ствующие подстановкам $x=x_i-0$ и $x=x_i+0$, получим сумму слагаемых вида

$$A_i=(X_m kX_n'-X_n kX_m')_{x=x_i-0}-(X_m kX_n'-X_n kX_m')_{x=x_i+0}.$$

При этом подстановки при $x=0$ и $x=l$ в силу граничных условий обращаются в нуль.

Для вычисления A_i воспользуемся условиями сопряжения

$$\left.\begin{aligned} X_j(x_i-0)&=X_j(x_i+0),\\ kX_j'(x_i+0)-kX_j'(x_i-0)&=-M_i\lambda_j X_j(x_i)\end{aligned}\right\}\quad (j=m,\ n). \tag{13'}$$

Переписывая A_i в виде

$$A_i=X_m(x_i)\,[kX_n'(x_i-0)-kX_n'(x_i+0)]-$$
$$-X_n(x_i)\,[kX_m'(x_i-0)-kX_m'(x_i+0)]$$

и пользуясь формулой (13′), находим

$$A_i=X_m(x_i)\,M_i\lambda_n X_n(x_i)-X_n(x_i)\,M_i\lambda_m X_m(x_i)=$$
$$=M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\,(\lambda_n-\lambda_m).$$

Теперь равенство (17) можно написать в виде

$$(\lambda_m-\lambda_n)\left\{\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx+\sum_{i=1}^N M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\right\}=0.$$

Если $\lambda_m\neq\lambda_n$, то отсюда сразу же следует условие ортогональности с нагрузкой (16).

Норма собственных функций $X_n(x)$ определяется по формуле

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx+\sum_{i=1}^N M_i X_n^2(x_i). \tag{18}$$

Очевидно, что при разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n X_n(x)$$

коэффициенты разложения будут определяться по формуле

$$f_n=\frac{\int_0^l f(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx+\sum_{i=1}^N M_i f(x_i)\,X_n(x_i)}{\|X_n\|^2}. \tag{19}$$

Задача с начальными условиями, поставленная в п. 1, решается по обычной схеме метода разделения переменных.

Аналогично рассматривается задача о колебании стержня (или балки) при наличии сосредоточенных масс.

Задача о колебаниях струны, нагруженной сосредоточенными массами, находит широкое применение в физике и технике. Еще Пуассон решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к упругой нити. А. Н. Крылов показал [1]), что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода «дрожащих» клапанов и т. д. Для теории многих измерительных приборов важно изучение крутильных колебаний нити, к концу которой подвешена масса (например, зеркальце).

Особую актуальность задача подобного типа приобрела в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Для решения этой задачи необходимо вычисление собственных частот крыла (балки переменного сечения), нагруженного массами (моторы). Кроме того, рассматриваемая задача встречается при расчете собственных колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и самоиндукциями (в связи с этим см. приложение, посвященное аналогии между механическими и электромагнитными колебаниями).

Мы не останавливаемся здесь на приближенных методах нахождения собственных значений и функций задачи, аналогичных приближенным методам нахождения соответствующих величин для неоднородной струны.

3. Струна с грузом на конце. Значительный практический интерес представляет задача о колебаниях однородной струны, один конец которой ($x=0$) закреплен, а ко второму концу ($x=l$) прикреплен груз массы M.

В этом случае условие при $x=l$ принимает вид

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

и для амплитуды стоячих волн получается уравнение

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

с граничными условиями

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho}\lambda_n X_n(l).$$

Отсюда находим

$$X_n(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,l},$$

где λ_n определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}. \tag{20}$$

---

[1]) А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, гл. VII, изд. АН СССР, 1932.

Условие ортогональности функций $\{X_n(x)\}$ принимает вид

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho\, dx + M X_n(l) X_m(l) = 0.$$

Вычислим квадрат нормы

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho\, dx + M X_n^2(l).$$

Используя уравнение (20), получаем:

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

Задача с начальными данными решается обычным методом.

4. Поправки для собственных значений. Вычислим поправки для собственных частот в случае больших и малых нагрузок M. Для простоты рассмотрим тот случай, когда груз подвешен к концу струны. Возможны два предельных случая.

1. $M=0$. Конец $x=l$ свободен. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

2. $M=\infty$. Конец $x=l$ жестко закреплен: $u(l, t)=0$. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

Нас будет интересовать случай малых M $(M \to 0)$ и больших M $(M \to \infty)$.

1° M мало. Найдем поправку к собственному значению $\lambda_n^{(1)}$, полагая

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \varepsilon M, \tag{21}$$

где ε — некоторое число. Подставляя (21) в уравнение (20) и пренебрегая M^2 и более высокими степенями M, получим:

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l}\right), \tag{22}$$

т. е. собственные частоты нагруженной струны при $M \to 0$ возрастают, приближаясь к собственным частотам струны со свободным концом.

2° M велико. Выбирая $1/M$ в качестве параметра малости, положим:

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M}.$$

Уравнение (20) дает:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)} l}}.$$

При этом мы пренебрегли членами, содержащими $1/M^2$ и более высокие степени $1/M$.

Таким образом,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)} l}} \frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \tag{23}$$

т. е. при увеличении нагрузки собственные частоты убывают, равномерно приближаясь к собственным частотам струны с закрепленными концами.

IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн

1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии. Уравнения акустики (см. § 1) были получены в предположении малости скоростей движения газа и малых изменений давления, что позволило линеаризовать уравнения гидродинамики.

В задачах, возникающих при изучении полета ракет и скоростных самолетов, в теории баллистики, взрывных волн и т. п., приходится иметь дело с гидродинамическими процессами, характеризующимися большими скоростями и градиентами давлений. В этом случае линейное приближение акустики непригодно и необходимо пользоваться нелинейными уравнениями гидродинамики. Поскольку с такого рода движениями на практике приходится встречаться для газов, то принято о гидродинамике больших скоростей говорить как о газовой динамике или г а з о д и н а м и к е.

Уравнения газодинамики в случае одномерного движения газа (в направлении оси x) имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad \text{(уравнение непрерывности)}, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{(уравнение движения)}, \tag{2}$$

$$p = f(\rho, T) \quad \text{(уравнение состояния)}. \tag{3}$$

Таким образом, уравнения газодинамики представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил.

Перейдем теперь к выводу закона сохранения энергии. Энергия единицы объема равна

$$\frac{\rho v}{2} + \rho\varepsilon, \tag{4}$$

где первый член есть кинетическая энергия, второй — внутренняя энергия. Здесь ε, очевидно, обозначает внутреннюю энергию единицы массы.

Для идеального газа $\varepsilon = c_v T$, где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, T — температура. Вычислим изменение энергии в единицу времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon). \tag{5}$$

Производя дифференцирование в первом слагаемом и пользуясь уравнениями (1) и (2), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - \rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{6}$$

Для преобразования производной $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$ обратимся к первому началу термодинамики, выражающему закон сохранения энергии

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau, \tag{7}$$

где dQ — количество тепла, получаемое (или отдаваемое) системой извне, $p\,d\tau$ — работа, затрачиваемая при изменении объема на величину $d\tau$ ($\tau = 1/\rho$ — удельный объем).

Если процесс адиабатический (теплообмена со средой нет), то

$$dQ = 0$$

и

$$d\varepsilon = -p\,d\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho. \tag{8}$$

Пользуясь этим равенством, будем иметь:

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}\,d\rho = w\,d\rho, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = w\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{10}$$

где

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{11}$$

— тепловая функция или теплосодержание единицы массы.

Производная $\frac{\partial w}{\partial x}$ в силу соотношений (9) и (11) удовлетворяет уравнению

$$\rho v\frac{\partial w}{\partial x} = v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Учитывая равенства (2), (5), (6), (10), (12), получаем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \tag{13}$$

Для выяснения физического смысла этого равенства проинтегрируем его по некоторому объему (x_1, x_2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dx=-\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Слева стоит изменение энергии в единицу времени на интервале (x_1, x_2), справа — поток энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема.

Если эффектом теплопроводности нельзя пренебречь, то уравнение сохранения энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right], \tag{14}$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

2. Ударные волны. Условия динамической совместности. В случае больших скоростей возможны такие движения, при которых на некоторых поверхностях, перемещающихся в пространстве, возникают разрывы непрерывности в распределении гидродинамических величин (давления, скорости, плотности и др.). Эти разрывы принято называть ударными волнами.

На поверхности разрыва (фронте ударной волны) должны выполняться условия непрерывности потока вещества, энергии и количества движения (условия Гюгонио). Перейдем к выводу этих условий.

