  $\alpha_{p+2,q,r-2}$  и  $\alpha_{p,q+2,r-2}$ , мы в конце концов выразим  $\alpha_{p,q,r}$  через коэффициенты типа  $\alpha_{p,q,0}$  ( $p+q=n$ ) и  $\alpha_{p,q,1}$  ( $p+q+1=n$ ). Число коэффициентов вида  $\alpha_{p,q,0}$  равно  $(n+1)$ , а  $\alpha_{p,q,r}$  равно  $n$ . Таким образом, общее число линейно-независимых коэффициентов, а следовательно, и независимых гармонических полиномов  $n$ -й степени в точности равно  $2n+1$ .

Однородные гармонические полиномы называются *шаровыми функциями*.

**2. Сферические функции.** Сферические функции проще всего могут быть введены при решении уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных.

Будем искать решение уравнения Лапласа в переменных  $(r, \theta, \varphi)$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1)$$

полагая

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi).$$

Для определения  $R(r)$  получаем уравнение Эйлера

$$r^2 R'' + 2r R' - \lambda R = 0, \quad (4)$$

а для определения  $Y(\theta, \varphi)$  — уравнение

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad (5)$$

с дополнительным условием ограниченности функции  $Y$  на всей сфере.

В частности, функция  $Y(\theta, \varphi)$  удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} Y(\theta, \varphi + 2\pi) &= Y(\theta, \varphi), \\ |Y(0, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ограниченнные решения уравнения (5), обладающие непрерывными до 2-го порядка производными, называются сферическими функциями.

Решение задачи для  $Y(\theta, \varphi)$  ищем также методом разделения переменных, полагая

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi).$$

Функция  $\Phi(\varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0$$

и условию периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Задача для  $\Phi(\varphi)$  имеет решение лишь при целом  $\mu = m^2$  и линейно-независимыми решениями являются функции  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$ . Функция  $\Theta(\theta)$  определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

и условий ограниченности при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ .

Вводя переменную

$$t = \cos \theta$$

и обозначая  $X(t) |_{t=\cos \theta} = X(\cos \theta) = \Theta(\theta)$ , получим для  $X(t)$  уравнение присоединенных функций

$$\frac{d}{dt} \left[ (1 - t^2) \frac{dX}{dt} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - t^2} \right) X = 0 \quad (-1 < t < 1). \quad (6)$$

Уравнение (6), как мы уже видели в § 2, допускает ограниченные решения лишь при  $\lambda = n(n+1)$

$$X(t) \Big|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(t) \Big|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(\cos\theta) = \Theta(\theta),$$

где  $m \leq n$ .

Выпишем полученную систему сферических функций  $n$ -го порядка. Условимся приписывать отрицательный верхний индекс тем функциям, которые содержат  $\cos k\varphi$ , и положительный — тем функциям, которые содержат  $\sin k\varphi$ . Тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m=0 & \quad Y_n^{(0)}(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta), \\ m=1 & \quad Y_n^{(-1)}(\theta, \varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta) \cos\varphi, \quad Y_n^{(1)}(\theta, \varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta) \sin\varphi, \\ \dots & \quad \dots \\ m=k & \quad Y_n^{(-k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta) \cos k\varphi, \quad Y_n^{(k)}(\theta, \varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta) \sin k\varphi \end{aligned} \right\} (k=1, 2, \dots, n).$$

Число различных сферических функций  $n$ -го порядка  $Y_n^{(m)}$  равно  $2n+1$ . Линейная комбинация этих  $2n+1$  сферических функций (7)

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) \quad (7*)$$

или

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n C_{mn} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi),$$

где

$$C_{mn} = \begin{cases} A_{nm} & \text{при } m \leq 0, \\ B_{nm} & \text{при } m > 0 \end{cases}$$

является также сферической функцией и называется сферической гармоникой.

Функции  $Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta)$  не зависят от  $\varphi$  и называются зональными. Так как  $P_n(t)$  в силу леммы § 1, п. 6 имеет ровно  $n$  нулей внутри промежутка  $(-1, +1)$ , то сфера разделяется на  $(n+1)$  широтных зон, внутри которых зональная функция сохраняет знак.

