

с начальными условиями

$$U^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad U^{(n-1)}(0) = 1. \quad (4*)$$

В самом деле, вычисляя производные  $u(t)$  дифференцированием правых частей по  $t$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U(0) f(t) & [U(0) = 0], \\ u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(1)}(0) f(t) & [U^{(1)}(0) = 0], \\ &\vdots & \vdots \\ u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t) & [U^{(n-2)}(0) = 0], \\ u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) & [U^{(n-1)}(0) = 1]. \end{aligned} \right\} (5*)$$

Подставляя эти производные в уравнение (1\*), получаем:

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau) d\tau + f(t) = f(t),$$

т. е. уравнение удовлетворяется. Очевидно, что начальные условия (2\*) также выполнены.

Нетрудно дать наглядную физическую интерпретацию функции  $U(t)$  и формулы (3\*). Обычно функция  $u(t)$  представляет смещение некоторой системы, а  $f(t)$  — силу, действующую на эту систему. Пусть для  $t < 0$  наша система находилась в состоянии покоя, и ее смещение создается функцией  $f_\varepsilon(t)$  ( $\geq 0$ ), отличной от нуля только в промежутке времени  $0 < t < \varepsilon$ . Импульс этой силы обозначим

$$I = \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\tau) d\tau.$$

Обозначим  $u_\varepsilon(t)$  функцию, соответствующую  $f_\varepsilon(t)$ , считая  $\varepsilon$  параметром и полагая  $I = 1$ . Нетрудно убедиться, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  существует  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t)$ , не зависящий от способа выбора  $f_\varepsilon(t)$ , и что этот предел равен функции  $U(t)$ , определенной выше

$$U(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t),$$

если положить  $U(t) = 0$  для  $t < 0$ . Таким образом, функцию  $U(t)$  естественно назвать функцией влияния мгновенного импульса.

В самом деле, рассматривая формулу (3\*) и применяя теорему среднего значения, получаем:

$$u_\varepsilon(t) = U(t - \tau_\varepsilon^*) \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\tau) d\tau = U(t - \tau_\varepsilon^*) \quad (0 \leq \tau_\varepsilon^* < \varepsilon < t).$$

Переходя к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ , видим, что существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(t - \tau_\epsilon^*) = U(t),$$

что и доказывает наше утверждение.

Перейдем к представлению решения неоднородного уравнения через  $U(t)$  — функцию влияния мгновенного импульса. Разбивая промежуток  $(0, t)$  точками  $\tau_i$  на равные части

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

представим функцию  $f(t)$  в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t),$$

где

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_i \text{ и } t \geq \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{при } \tau_i \leq t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t),$$

где  $u_i(t)$  суть решения уравнения  $L(u_i) = f_i$  с нулевыми начальными данными.

Если  $m$  достаточно велико, то функцию  $u_i(t)$  можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности

$$I = f_i(\tau_i) \Delta\tau = f(\tau_i) \Delta\tau,$$

так что

$$u(t) = \sum_{i=1}^m U(t - \tau_i) f(\tau_i) \Delta\tau \xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

т. е. мы приходим к формуле

$$u(t) = \int_0^t U(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

показывающей, что влияние непрерывно действующей силы можно представить суперпозицией влияний мгновенных импульсов.

В рассмотренном выше случае  $u_n^{(1)}$  удовлетворяет уравнению (50) и условиям  $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$ . Для функции влияния  $U(t)$  имеем:

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = 1,$$

так что

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} at.$$

Отсюда и из (3\*) получаем формулу (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t - \tau) f_n(\tau) d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) f_n(\tau) d\tau.$$

Полученное выше интегральное представление (3\*) решения обыкновенного дифференциального уравнения (1\*) имеет, как мы убедились, тот же физический смысл, что и формула (59), дающая интегральное представление решения неоднородного уравнения колебаний.

**5. Общая первая краевая задача.** Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний:  
найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (45)$$

с дополнительными условиями

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \quad (46)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t), \end{array} \right\} \quad t \geqslant 0. \quad (47)$$

Введем новую неизвестную функцию  $v(x, t)$ , полагая:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

так что  $v(x, t)$  представляет отклонение функции  $u(x, t)$  от некоторой известной функции  $U(x, t)$ .

Эта функция  $v(x, t)$  будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v_t(x, 0) = \bar{\psi}(x); \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0);$$

$$v(0, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \bar{\mu}_2(t); \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

Выберем вспомогательную функцию  $U(x, t)$ , таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \text{ и } \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции  $u(x, t)$  сведена к краевой задаче для функции  $v(x, t)$  при нулевых граничных условиях. Метод решения этой задачи изложен выше (см. п. 4).

**6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.** Весьма важным классом задач являются краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45')$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = u_1, \quad u_1 = \text{const}, \\ u(l, t) = u_2, \quad u_2 = \text{const}. \end{array} \right\} \quad (47')$$

В этом случае решение естественно искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где  $\bar{u}(x)$  — стационарное состояние (статический прогиб) струны, определяемое условиями

$$a^2 \bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$

$$\bar{u}(0) = u_1,$$

$$\bar{u}(l) = u_2,$$

а  $v(x, t)$  — отклонение от стационарного состояния. Нетрудно видеть, что функция  $\bar{u}(x)$  равна

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

В частности, если  $f_0 = \text{const}$ , то

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2} (lx - x^2).$$

Функция  $v(x, t)$ , очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

с однородными граничными условиями

$$v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0$$

и начальными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$

$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Таким образом,  $v$  является решением простейшей краевой задачи, рассмотренной нами в п. 1 настоящего параграфа.

При выводе уравнения колебаний струны и в ряде других случаев мы не принимали во внимание действия силы тяжести. Из сказанного выше следует, что вместо явного учета силы тяжести (и вообще сил, не зависящих от времени) достаточно брать отклонение от стационарного состояния.

Решим простейшую задачу подобного типа при нулевых начальных условиях:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \quad (45')$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (46')$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \quad (47')$$

В этом случае для функции  $v(x, t)$  получаем задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для решения этой задачи нет необходимости пользоваться точным аналитическим выражением для  $\bar{u}(x)$ .

Выражение для  $v(x, t)$  согласно формуле (17) имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n} x \left( \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l} \right)$$

есть собственная функция следующей краевой задачи:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (10)$$

Из начальных условий следует, что

$$B_n = 0$$

и

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \bar{u}(x) X_n(x) dx.$$

Для вычисления этого интеграла весьма удобным является следующий метод. Пользуясь уравнением (8), находим:

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

Подставим это выражение в формулу для  $A_n$  и выполним двукратное интегрирование по частям

$$A_n = \frac{2}{l \lambda_n} \int_0^l \bar{u}(x) X_n''(x) dx = \frac{2}{l \lambda_n} \left\{ \bar{u} X_n'(x) \Big|_0^l - \bar{u}' X_n(x) \Big|_0^l + \int_0^l \bar{u}'' X_n(x) dx \right\},$$

откуда, учитывая уравнение и граничные условия для  $\bar{u}(x)$ , находим:

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n} \left[ u_2 X'_n(l) - u_1 X'_n(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right]$$

или

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \left[ u_2 (-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x) dx \right].$$

В частности, для однородного уравнения ( $f_0(x) = 0$ ) имеем:

$$A_n = \frac{2}{\pi n} [u_2 (-1)^n - u_1].$$

Этим методом удобно вычислять коэффициенты Фурье для граничных условий второго и третьего рода, а также в случае краевой задачи для неоднородной струны

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dX}{dx} \right] + \lambda \rho(x) X = 0,$$

если известны собственные функции и собственные значения.

**7. Задачи без начальных условий.** Как было показано выше, задача о колебании струны при заданном граничном режиме может быть сведена к решению неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

Однако этот прием зачастую усложняет решение задачи, которое может быть найдено непосредственно.

При изучении влияния граничного режима важно найти какое-нибудь частное решение (однородного уравнения), удовлетворяющее заданным граничным условиям, так как вычисление поправки на начальные данные сводится к решению того же уравнения с нулевыми граничными условиями.

Весьма важным классом задач о распространении граничного режима являются «задачи без начальных условий».

Если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных с течением времени ослабевает. Таким образом, мы естественно приходим к задаче без начальных условий (I):

$$\left. \begin{aligned} & \text{найти решение уравнения} \\ & u_{tt} = a^2 u_{xx} - au_t \quad (a > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty \quad (61) \\ & \text{при заданных граничных условиях:} \\ & u(0, t) = \mu_1(t), \\ & u(l, t) = \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (I_a)$$

Эту задачу назовем задачей (I<sub>a</sub>).

Слагаемое  $\alpha u_t$  в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости.

Рассмотрим сначала задачу о распространении периодического граничного режима:

$$u(l, t) = A \cos \omega t \quad (\text{или } u(l, t) = B \sin \omega t), \quad (62)$$

$$u(0, t) = 0. \quad (63)$$

Для дальнейшего нам удобнее записать граничное условие в комплексной форме

$$u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \quad (64)$$

Если

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t)$$

удовлетворяет уравнению (61) с граничными условиями (63) и (64), то  $u^{(1)}(x, t)$  и  $u^{(2)}(x, t)$  — его действительная и мнимая части — в отдельности удовлетворяют тому же уравнению (в силу его линейности), условию (63) и граничным условиям при  $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

Итак, найдем решение задачи

$$\left. \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \end{array} \right\} \quad (65)$$

Полагая

$$u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$$

и подставляя это выражение в уравнение, получим для функции  $X(x)$  следующую задачу:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \left( k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha \frac{\omega}{a^2} \right), \quad (66)$$

$$X(0) = 0, \quad (67)$$

$$X(l) = A. \quad (68)$$

Из уравнения (66) и граничного условия (67) находим:

$$X(x) = C \sin kx.$$

Условие при  $x = l$  дает:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \quad (69)$$

так что

$$X(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \quad (70)$$

где  $X_1(x)$  и  $X_2(x)$  — действительная и мнимая части  $X(x)$ .