Преобразуем уравнение (2) к более удобному для наших целей виду. Умножая (1) на v и складывая с (2), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2). \tag{2'}$$

Перепишем теперь уравнения непрерывности, движения и сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \tag{1'}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2), \tag{2'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \tag{13}$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) линию $x=\alpha(t)$, являющуюся «следом» поверхности разрыва на плоскости (x, t). Пусть AC—

некоторая дуга линии разрыва $x=\alpha(t)$, где A и C — точки с координатами x_1, t_1 и $x_2=x_1+\Delta x$; $t_2=t_1+\Delta t$ соответственно. Построим прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям.

Запишем закон сохранения вещества в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[(\rho)_{t_2}-(\rho)_{t_1}\right]dx=-\int_{t_1}^{t_2}\left[(\rho v)_{x_2}-(\rho v)_{x_1}\right]dt, \tag{15}$$

где слева стоит изменение массы на интервале (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2), а справа — количество вещества, вытекающего из интервала (x_1, x_2) за время (t_1, t_2). Если функции ρ и ρv непрерывны и дифференцируемы всюду внутри $ABCD$, то уравнение (15) эквивалентно уравнению (1′). В рассматриваемом случае это не имеет места.

Воспользуемся теоремой среднего значения для каждого слагаемого в отдельности

$$\left[(\rho)_{\substack{t=t_2\\x=x^*}}-(\rho)_{\substack{t=t_1\\x=x^{**}}}\right]\frac{\Delta x}{\Delta t}=-(\rho v)_{\substack{x=x_2\\t=t^*}}+(\rho v)_{\substack{x=x_1\\t=t^{**}}},$$

где x^*, x^{**}, t^*, t^{**} — средние значения аргументов x и t.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ $(x_2\to x_1)$ и $\Delta t\to 0$ $(t_2\to t_1)$ и обозначая индексом 2 значения функций выше кривой $x=\alpha(t)$ (сзади фронта ударной волны), а индексом 1 — значения функций ниже этой кривой (перед фронтом), получаем:

$$(\rho_2-\rho_1)\,U=-(\rho v)_1+(\rho v)_2, \tag{16}$$

где

$$U=\frac{d\alpha}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

— скорость ударной волны.

В системе координат, движущейся вместе с ударной волной,

$$u_1=U-v_1,\quad u_2=U-v_2$$

обозначают скорости частиц перед фронтом и, соответственно, сзади фронта ударной волны. Полученное выше соотношение (16) можно переписать в виде

$$\rho_1 u_1=\rho_2 u_2. \tag{16′}$$

Это равенство выражает непрерывность потока вещества через фронт ударной волны.

Записывая в интегральной форме закон сохранения количества движения, имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[(\rho v)_{t_2}-(\rho v)_{t_1}\right]dx=-\int_{t_1}^{t_2}\left[(p+\rho v^2)_{x_2}-(p+\rho v^2)_{x_1}\right]dt,$$

где справа стоит сумма импульса действующих сил (давления) и потока количества движения. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$, получаем закон сохранения потока количества движения на фронте

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

или

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \tag{17}$$

Аналогично получается также уравнение сохранения энергии на фронте

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2,$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

или в силу условия (16)

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{18}$$

Таким образом, на фронте ударной волны должны выполняться уравнения (условия динамической совместности или условия Гюгонио)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{16'}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \tag{17}$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \tag{18}$$

Из первых двух уравнений (16) и (17) выразим u_1 и u_2 через p и ρ:

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

откуда

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}(p_1 - p_2).$$

Подставляя затем это выражение в уравнение (18), находим соотношение между значениями энергии по обе стороны фронта

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)$$

и

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2).$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

т. е.

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{19}$$

Пользуясь формулой (19), после несложных преобразований приходим к так называемому уравнению адиабаты Гюгонио

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1} \tag{20}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \rho_2 - (\gamma - 1) \rho_1}{(\gamma + 1) \rho_1 - (\gamma - 1) \rho_2}. \tag{21}$$

По этой формуле можно определить одну из величин p_1, ρ_1, p_2, ρ_2, если известны три остальные величины.

Ударная волна всегда движется относительно газа от областей с бо́льшим давлением к областям с меньшим давлением: $p_2 > p_1$ (теорема Цемплена). Отсюда следует, что плотность газа за фронтом больше плотности перед фронтом.

Формула (20) выражает зависимость между p_2 и ρ_2 при заданных p_1 и ρ_1. Функция $\rho_2 = \rho_2(p_2)$ при заданных p_1 и ρ_1 является монотонно возрастающей функцией, стремящейся к конечному пределу при $p_2/p_1 \to \infty$ (ударная волна большой амплитуды):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \tag{22}$$

Эта формула показывает максимальный скачок плотности (уплотнение), который может существовать на фронте ударной волны. Для двухатомного газа $\gamma = {}^7/_5$ и максимальное уплотнение равно 6:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

Пользуясь равенствами (16′), (17) и (20) и полагая $p_1 = 0$, находим:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

Если ударная волна движется по покоящемуся газу ($v_1 = 0$), то скорость распространения ударной волны равна

$$U = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

т. е. она растет пропорционально квадратному корню из p_2.

Рассмотрим простейшую задачу теории ударных волн, допускающую аналитическое решение. В цилиндрической трубе $x > 0$, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой ($x=0$), находится покоящийся газ с постоянной плотностью ρ_1 и при постоянном давлении p_1. В начальный момент $t=0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x. Перед поршнем возникает ударная волна, которая в начальный момент совпадает с поршнем, а затем удаляется от него со скоростью $U > v$. Между поршнем и фронтом ударной волны возникает область 2, в которой газ движется со скоростью поршня. Перед фронтом (область 1) газ находится в невозмущенном состоянии: $\rho=\rho_1$, $p = p_1$ ($v = 0$).

Пользуясь условиями на фронте (16), (17) и (18), нетрудно определить скорость фронта, а также величину скачка, плотности и давления.

Введем безразмерные величины

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \tag{23}$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ — скорость звука перед фронтом (в невозмущенной области 1). Тогда уравнения сохранения запишутся в виде

$$\omega\tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{v}}{1-\omega}, \tag{24}$$

$$\tilde{p} = 1 + \gamma\tilde{U}\tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{p} = 1 + \gamma\frac{\tilde{v}^2}{1-\omega}, \tag{25}$$

$$\tilde{p}\omega = 1 + (\gamma - 1)\left(\tilde{U}\tilde{v} - \frac{1}{2}\tilde{v}^2\right). \tag{26}$$

Исключая отсюда $\tilde{p}$ и $\tilde{U}$, получаем квадратное уравнение для определения ω:

$$2\omega^2 - \omega[4 + (\gamma+1)\tilde{v}^2] + [2 + (\gamma-1)\tilde{v}^2] = 0. \tag{27}$$

Так как по смыслу $\omega < 1$; ($\rho_2 > \rho_1$), то выбираем меньший корень

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 - \tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{28}$$

Из уравнений (24) и (28) находим

$$\tilde{U} = \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}, \tag{29}$$

$$\tilde{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 + \gamma\tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{30}$$

Возвращаясь к прежним величинам, получаем:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4} \cdot \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} \cdot v^2}}{1 + \frac{(\gamma-1)v^2}{2c_1^2}}, \tag{31}$$

$$U = \frac{\gamma+1}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2}, \tag{32}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left\{ 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \frac{v^2}{c_1^2} + \frac{\gamma v}{c_1} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\}. \tag{33}$$

Так как скорость ударной волны постоянна, то для положения фронта в момент t будем иметь:

$$x = \alpha(t) = \left\{ \frac{(\gamma+1)}{4} v + c_1 \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2} v^2} \right\} t. \tag{34}$$

В предельном случае $v/c_1 \gg 1$ (ударная волна большой интенсивности) из формул (31)—(33) находим предельные соотношения

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad U = \frac{\gamma+1}{2} v; \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \cdot \frac{v^2}{c_1^2},$$

полученные нами ранее.

Если $v/c_1 \ll 1$ (волна малой интенсивности), то можно пренебречь членами v^2/c_1^2:

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 + \frac{v}{c_1}\right),$$

$$U = c_1 + \frac{(\gamma+1)}{4} v,$$

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma v}{c_1}\right),$$

3. Слабые разрывы. Выше было рассмотрено движение ударной волны, на фронте которой величины ρ, p, v и другие испытывают скачки. Такого рода разрывы называются *сильными*.

Возможны и такие движения, при которых на некоторой поверхности испытывают скачок первые производные величин ρ, p, v и других, в то время как сами эти величины остаются непрерывными. Такие разрывы называются *слабыми*.

В § 2, п. 10 рассмотрено движение разрывов такого рода и установлено, что эти разрывы распространяются вдоль характеристик. При этом мы исходили из уравнения акустики. Однако и для нелинейных задач газодинамики справедлив аналогичный результат.