Рассмотрим поведение функции

$$Y_n^{(\pm k)} = \sin^k \theta \left[ \frac{d^k}{dt^k} P_n(t) \right]_{t=\cos\theta} \begin{cases} \sin k\varphi, \\ \cos k\varphi \end{cases}$$

на сфере. Так как  $\sin\theta$  обращается в нуль на полюсах,  $\sin k\varphi$  или  $\cos k\varphi$  обращаются в нуль на  $2k$  меридианах, а  $\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)$

в силу той же леммы — на  $(n - k)$  широтах, то вся сфера разбивается на клетки, в которых  $Y_n^{(\pm k)}$  сохраняет постоянный знак (рис. 103). Функции  $Y_n^{(\pm k)}$  (при  $k > 0$ ) называются тессеральными.

Вернемся теперь к отысканию функции  $R$ . Будем искать функцию  $R(r)$  в виде

$$R = r^\sigma.$$

Подставляя искомую форму решения в уравнение (4), получим характеристическое уравнение для определения  $\sigma$ :

$$\sigma(\sigma + 1) - n(n + 1) = 0,$$

откуда находим два значения  $\sigma$ :

$$\sigma = n \text{ и } \sigma = -(n + 1).$$

Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа являются функции

$$r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \quad (7')$$

$$r^{-(n+1)} Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \quad (7'')$$

Рис. 103.

первая из которых, очевидно, соответствует решению внутренних задач, а вторая — внешних задач (см. § 4, п. 1).

Покажем, что найденные решения уравнения Лапласа являются однородными полиномами  $n$ -й степени. Общий член, например, в формуле (7') можно записать так:

$$v = r^n \sin^k \theta \cos k\varphi \cos^{n-k-2q} \theta,$$

где  $q$  изменяется от 0 до  $(n - k)/2$ . Функцию  $v$  можно представить в виде произведения трех полиномов:

$$v = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3,$$

где

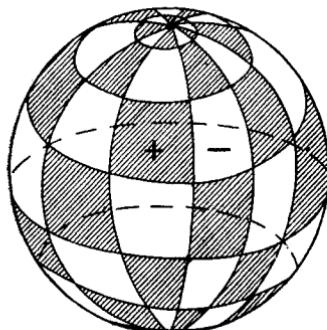
$$u_1 = r^k \sin^k \theta \cos k\varphi = \operatorname{Re}[r \sin \theta e^{i\varphi}]^k = \operatorname{Re}[(x + iy)^k],$$

$$u_2 = r^{n-k-2q} \cos^{n-k-2q} \theta = z^{n-k-2q},$$

$$u_3 = r^{2q} = (x^2 + y^2 + z^2)^q.$$

Отсюда ясно, что функция  $r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)$  есть однородный гармонический полином степени  $k + n - k - 2q + 2q = n$ .

Очевидно, что сферические функции являются значениями шаровых функций (7') и (7'') на сфере радиуса единицы.



**3. Ортогональность системы сферических функций.** Докажем, что сферические функции, соответствующие различным значениям  $\lambda$ , ортогональны на поверхности сферы  $\Sigma$ . Пусть  $Y_1$  и  $Y_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \quad \Delta_{\theta, \varphi} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Нетрудно видеть, что имеет место формула

$$\int \int_{\Sigma} Y_2 \Delta_{\theta, \varphi} Y_1 d\Omega = - \int \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi} \right\} d\Omega \quad (8)$$

$$(d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi),$$

легко получаемая интегрированием по частям.

На поверхности сферы

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{i}_{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{i}_{\varphi}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) + \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} \right],$$

так что

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$$

и формулу (8) можно записать в виде

$$\int \int_{\Sigma} Y_2 \Delta Y_1 d\Omega = - \int \int_{\Sigma} \operatorname{grad} Y_1 \cdot \operatorname{grad} Y_2 \cdot d\Omega.$$

Меняя местами в формуле (8) функции  $Y_1$  и  $Y_2$  и вычитая полученную формулу из формулы (8), будем иметь:

$$J = \int \int_{\Sigma} \{ Y_2 \Delta_{\theta, \varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta, \varphi} Y_2 \} d\Omega = 0. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) являются формулами Грина для оператора сферических функций.

Из формулы (9) легко следует ортогональность функций  $Y_1$  и  $Y_2$ . В самом деле, пользуясь уравнениями (5), получим из формулы (9)

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1) \int \int_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0,$$

откуда при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\int \int_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0$$

или

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_1(\theta, \varphi) Y_2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

Тем самым доказана ортогональность сферических функций, соответствующих разным  $\lambda$ .