Искомое решение можно представить в виде

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)] e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t),$$

где

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x) \cos \omega t - X_2(x) \sin \omega t,$$

$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x) \sin \omega t + X_2(x) \cos \omega t.$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , найдем, что

$$\bar{k} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} k = \frac{\omega}{a} \quad (71)$$

и, соответственно,

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(1)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t, \quad (72)$$

$$\bar{u}^{(2)}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(2)}(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \quad (73)$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left. \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty; \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad t > -\infty; \\ u(l, t) = \mu_2(t), \end{array} \right\} \quad (I_0)$$

которую будем называть задачей  $(I_0)$ . Очевидно, что  $\bar{u}^{(1)}(x, t)$  и  $\bar{u}^{(2)}(x, t)$  являются решениями задачи  $(I_0)$  при граничных условиях

$$\bar{u}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$\bar{u}^{(2)}(0, t) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(l, t) = A \sin \omega t.$$

Решение задачи при  $\alpha = 0$  существует не всегда. Если частота вынужденных колебаний  $\omega$  совпадает с собственной частотой  $\omega_n$  колебаний струны с закрепленными концами

$$\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{l} a,$$

то знаменатель в формулах для  $\bar{u}^{(1)}$  и  $\bar{u}^{(2)}$  обращается в нуль и решения задачи без начальных условий не существует.

Этот факт имеет простой физический смысл: при  $\omega = \omega_n$  наступает резонанс, т. е. не существует установившегося режима. Амплитуда, начиная с некоторого момента  $t = t_0$ , неограниченно нарастает.

При наличии трения ( $\alpha \neq 0$ ) установившийся режим возможен при любом  $\omega$ , так как  $\sin kl \neq 0$  при комплексном  $k$ .

Если  $\mu_1(t) = 0$ , а  $\mu_2(t)$  — периодическая функция, предстavимая в виде ряда

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t), \quad (74)$$

где  $\omega$  — наименьшая частота,  $A_n$  и  $B_n$  — коэффициенты Фурье, то решение задачи для случая  $\alpha = 0$  принимает вид

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l},$$

если только ни одна из частот  $\omega n$  не совпадает с собственными частотами закрепленной струны.

Если же  $\mu_2(t)$  — непериодическая функция, то, разлагая ее в интеграл Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Отметим, что решение задачи без начальных условий при  $\alpha = 0$  определено неоднозначно, если только не накладывать каких-либо дополнительных условий. В самом деле, прибавляя к какому-либо решению этой задачи любую комбинацию стоячих волн

$$\sum \left( A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — произвольные постоянные, видим, что эта сумма будет удовлетворять тому же уравнению и тем же граничным условиям.

Чтобы получить единственное решение задачи  $(I_\alpha)$  при  $\alpha = 0$ , введем дополнительное условие «исчезающего трения»:

*Решение задачи  $(I_0)$  мы называем удовлетворяющим условию «исчезающего трения», если оно является решением задачи  $(I_\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .*

Аналогично решается задача, если конец  $x = l$  закреплен, а при  $x = 0$  задан граничный режим.

Решение общей задачи без начальных условий

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определяется в виде суммы двух слагаемых, для каждого из которых неоднородно лишь одно из граничных условий.

Докажем единственность ограниченного решения задачи без начальных условий для уравнения (61). При этом мы будем предполагать непрерывность решения вместе с его производными до второго порядка включительно в области  $0 \leq x \leq l$ ,  $-\infty < t < t_0$ , если граничные значения

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определенны в области  $-\infty < t < t_0$ .

Пусть  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  — два ограниченных решения рассматриваемой задачи (I),

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

где  $M > 0$  — некоторое число.

Разность этих функций

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

ограничена ( $|v| < 2M$ ), удовлетворяет уравнению (61) и однородным граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Коэффициенты Фурье для функции  $v$

$$v_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l v(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx,$$

очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\ddot{v}_n + \alpha \dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left( \omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (*)$$

так как вторые производные функции  $v(x, t)$  непрерывны для  $0 \leq x \leq l$ .

Общее решение уравнения (\*) имеет вид

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t}, \quad (**)$$

где  $q_n^{(1)}$  и  $q_n^{(2)}$  — корни характеристического уравнения, равные

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

Так как  $\alpha > 0$ , то  $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$ . Следовательно, решение (\*\*) уравнения (\*) будет ограниченным при  $t \rightarrow -\infty$  лишь при  $A_n = 0$  и  $B_n = 0$ , т. е.  $v_n(t) \equiv 0$  для любого  $n$ .

Таким образом,

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

**8. Сосредоточенная сила.** Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке  $x = x_0$ . Если сила распределена на некотором участке  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ , то решение находится по формуле (55). Совершая предельный переход при  $\epsilon \rightarrow 0$ , можно получить решение поставленной задачи.

С другой стороны, при выводе уравнения колебаний мы видели (см. (8), п. 1 §1), что в точке  $x_0$ , к которой приложена сосредоточенная сила, происходит разрыв первой производной, а сама функция остается непрерывной. Решение задачи  $u(x, t)$  о колебаниях струны под действием силы, сосредоточенной в точке  $x_0$ , можно представить двумя различными функциями:

$$\begin{cases} u(x, t) = u_1(x, t) & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ u(x, t) = u_2(x, t) & \text{при } x_0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (75)$$

Эти функции должны удовлетворять уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при } x \neq x_0, \quad (76)$$

границным и начальным условиям

$$\left. \begin{array}{l} u_1(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_2(l, t) = 0; \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array} \right\} \quad (77)$$

и условиям сопряжения в точке  $x = x_0$  (см. (8), § 1), состоящим из условия непрерывности функции  $u(x, t)$ :

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad (78)$$

и условия, связывающего величину разрыва производной с силой  $f(t)$ , сосредоточенной в точке  $x_0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0=0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{k}. \quad (79)$$

Заботиться о соблюдении начальных условий нет необходимости. Если мы найдем частное решение уравнений (76), удовлетворяющее граничным условиям из (77), а также (78) и (79), то, прибавляя к нему решение однородного уравнения колебаний, мы всегда сможем удовлетворить заданным начальными условиям.

Рассмотрим частный случай

$$f(t) = A \cos \omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

и найдем решение, удовлетворяющее лишь граничным условиям, предполагая, что сила действует все время, начиная от  $t = -\infty$  (установившийся режим), т. е. решим задачу без начальных данных. Будем искать решение в виде

$$u_1(x, t) = X_1(x) \cos \omega t \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_0,$$

$$u_2(x, t) = X_2(x) \cos \omega t \quad \text{при } x_0 \leq x \leq l.$$

Из уравнения (76) следует:

$$\left. \begin{array}{l} X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 = 0 \quad \text{при } x_0 \leq x \leq l. \end{array} \right\} \quad (80)$$

Функции  $X_1$  и  $X_2$ , кроме того, должны удовлетворять граничным условиям

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0, \quad (81)$$

вытекающим из (77), и условиям сопряжения

$$X_1(x_0) = X_2(x_0), \quad X_1'(x_0) - X_2'(x_0) = \frac{A}{k}, \quad (82)$$

вытекающим из (78) и (79).

Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C \sin \frac{\omega}{a} x, \quad X_2(x) = D \sin \frac{\omega}{a} (l - x);$$

условия сопряжения (82) дают:

$$\begin{aligned} C \sin \frac{\omega}{a} x_0 - D \sin \frac{\omega}{a} (l - x_0) &= 0, \\ C \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} x_0 + D \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l - x_0) &= \frac{A}{k}. \end{aligned}$$

Определяя отсюда коэффициенты  $C$  и  $D$ , получаем:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} (l - x_0)}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} x \cos \omega t & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ u_2 = \frac{Aa}{k\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x_0}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} (l - x) \cos \omega t & \text{при } x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при  $f(t) = A \sin \omega t$ .

Итак, получено решение для случая  $f(t) = A \cos \omega t$  или  $f(t) = A \sin \omega t$ . Если  $f(t)$  — периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t)$$

( $\omega$  — наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x}{2} \left( 1 - \frac{x_0}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin \frac{\omega n}{a} (l - x_0)}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n x}{a} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad 0 \leq x \leq x_0; \right. \right. \\ u_2 = \frac{1}{k} \left\{ \frac{\alpha_0 x_0}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \sin \frac{\omega n}{a} x_0}{\omega n \sin \frac{\omega n}{a} l} \sin \frac{\omega n (l - x)}{a} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\alpha_n \cos \omega n t + \beta_n \sin \omega n t), \quad x_0 \leq x \leq l. \right. \right. \end{cases} \quad (83)^1)$$

<sup>1)</sup> Первые слагаемые этих сумм соответствуют стационарному прогибу, определяемому по величине силы  $f(t) = \alpha_0/2 = \text{const}$ , как нетрудно видеть, функциями:

$$u = \begin{cases} u_1(x, t) = u_1(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x \left( 1 - \frac{x_0}{l} \right) & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ u_2(x, t) = u_2(x) = \frac{1}{k} \frac{\alpha_0}{2} x_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) & \text{при } x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Если функция  $f(t)$  непериодическая, то, представляя ее в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Если знаменатель у этих функций (83) равен нулю

$$\sin \frac{\omega n l}{a} = 0,$$

$$\omega n = \frac{\pi m}{l} a = \omega_m,$$

т. е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установившегося решения не существует.