Нетрудно убедиться в том, что поверхность слабого разрыва распространяется относительно газа со скоростью, равной локальной скорости звука. В самом деле, выделим малую окрестность поверхности слабого разрыва и возьмем средние значения гидродинамических величин в этой окрестности. Слабый разрыв, очевидно, можно рассматривать на фоне средних значений как малое возмущение, которое удовлетворяет уравнению акустики и должно распространяться с локальной скоростью звука.

В качестве примера рассмотрим истечение газа в вакуум (волна разрежения). Пусть в начальный момент $t=0$ газ, заполняющий полупространство $x>0$, покоится и имеет постоянные значения плотности ρ и давления p_0 во всей области $x>0$. При $t=0$ внешнее давление, приложенное к плоскости $x=0$, снимается, и газ начинает двигаться; при этом возникает слабый разрыв (волна разрежения), распространяющийся со скоростью звука c_0 в положительном направлении оси x. На переднем фронте газа $x=x_1(t)$ при $t=0$ мы имеем разрыв плотности и давления. Однако этот разрыв сразу же после начала движения исчезает.

В самом деле, из условий непрерывности потоков вещества и количества движения при $x=x_1(t)$

$$0=\rho_1^-(v_1-v_1^-)=\rho_1^+(v_1-v_1^+),$$

$$p_1^-+\rho_1^-(v_1-v_1^-)^2=p_1^++\rho_1^+(v_1-v_1^+)^2,$$

где ρ_1^-, p_1^-, v_1^- — значения слева в точке $x_1(t)$, ρ_1^+, p_1^+, v_1^+ — значения справа в точке $x_1(t)$, получаем

$$p_1^+=0 \quad \text{и} \quad \rho_1^+=0,$$

так как

$$\rho_1^-=p_1^-=v_1^-=0.$$

Для адиабатического процесса уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \tag{35}$$

Решения задачи будем искать в форме

$$\rho=\rho(\xi); \quad p=p(\xi); \quad v=v(\xi), \quad \text{где} \quad \xi=x/t.$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{t}\xi\frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{df}{d\xi},$$

где $f = \rho$, v или p, и подставляя результаты в уравнения (1) и (2), получим:

$$\left.\begin{aligned} (v-\xi)\frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho\frac{dv}{d\xi}, \\ (v-\xi)\rho\frac{dv}{d\xi} &= \frac{dp}{d\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Умножим первое уравнение на $(v-\xi)$ и сложим со вторым:

$$(v-\xi)^2\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi}$$

или

$$\frac{dp}{d\rho} = (v-\xi)^2.$$

Отсюда имеем:

$$v-\xi = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \pm c,$$

где c — скорость звука при адиабатическом процессе.

Поскольку мы рассматриваем движение слабого разрыва в положительном направлении оси x, надо выбрать в предыдущей формуле знак минус, т. е.

$$v-\xi = -c. \tag{37}$$

Подставляя это решение в уравнения (36), получаем:

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{c}{\rho} \tag{38}$$

или, что одно и то же,

$$\frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho c}.$$

Пользуясь уравнением состояния (35), находим:

$$c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$$

и после интегрирования уравнения (38)

$$v = \frac{2}{\gamma-1}\cdot c_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right]. \tag{39}$$

Из последней формулы можно выразить ρ через v:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \tag{40}$$

Здесь

$$c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$$

обозначает скорость звука при $v=0$ (в покоящемся газе). Формулу (39) можно также переписать в виде

$$v=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_0). \tag{41}$$

Подставляя выражение (40) для ρ в уравнение состояния (35), находим:

$$p=p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{42}$$

Из уравнений (41) и (37) получаем формулу

$$v=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}-c_0\right), \tag{43}$$

определяющую зависимость v от x и t. Подставляя затем выражение (43) для v в формулы (40) и (42), получим зависимость ρ и p от x и t в явной форме. Все величины оказываются зависящими от x/t. Если измерять расстояния в единицах, пропорциональных t, то картина движения не меняется. Такое движение называется автомодельным.

Найдем скорость движения переднего фронта $v_1(t)$. Полагая в равенстве (42) $p=0$, будем иметь:

$$v_1=-\frac{2}{\gamma-1}c_0. \tag{44}$$

Отсюда следует, что скорость истечения газа в пустоту конечна. Для двухатомных газов $\gamma={}^7/_5$ и

$$v_1=-5c_0.$$

Выражение (44) для скорости левого фронта $x=x_1(t)$ можно получить также из уравнения баланса вещества

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho\,dx=\rho_0x_2=\rho_0c_0t. \tag{45}$$

Вводя переменную

$$\xi=x/t,$$

получим

$$\int_{v_1}^{c_0}\rho\,d\xi=\rho_0c_0.$$

Подставляя затем выражение для ρ из (40) и полагая

$$1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\frac{\xi-c_0}{c_0}=\lambda,$$

будем иметь:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}} d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{46}$$

где

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

После вычисления интеграла (46) получим:

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

т. е.

$$\lambda_1 = 0,$$

откуда и следует:

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

Задача об истечении газа в вакуум решена.

Мы ограничились выше рассмотрением лишь наиболее простых задач газодинамики. За более подробным ознакомлением с затронутыми здесь вопросами отсылаем читателя к специальной литературе [1]).

V. Динамика сорбции газов

1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа. Рассмотрим задачу о поглощении (сорбции) газа [2]). Пусть через трубку (ось которой мы выберем за координатную ось x), заполненную поглощающим веществом (сорбентом), пропускается газовоздушная смесь. Обозначим через $a(x, t)$ количество газа, поглощенного единицей объема сорбента, а через $u(x, t)$ — концентрацию газа, находящегося в порах сорбента в слое x.

Напишем уравнение баланса вещества, предполагая, что скорость газа v достаточно велика и процесс диффузии не играет существенной роли в переносе газа. Рассмотрим слой сорбента от x_1 до x_2 в течение промежутка времени от t_1 до t_2. Очевидно,

---

[1]) См. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, гл. I, Гостехиздат, 1963; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, гл. VII, Гостехиздат, 1954; Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, 1946; Л. И. Седов, Распространение сильных взрывных волн, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 2, (1946).

[2]) А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий и Я. Л. Забежинский, Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала, ЖФХ, **20**, вып. 10 (1946).

для него можно написать уравнение баланса вещества

$$[\nu u|_{x_1} - \nu u|_{x_2}] S\,\Delta t = [(a+u)|_{t_2} - (a+u)|_{t_1}] S\,\Delta x, \tag{1}$$

которое после сокращения на $\Delta x\,\Delta t$ и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ $\Delta t \to 0$ принимает вид

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(a+u). \tag{2}$$

Левая часть этого уравнения представляет количество газа, накопляющегося за счет переноса, рассчитанное на единицу длины и времени, правая часть — количество газа, израсходованного на повышение концентрации сорбированного газа и газа, находящегося в порах. К этому уравнению баланса следует присоединить уравнение кинетики сорбции

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u-y), \tag{3}$$

где β — так называемый кинетический коэффициент, y — концентрация газа, находящегося в «равновесии» с сорбированным количеством газа.

Величины a и y связаны друг с другом уравнением

$$a = f(y), \tag{4}$$

являющимся характеристикой сорбента.

Кривая $a = f(y)$ называется изотермой сорбции. Если

$$f(y) = \frac{yu_0}{\gamma(u_0+py)},$$

то изотерма называется изотермой Лэнгмюра. Наиболее простой вид функции f соответствует так называемой изотерме Генри, справедливой в области малых концентраций,

$$a = \frac{1}{\gamma} y, \tag{5}$$

где $1/\gamma$ — коэффициент Генри.

В этом случае мы приходим к следующей задаче:

найти функции $u(x,t)$ и $a(x,t)$ из уравнений

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a) \tag{6}$$

при дополнительных условиях

$$\left.\begin{aligned} a(x,0) &= 0, \\ u(x,0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$u(0,t) = u_0, \tag{8}$$

где u_0 — концентрация газа на входе.

Пренебрегая производной $\frac{\partial u}{\partial t}$, представляющей расход газа на повышение свободной концентрации в порах сорбента, по сравнению с производной $\frac{\partial a}{\partial t}$, представляющей расход газа на увеличение сорбированного количества газа, получаем[1]:

$$-\nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - \gamma a), \tag{6}$$

$$a(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = u_0.$$

Исключим функцию $a(x, t)$, дифференцируя первое уравнение по t и используя второе уравнение

$$-\nu u_{xt} = \beta u_t - \beta\gamma a_t = \beta u_t + \beta\nu\gamma u_x$$

или

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\nu} u_t + \beta\gamma u_x = 0.$$

Определим начальное условие для u, полагая в первом уравнении $t = 0$,

$$-\nu u_x(x, 0) = \beta u(x, 0), \quad u(0, 0) = u_0,$$

откуда находим:

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\nu} x}.$$

Задача нахождения функции $u(x, t)$ свелась к интегрированию уравнения

$$u_{xt} + \frac{\beta}{\nu} u_t + \beta\gamma u_x = 0 \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$u(x, 0) = u_0 e^{-\frac{\beta}{\nu} x}, \tag{10}$$

$$u(0, t) = u_0. \tag{8}$$

Характеристиками этого уравнения являются линии

$$x = \text{const}, \quad t = \text{const}.$$

Дополнительные условия в этой задаче представляют значения искомой функции $u(x, t)$ на характеристиках. Аналогично

[1]) Для системы уравнений (2′) и (6) достаточно одного начального условия, так как ось $t = 0$ в этом случае становится характеристикой. Подробнее об этом см. примечание на стр. 168.