Выше мы получили для  $\lambda = n(n+1)$  систему  $2n+1$  сферических функций  $n$ -го порядка. Докажем, что эти *сферические функции ортогональны между собой на сфере*.

Пусть  $Y_n^{(k_1)}$  и  $Y_n^{(k_2)}$  — две сферические функции. Интегрируя их произведение и пользуясь формулой (9) § 2, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \int Y_n^{(k_1)} Y_n^{(k_2)} d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^{(k_1)}(\theta, \varphi) Y_n^{(k_2)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi d\varphi \int_0^\pi P_n^{(k_1)}(\cos \theta) P_n^{(k_2)}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(k_1)}(t) P_n^{(k_2)}(t) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } k_1 \neq k_2, \\ \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{при } k_1 = k_2 = k \neq 0, \\ 2\pi \cdot \frac{2}{2n+1} & \text{при } k_1 = k_2 = 0, \end{array} \right\} \quad (8') \end{aligned}$$

т. е. сферические функции, определяемые формулой (7), образуют ортогональную систему в области  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и имеют квадрат нормы, равный

$$\|Y_n^{(k)}\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2}{2n+1} \pi \varepsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \quad (8'')$$

где  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\varepsilon_k = 1$  при  $k > 0$ .

Предполагая возможность разложения произвольной функции  $f(\theta, \varphi)$  в ряд по сферическим функциям (возможность такого разложения для дважды непрерывно дифференцируемой функции будет подробно обоснована ниже, п. 5), допускающий почлененное интегрирование, получим

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

где  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi}{\|Y_n^{(m)}\|^2}, \\ B_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi}{\|Y_n^{(m)}\|^2}, \\ \|Y_n^{(m)}\|^2 &= \frac{2\pi \varepsilon_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m>0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Общее решение уравнения Лапласа можно представить в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi)$$

для внутренней краевой задачи или

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

для внешней краевой задачи, где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos \theta)$$

— сферическая гармоника.

**4. Полнота системы сферических функций.** Докажем полноту системы сферических функций, определяемых формулой (7). Докажем сперва, что любая функция  $f(\theta, \varphi)$ , имеющая непрерывные вторые производные, может быть равномерно аппроксимирована некоторым полиномом из сферических функций.

Рассмотрим разложение такой функции в ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi].$$

Используя ограниченность второй производной, легко оценить коэффициенты  $A_m$  и  $B_m$  этого разложения

$$|A_m| < \frac{M}{m^2}; \quad |B_m| < \frac{M}{m^2},$$

где

$$M = \max |f_{\varphi\varphi}|.$$

Отсюда следует, что для остаточного члена ряда Фурье имеет место равномерная оценка

$$\left| f - \sum_{m=0}^{m_0} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \sin m\varphi] \right| = |R_{m_0}| < 2M \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \epsilon', \quad (10)$$

где  $\epsilon' > 0$  — любое наперед заданное число.

На основании п. 3 § 2 коэффициенты Фурье  $A_m(\theta)$  и  $B_m(\theta)$ , являющиеся непрерывными функциями  $\theta$ , обращающимися в нуль при  $\theta$ , равном 0 и  $\pi$ , могут быть равномерно аппроксимированы линейными комбинациями присоединенных функций  $m$ -го порядка

$$\begin{aligned} \left| A_m(\theta) - \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \right| &< \frac{\epsilon'}{2m_0 + 1}, \\ \left| B_m(\theta) - \sum_{k=0}^n b_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \right| &< \frac{\epsilon'}{2m_0 + 1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда из неравенств (10) и (11) будет следовать:

$$\left| f(\theta, \varphi) - \sum_{n=0}^{m_0} \sum_{k=0}^n [a_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi + b_k P_k^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi] \right| < 2\epsilon', \quad (12)$$

что и доказывает возможность равномерной аппроксимации любой дважды дифференцируемой функции  $f(\theta, \varphi)$  полиномом из сферических функций. Отсюда следует, что любую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать полиномом сферических функций, что и доказывает полноту системы функций, определяемых формулой (7). Из полноты этой системы следует ее замкнутость.