Если точка приложения силы  $x_0$  является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой  $\omega_m$ , то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 0,$$

$$\sin \frac{\omega_m}{a} (l - x_0) = 0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для  $u$  обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой  $\omega_m$ , является пучностью соответствующей стоячей волны с частотой  $\omega_m$ , то

$$\sin \frac{\omega_m}{a} x_0 = 1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на нее сосредоточенной силой надо, чтобы частота ее  $\omega$  была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

**9. Общая схема метода разделения переменных.** Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнения колебаний неоднородной струны. Рассмотрим следующую задачу:

*найти решение уравнения*

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (84)$$

*удовлетворяющее условиям*

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (85)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (86)$$

Здесь  $k$ ,  $q$  и  $\rho$  — непрерывные на отрезке  $0 \leq x \leq l$  положительные функции ( $k > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $q \geq 0$ )<sup>1)</sup>. Проведем решение этой задачи методом разделения переменных. Для отыскания частных решений обратимся, как и раньше, к вспомогательной задаче о существовании стоячих волн:

*найти нетривиальное решение уравнения (84), удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

*и представимое в виде произведения*

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение и пользуясь граничными условиями, после разделения переменных получаем:

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dX}{dx} \right] - qX + \lambda \rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

Для определения функции  $X(x)$  мы получим следующую краевую задачу на собственные значения<sup>2)</sup>:  
*найти те значения параметра  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения задачи*:

$$L(X) + \lambda \rho X = 0, \quad (87)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (88)$$

*а также найти эти решения.* Такие значения параметра  $\lambda$  называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (87) — (88).

Сформулируем основные свойства собственных функций и собственных значений краевой задачи (87) и (88), необходимые для дальнейшего изложения.

<sup>1)</sup> Тот случай, когда  $k(x)$  в некоторых точках обращается в нуль, рассматривается отдельно (см. Дополнение II).

<sup>2)</sup> При  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ,  $k = k_0 = \text{const}$  мы получаем краевую задачу о собственных колебаниях струны с закрепленными концами:

$$X'' + \mu X = 0 \quad \left( \mu = \frac{\rho_0}{k_0} \lambda \right),$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

исследованную в § 2

граничные условия (88), будем иметь<sup>1)</sup>:

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\} dx = 0 \quad (a=0, \ b=l),$$

откуда, пользуясь уравнением (87), получаем:

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

Таким образом, если  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , то имеет место условие

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad (92)$$

выражающее ортогональность с весом  $\rho(x)$  собственных функций  $X_m(x)$  и  $X_n(x)$ .

Докажем теперь, что каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция<sup>2)</sup>. В самом деле, всякая собственная функция определяется однозначно как решение дифференциального уравнения 2-го порядка по значению самой функции и ее первой производной при  $x = 0$ . Допустив существование двух функций  $\bar{X}$  и  $\bar{\bar{X}}$ , отвечающих одному и тому же значению  $\lambda$  и обращающихся в нуль при  $x = 0$ , и беря функцию

$$X^*(x) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}(x),$$

<sup>1)</sup> Производные  $X'_m$  и  $X'_n$  непрерывны всюду на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , включая точки  $x = 0$  и  $x = l$ , так как уравнение (87) дает:

$$k(x) X'_m(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m \rho) X_m dx + C.$$

Отсюда и следует существование производной  $X'_m$  при  $x = 0$  и  $x = l$ .

<sup>2)</sup> Доказываемое свойство первой краевой задачи основано на том, что два линейно независимых решения дифференциального уравнения 2-го порядка не могут обращаться в нуль в одной и той же точке. Это утверждение относится к краевой задаче с нулевыми граничными условиями. При других граничных условиях (например,  $X(0) = X(l)$ ,  $X'(0) = X'(l)$ ) могут существовать две различные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению  $(X_n^{(1)}(x) = \cos \frac{2\pi n}{l} x, \ X_n^{(2)}(x) = \sin \frac{2\pi n}{l} x)$  при  $\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ ).

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция  $\bar{X}(x)$ :

$$\begin{aligned} X^*(0) &= \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}(0) = 0, \\ \frac{dX^*}{dx}(0) &= \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}'(0) = \bar{X}'(0). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что  $X^*(x) = \bar{X}(x)$  и что

$$\bar{X}(x) = A\bar{X}(x) \quad \left( A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием  $\bar{X}'(0) \neq 0$ , которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{X}'(0) = 0,$$

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией (см. стр. 114).

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если  $X_n(x)$  является собственной функцией при собственном значении  $\lambda_n$ , то функция  $A_n X_n(x)$  ( $A_n$  — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же  $\lambda_n$ . Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

Если некоторая функция  $\hat{X}_n(x)$  не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент  $A_n$ ,

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|\hat{X}_n\|}.$$

Если подчинить собственные функции задачи (87) — (88) условию нормировки ( $\|X_n\| = 1$ ), то они образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция  $\bar{X}(x)$ :

$$\begin{aligned} X^*(0) &= \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}(0) = 0, \\ \frac{dX^*}{dx}(0) &= \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \bar{X}'(0) = \bar{X}'(0). \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что  $X^*(x) = \bar{X}(x)$  и что

$$\bar{X}(x) = A\bar{X}(x) \quad \left( A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{X}'(0)} \right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием  $\bar{X}'(0) \neq 0$ , которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\bar{X}(0) = 0, \quad \bar{X}'(0) = 0,$$

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией (см. стр. 114).

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если  $X_n(x)$  является собственной функцией при собственном значении  $\lambda_n$ , то функция  $A_n X_n(x)$  ( $A_n$  — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же  $\lambda_n$ . Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = 1.$$

Если некоторая функция  $\hat{X}_n(x)$  не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент  $A_n$ ,

$$A_n \hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|X_n\|}.$$

Если подчинить собственные функции задачи (87) — (88) условию нормировки ( $\|X_n\| = 1$ ), то они образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Обратимся к доказательству свойства 2. Докажем, что  $\lambda > 0$  при  $q \geqslant 0$ . Пусть  $X_n(x)$  — нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_n$ , так что

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

Умножая обе части этого равенства на  $X_n(x)$  и интегрируя по  $x$  от 0 до  $l$ , получаем:

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx = - \int_0^l X_n(x) L[X_n] dx$$

или

$$\lambda_n = - \int_0^l X_n \frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dX_n}{dx} \right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx,$$

так как функция  $X_n(x)$  предполагается нормированной. Интегрируя по частям и пользуясь граничными условиями (88), получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_n = - X_n k X'_n \Big|_0^l + \int_0^l k(x) [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx = \\ = \int_0^l k(x) [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx, \end{aligned} \quad (93)$$

откуда и следует, что

$$\lambda_n > 0,$$

так как по условию  $k(x) > 0$  и  $q(x) \geqslant 0$ .

Оставляя доказательство теоремы разложимости в стороне, остановимся вкратце на вычислении коэффициентов разложения.

Нетрудно видеть, что

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) dx. \quad (94)$$

В самом деле, умножая обе части равенства

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

на  $\rho(x) X_n(x)$ , интегрируя по  $x$  от 0 до  $l$  и учитывая ортогональность собственных функций, получаем написанное выше выражение для коэффициентов  $F_n$  (коэффициентов Фурье)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Возможность почлененного интегрирования ряда следует из теоремы Стеклова о равномерной сходимости ряда (90).

Вернемся теперь к уравнению с частными производными. Для функции  $T(t)$  мы имеем уравнение

$$T'' + \lambda_n T = 0 \quad (95)$$

без каких-либо дополнительных условий. В силу доказанной положительности  $\lambda_n$  его решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — неопределенные коэффициенты. Таким образом, вспомогательная задача имеет бесчисленное множество решений вида

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x).$$

Обратимся к решению задачи с заданными начальными условиями. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) X_n(x). \quad (96)$$

Формальная схема удовлетворения начальным условиям (86) основывается на теореме разложимости 4 и проводится совершенно так же, как и для однородной струны. Из равенств

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

находим, что

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad (97)$$

где  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  — коэффициенты Фурье функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  при разложении по ортогональной с весом  $\rho(x)$  системе функций  $\{X_n(x)\}$ .

Ограничивааясь общей схемой метода разделения переменных, мы не приводим условий применимости этого метода как в отношении коэффициентов уравнения, так и в отношении начальных функций.

Основополагающие работы по обоснованию этого метода принадлежат В. А. Стеклову<sup>1</sup>).

<sup>1)</sup> «Сообщения Харьковского математического общества», вторая серия, т. 5, № 1 и 2 (1896), «Основные задачи математической физики», т. 1 (1922); В. А. Ильин, О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений, УМН 15, вып. 2 (1960).

**Задачи**

1. Найти функцию  $u(x, t)$ , определяющую процесс колебания струны  $(0, l)$ , закрепленной на концах и возбуждаемой (рис. 24) оттягиванием ее в точке  $x = c$  на величину  $h$ , т. е.  $u(c, 0) = h$  (см. приложение I). Начальная скорость равна нулю.

2. Закрепленная на концах струна в точке  $x = c$  оттянута силой  $F_0$ . Найти колебания струны, если в начальный момент сила перестает действовать, а начальная скорость равна нулю.

3. Найти функцию  $u(x, t)$ , определяющую процесс колебания струны  $(0, l)$ , закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом  $K$ , распределенным на отрезке  $(c - \delta, c + \delta)$ : а) равномерно, б) по закону  $v_0 \cos \frac{x - c}{2\delta} \pi$

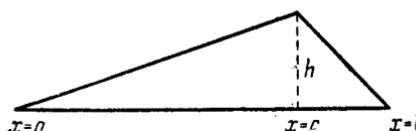


Рис. 24.

(см. приложение I), если начальное отклонение равно нулю.

4. Найти функцию  $u(x, t)$ , определяющую колебания струны  $(0, l)$ , закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом  $K$ , приложенным в точке  $x = c$  (см. приложение I). Начальное отклонение равно нулю.

5. Доказать аддитивность энергии отдельных гармоник для процесса колебаний при граничных условиях  $u = 0$ ,  $u_x = 0$ . Рассмотреть также случай граничного условия 3-го рода  $u_x + hu = 0$  (все ряды предполагать равномерно сходящимися). Вычислить энергию отдельных гармоник в задачах 1, 2, 3, 4.