ставится задача для функции $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{\nu} a_t + \beta\gamma a_x = 0, \tag{11}$$

$$a(x, 0) = 0, \tag{7}$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{\gamma}(1 - e^{-\beta\gamma t}). \tag{12}$$

Следует заметить, что подобная задача встречается при рассмотрении ряда других вопросов (например, процесс сушки воздушным потоком, прогревание трубы потоком воды и т. д.)[1].

Решение уравнения (9) может быть получено в явном виде методом, изложенным в § 5, и дается формулой

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1}\left[e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau})\, d\tau\right], \tag{13}$$

---

[1]) Переходя к уравнению (2′), мы пренебрегали членом u_t. Однако нетрудно показать, что мы придем к тому же уравнению, если введем переменные:

$$\tau = t - \frac{x}{\nu}; \quad t = \tau + \frac{\xi}{\nu}, \quad \xi = x, \quad x = \xi$$

(рис. 32), в которых время в точке x отсчитывается от $t_0 = x/\nu$ — момента прихода в эту точку потока газовоздушной смеси. В самом деле,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и уравнение (2) принимает вид

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \tag{2''}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \tag{6}$$

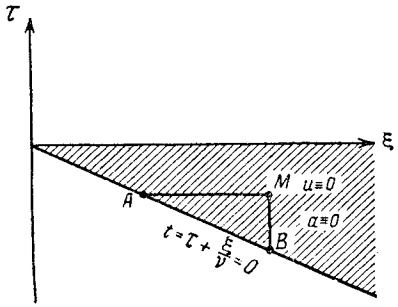

Рис. 32.

Начальные условия (7) и уравнения (2) и (6) дают:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

В области между прямой $t = 0$ и осью ξ мы получаем задачу определения функции u по начальным условиям (7′) (задача Коши). Очевидно, что в этой области функция $u(x, t) \equiv 0$ (а также $a \equiv 0$). Из уравнений (2′) и (6) видно, что при $\tau = 0$ функция $u(x, t)$ претерпевает разрыв, в то время как функция $a(x, t)$ остается непрерывной. Таким образом, при $\tau = 0$ функция u, как было показано выше, определяется из уравнения (2′) при $a(x, 0) = 0$. Определяя, как это было сделано на стр. 167—168 (см. формулы (10) и (12)), значения $u(x, 0)$ и $a(0, t)$, мы получаем для функций $u(x, t)$ и $a(x, t)$ задачи с данными на характеристиках.

где $x_1 = \frac{\beta x}{\nu}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ — безразмерные переменные, I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Пользуясь асимптотическими формулами для функции I_0, нетрудно получить асимптотическое представление решения при больших значениях аргументов.

2. Асимптотическое решение. Выше мы изучали процесс сорбции газа, подчиняющегося изотерме сорбции Генри, связывающей количество поглощенного вещества a с равновесной концентрацией y линейной зависимостью

$$a = \frac{1}{\gamma} y.$$

Рассмотрим изотерму сорбции общего вида

$$a = f(y).$$

Если ввести безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{x\beta}{\nu}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{\gamma}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0\gamma},$$

то система (2′), (6), (7), (8) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(zu_0) \tag{15}$$

при дополнительных условиях

$$\bar{u}(0, t_1) = 1, \tag{16}$$

$$v(x_1, 0) = 0. \tag{17}$$

Нас будет интересовать асимптотическое поведение функций, представляющих решение системы (14).

Относительно функции $f_1(z)$ мы будем предполагать следующее:

1. $f_1(z)$ — возрастающая функция и $f_1(0) = 0$.

2. $f_1(z)$ имеет непрерывную производную для всех значений z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

3. Луч, идущий из начала координат в точку $(1, f_1(1))$, лежит ниже кривой $f_1(z)$ в промежутке $0 \leqslant z \leqslant 1$ (рис. 33), что, в частности, имеет место для выпуклой изотермы.

Вводя обозначение для обратной функции

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

будем искать асимптотическое решение поставленной задачи в виде распространяющейся волны[1])

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \psi(\xi), \\ \tilde{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned} \quad \xi = x - \sigma t, \tag{18}$$

где σ — скорость распространения волны, подлежащая определению.

Это означает, что на больших расстояниях (при $x \to \infty$) или через большой промежуток времени ($t \to \infty$)

$$v(x, t) = \tilde{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \tilde{u}(x, t) = \tilde{u} = \psi(x - \sigma t).$$

Концентрации $\tilde{u}$ и v должны при $x = \infty$ или $t = \infty$ удовлетворять условию равновесия

$$v = f_1(\tilde{u}) \quad \text{или} \quad \tilde{u} = F(v).$$

Из условия (16) тогда следует:

$$\tilde{u}\Big|_{\substack{x=0\\t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v\Big|_{\substack{x=0\\t=\infty}} = f_1(1). \tag{19}$$

Из условия (17) следует:

$$v\Big|_{\substack{x=\infty\\t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \tilde{u}\Big|_{\substack{x=\infty\\t=0}} = F(0) = 0. \tag{20}$$

Условия (19) означают, что при $t \to \infty$ ($\xi \to -\infty$) должно установиться всюду насыщение.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнения (14), получим:

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0, \tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \tag{22}$$

Из (21) и (20) заключаем, что

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \tag{23}$$

Из уравнений (19) тогда следует, что

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}\Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \tag{24}$$

или, в размерных величинах,

$$\sigma = \gamma\frac{u_0}{a_0}, \quad a_0 = f(u_0). \tag{24'}$$

---

[1]) Для упрощения записи вместо x_1, t_1 будем писать x, t.

Из (22) и (23) находим:

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \tag{25}$$

После интегрирования будем иметь:

$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \tag{26}$$

где $\omega(\varphi)$ — какой-либо интеграл левой части, а ξ_0 — постоянная интегрирования. Отсюда искомая функция $\varphi(\xi)$ определится с точностью до неизвестной постоянной ξ_0:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \tag{27}$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \tag{28}$$

Выясним, может ли быть определена функция ω^{-1} и будут ли функции φ и ψ удовлетворять поставленным условиям при $\xi \to \infty$ и $\xi \to -\infty$. Покажем, что производная

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma \frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \tag{29}$$

т. е.

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

— монотонно убывающая функция φ. В самом деле, знаменатель в (29) равен

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi).$$

Первое слагаемое есть принадлежащая ординате φ абсцисса точки, лежащей на луче, идущем из начала координат в точку $(1, f_1(1))$ (рис. 33). Так как мы условились, что кривая $\varphi = f_1(z)$ лежит выше этого луча, то

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant f_1(1))$$

и, следовательно,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

Кроме того,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и при} \quad \varphi = f_1(1).$$

Отсюда следует, что

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty \qquad \text{при} \quad \varphi = 0,$$

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty \quad \text{при} \quad \varphi = f_1(1).$$

Для обратной функции получаем:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1) \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0 \qquad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Далее, в силу равенства (29) имеем:

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1 \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Итак, все условия (19) и (20) удовлетворены, и тем самым доказано, что система уравнений имеет решение в виде распространяющейся волны, содержащей неопределенную постоянную ξ_0.

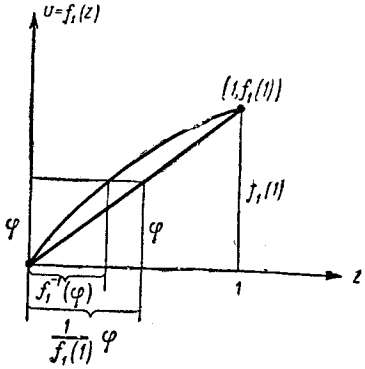

Рис. 33.

Для определения ξ_0 интегрируем первое уравнение по t_1 в пределах от 0 до t_0 и по x в пределах от 0 до x_0:

$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau)\,d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\,d\tau\right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0)\,dx - \int_0^{x_0} v(x, 0)\,dx\right] = 0. \tag{30}$$

Полученное равенство выражает закон сохранения вещества. Переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ и пользуясь начальными условиями для $\bar{u}$ и v, находим:

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\,dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\,d\tau = t_0.$$

Допустим, что для больших значений t решение нашей задачи приближается к функциям $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, найденным выше в виде распространяющихся волн.