Таким образом, доказано, что уравнение сферических функций не имеет ограниченных решений при  $\lambda \neq n(n+1)$  и что всякая сферическая функция  $n$ -го порядка (при  $\lambda = n(n+1)$ ) представима формулой (7\*).

**5. Разложение по сферическим функциям.** Сферические функции являются собственными функциями уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0 \text{ или } \Delta_{\theta, \varphi} u + \lambda u = 0 \quad (13)$$

на поверхности сферы  $\Sigma$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) при дополнительных условиях ограниченности.

Для обоснования разложимости произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции  $f(\theta, \varphi)$  в ряд по сфе-

ческим функциям перейдем к соответствующему интегральному уравнению. С этой целью построим функцию источника уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (14)$$

удовлетворяющую условию ограниченности решения при  $\theta = 0, \pi$ .

Как было отмечено выше

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = (\operatorname{div} \operatorname{grad} u)_{\theta, \varphi} \quad (15)$$

на поверхности сферы. Уравнение (14) можно рассматривать как уравнение стационарного распределения температуры или стационарного электрического тока на поверхности сферы.

С этой точки зрения понятно, что невозможно построить решение однородного уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = 0 \quad (16)$$

с особенностью в одной только точке, так как для возможности существования стационарной температуры необходимо, чтобы сумма источников и стоков равнялась нулю.

Введем обобщенную функцию источника, которая в нашем случае должна быть решением уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = q \quad (q = 1/4\pi), \quad (17)$$

регулярным всюду, кроме полюса  $\theta = 0$ , где она должна иметь логарифмическую особенность. Правая часть уравнения (17) означает плотность отрицательных источников (стоков) тепла, равномерно распределенных по поверхности сферы так, что

$$\int \int_{\Sigma} q \, d\sigma = 1. \quad (18)$$

Предполагая, что искомая функция источника  $u$  является функцией только одного переменного  $\theta$ , получаем для нее обыкновенное дифференциальное уравнение, решая которое найдем:

$$u = -q \ln \sin \theta + c \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (19)$$

Требуя, чтобы  $u$  имело особенность только при  $\theta = 0$ , получаем:

$$c = -q$$

и

$$u = -2q \ln \sin \frac{\theta}{2} - q \ln 2.$$

Так как  $u_1 = \operatorname{const}$  является решением однородного уравнения, то функция источника  $G$  определена с точностью до произвольной

постоянной. Поэтому мы можем написать:

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \sin \frac{\theta}{2}. \quad (20)$$

Если источник находится в некоторой точке  $M_0$ , то функция источника имеет вид

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sin \frac{\gamma_{MM_0}}{2}, \quad (21)$$

где  $\gamma_{MM_0}$  — угловое расстояние между точками  $M_0(\theta_0, \varphi_0)$  и  $M(\theta, \varphi)$ <sup>1)</sup>.

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -F(\theta, \varphi). \quad (22)$$

Это уравнение может иметь регулярное всюду на  $\Sigma$  решение только при выполнении условия

$$\int \int_{\Sigma} F d\sigma = 0, \quad (23)$$

выражающего, что сумма источников и стоков должна быть равна нулю. Его легко получить из формул Грина для оператора  $\Delta_{\theta, \varphi}$ , установленных в п. 3.

Покажем, что всякое решение уравнения (22), удовлетворяющее условию (23), представимо в виде

$$u(M) = \int \int_{\Sigma} G(M, P) F(P) d\sigma_P + A,$$

где  $A$  — некоторая постоянная, а  $G(M, P)$  — функция источника, определяемая формулой (21). Пусть  $M$  — некоторая фиксированная точка сферы, в которую мы помещаем северный полюс ( $\theta = 0$ ), а  $M_1$  — диаметрально противоположная ей точка. Точки  $M$  и  $M_1$  являются особыми точками уравнения (22). Поэтому построим на  $\Sigma$  в этих точках малые кружки  $K_e^M$  и  $K_e^{M_1}$  и рассмотрим интеграл

$$I = \int \int_{\Sigma_1 = \Sigma - K_e^M - K_e^{M_1}} (u \Delta G - G \Delta u) d\sigma.$$

<sup>1)</sup> Угол  $\gamma$  определяется из формулы

$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0).$

Подставляя в правую часть выражения для  $\Delta u$  и  $\Delta G$ , имеем:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left[ u \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) - G \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] d\theta d\varphi + \\ + \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sin \theta} \int_0^{2\pi} \left[ u \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - G \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] d\varphi.$$