6. Пружина, закрепленная одним концом в точке  $x = 0$ , растянута грузом массы  $M$ , подвешенным в точке  $x = l$ . Найти колебания пружины, если в момент  $t = 0$  груз падает и в дальнейшем на конец  $x = l$  не действуют никакие силы.

7. Один конец стержня закреплен, а на второй действует сила  $F_0$ . Найти колебания стержня, если в начальный момент сила перестает действовать.

8. Найти процесс колебания пружины, один конец которой закреплен, а ко второму концу в начальный момент подвешивается груз массы  $M$ . Начальные условия нулевые.

9. К однородной струне с закрепленными концами  $x = 0$  и  $x = l$  в точке  $x = c$  прикреплена масса  $M$ . Найти отклонение струны  $u(x, t)$ , если: а) в начальный момент в точке  $x = c$  струна оттянута на величину  $h$  от положения равновесия и отпущена без начальной скорости; б) начальное отклонение и начальная скорость равны нулю (см. приложение III).

10. Найти процесс колебания пружины со свободными концами при равномерном начальном растяжении (представить модель этой задачи).

11. Найти процесс колебания пружины с упруго закрепленными концами яри одинаковых коэффициентах жесткости, если начальные условия производные.

Решение исследовать при малых  $h$  («мягкое» закрепление) и при больших  $h$  («жесткое» закрепление) и вычислить соответствующие поправки к собственным значениям для струны со свободными и закрепленными концами.

12. Найти отклонение  $u(x, t)$  струны с жестко закрепленными концами, если колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости, а начальные условия произвольны.

13. Изолированный электрический провод длины  $l$  с характеристиками  $L$ ,  $R$ ,  $C$  и  $G = 0$  заряжен до некоторого постоянного потенциала  $v_0$ . В начальный момент один конец провода заземляется, а второй остается все время изолированным. Найти распределение напряжения в проводе.

**14.** Струна с закрепленными концами колеблется под действием гармонической силы, распределенной с плотностью  $f(x, t) = \Phi(x)\sin \omega t$ . Найти отклонение  $u(x, t)$  струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

**15.** Решить задачу 14, предполагая, что колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Найти установившиеся колебания, составляющие главную часть решения при  $t \rightarrow \infty$ .

**16.** Упругий стержень длины  $l$  расположен вертикально и жестко прикреплен верхним концом к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости  $v_0$ , мгновенно останавливается. Найти колебания стержня, предполагая его нижний конец свободным.

**17.** Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

где  $b, A$  и  $B$  — постоянные.

**18.** Решить дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \sin x$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

где  $A, B$  и  $C$  — постоянные.

**19.** К однородной струне с жестко закрепленными концами  $x = 0$  и  $x = l$  в точке  $x = c$  ( $0 < c < l$ ) приложена гармоническая сила

$$F(t) = P_0 \sin \omega t,$$

действующая, начиная с момента  $t = 0$ . Найти отклонение струны  $u(x, t)$ , предполагая начальные условия нулевыми.

**20.** Решить задачу о колебаниях неоднородного стержня длины  $l$  с жестко закрепленными концами, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке  $x = c$  ( $0 < c < l$ ), если начальное отклонение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x & \text{при } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h}{l-c}(l-x) & \text{при } c \leq x \leq l, \end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

**21.** Найти установившиеся колебания пружины, один конец которой закреплен, а на второй действует сила

$$F(t) = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t.$$

**22.** Найти установившиеся колебания неоднородного стержня, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке  $x = c$ , если один конец стержня закреплен, а второй движется по закону

$$u(l, t) = A \sin \omega t.$$

## § 4. Задача с данными на характеристиках

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим ряд задач, являющихся развитием первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Для простоты будем изучать явления вблизи одного края, считая другой край удаленным в бесконечность, т. е. в

качестве исходной задачи возьмем задачу для полубесконечной прямой.

Уравнение колебаний струны  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  симметрично относительно переменных  $x$  и  $t$ , если положить  $a^2 = 1$ , т. е. изменить масштаб времени, введя переменную  $t = at'$ . Однако дополнительные условия вносят асимметрию в математическое толкование  $x$  и  $t$ : в начальных условиях (при  $t = 0$ ) задаются две функции  $u(x, 0)$  и  $u_t(x, 0)$ , в то время как в граничных условиях (при  $x = 0$ ) задается только одна функция  $u(0, t)$ .

Как было отмечено в § 2, п. 9, между функциями и их нормальными производными при  $t = 0$  и  $x = 0$  существует соотношение

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \quad (a^2 = 1)$$

при произвольном значении  $z$ . Отсюда следует, что при  $x = 0$  и  $t = 0$  нельзя независимым образом задать все эти функции; произвольными являются только три условия, что и указывает на невозможность симметричной постановки дополнительных условий.

Дополнительные условия могут задаваться либо на прямых линиях  $x = 0$ ,  $t = 0$  (с задачами подобного рода мы имели дело до сих пор), либо на некоторых кривых в фазовой плоскости. Например, граничные значения можно задавать на некоторой кривой  $C_1(x = R_1(t))$ , однако для разрешимости такой задачи кривая  $C_1$  должна помимо достаточной гладкости удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям.

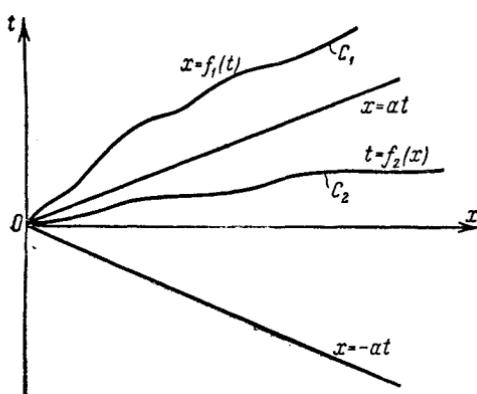


Рис. 25.

Ясно, что скорость перемещения границы, движущейся по закону  $x = f_1(t)$ , нельзя считать произвольной: она не должна превосходить скорость звука  $a$  ( $\frac{df_1(t)}{dt} < a$ ). Геометрическим следствием этого является то, что кривая  $C_1(x = f_1(t))$  должна быть отделена характеристикой от линии  $t = 0$  несущей начальные значения (рис. 25). Если хотя бы в одной точке ли-

пако кривая  $C_1$  касалась характеристики, то в этой точке вдоль характеристики не могли бы быть заданы граничные значения, так как вдоль характеристики производная  $u_t$  равна нулю.

ния  $C_1$  лежала ниже характеристики  $x = at$ , то значение функции  $u(x, t)$  вполне определялось бы начальными условиями и не могло бы задаваться произвольно. Физический смысл этого связан с тем, что при движении газа со скоростями, превосходящими скорость звука, уравнение акустики теряет силу, и надо пользоваться нелинейными уравнениями газовой динамики<sup>1)</sup>.

Начальные условия можно задавать не только на оси  $t = 0$ , но и на некоторой линии  $C_2 (t = f_2(x))$ , которая должна удовлетворять требованию  $|f'_2(x)| < 1/a$  (при этом  $C_2$  лежит в области влияния начальных данных). Задачи подобного типа легко решаются с помощью интегрального уравнения колебаний (см. § 2, п. 7).

Не ставя своей целью дать полный перечень всех возможных краевых задач, рассмотрим более подробно задачу определения решения по данным на характеристиках. Эту краевую задачу часто называют *задачей Гурса*. Задача с данными на характеристиках представляет большой интерес с точки зрения физических приложений. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов (см. приложение V), процессов сушки (см. задачу 1) и многих других задач.

**2. Метод последовательных приближений для задачи Гурса.** Рассмотрим простейшую задачу с данными на характеристиках

$$\left. \begin{array}{l} u_{xy} = f(x, y), \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), \\ u(0, y) = \varphi_2(y). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Дополнительные условия даны на прямых  $x = 0$  и  $y = 0$ , являющихся характеристиками уравнения (1). Будем предполагать, что функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(y)$  дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . Интегрируя последовательно по  $x$  и  $y$  уравнение (1), получим:

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y) d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi$$

или

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> См. приложение IV, стр. 154.

Таким образом, для простейшего уравнения, не содержащего первых производных  $u_x$ ,  $u_y$  и искомой функции, решение представляется в явной аналитической форме (2). Из формулы (2) непосредственно следует единственность и существование решения поставленной задачи.

Перейдем к решению линейного уравнения гиперболического типа

$$u_{xy} = a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u + f(x, y) \quad (3)$$

при дополнительных условиях на характеристиках  $x = 0$ ,  $y = 0$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y), \end{aligned} \quad (3')$$

где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(y)$  удовлетворяют требованиям дифференцируемости и сопряжения. Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  будем предполагать непрерывными функциями  $x$  и  $y$ .