Если мы определим ξ_0 из условия

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\,dx - t_0 \to 0 \qquad (t_0 \to \infty), \tag{31}$$

то это и будет то значение ξ_0, которое соответствует функциям $\tilde{u}(x, t)$ и $\tilde{v}(x, t)$.

Преобразуем наш интеграл

$$\int_0^{\infty} \tilde{v}(x, t_0)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0)\,dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0)\,dx =$$

$$= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi)\,d\xi = \int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta \qquad \begin{pmatrix} \zeta = x - \sigma t_0 - \xi_0, \\ \zeta_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через φ^* значение $\omega^{-1}(\zeta)$ при $\zeta=0$:

$$\omega^{-1}(0)=\varphi^*.$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi=\omega^{-1}(\zeta)$ — обратная функция для $\zeta=\omega(\varphi)$, то (рис. 34)

$$\int_{\zeta_1}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta=\int_{\zeta_1}^{0}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta+\int_{0}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=\left[-\zeta_1\omega^{-1}(\zeta_1)+\int_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\zeta_1)}\omega(\varphi)\,d\varphi+\int_{0}^{\varphi^*}\omega(\varphi)\,d\varphi\right]. \quad (32)$$

Отсюда следует, что вместо предельного равенства (31) можно написать:

$$\int_{-\sigma t_0-\xi_0}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta-t_0=$$

$$=\left\{(\sigma t_0+\xi_0)\,\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)+\int_{0}^{\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)}\omega(\varphi)\,d\varphi\right\}-t_0\to 0\quad (t_0\to\infty). \quad (32')$$

Перейдем к пределу при $t_0\to\infty$. Тогда

$$\sigma\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)\to\sigma\varphi(-\infty)=\sigma f_1(1)=1. \quad (32'')$$

Чтобы вычислить предел выражения

$$\sigma t_0\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)-t_0,$$

воспользуемся уравнением (25). Разлагая $f_1^{-1}(\varphi)=F(\varphi)$ в ряд вблизи точки $\varphi_0=f_1(1)$, получим:

$$\sigma\varphi-F(\varphi)=\sigma(\varphi-\varphi_0)+1-F(\varphi)=$$

$$=\sigma(\varphi-\varphi_0)-[F(\varphi)-F(\varphi_0)]=[\sigma-F'(\varphi_0)](\varphi-\varphi_0)+\ldots,$$

откуда

$$-\sigma\frac{d\varphi}{[\sigma-F'(\varphi_0)](\varphi-\varphi_0)+\ldots}=d\xi, \quad (33)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка относительно $(\varphi-\varphi_0)$.

Из требования 3 для функции f_1 следует, что

$$F'(\varphi_0)>\sigma=\frac{1}{f_1(1)}.$$

Из уравнения (33) находим порядок роста φ при $\xi\to-\infty$:

$$\varphi=Ae^{k\xi}+\varphi_0, \quad (34)$$

где A и $k>0$ — некоторые постоянные.

Из (34) следует, что

$$\lim_{t_0\to\infty} t_0[\sigma\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)-1]=\lim_{t_0\to\infty} t_0 A\sigma e^{-k(\sigma t_0+\xi_0)}=0. \quad (32''')$$

Совершая в формуле (32′) предельный переход при $t_0\to\infty$ и принимая во внимание (32″) и (32‴), получаем:

$$\xi_0=-\frac{1}{f_1(1)}\int_0^{f_1(1)}\omega(\varphi)\,d\varphi. \quad (35)$$

Тем самым профили волны $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ определены полностью.

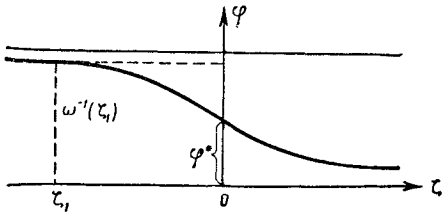

Рис. 34.

Особый интерес представляет случай изотермы Лэнгмюра. Найдем асимптотическое решение для процесса сорбции газа, подчиняющегося изотерме Лэнгмюра.

Уравнение (25) примет вид

$$-\sigma\frac{d\varphi}{\sigma\varphi-\dfrac{\varphi}{1-p\varphi}}=d\xi, \quad (36)$$

где $\sigma=\frac{1}{f_1(1)}=1+p$ — скорость волны. Из (36) находим:

$$\xi-\xi_0=\omega(\varphi),$$

где

$$\omega(\varphi)=\sigma\int\frac{(1-p\varphi)\,d\varphi}{\varphi-\sigma\varphi(1-p\varphi)}+A=$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma-1-p\sigma\varphi)-\ln\varphi\right]+A.$$

Очевидно, что когда φ меняется от 0 до $f_1(1)$, то $\omega(\varphi)$ меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Выберем A так, чтобы

$$\varphi^*=\frac{1}{2}f_1(1),$$

т. е. чтобы

$$\omega(\varphi^*)=0 \quad \text{при} \quad \varphi^*=\frac{1}{2}f_1(1)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+p}.$$

При этом условии

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{2}p\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+p}\right)\right]$$

и

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln 2(1 - \sigma\varphi) - \ln 2(1 + p)\varphi\right].$$

Значение ξ_0 определяется формулой

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)}\int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\,d\varphi = \ln 2 - 1$$

и не зависит от $p = u_0/y$, т. е. от подаваемой концентрации.

Искомое асимптотическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \tilde{u}(x, t) &= \sigma\omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \tag{37}$$

где $\omega^{-1}(\xi)$ — обратная для $\omega(\varphi)$ функция.

На рис. 35 приведены результаты численного интегрирования уравнений (14) для изотермы Лэнгмюра методом конечных

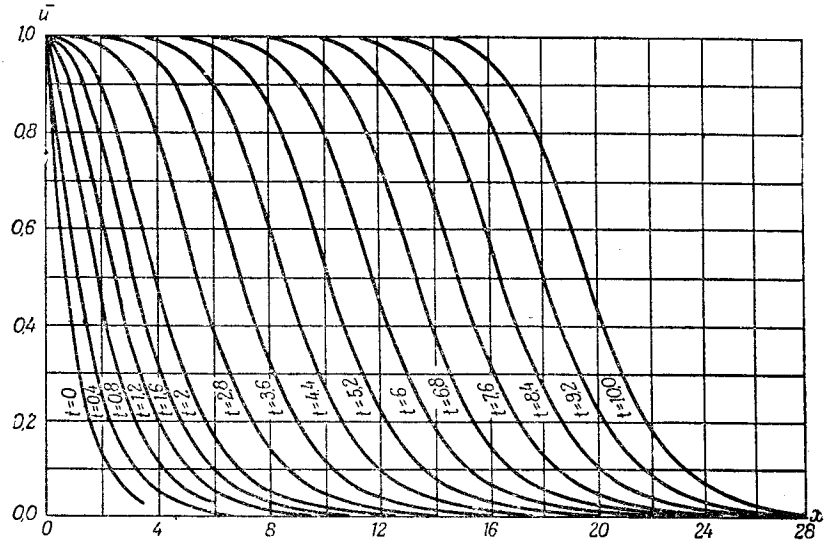

Рис. 35.

разностей. Эти графики даны для значений $0 < t \leqslant t_1 = 10$. При $t = t_1$ результаты численного интегрирования совпадают с асимптотическим решением с точностью до 1%. Для значений $t > t_1$ можно пользоваться асимптотическими формулами.

VI. Физические аналогии

При рассмотрении явлений в различных областях физики мы часто обнаруживаем общие черты в этих явлениях. Это приводит к тому, что при математической формулировке задачи мы получаем одни и те же уравнения, описывающие различные физические явления. Простейшим примером может служить уравнение

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+bx=0,$$

описывающее различные колебательные процессы простейших систем: математический маятник, колебание груза под действием силы упругости пружины, электрические колебания в простом контуре с индуктивностью и емкостью и т. д. Общность уравнений для различных физических процессов позволяет на основании изучения свойств одного явления делать заключение о свойствах другого, менее изученного явления. Так, изучение различных акустических явлений может быть значительно облегчено предварительным рассмотрением подобных электрических схем.

Распространение электрических колебаний в системах с распределенными постоянными описывается, как известно, телеграфными уравнениями

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t}+GV,\\-\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}+RI,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где C, G, L, R — распределенные емкости, утечка, индуктивность и сопротивление системы. Если можно пренебречь сопротивлением и утечкой тока, то для V и I получаются обычные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=0,$$

а уравнения (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t},\\-\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

При решении задачи о распространении звука в одном направлении, например, при изучении движения воздуха в трубах, мы

приходим к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где v — скорость колеблющихся частиц, ρ — плотность, p — давление, а $\tau = p_0\gamma$ — коэффициент упругости воздуха.