Учитывая, что в квадратных скобках стоят точные производные от выражений

$$\sin \theta \left[ u \frac{\partial G}{\partial \theta} - G \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad \text{и} \quad u \frac{\partial G}{\partial \varphi} - G \frac{\partial u}{\partial \varphi} = v, \quad \text{причем} \quad v \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

получаем после интегрирования

$$I = \int_0^{2\pi} \left[ \sin \theta \left( u \frac{\partial G}{\partial \theta} - G \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]_{-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\varphi.$$

Далее, замечая, что

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

будем иметь:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot u \right]_{-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\varphi - \\ - \frac{1}{2\pi} \left[ \sin \theta \ln \sin \frac{\theta}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} d\varphi \right]_{-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = I_1 + I_2.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = u(M) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = 0.$$

Следовательно,

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P) F(P) d\sigma_P + A, \quad (24)$$

где

$$A = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u d\sigma - \text{постоянная.}$$

Решение нашей задачи определено с точностью до аддитивной постоянной. То решение, для которого  $\iint_{\Sigma} u d\sigma = 0$ , определяется

формулой

$$u(M) = \int \int_{\Sigma} G(M, P) F(P) d\sigma_P.$$

Применяя (24) к уравнению сферических функций  $\Delta_{\theta, \varphi} u = -\lambda u$ , заключаем:

сферические функции, определяемые формулой (7), представляют совокупность всех линейно-независимых собственных функций интегрального уравнения

$$u(M) = \lambda \int \int_{\Sigma} G(M, P) u(P) d\sigma_P$$

с симметрическим ядром  $G(M, P)$ , определяемым формулой (21).

К этому уравнению применима общая теория интегральных уравнений с симметрическим ядром. Отсюда следует, что произвольная дважды дифференцируемая функция  $f(\theta, \varphi)$  может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим функциям

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad (26)$$

$A_{nm}$  и  $B_{nm}$  — коэффициенты Фурье.

#### § 4. Некоторые примеры применения сферических функций

Рассмотрим несколько типичных задач математической физики, требующих применения сферических функций.

Напомним, что общее решение уравнений Лапласа в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) Y_n(\theta, \varphi),$$

где  $Y_n(\theta, \varphi)$  — сферическая гармоника, т. е. линейная комбинация всех  $2n+1$  сферических функций. Если решение ищется в области  $r < a$  (внутренняя задача), то  $B_n = 0$ , для задачи в области  $r > a$  (внешней задачи) следует положить  $A_n = 0$  и, наконец, в случае области  $a < r < b$ , не содержащей ни  $r = 0$ , ни  $r = \infty$ , в решение, вообще говоря, входят слагаемые с  $r^n$  и  $1/r^{n+1}$ .

**1. Задача Дирихле для сферы.** Пусть дана сфера радиуса  $a$ . Поместим в центр этой сферы начало сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  и рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } r < a, \quad u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \quad (\text{внутренняя задача}), \quad (1)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } r > a, \quad u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \quad (\text{внешняя задача}), \quad (1')$$

где  $f = f(\theta, \varphi)$  — заданная функция на поверхности сферы. Разложим  $f(\theta, \varphi)$  в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

где  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  вычисляются по формулам (9) § 3.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \bar{Y}_n(\theta, \varphi) \quad \text{при } r \leq a.$$

Пользуясь граничным условием при  $r = a$  и учитывая разложение для  $f(\theta, \varphi)$ , находим

$$\bar{Y}_n(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi).$$

Аналогично находим решение внешней задачи (2):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi) \quad \text{при } r \geq a.$$

**2. Проводящая сфера в поле точечного заряда.** Найдем электростатическое поле точечного заряда  $e$  в точке  $P$  в присутствии идеально проводящей сферы радиуса  $a$ . Будем предполагать, что сфера заземлена, т. е. ее потенциал равен нулю. Поместим начало сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  в центр  $O$  сферы, а полярную ось ( $\theta = 0$ ) проведем через точку  $P$ ;  $OP = r_0 > a$ .