Формула (3) показывает, что функция  $u(x, y)$  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta) u] d\xi d\eta + \\ &\quad + \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Для его решения воспользуемся методом последовательных приближений. Выберем в качестве нулевого приближения функцию

$$u_0(x, y) = 0.$$

Тогда (4) дает для последовательных приближений следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ &\dots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \left[ a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u_{n-1} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Отметим попутно, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[ a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[ a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) u_{n-1} \right] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

Для этого рассмотрим разности

$$\begin{aligned} z_n(x, y) &= u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) = \\ &= \int_0^y \int_0^x \left[ a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) z_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta, \\ \frac{\partial z_n}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) = \\ &= \int_0^y \left[ a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) z_{n-1}(x, \eta) \right] d\eta, \\ \frac{\partial z_n}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) = \\ &= \int_0^x \left[ a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y) z_{n-1}(\xi, y) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Пусть  $M$  — верхняя граница абсолютных величин коэффициентов  $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$  и  $H$  — верхняя граница абсолютных величин  $z_0 = u_1(x, y)$  и ее производных

$$|z_0| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| < H, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| < H$$

при изменении  $x$  и  $y$  внутри некоторого квадрата ( $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq L$ ). Построим мажорантные оценки для функций  $z_n$ ,  $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ . Очевидно, что

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM \frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

Предположим, что имеют место рекуррентные оценки

$$|z_n| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < 3HM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

где  $K > 0$  — некоторое постоянное число, значение которого уточним ниже. Пользуясь этими оценками и формулой для  $(n+1)$ -го приближения после ряда упрощений, усиливающих неравенство, получим:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \left( \frac{x+y}{n+3} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} \right| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} \right| &< 3HM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3HM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

где

$$K = L + 2.$$

В правых частях этих неравенств с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения  $e^{2KLM}$ . Эти оценки показывают, что последовательности функций

$$u_n = u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

сходятся равномерно к предельным функциям, которые мы обозначим

$$u(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y),$$

$$v(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$

$$w(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в формулах (5) и (6), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)v + b(\xi, \eta)w + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)v + b(x, \eta)w + c(x, \eta)u] d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)v + b(\xi, y)w + c(\xi, y)u] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Вытекающие отсюда равенства

$$v = u_x,$$

$$w = u_y$$

позволяют установить, что функция  $u(x, y)$  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

а также исходному дифференциальному уравнению (3), что проверяется непосредственно дифференцированием (4) по  $x$  и  $y$ . Функция  $u = u(x, y)$ , как нетрудно убедиться, удовлетворяет и дополнительным условиям.

Докажем теперь единственность решения рассматриваемой задачи (3) — (3'). Допуская существование двух решений  $u_1(x, y)$  и  $u_2(x, y)$ , сразу же получаем для их разности

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) d\xi d\eta.$$

Обозначая далее через  $H_1$  верхнюю грань абсолютных величин

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

для  $0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant L$  и повторяя оценки, проведенные для функций  $z_n(x, y)$ , убеждаемся в справедливости неравенства

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

при любом значении  $n$ . Отсюда и следует

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{или} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

что и доказывает единственность решения задачи с данными на характеристиках.

Если коэффициенты  $a, b$  и  $c$  постоянны, то уравнение (3) с помощью подстановки

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

приводится к виду

$$v_{xy} + C_1 v = f. \quad (8)$$

При  $C_1 = 0$  мы получаем задачу для простейшего уравнения (1), решение которой дается формулой (2).

Если  $C_1 \neq 0$ , то решение задачи для уравнения (8) также может быть получено в явной аналитической форме методом, изложенным в § 5.

### Задачи

1. Через трубу ( $x > 0$ ), заполненную веществом, содержащим влагу, продувается воздух (со скоростью  $v$ ). Пусть  $v(x, t)$  — концентрация влаги в поглощающем веществе,  $u(x, t)$  — концентрация свободных паров. Вывести уравнение для функций  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ , описывающих процесс сушки, если: 1) процесс изотермический и 2) изотерма сушки имеет вид  $u = \gamma v$ , где  $\gamma$  — постоянная изотермы (см. также приложение V).

2. По трубе ( $x > 0$ ) пропускается со скоростью  $v$  горячая вода. Пусть  $u$  — температура воды в трубе,  $v$  — температура стенок трубы,  $u_0$  — температура окружающей среды. Вывести уравнения для  $u$  и  $v$ , пренебрегая распределением температуры по сечению трубы и стенок и считая, что на границах вода — стенка и стенка — среда существует перепад температур и происходит теплообмен по закону Ньютона (см. главу III, § 1).

## § 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа

1. Сопряженные дифференциальные операторы. Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные нам для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u \quad (1)$$

( $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$  — дифференцируемые функции)

— линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа. Умножая  $\mathcal{L}[u]$  на

некоторую функцию  $v$ , запишем отдельные слагаемые в виде

$$\begin{aligned} vu_{xx} &= (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, & vbu_y &= (bvu)_y - u(bv)_y, \\ vu_{yy} &= (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, & vcu &= uc v, \\ vau_x &= (avu)_x - u(av)_x, \end{aligned}$$

Суммируя отдельные слагаемые, получаем:

$$v\mathcal{L}[u] = u\mathcal{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{M}(v) = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \quad (3)$$

$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u = \quad (4)$$

$$= -(vu)_x + (2u_x + au)v, \quad (4')$$

$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)u = \quad (5)$$

$$= (uv)_y - (2u_y - bu)v. \quad (5')$$

Два дифференциальных оператора называются сопряженными, если разность

$$v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$$

является суммой частных производных по  $x$  и  $y$  от некоторых выражений  $H$  и  $K$ .

Рассматриваемые нами операторы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ , очевидно, являются сопряженными.

Если  $\mathcal{L}[u] = \mathcal{M}[u]$ , то оператор  $\mathcal{L}[u]$  называется самосопряженным.

Двойной интеграл от разности  $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$  по некоторой области  $G$ , ограниченной кусочно-гладким контуром  $C$ , равен

$$\iint_G (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_C (H d\eta - K d\xi), \quad (6)$$

где  $u$  и  $v$  — произвольные дважды дифференцируемые функции (двумерная формула Грина)<sup>1)</sup>.

**2. Интегральная форма решения.** Воспользуемся формулой (6) для решения следующей задачи:

найти решение линейного уравнения гиперболического типа

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = -f(x, y), \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

удовлетворяющее начальным условиям на кривой  $C$ ,

$$\begin{aligned} u|_C &= \varphi(x), \\ u_n|_C &= \psi(x) \end{aligned} \quad (7')$$

( $u_n$  — производная по направлению нормали к кривой  $C$ ), и выяснить ту область, в которой решение определяется условиями (7').

Кривая  $C$  задана при этом уравнением

$$y = f(x),$$

где  $f(x)$  — дифференцируемая функция. Наложим на кривую  $C$  условие, чтобы всякая характеристика семейства  $y - x = \text{const}$  и  $y + x = \text{const}$  пересекала кривую  $C$  не более одного раза (для этого надо,

чтобы  $|f'(x)| < 1$ ). Формула (6) для криволинейного треугольника  $MPQ$ , ограниченного дугой  $PQ$ , кривой  $C$  и отрезками характеристик  $MP$  и  $MQ$  (рис. 26), дает:

$$\begin{aligned} \int \int_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta &= \\ &= \int_Q^M (H d\eta - K d\xi) + \int_M^P (H d\eta - K d\xi) + \int_P^Q (H d\eta - K d\xi). \end{aligned}$$

Преобразуем первые два интеграла, взятые вдоль характеристик  $MQ$  и  $MP$ . Принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= -d\eta = -\frac{ds}{V^2} \text{ на } QM, \\ d\xi &= d\eta = -\frac{ds}{V^2} \text{ на } MP \end{aligned} \right\} \text{(} ds\text{-элемент дуги вдоль } QM \text{ и } MP \text{)}$$

и пользуясь формулами (4) и (5), получим:

$$\begin{aligned} \int_Q^M (H d\eta - K d\xi) &= - \int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left( 2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{V^2} v \right) u ds = \\ &= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left( 2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{V^2} v \right) u ds \end{aligned}$$

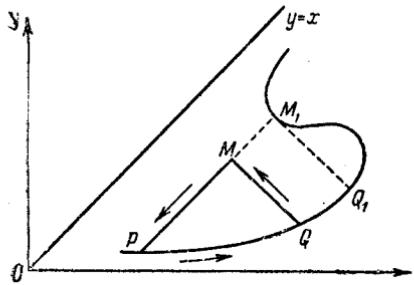


Рис. 26.

и аналогично

$$\int_M^P (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left( 2 \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \right) u ds.$$

Отсюда и из формулы (6) следует:

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \int_Q^M \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} v \right) u ds + \\ + \frac{1}{2} \int_P^Q (H d\eta - K d\xi) - \frac{1}{2} \int_{MPQ} (v \mathcal{L}[u] - u \mathcal{M}[v]) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Эта формула является тождеством, верным для любых достаточно гладких функций  $u$  и  $v$ .

Пусть  $u$  — решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция  $v$  зависит от точки  $M$  как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\mathcal{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \text{ внутри } \triangle MPQ \quad (9)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} v \text{ на характеристике } MP, \\ \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} v \text{ на характеристике } MQ, \end{array} \right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$v = e^{\int_{s_0}^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{на } MP,$$

$$v = e^{\int_{s_0}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{на } MQ,$$

где  $s_0$  — значение  $s$  в точке  $M$ . Как мы видели в § 4, уравнение (9) и значения функции  $v$  на характеристиках  $MP$  и  $MQ$  полностью определяют ее в области  $MPQ$ . Функцию  $v$  часто называют функцией Римана.

Таким образом, формула (8) для функции  $u$ , удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q [v(u_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + \\ + uv(a d\eta - b d\xi)] + \frac{1}{2} \iint_{MPQ} v(M, M') f(M') d\sigma_{M'} (d\sigma_M = d\xi d\eta). \quad (10)$$

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль  $PQ$ , содержат функции, известные на дуге  $C$ . В самом деле, функция  $v$  была определена выше, а функции

$$u|_C = \varphi(x),$$

$$u_x|_C = u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$

$$u_y|_C = u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

вычисляются при помощи начальных данных.

Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге  $PQ$ , то они полностью определяют функцию в характеристическом  $\Delta PMQ$ , если функция  $f(x, y)$  известна в этой области<sup>1)</sup>.

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает единственность решения (ср. с формулой Даламбера, гл. II, § 2, стр. 51).

Можно показать, что функция  $u$ , определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7)–(7'). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

**3. Физическая интерпретация функции Римана.** Выясним физический смысл функции  $v(M, M')$ . Для этого найдем решение неоднородного уравнения

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

с нулевыми начальными условиями на кривой  $C$ . Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

$$u(M) = \iint_{MPQ} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'}. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Если характеристика пересекает кривую  $C$  в двух точках  $P$  и  $M_1$  (см. рис. 26), то значение  $u(M_1)$  не может задаваться произвольно, а определяется по формуле (10) с начальными данными на дуге  $PQ_1$  и значениями  $f(x, y)$  в  $\Delta PM_1Q_1$ .