Подобие уравнений (2) и (3) позволяет установить соответствие между акустическими и электрическими величинами. Разности потенциалов соответствует давление, току — скорость смещения частиц. Плотность, определяющая инерционные свойства газа, соответствует индуктивности электрической цепи, а емкости электрической цепи соответствует $1/\tau$, т. е. обратная величина коэффициента упругости. Это же соответствие можно установить и из выражений кинетической и потенциальной энергий для электрической и акустической систем.

Возвращаясь к уравнениям (1), мы можем ввести акустические аналоги сопротивления и утечки. Величину акустического сопротивления приходится учитывать в тех случаях, когда при рассмотрении движения газа оказывается существенным трение газа о стенки сосуда. По аналогии с электрическим сопротивлением, которое определяется как отношение напряжения к току, можно ввести и акустическое сопротивление, определяемое отношением давления к току в среде, который пропорционален скорости смещения частиц газа, $R_A = p/uv$. В тех случаях, где рассматривается движение газа в пористой среде, приходится вводить величину, аналогичную утечке в электрических цепях. Эта величина, обозначаемая через P, называется пористостью и определяется частью объема материала, которая оказывается заполненной воздухом.

Механическим аналогом телеграфного уравнения является уравнение продольных колебаний стержня, которое подобно уравнениям (2) может быть записано в виде

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial v}{\partial t},$$

где T — натяжение стержня, v — скорость колеблющихся точек, ρ — плотность и k — коэффициент упругости стержня.

Сравнивая это уравнение с уравнением (2), мы можем установить подобие между механическими и электрическими величинами. Так, устанавливая соответствие между электрическим напряжением и натяжением струны, током и скоростью движения частиц, мы получим, что обратная величина коэффициента упругости соответствует емкости, а плотность — индуктивности.

Таким образом, рассмотрение подобных динамических задач приводит к установлению соответствия между рядом электрических акустических и механических величин. Это соответствие можно иллюстрировать следующей таблицей [1]):

	Электрическая система		Акустическая система		Механическая система	
Переменные	Напряжение	V	Давление	p	Натяжение (сила)	T
	Ток	I	Скорость частиц	v	Скорость смещения	$\dot{x}$
	Заряд	e	Смещение	u	Смещение	x
Параметры	Индуктивность	L	Инертность (плотность)	ρ	Плотность массы	ρ_m
	Емкость	C	Акустическая емкость $C_A = 1/\tau$		Мягкость	$C_M = 1/k$
	Сопротивление	R	Акустическое сопротивление R_A		Механическое сопротивление R_M	

Развитые выше соображения позволяют в ряде акустических задач получить некоторые сведения о характере явлений до решения задачи.

Так, задача о движении воздуха в порах для простых гармонических волн приводит к уравнениям [2])

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\operatorname{grad} p,$$

$$\Delta p + i\frac{\gamma P\omega}{\rho c^2}(r - i\omega\rho_m)\,p = 0,$$

где u — объемная скорость воздуха через поры, p — давление, ρ — плотность, ρ_m — эффективная плотность воздуха в порах, которая может быть больше ρ, так как в порах вместе с воздухом могут колебаться и частицы вещества, P — пористость, c и ω — скорость и частота звука, r — сопротивление потоку, которое характеризует падение давления в материале. Положив $r = R_A$, $\rho_m = L_A$, $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$, мы получим наши уравнения в виде

$$L_A\frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\operatorname{grad} p,$$

$$C_A L_A\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

---

[1]) См., например, Г. Ольсон, Динамические аналогии, ИЛ, 1947.
[2]) См. В. В. Фурдуев, Электроакустика, Гостехиздат, 1948.

Эти уравнения вполне подобны уравнениям распространения электрических колебаний в линии. Поэтому мы по аналогии с волновым сопротивлением линии

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

можем сразу написать выражение для сопротивления, называемого характеристическим импедансом пористого материала

$$Z = c\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho_w - i\frac{r}{\omega}}{\gamma P}},$$

считая при этом $G = 0$. Выражение характеристического импеданса указывает на затухание волн, распространяющихся в пористом материале.

Установленная аналогия между электрическими и акустическими явлениями позволяет заменить изучение ряда акустических задач рассмотрением эквивалентных электрических схем.

Метод подобия в последнее время нашел большое применение в моделирующих счетно-решающих устройствах, в которых для решения уравнения, соответствующего какому-либо физическому процессу, строится эквивалентная электрическая схема.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_y = 0 \qquad (y = a^2 t)$$

обычно называют уравнением теплопроводности.

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач

1. Линейная задача о распространении тепла. Рассмотрим однородный стержень длины l, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2, то, как хорошо известно, вдоль стержня устанавливается линейное распределение температуры (рис. 36)

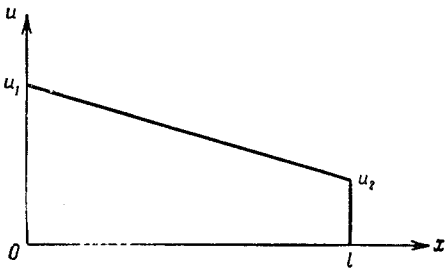

Рис. 36.

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \qquad (1)$$

При этом от более нагретого к менее нагретому концу стержня будет перетекать тепло. Количество тепла, протекающее через сечение стержня площади S за единицу времени, дается экспериментальной формулой

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \qquad (2)$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня.

Величина теплового потока считается положительной, если тепло течет в сторону возрастания x.

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t. Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$. Для этого сформулируем физические закономерности, определяющие процессы, связанные с распространением тепла.

1. Закон Фурье. Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t+dt)$, равно

$$dQ = qS\,dt, \tag{3}$$

где

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

— плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшего в единицу времени через площадь в 1 *см*². Этот закон представляет обобщение формулы (2). Ему можно также придать интегральную форму

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt, \tag{5}$$

где Q — количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x. Если стержень неоднороден, то k является функцией x.

2. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$Q = cm\,\Delta u = c\rho V\,\Delta u, \tag{6}$$

где c — удельная теплоемкость, m — масса тела, ρ — его плотность, V — объем.

Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\,\Delta u(x)\,dx. \tag{7}$$

3. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла может быть характеризовано

плотностью тепловых источников $F(x, t)$ в точке x в момент t[1]). В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x, t)\,dx\,dt \tag{8}$$

или в интегральной форме

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\,dx\,dt, \tag{9}$$

где Q — количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2).

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2). Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (5), (7) и (9), можно написать равенство

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right]d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\,d\xi, \tag{10}$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t[2]).

Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t =$$
$$= \{c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\}_{\xi=x_3}\Delta x, \tag{11}$$

---

[1]) Если, например, тепло выделяется в результате прохождения электрического тока силы I по стержню, сопротивление которого на единицу длины равно R, то $F = 0{,}24\cdot I^2R$.

[2]) Требуя дифференцируемости функций $u(x, t)$, мы, вообще говоря, можем потерять ряд возможных решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, но не удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Однако в случае уравнений теплопроводности, требуя дифференцируемости решения, мы фактически не теряем возможных решений, так как можно доказать, что если функция удовлетворяет уравнению (10), то она обязательно должна быть дифференцируема.

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\ t)\right]_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}}\Delta t\,\Delta x+F(x_4,\ t_4)\,\Delta x\,\Delta t=$$

$$=\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_5}}\Delta x\,\Delta t, \qquad (12)$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2).

Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x\,\Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}}+F(x,\ t)\Bigg|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}}=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Bigg|_{\substack{t=t_5\\ x=x_3}}. \qquad (13)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2). Переходя к пределу при $x_1, x_2 \to x$ и $t_1, t_2 \to t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,\ t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (14)$$

называемое уравнением теплопроводности.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однороден, то k, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t),$$

$$a^2=\frac{k}{c\rho},\quad f(x,\ t)=\frac{F(x,\ t)}{c\rho},$$

где a^2 — постоянная, называемая коэффициентом температуропроводности. Если источники отсутствуют, т. е. $F(x, t)=0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$u_t=a^2u_{xx}. \qquad (14')$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося *закону Ньютона*, количество тепла, теряемого стержнем [1]), рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$F_0=h(u-\theta),$$

[1]) Поскольку в нашем приближении не учитывается распределение температуры по сечению, то действие поверхностных источников эквивалентно действию объемных источников тепла.

где $\theta(x, t)$ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплообмена. Таким образом, плотность тепловых источников в точке x в момент t равна

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \tag{15}$$

где $F_1(x, t)$ — плотность других источников тепла.