Электростатическое поле  $E = -\operatorname{grad} u$ . Потенциал  $u = u(M)$ , ( $M = M(r, \theta, \varphi)$ ) удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне сферы, кроме точки  $M = P$ , в которой имеет особенность вида  $e/R_{MP} = u_0$ , где  $u_0$  — потенциал заряда  $e$  в неограниченном пространстве (в отсутствии сферы). На поверхности сферы потенциал  $u|_{r=a} = 0$ . Решение задачи естественно искать в виде

$$u(M) = \frac{e}{R} + v(M), \quad R = R_{MP} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \theta},$$

где  $v$  есть решение внешней задачи Дирихле

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v = 0 \text{ при } r > a, \\ v|_{r=a} = -\frac{e}{R} \end{array} \right\} \quad (2)$$

В данном случае  $f$  из (1) имеет вид  $f(\theta) = -\frac{e}{R}|_{r=a}$ . Воспользуемся разложением  $1/R$

в ряд при  $r < r_0$  (см. § 1, п. 1)

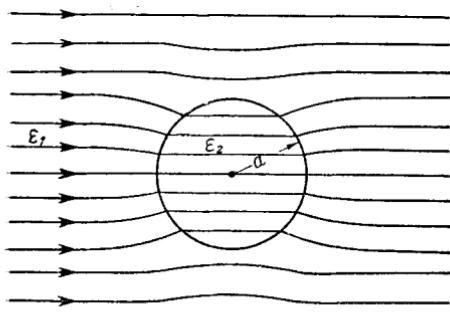


Рис. 104.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{при } r < r_0. \quad (3)$$

Решение внешней задачи Дирихле (2) ищется в виде

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \phi).$$

Из (2) и (3) находим  $Y_n = -ea^n r_0^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$ . Таким образом, потенциал  $u = u(r, \theta)$  найден:

$$u = u(r, \theta) = \frac{e}{R} - e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1} r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

**3. Поляризация шара в однородном поле.** Пусть в электростатическое поле в однородной изотропной среде с диэлектрической постоянной  $\epsilon_1$  помещен шар радиуса  $a$  из диэлектрика с постоянной  $\epsilon_2$  (рис. 104). Будем искать потенциал создавшегося поля в виде суммы

$$u = \begin{cases} u_1 = u_0 + v_1 & \text{вне шара,} \\ u_2 = u_0 + v_2 & \text{внутри шара,} \end{cases}$$

где  $u_0$  — потенциал невозмущенного (в отсутствии диэлектрического шара) поля, а  $v$  — возмущение, вызываемое помещенным в поле шаром. Потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 && \text{на } S, \\ \epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} && \text{на } S, \end{aligned}$$

где  $S$  — граница шара,  $u_1$  и  $u_2$  — значения функции  $u$  вне и внутри шара. Отсюда следует, что потенциал  $v$  будет определяться условиями

$$\Delta v = 0,$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{на } S, \quad (4)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -(\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{\partial u_0}{\partial n} \quad \text{на } S, \quad (4')$$

так как для функции  $u_0$  имеем:

$$\Delta u_0 = 0,$$

$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{на } S,$$

$$\left( \frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_1 = \left( \frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_2 \quad \text{на } S.$$

В правой части равенства (4') стоит известная функция  $\theta$  и  $\varphi$ , которую мы разложим по сферическим функциям:

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi).$$

Полагая

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \bar{Y}_n(\theta, \varphi); \quad v_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \bar{Y}_n$$

и пользуясь граничными условиями (4) и (4'), получаем:

$$\bar{Y}_n = \bar{Y}_n$$

и

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \bar{Y}_n \Big|_{r=a} - \epsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} \left( \frac{r}{a} \right)^{n-1} \bar{Y}_n \Big|_{r=a} = \\ = -(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sum_{n=0}^{\infty} Y_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{Y}_n = Y_n \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) a}{\epsilon_1(n+1) + \epsilon_2 n}. \quad (4'')$$

Рассмотрим теперь частный случай. Шар помещен в однородном параллельном внешнем поле  $E_0$ , направленном вдоль оси  $z$ . Потенциал этого поля равен

$$u_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta,$$

так что

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=a} = -E_0 \cos \theta = Y_1(\theta).$$

Формула (4'') дает:

$$\bar{Y}_n = 0 \quad \text{при } n \neq 1,$$

$$\bar{Y}_1 = -E_0 \cos \theta \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) a}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Для потенциала возмущенного поля имеем:

$$u_1 = -E_0 z \left[ 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right] \quad \text{вне шара } (r > a),$$

$$u_2 = -E_0 z \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad \text{внутри шара } (r < a),$$

откуда следует, что

$$E_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \left[ 1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{2a^3}{r^3} \right] E_0,$$

$$E_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0,$$

т. е. поле внутри шара параллельно и однородно.