Предположим, что  $f_1(M)$  — локальная функция точки  $M_1$ , равная нулю всюду, кроме малой окрестности  $S_\varepsilon$  точки  $M_1$ , и удовлетворяющая условию нормировки

$$\int \int_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = 1. \quad (12)$$

Формула (11) в этом случае принимает вид

$$u_\varepsilon(M) = \int \int_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M') d\sigma_{M'}. \quad (13)$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, можно написать:

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \int \int_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*),$$

где  $M_1^*$  — некоторая точка области  $S_\varepsilon$ .

Стягивая  $\varepsilon$ -окрестность  $S_\varepsilon$  в точку  $M_1$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), находим:

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \quad (14)$$

Функция  $f_1$ , как мы видели на ряде примеров, обычно является плотностью силы, а переменная  $y$  — временем. Выражение

$$\begin{aligned} & \int \int_{S_\varepsilon} f_1(M') d\sigma_{M'} = \\ & = \int \int_{S_\varepsilon} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

представляет собой импульс силы. Отсюда в силу формулы (11) заключаем, что  $v(M, M_1)$  является функцией

влияния единичного импульса, приложенного в точке  $M_1$ . Функция  $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$  была определена как функция параметров  $M(x, y)$ , удовлетворяющая по координатам  $\xi, \eta$  точки  $M_1$  уравнению

$$\mathcal{M}_{(\xi, \eta)}[v] = 0 \quad (16)$$

с дополнительными условиями (9а).

Рассмотрим функцию

$$u = u(M, M_1),$$

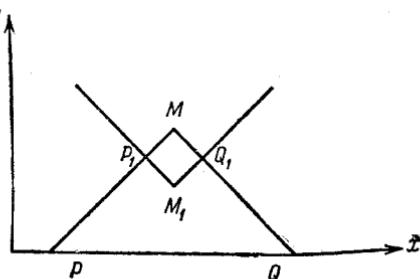


Рис. 27.

являющуюся функцией параметров  $M_1(\xi, \eta)$  и удовлетворяющую по координатам  $x, y$  точке  $M$  уравнению

$$\mathcal{L}_{(x, y)}[u] = 0 \quad (17)$$

с дополнительными условиями (см. рис. 27)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} u \text{ на характеристике } M_1Q_1, \\ \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} u \text{ на характеристике } M_1P_1, \\ u(M_1, M_1) = 1. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Из этих условий находим:

$$u(M, M_1) = \left\{ \begin{array}{l} e^{\int_{S_0}^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \text{ на } M_1Q_1, \\ e^{\int_{S_0}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \text{ на } M_1P_1, \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$u(M_1, M_1) = 1.$$

Уравнение (17) и условия (18) полностью определяют функцию  $u$  в четырехугольнике  $MP_1M_1Q_1$ , ограниченном отрезками характеристик  $MP_1, MQ_1$  и  $M_1P_1, M_1Q_1$ .

Применяя формулу (6) к четырехугольнику  $MP_1M_1Q_1$ , получаем:

$$\iint_{MP_1M_1Q_1} (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]) d\xi d\eta = \int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) + \int_{Q_1}^M + \int_{M_1}^{Q_1} + \int_{P_1}^{M_1} = 0$$

( $R(\xi, \eta)$  — переменная точка интегрирования в  $MP_1M_1Q_1$ ). Пользуясь формулами (4) и (5) для  $K$  и  $H$  и условиями (9а) на характеристиках для функции  $v$ , нетрудно вычислить первые два интеграла правой части

$$\int_M^{P_1} (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int_{Q_1}^M (H d\eta - K d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

подобно тому как это было сделано при выводе формулы (10).

Аналогично, пользуясь равенствами (4'), (5') и условиями (19) для функции  $u(M, M_1)$  на характеристиках, находим:

$$\begin{aligned} \int\limits_P^{M_1} (H d\eta - K d\xi) &= \\ = \int\limits_{P_1}^{M_1} [- (vu)_\xi d\eta - (uv)_\eta d\xi] + \int\limits_{P_1}^{M_1} v [(2u_\xi d\eta + 2u_\eta d\xi) + (au d\eta - bu d\xi)] &= \\ = \int\limits_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int\limits_{P_1}^{M_1} 2 \left( \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}} u \right) v ds &= (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1} \\ \left( d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right), & \\ \int\limits_{M_1}^{Q_1} (H d\eta - K d\xi) &= (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1}, \quad \left( d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Суммируя все эти четыре равенства, получаем:

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1}$$

или

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \quad (20)$$

так как

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

Таким образом, мы видим, что  $v(M, M_1)$  — функцию влияния единичного импульса, сосредоточенного в точке  $M_1$ , можно определить как решение уравнения

$$\mathcal{L}_{(x, y)} [v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

с дополнительными условиями (18).

**4. Уравнения с постоянными коэффициентами.** В качестве первого примера применения формулы (10) рассмотрим задачу с начальными данными для уравнения колебаний струны:

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left( y = at, f_1 = \frac{f}{a^2} \right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \quad \left( \psi_1 = \frac{\Psi}{a} \right).$$

В формуле (10) дуга  $PQ$  является отрезком оси  $y = 0$ .  
Оператор

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

является самосопряженным, поскольку

$$\mathcal{M}(u) = \mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

Так как  $a = 0$  и  $b = 0$ , то функция  $v$  на характеристиках  $MP$  и  $MQ$  равна единице. Отсюда следует, что

$$v(M, M') \equiv 1$$

для любой точки  $M'$  внутри треугольника  $PMQ$ .

Учитывая затем, что в нашем случае

$$d\eta = 0 \quad \text{на} \quad PQ,$$

получаем:

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q u_\eta d\xi + \frac{1}{2} \iint_{PMQ} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Замечая, что  $P = P(x - y, 0)$ ,  $Q = Q(x + y, 0)$ , где  $x$  и  $y$  — координаты точки  $M = M(x, y)$ , и пользуясь начальными условиями, будем иметь:

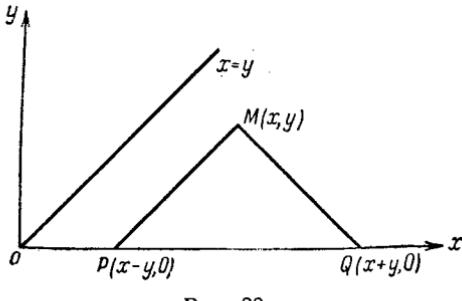


Рис. 28.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \\ &= \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $t$ , получаем формулу Даламбера

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \\ &= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

с которой мы уже встречались в п. 9 § 2 (формула (30)).

В качестве второго примера рассмотрим задачу с начальными условиями для уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (21)$$

( $a, b, c$  — постоянные числа),

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad (22)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \quad (23)$$

Подстановка

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \quad (24)$$

позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4} (4c^2 - a^2 - b^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \quad (25)$$

с дополнительными условиями

$$U|_{y=0} = \varphi(x) e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (22')$$

$$U_y|_{y=0} = \left( \psi(x) - \frac{b}{2} \varphi(x) \right) e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (23')$$

если только выбрать параметры  $\lambda$  и  $\mu$  соответствующим образом, полагая

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \quad (26)$$

Определение функции  $U(x, y)$  по начальным данным и уравнению (25) сводится к построению функции Римана  $v(x, y; \xi, \eta)$ .

Функция  $v$  должна удовлетворять условиям:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} v &= 1 \text{ на характеристике } MP, \\ v &= 1 \text{ на характеристике } MQ \text{ (рис. 28).} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (28)$$

Будем искать  $v$  в виде

$$v = v(z), \quad (29)$$

где

$$z = \sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2} \quad \text{или} \quad z^2 = (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2. \quad (30)$$

На характеристиках  $MP$  и  $MQ$  переменная  $z$  обращается в нуль, так что  $v(0) = 1$ . Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

Дифференцируя выражение для  $z^2$  дважды, по  $x$  и  $y$ , получим:

$$zz_x = x - \xi,$$

$$zz_y = -(y - \eta),$$

$$zz_{xx} + z_x^2 = 1,$$

$$zz_{yy} + z_y^2 = -1.$$

Отсюда и из формулы (30) находим:

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

Уравнение для  $v$  принимает следующий вид:

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

при условии  $v(0) = 1$ . Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение II, часть I, § 1)

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z)$$

или

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{c_1} [(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2]). \quad (31)$$

Воспользуемся теперь для нахождения  $U(x, y)$  формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

$$U(M) = \frac{U(P) + U(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q (v U_\eta d\xi - U v_\eta d\xi) \quad (d\eta = 0). \quad (32)$$

Вычислим предварительно интеграл по отрезку  $PQ$  ( $\eta = 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_P^Q (v U_\eta - U v_\eta) d\xi &= \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0(\sqrt{c_1} [(x - \xi)^2 - y^2]) U_\eta(\xi, 0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U(\xi, 0) \sqrt{c_1} y J'_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x - \xi)^2 - y^2})}{\sqrt{c_1} [(x - \xi)^2 - y^2]} \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Пользуясь начальными условиями (22'), (23'), находим:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\varphi_1(x-y) + \varphi_1(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \psi_1(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \varphi_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}}, \end{aligned} \quad (34)$$

откуда в силу (24), (22') и (23') получаем формулу

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\varphi(x-y) e^{-\frac{a-b}{2} y} + \varphi(x+y) c^{\frac{a+b}{2} y}}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2} y} \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b}{2} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{c_1} y \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \right\} e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \varphi(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2} y} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \psi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (35)$$

дающую решение поставленной задачи.