Если стержень однороден, то уравнение теплопроводности с боковым теплообменом имеет следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

где $\alpha = \frac{h}{c\rho}$; $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$ — известная функция.

3. Коэффициенты k и c, как правило, являются медленно меняющимися функциями температуры. Поэтому сделанное выше предположение о постоянстве этих коэффициентов возможно лишь при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры. Изучение температурных процессов в большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности, которое для неоднородной среды запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u, x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = C(u, x)\rho(u, x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

(см. приложение III).

2. Уравнение диффузии. Если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление имеет место и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме не постоянна.

Рассмотрим процесс диффузии в полой трубке или в трубке, заполненной пористой средой, предполагая, что во всякий момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова. Тогда процесс диффузии может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t.

Согласно закону Нернста масса газа, протекающая через сечение x за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, равна

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,S\,dt = WS\,dt,$$

$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{16}$$

где D — коэффициент диффузии, S — площадь сечения трубки, $W(x, t)$ — плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающей в единицу времени через единицу площади.

По определению концентрации, количество газа в объеме V равно

$$Q = uV;$$

отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки (x_1, x_2) при изменении концентрации на Δu равно

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\,\Delta u \cdot S\,dx,$$

где $c(x)$ — коэффициент пористости[1]).

Составим уравнение баланса массы газа на участке (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2):

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau)\right] d\tau =$$

$$= S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi)\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\,d\xi.$$

Отсюда, подобно п. 1, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{17}$$

являющееся уравнением диффузии. Оно вполне аналогично уравнению теплопроводности. При выводе этого уравнения мы считали, что в трубке нет источников вещества и диффузия через стенки трубки отсутствует. Учет этих явлений приводит к уравнениям, сходным с уравнениями (14) и (15) (см. гл. VI, § 2, п. 3).

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{где } a^2 = D/c.$$

Если коэффициент пористости $c = 1$, а коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx}.$$

3. Распространение тепла в пространстве. Процесс распространения тепла в пространстве может быть характеризован температурой $u(x, y, z, t)$ являющейся функцией x, y, z и t.

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой.

---

[1]) Коэффициентом пористости называется отношение объема пор к полному объему V_0, равному в нашем случае $S\,dx$.

Пусть $d\sigma$ — некоторая площадка в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ с нормалью $\boldsymbol{n}$. Количество тепла, протекающее через $d\sigma$ в единицу времени, согласно закону Фурье, равно

$$W_n\, d\sigma = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{n})\, d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma,$$

где k коэффициент теплопроводности, $\partial u/\partial n$ — производная по направлению нормали $\boldsymbol{n}$ к $d\sigma$, равная

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, z) = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{n}).$$

Закон Фурье часто записывают в форме

$$\boldsymbol{W} = -k \operatorname{grad} u,$$

где $\boldsymbol{W}$ — вектор плотности теплового потока.

Если среда изотропная, то k есть скаляр. В случае анизотропной среды k есть тензор, а вектор теплового потока $\boldsymbol{W}$ представляет собой произведение тензора k на вектор $-\operatorname{grad} u$. Мы будем рассматривать только изотропные среды.

Перейдем к выводу уравнения теплопроводности в пространстве.

Рассмотрим некоторый объем V, ограниченный поверхностью S. Уравнение баланса тепла для объема V за время $\Delta t = t_2 - t_1$ имеет вид:

$$\iiint\limits_V c\rho\,[u(P, t_2) - u(P, t_1)]\, dV_P =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S W_n\, d\sigma + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left(\iiint\limits_V F(P, t)\, dV_P\right), \quad (18)$$

где $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ — точка интегрирования, $dV_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ — элемент объема, $c\rho$ — теплоемкость единицы объема, W_n — нормальная составляющая плотности теплового потока. Это уравнение выражает закон сохранения тепла в объеме V за время Δt: изменение количества тепла в объеме V за время $\Delta t = t_2 - t_1$ (левая часть в (18)) обусловлено потоком тепла через граничную поверхность S (первое слагаемое в правой части равенства (18)), а также количеством тепла, выделившимся в объеме V за время Δt в результате действия тепловых источников.

Чтобы перейти от интегрального уравнения баланса к дифференциальному уравнению, предположим, что $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ дважды дифференцируема по x, y, z и один раз по t и что эти производные непрерывны в рассматриваемой об-

ласти. Тогда можно воспользоваться формулой Остроградского

$$\iint\limits_S W_n\, d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\, dV$$

и преобразовать уравнение баланса к виду

$$\iiint\limits_V c\rho\,[u(P, t_2) - u(P, t_1)]\, dV_P =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{W}\, dV_P\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_V F(P, t)\, dV_P\, dt.$$

(Будем предполагать $F(P, t)$ непрерывной функцией своих аргументов.)

Применяя теорему о среднем и теорему о конечных приращениях для функций многих переменных, получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_3\\ P=P_1}} \Delta t \cdot V = -\operatorname{div} \boldsymbol{W}\Big|_{\substack{t=t_4\\ P=P_2}} \Delta t \cdot V + F\Big|_{\substack{t=t_5\\ P=P_3}} \Delta t \cdot V,$$

где t_3, t_4, t_5 — промежуточные точки на интервале Δt, а P_1, P_2, P_3 — точки в объеме V. Фиксируем некоторую точку $M(x, y, z)$ внутри V и будем стягивать V в эту точку, а Δt стремить к нулю. После сокращения на $\Delta t V$ и указанного предельного перехода получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = -\operatorname{div} \boldsymbol{W}(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

Заменяя $\boldsymbol{W}$ по формуле $\boldsymbol{W} = -k \operatorname{grad} u$, получим дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c\rho\, u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

или

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F.$$

Если среда однородна, то это уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

где $a^2 = k/c\rho$ — коэффициент температуропроводности, или

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

4. Постановка краевых задач. Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие в отличие от уравнения гиперболического типа состоит лишь в задании значений функции $u(x, t)$ в начальный момент t_0.

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, заданная в некотором промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, причем T есть промежуток времени, в течение которого изучается процесс.

2. На конце $x = l$ задано значение производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

К этому условию мы приходим, если задана величина теплового потока $Q(l, t)$, протекающего через торцевое сечение стержня,

$$Q(l, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t)$, где $\nu(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный поток $Q(l, t)$ по формуле

$$\nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)].$$

Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой θ известна. Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, вытекающего через сечение $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

и

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

получаем математическую формулировку третьего граничного условия в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)],$$

где $\lambda = h/k$ — коэффициент теплообмена, $\theta(t)$ — некоторая заданная функция. Для конца $x = 0$ стержня $(0, l)$ третье граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)].$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ могут быть разных типов, так что число различных задач велико.

Первая краевая задача состоит в отыскании решения $u = u(x, t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи с различными комбинациями краевых условий при $x = 0$ и $x = l$. Возможны краевые условия более сложного типа, чем те, которые были рассмотрены выше.

Пусть, например, на конце $x = 0$ стержня помещена сосредоточенная теплоемкость C_1 (например, тело с большой теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объему этого тела можно считать постоянной) и происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Тогда краевое условие при $x = 0$ (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

где u_0 — температура внешней среды. Это условие содержит производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\left(\text{или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если учесть уравнение } u_t = a^2 u_{xx}\right)$.

Если среда неоднородна и коэффициенты уравнения являются разрывными функциями, то промежуток $(0, l)$, в котором ищется решение задачи, разбивается точками разрыва коэффициентов на несколько частей, внутри которых функция u удовлетворяет уравнению теплопроводности, а на границах — условиям сопряжения.

В простейшем случае эти условия заключаются в непрерывности температуры и непрерывности теплового потока

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$

$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

где x_i — точки разрыва коэффициентов.

Кроме названных здесь задач часто встречаются их предельные случаи. Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь начальным распределением температуры. В этом случае точный учет длины стержня не имеет значения, так как изменение длины стержня не окажет существенного влияния на температуру интересующего нас участка; в задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой:

найти решение уравнения теплопроводности в области $-\infty < x < \infty$ *и* $t \geqslant t_0$, *удовлетворяющее условию*

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

где $\varphi(x)$ — *заданная функция.*

Аналогично, если участок стержня, температура которого нас интересует, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. В задачах подобного типа обычно считают, что стержень полубесконечен, и координата, отсчитываемая от конца, меняется в пределах $0 \leqslant x \leqslant \infty$. Приведем в качестве примера формулировку первой краевой задачи для полубесконечного стержня:

найти решения уравнения теплопроводности в области $0 < x < \infty$ *и* $t_0 \leqslant t$, *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ u(0, t) &= \mu(t) \quad (t \geqslant t_0), \end{aligned}\right\}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\mu(t)$ — *заданные функции.*

Приведенные выше задачи представляют собой предельный случай (вырождение) основных краевых задач. Возможны предельные случаи основной задачи и другого типа, когда пренебрегают точным учетом начальных условий. Влияние начальных условий при распространении температуры по стержню ослабевает с течением времени. Если интересующий нас момент достаточно удален от начального, то температура стержня практически определяется граничными условиями, так как изменение начальных условий не изменило бы температурного состояния стержня в пределах точности наблюдения. В этом случае практически можно считать, что опыт продолжался бесконечно долго, и начальные условия тем самым отпадают.