Если  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , то эквипотенциальные поверхности, оставаясь плоскостями, перпендикулярными к направлению поля, будут расположены реже, чем в невозмущенном поле. Силовые линии, являющиеся ортогональными траекториями эквипотенциальных поверхностей, будут втягиваться в шар с большей диэлектрической постоянной. В случае  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  картина будет обратной.

Этим же методом можно получить решение задачи о поляризации шара в присутствии точечного источника, если воспользоваться разложением  $1/R$  по сферическим функциям (см. § 1).

Следует отметить, что аналогичные задачи встречаются при изучении магнитных и термических полей, а также поля стационарного электрического тока при наличии сферического включения, физические характеристики которого отличны от характеристик среды. Для термической задачи в граничное условие (3) вместо  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  будут входить коэффициенты теплопроводности  $k_1$  и  $k_2$ , для магнитной задачи — магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , а для последней задачи — проводимости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

**4. Собственные колебания сферы.** Рассмотрим задачу о собственных колебаниях сферы радиуса  $r_0$  с нулевыми граничными условиями первого рода. Эта задача сводится к отысканию собственных значений и собственных функций уравнения

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{5}$$

с граничным условием на поверхности сферы

$$v = 0. \tag{6}$$

Помещая начало сферической системы координат в центр сферы, перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} v + \lambda v = 0, \quad (5')$$

где

$$\Delta_{\theta, \varphi} v = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi). \quad (6')$$

После подстановки этого выражения в уравнение (5) получим

$$\frac{\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \lambda r^2 + \frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y}{Y} = 0, \quad (7)$$

откуда следует:

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \mu Y = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0. \quad (9)$$

Решая уравнение (8) при естественных условиях ограниченности в полюсах сферы

$$|Y|_{\theta=0, \pi} < \infty \quad (10)$$

и условии периодичности по  $\varphi$ :  $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$ , получаем собственные значения

$$\mu = n(n+1), \quad (11)$$

каждому из которых соответствует  $2n+1$  сферическая функция:

$$\left. \begin{aligned} Y_n^{(0)}(\theta, \varphi) &= P_n(\cos \theta), \\ Y_n^{(-j)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos \theta) \cos j\varphi, \\ Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos \theta) \sin j\varphi \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Обратимся теперь к уравнению (9). Учитывая равенство (11), граничные условия при  $r = r_0$  и естественное условие ограниченности при  $r = 0$ , получаем для функции  $R(r)$  следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0, \quad (9')$$

$$R(r_0) = 0, \quad (13)$$

$$|R(0)| < \infty. \quad (14)$$

С помощью подстановки

$$R(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}} \quad (15)$$

это уравнение приводится к уравнению Бесселя порядка  $(n + \frac{1}{2})$ :

$$y'' + \frac{1}{r} y' + \left[ \lambda - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] y = 0, \quad (16)$$

общее решение которого имеет вид (см. Дополнение II, ч. I, § 1)

$$y(r) = AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r) + BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r). \quad (17)$$

Из условия ограниченности (14) следует, что

$$B = 0.$$

Границное условие (13) дает:

$$AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r_0) = 0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения уравнения, то  $A \neq 0$  и, следовательно,

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r_0) = 0.$$

Обозначив  $v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \dots, v_m^{(n)}$  корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+\frac{1}{2}}(v) = 0, \quad (18)$$

находим собственные значения

$$\lambda_{m,n} = \left( \frac{v_m^{(n)}}{r_0} \right)^2. \quad (19)$$

Каждому собственному значению  $\lambda_{m,n}$  соответствует  $2n+1$  собственная функция. Введем обозначение

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x). \quad (20)$$

Тогда собственные функции уравнения (5) при граничном условии (6) можно представить в виде

$$v_{n,m,j}(r, \theta, \varphi) = \psi_n \left( \frac{v_m^{(n)}}{r_0} r \right) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$$

$$(n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots; j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n). \quad (21)$$

Рассмотрим теперь первую внутреннюю краевую задачу для волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (22)$$