Рассмотрим частный случай  $a = 0, b = 0$ , т. е. уравнение  
 $u_{xx} - y_{yy} + cu = 0$ .

Из формулы (35) сразу получаем:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}) \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{c_1} y \int_{x-y}^{x+y} \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\xi)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - y^2}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (36)$$

Полагая здесь  $c_1 = 0$  и  $y = at$ , приходим к формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \bar{\psi}(\xi) d\xi, \quad (37)$$

дающей решение уравнения колебаний струны

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x), \\ \bar{\psi}(x) &= a\psi(x) = au_y(y, 0). \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

1. Решить задачу 1 из § 4, предполагая, что в начальный момент концентрация влаги постоянна вдоль всей трубы и на вход подается поток сухого воздуха.

2. Решить задачу 2 из § 4, считая, что начальная температура системы равна  $u_0$ , а температура на конце трубы все время поддерживается равной  $v_0 > u_0$ .

3. Решить систему телеграфных уравнений (см. § 1 (21)):

$$\begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv &= 0, \\ v_x + Li_t + Ri &= 0 \end{aligned}$$

для бесконечной линии при начальных условиях

$$i(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$$

Указание. Свести систему уравнений (§ 1 (21)) к уравнению 2-го порядка для одной из функций  $i(x, t)$  или  $v(x, t)$ , например

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRI$$

с начальными условиями  $i(x, 0) = \varphi(x)$ ,

$$\frac{\partial i}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i\right)_{t=0} = -\frac{1}{L} \psi'(x) - \frac{R}{L} \varphi(x) = \psi_0(x),$$

и воспользоваться затем формулой (35).

4. Исследовать решение телеграфного уравнения, полученное (формула (35)) для случая малых  $G$  и  $R$ . Рассмотреть предельный случай  $G \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow 0$  и получить из формулы (35) формулу Даламбера для решения уравнений колебаний струны.

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ II

### I. О колебании струн музыкальных инструментов

Колеблющаяся струна возбуждает колебания воздуха, воспринимаемые ухом человека как звук, издаваемый струной. Сила звука характеризуется энергией или амплитудой колебаний, тон — периодом колебаний, а тембр — соотношением энергий основного тона и обертонов<sup>1)</sup>). Не останавливаясь на физиологических процессах восприятия звука и на процессе передачи звука по воздуху, мы будем характеризовать звук струны ее энергией, периодом и распределением энергии по обертонам.

В музыкальных инструментах обычно возбуждаются попеченные колебания струн. Различают три типа струнных инструментов: щипковые, ударные и смычковые. В ударных инструментах (например, рояль) колебание возбуждается ударом, придающим струне начальную скорость без начального отклонения. В щипковых инструментах (например, арфа, гитара) колебания возбуждаются признаком струне некоторого начального отклонения без начальной скорости.

Свободные колебания струны, возбуждаемой произвольным способом, могут быть представлены в виде (см. главу II, § 3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \left( \omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

В качестве упражнения к § 3 была предложена задача 1, лежащая в основе простейшей теории возбуждения струн щипковых инструментов. Решение этой задачи показывает, что если начальное отклонение струны представлено в виде треугольника с высотой  $h$  в точке  $x=c$  (рис. 29), то

$$a_n = \frac{2h l^2}{\pi^2 n^2 c (l-c)} \sin \frac{\pi n c}{l}, \quad b_n = 0. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Рэлей, Теория звука, т. I, гл. VI, Гостехиздат, 1955.

Энергия  $n$ -й гармоники равна

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = M h^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l - c)^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \quad (2)$$

и убывает обратно пропорционально  $n^2$ .

В задаче 4 к § 3 рассматривается простейшая теория ударного возбуждения струны при помощи сосредоточенного в точке  $c$  удара с импульсом  $K$ . Решение этой задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t \quad \left( \omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \sin^2 \frac{\pi n c}{l}. \quad (4)$$

Таким образом, при возбуждении струны ударом, сосредоточенным на небольшом интервале длины  $\delta$ , энергии различных гармоник (для которых  $\delta$  мало по сравнению с расстоянием между узлами) будут мало различаться между собой, и тон, издаваемый так возбужденной струной, насыщен обертонами. Это заключение легко проверяется экспериментально. Если натянутую струну (на монохорде) ударить лезвием ножа, то струна зазвенит: звук будет насыщен обертонами. В рояле струна возбуждается ударом молоточка, обтянутого кожей. Такое возбуждение струны можно представить при помощи следующих схем:

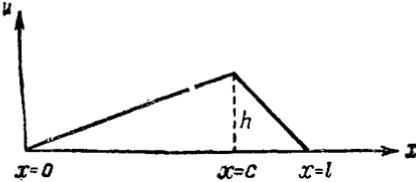


Рис. 29.

1. Струна возбуждается заданием постоянной начальной скорости  $v_0$  на интервале  $(c - \delta, c + \delta)$ . Этот случай будет соответствовать плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину  $2\delta$  и ударяющему в точке  $c$ . Процесс колебаний описывается функцией (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

и энергии отдельных гармоник равны

$$E_n = \frac{4M v_0^2}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

2. Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & |x-c| < \delta, \\ 0 & |x-c| > \delta. \end{cases}$$

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку ширины  $2\delta$ . Такой молоточек в центре интервала  $2\delta$  возбуждает наибольшую начальную скорость, что схематически может быть описано приведенной выше функцией. Возбужденное таким образом колебание имеет вид (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t$$

и энергии гармоник равны

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n \delta}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n c}{l}.$$

3. Молоточек, возбуждающий колебания струны, не является идеально жестким. В этом случае колебания определяются уже не начальной скоростью, а силой, меняющейся со временем. Таким образом, мы приходим к неоднородному уравнению с правой частью

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau}, & \text{если } |x-c| < \delta, \\ 0, & \text{если } |x-c| > \delta, \end{cases}$$

$$\quad \quad \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$t > \tau.$$

Решение этого уравнения для  $t > \tau$  представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n \delta}{l} \cos \frac{\omega_n \tau}{2} \sin \frac{\pi n c}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2\right]} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Рассмотренные примеры показывают, что ширина интервала, по которому производится удар, и продолжительность времени удара имеют весьма существенное влияние на величину энергии высоких обертонов. Отметим, кроме того, что присутствие множителя  $\sin \frac{\pi n}{l} c$  показывает, что если центр удара молоточка приходится на узел  $n$ -й гармоники, то энергия соответствующей гармоники равна нулю.

Наличие высоких обертонов (начиная с 7-го) нарушает гармоничность звука и вызывает ощущение диссонанса<sup>1)</sup>. Наличие

<sup>1)</sup> Например, если основная частота (первая гармоника) в 440 колебаний в секунду соответствует «ля» первой октавы, то в семь раз большая частота соответствует «соль» четвертой октавы. Интервал ля — соль, так называемая малая септима, имеет неприятный для слуха, диссонирующий характер.

низких обертонов, наоборот, вызывает ощущение полноты звука. В рояле место удара молоточка выбирают близко от точки закрепления струны между узлами 7-го и 8-го обертонов, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость, стремятся увеличить относительную энергию низких (3-го и 4-го) обертонов. В старых конструкциях рояля, обладавших более резким, даже до некоторой степени звенящим тоном, пользовались узкими и жесткими молоточками.

## II. О колебании стержней

В курсах методов математической физики основное место отводится уравнениям 2-го порядка. Однако большое число задач о колебаниях стержней, пластин и т. д. приводит к уравнениям более высокого порядка.

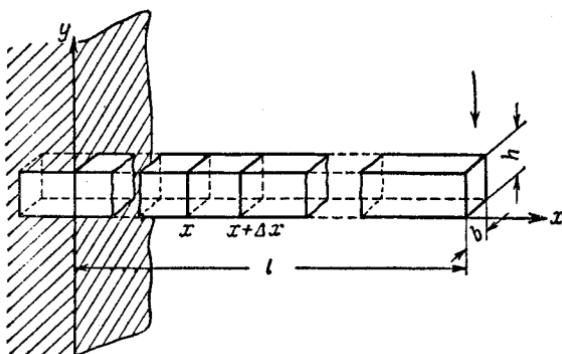


Рис. 30.

В качестве примера на уравнения 4-го порядка рассмотрим задачу о собственных колебаниях камертона, эквивалентную задаче о колебаниях тонкого прямоугольного стержня, зажатого одним концом в массивные тиски. Определение формы колебаний камертона и его частоты сводится к решению «уравнения поперечных колебаний стержня»

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

К этому уравнению приходят во многих задачах о колебаниях стержней, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См., например, монографию А. Н. Крылова «Вибрация судов».

Приведем элементарный вывод уравнения (1). Рассмотрим прямоугольный стержень длиной  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ), высотой  $h$  и шириной  $b$  (рис. 30). Выделим элемент длины  $dx$ . После изгиба

торцевые сечения выделенного элемента стержня, предполагаемые плоскими, образуют угол  $d\varphi$ . Если деформации малы, а длина оси стержня при изгибе не меняется ( $dl = dx$ ), то

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

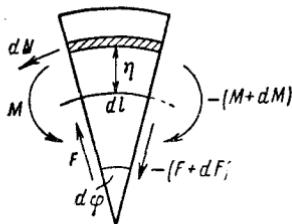


Рис. 31.

Слой материала, отстоящий от оси стержня  $y = 0$  на расстоянии  $\eta$ , изменяет свою длину на величину  $\eta d\varphi$

(рис. 31). По закону Гука сила натяжения, действующая вдоль слоя, равна

$$dN = E \cdot b d\eta \cdot \frac{\eta d\varphi}{dx} = -E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta d\eta,$$

где  $E$  — модуль упругости материала стержня. Полный изгибающий момент сил, действующих в сечении  $x$ , равен

$$M = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = -E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \quad (2)$$

где

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

— момент инерции прямоугольного сечения относительно своей горизонтальной оси. Обозначим через  $M(x)$  момент, действующий на правую часть стержня в каждом сечении. В сечении  $x + dx$ , очевидно, действует момент сил, равный  $-(M + dM)$ .

Избыточный момент  $-dM$  уравновешивается моментом тангенциальных сил

$$dM = F dx.$$

Отсюда в силу равенства (2) получаем величину тангенциальной силы

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (3)$$

Приравняв действующую на элемент результирующую силу

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

произведению массы элемента на ускорение

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

где  $\rho$  — плотность стержня,  $S$  — площадь поперечного сечения (при этом мы пренебрегаем вращательным движением при изгибе), получаем уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left( a^2 = \frac{EJ}{\rho S} \right). \quad (1)$$

Границными условиями для заделанного конца  $x=0$  являются неподвижность стержня и горизонтальность касательной

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

На свободном конце должны равняться нулю изгибающий момент (2) и тангенциальная сила (3), откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Для того чтобы полностью определить движение стержня, нужно еще задать начальные условия — начальное отклонение и начальную скорость

$$y|_{t=0} = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1) с границными условиями (4), (5) и с начальными условиями (6).

Будем решать задачу методом разделения переменных, полагая

$$y = Y(x) T(t). \quad (7)$$

Подставляя предлагаемую форму решения в (1), имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

Для функции  $Y(x)$  получаем задачу о собственных значениях

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \quad (8)$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dY}{dx}|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2}|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3 Y}{dx^3}|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

Общее решение уравнения (8) представляется в виде

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x + C \cos \sqrt[4]{\lambda} x + D \sin \sqrt[4]{\lambda} x.$$

Из условий  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = 0$  находим  $C = -A$ ,  $D = -B$ . Отсюда следует, что

$$Y(x) = A (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x - \cos \sqrt[4]{\lambda} x) + B (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x - \sin \sqrt[4]{\lambda} x).$$

Условия  $Y''(l) = 0$  и  $Y'''(l) = 0$  дают:

$$\begin{aligned} A(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda l} + \cos \sqrt[4]{\lambda l}) + B(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda l} + \sin \sqrt[4]{\lambda l}) &= 0, \\ A(\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda l} - \sin \sqrt[4]{\lambda l}) + B(\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda l} + \cos \sqrt[4]{\lambda l}) &= 0. \end{aligned}$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения  $A$  и  $B$ , если определитель системы равен нулю. Приравнивая этот определитель нулю, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений

$$\operatorname{sh}^2 \sqrt[4]{\lambda l} - \sin^2 \sqrt[4]{\lambda l} = \operatorname{ch}^2 \sqrt[4]{\lambda l} + 2 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda l} \cos \sqrt[4]{\lambda l} + \cos^2 \sqrt[4]{\lambda l}.$$

Так как  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , то это уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{ch} \mu \cdot \cos \mu = -1 \quad (\mu = \sqrt[4]{\lambda l}). \quad (10)$$

Корни уравнения (10) без труда вычисляются, например, графически<sup>1)</sup>:

$$\mu_1 = 1,875,$$

$$\mu_2 = 4,694,$$

$$\mu_3 = 7,854,$$

...

$$\mu_n \approx \frac{\pi}{2} (2n - 1) \quad \text{при } n > 3.$$

Последняя формула дает значение  $\mu_n$  с точностью до трех десятичных знаков, начиная с  $n=3$ , и с точностью до шестого знака для  $n \geq 7$ .

Рассмотрим теперь частоты колебаний камертона. Уравнению

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

удовлетворяют тригонометрические функции

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi v_n t + b_n \sin 2\pi v_n t$$

<sup>1)</sup> О вычислении корней уравнения (10) см. Рэлей, Теория звука, т. I, гл. VIII, 1955.

с частотой

$$v_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

Частоты  $v_n$  собственных колебаний относятся как квадраты  $\mu_n$ . Так как

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6,267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17,548,$$

то второй собственный тон выше основного тона более чем на две с половиной октавы, т. е. выше шестой гармоники струны при равном основном тоне, третья же собственное колебание выше основного тона более чем на четыре октавы. Например, если камертон имеет основную частоту в 440 колебаний в секунду (принятый стандарт для  $a'$  — ноты ля первой октавы), то следующая собственная частота камертона будет равна 2757,5 колебания в секунду (между  $c''' = 2637,3$  и  $f''' = 2794,0$  — между нотами *ми* и *фа* четвертой октавы равномерно-темперированной гаммы), третья же собственная частота в 7721,1 колебания в секунду уже выходит за пределы шкалы собственно музыкальных звуков.

При возбуждении колебаний камертона ударом присутствует не только первая, но и высшие гармоники, чем и объясняется металлический звук в начальный момент. Однако с течением времени высшие гармоники быстро затухают и камертон издает чистый звук основного тона.

### III. Колебания нагруженной струны

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о колебаниях закрепленной на концах струны  $(0, l)$ , в нескольких точках которой  $x=x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) помещены сосредоточенные массы  $M_i$ .

Условия в точке  $x_i$  можно получить двумя способами. Если в точке  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) приложена сосредоточенная сила  $F_i(t)$ , то должны выполняться соотношения

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (1)$$

$$ku_x|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \quad (2)$$

В данном случае под  $F_i$  следует понимать силу инерции. Подставляя в формулу (2)

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

получим:

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x|_{x_i-0}^{x_i+0}. \quad (3)$$

Возможен и другой вывод условия (3). Распределим массу  $M_i$  на участке  $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$  с постоянной плотностью  $\delta_i$  и воспользуемся уравнением колебаний для неоднородной струны

$$(\rho + \delta_i) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность струны. Пусть  $u_\varepsilon(x, t)$  — решение этого уравнения.

Интегрируя уравнение (4) по  $x$  в пределах от  $x_i - \varepsilon$  до  $x_i + \varepsilon$  и совершая предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим условие (3) для функции  $u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t)$ . На обосновании предельного перехода мы не останавливаемся.

Формулируем полностью нашу задачу:  
найти решение уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (5)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \end{array} \right\} \quad (6)$$

условиям сопряжения в точках  $x = x_i$

$$\left. \begin{array}{l} u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{array} \right\} \quad (8)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — заданные функции.

**2. Собственные колебания нагруженной струны.** Остановимся, прежде всего, на исследовании собственных частот и профилей стоячих волн для нагруженной струны. Для этого мы должны найти решение поставленной задачи, представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5) и пользуясь граничными условиями, получим после разделения переменных

$$T'' + \lambda T = 0 \quad (10)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left( k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda_0 X = (kX')' + \lambda_0 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{array} \right\}$$

Условия сопряжения дают:

$$X(x_i - 0) = X(x_i + 0),$$

$$M_i X(x_i) T'' = k X' \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} T.$$

Принимая во внимание уравнение (10), перепишем последнее соотношение в виде

$$k X' \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} = -\lambda M_i X(x_i).$$

Таким образом, для функции  $X(x)$  мы получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d}{dx}(kX') + \lambda\rho X = 0, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \quad (11)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} X(x_i - 0) &= X(x_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ kX'(x_i + 0) - kX'(x_i - 0) &+ \lambda M_i X(x_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отличительной особенностью рассматриваемой краевой задачи является то, что параметр  $\lambda$  входит не только в уравнение, но и в дополнительные условия.

Мы не будем здесь останавливаться на доказательствах существования бесчисленного множества собственных значений и собственных функций, положительности собственных значений, теоремы разложимости. Эта краевая задача, так же как и задачи обычного типа, рассмотренные нами в § 3 главы II, сводится к некоторому интегральному уравнению, которое в данном случае является нагруженным интегральным уравнением и эквивалентно интегральному уравнению в интегралах Стильтьеса.

Остановимся более подробно на выводе условия ортогональности собственных функций

$$X_1(x), \quad X_2(x), \dots,$$

которое в данном случае отлично от условия (92) § 3 и называется условием ортогональности с нагрузкой.

Как было показано в гл. II (см. § 3), собственные функции для краевой задачи

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dX}{dx} \right) + \lambda \rho X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

ортогональны с весом  $\rho$  на интервале  $(0, l)$ :

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (14)$$

Распределяя каждую массу  $M_i$  с постоянной плотностью  $\delta_i$  на некотором интервале  $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — малое число, мы придем к задаче о собственных колебаниях неоднородной струны с плотностью  $\rho_\varepsilon(x)$ . Пусть  $\lambda_{en}$  и  $\{X_{en}(x)\}$  — собственные значения и собственные функции этой задачи, для которых должно выполняться условие ортогональности

$$\int_0^l X_{em}(x) X_{en}(x) \rho_\varepsilon(x) dx = 0. \quad (15)$$

Выделяя в равенстве (15) интегралы по участкам  $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$  и совершая предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , мы получим соотношение

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \quad (16)$$

называемое условием ортогональности с нагрузкой<sup>1)</sup>.

Мы снова оставляем в стороне вопрос о возможности такого перехода.

Условие ортогональности (16) может быть получено и чисто формальным путем из уравнения и условий (11) — (13). Пусть  $X_m(x)$  и  $X_n(x)$  — собственные функции задачи (11) — (13), соответствующие собственным значениям  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( k \frac{dX_m}{dx} \right) + \lambda_m \rho X_m &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left( k \frac{dX_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho X_n &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на  $X_n(x)$ , второе — на  $X_m(x)$  и вычтем из первого результата второй. Интегрируя полученное равенство последовательно по участкам  $(0, x_1); (x_1, x_2); \dots; (x_N, l)$  и складывая, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx - \\ - \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} [X_m k X'_n - X_n k X'_m] dx = 0, \quad (17) \end{aligned}$$

причем мы полагаем  $x_0 = 0$ ,  $x_{N+1} = l$ . Выполняя интегрирование в каждом из слагаемых суммы и объединяя члены, соответ-

<sup>1)</sup> Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. VI, 1951.