Таким образом, мы приходим к краевым задачам без начальных условий, когда ищется решение уравнения теплопроводности для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $-\infty < t$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$

$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

В зависимости от характера граничного режима возможны и другие виды задач без начальных условий.

Весьма важной является задача без начальных условий для полубесконечного стержня ($l = \infty$), когда требуется найти решение уравнения теплопроводности для $0 < x < \infty, t > -\infty$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t),$$

где $\mu(t)$ — заданная функция.

Наиболее часто встречаются задачи без начальных условий при периодическом граничном режиме

$$\mu(t) = A \cos \omega t$$

(см. приложение I к гл. III).

Естественно считать, что по прошествии большого промежутка времени температура стержня практически также меняется по периодическому закону с той же частотой. Однако, если мы захотим точно учитывать начальные условия, то формально никогда не получим периодического решения, так как влияние начальных условий, хотя и будет ослабевать с течением времени, но в нуль не обратится; учитывать это влияние ввиду ошибок наблюдения нет никакого смысла. Рассматривая периодическое решение, мы пренебрегаем влиянием начальных данных.

Постановка краевых задач, изложенная выше, относится, конечно, не только к уравнению с постоянными коэффициентами. Под словами «уравнение теплопроводности» мы могли бы понимать любое из уравнений предыдущих пунктов.

Помимо перечисленных выше линейных краевых задач, ставятся также задачи с нелинейными граничными условиями, например, вида

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma [u^4(0, t) - \theta^4(0, t)].$$

Это граничное условие соответствует излучению по закону Стефана — Больцмана с торца $x = 0$ в среду с температурой $\theta(t)$. Остановимся более подробно на постановке краевых задач. Рассмотрим первую краевую задачу для ограниченной области.

Решением первой краевой задачи будем называть функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, t)$ определена и непрерывна в замкнутой области

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

2) $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в открытой области

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

3) $u(x, t)$ удовлетворяет начальному и граничным условиям, т. е.

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

где $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) \quad [= u(0, t_0)] \text{ и } \varphi(l) = \mu_2(t_0) \quad [= u(l, t_0)],$$

необходимым для непрерывности $u(x, t)$ в замкнутой области.

Рассмотрим плоскость фазовых состояний (x, t) (рис. 37). В нашей задаче ищется функция $u(x, t)$, определенная внутри прямоугольника $ABCD$. Эта область определяется самой постановкой задачи, так как изучается процесс распространения тепла в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ за промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, в течение которого нам известен тепловой режим на краях. Пусть $t_0 = 0$; мы предполагаем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению только при $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, но не при $t = 0$ (сторона AB) и не при $x = 0$, $x = l$ (стороны AD и BC), где начальными и граничными условиями непосредственно задаются значения этой функции. Если бы мы потребовали, чтобы уравнение удовлетворялось, например, при $t = 0$, то этим мы потребовали бы, чтобы существовала производная $\varphi'' = u_{xx}(x, 0)$, входящая в уравнение. Этим требованием мы ограничили бы область изучаемых физических явлений, исключив из рассмотрения те функции, для которых это требование не выполняется. Условие 3) без предположения непрерывности $u(x, t)$ в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (т. е. в замкнутом прямоугольнике $ABCD$) или какого-либо другого условия, заменяющего это предположение, теряет смысл[1]). Действительно, рассмотрим

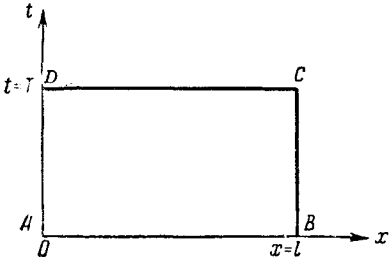

Рис. 37

[1]) Ниже будут рассмотрены краевые задачи с разрывными граничными и начальными условиями. Для этих задач будет уточнено, в каком смысле понимается выполнение граничных условий.

функцию $v(x, t)$, определенную следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&v(x, t) = C && (0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T),\\
&v(x, 0) = \varphi(x) && (0 \leqslant x \leqslant l),\\
&\left.\begin{aligned} v(0, t) &= \mu_1(t),\\ v(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} && (0 \leqslant t \leqslant T),
\end{aligned}
$$

где C — произвольная постоянная. Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет условию 2), а также граничным условиям. Однако эта функция не представляет процесса распространения температуры в стержне при начальной температуре $\varphi(x) \neq C$ и граничных температурах $\mu_1(t) \neq C$ и $\mu_2(t) \neq C$, так как она разрывна при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$.

Непрерывность функции $u(x, t)$ при $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$ следует из того, что эта функция удовлетворяет уравнению. Таким образом, требование непрерывности $u(x, t)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, по существу относится только к тем точкам, где задаются граничные и начальные значения. В дальнейшем мы под словами «решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям», будем подразумевать функцию, удовлетворяющую требованиям 1), 2), 3), не оговаривая эти условия каждый раз, если в этом нет специальной необходимости.

Аналогично ставятся и другие краевые задачи, в том числе задачи на бесконечном стержне и задачи без начальных условий.

Для задач с несколькими независимыми геометрическими переменными все сказанное выше сохраняет силу. В этих задачах при $t = t_0$ задается начальная температура, на поверхности тела — граничные условия. Можно рассматривать также и задачи для бесконечной области.

В отношении каждой из поставленных задач возникают следующие вопросы [1]):

1) единственность решения поставленной задачи,

2) существование решения,

3) непрерывная зависимость решения от дополнительных условий.

Если поставленная задача имеет несколько решений, то слова «решение задачи» не имеют определенного смысла. Поэтому прежде чем говорить о решении задачи, необходимо доказать его единственность. Для практики наиболее существенным является вопрос 2), так как при доказательстве существования решения обычно дается способ вычисления решения.

---

[1]) Ср. с гл. II, § 2.

Как было отмечено ранее (см. главу II, § 2, п. 5) процесс называется физически определенным, если при малом изменении начальных и граничных условий задачи ее решение меняется мало. В дальнейшем будет доказано, что процесс распространения тепла физически определяется своими начальными и граничными условиями, т. е. небольшое изменение начального и граничных условий мало изменяет и само решение.

5. Принцип максимального значения. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнение с постоянными коэффициентами

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

Как мы видели, это уравнение подстановкой

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u \quad \text{при} \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \ \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2}$$

приводится к виду

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Докажем следующее свойство решений этого уравнения, которое мы будем называть принципом максимального значения.

Если функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \leqslant t \leqslant T$ и $0 \leqslant x \leqslant l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{19}$$

в точках области $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, то максимальное и минимальное значения функции $u(x, t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы $x = 0$, или $x = l$.

Функция $u(x, t) = \text{const}$, очевидно, удовлетворяет уравнению теплопроводности и достигает своего максимального (минимального) значения в любой точке. Однако это не противоречит теореме, так как из ее условия следует, что если максимальное (минимальное) значение достигается внутри области, то оно также (а не только) должно достигаться или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура на границе и в начальный момент не превосходит некоторого значения M, то при отсутствии источников внутри тела не может создаться температура, бо́льшая M. Остановимся сначала на доказательстве теоремы для максимального значения.

Доказательство теоремы ведется от противного. Обозначим через M максимальное значение $u(x, t)$ при $t = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ или при $x = 0$, или при $x = l$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$[1]) и допустим, что

[1]) Если не предполагать непрерывности $u(x, t)$ в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то функция $u(x, t)$ могла бы не достигать своего максимума ни в одной точке, и дальнейшие рассуждения были бы неприме-

в некоторой точке (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \leqslant T)$ функция $u(x, t)$ достигает своего максимального значения, равного

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (19) в точке (x_0, t_0). Так как в точке (x_0, t_0) функция достигает своего максимального значения, то необходимо должно быть

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0\ ^{1)}. \tag{20}$$

Далее, так как $u(x_0, t)$ достигает максимального значения при $t = t_0$, то [2])

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0. \tag{21}$$

Сравнивая знаки правой и левой части уравнения (19), мы видим, что они различны. Однако это рассуждение еще не доказывает теоремы, так как правая и левая части могут быть равны нулю, что не влечет за собой противоречия. Мы привели это рассуждение, чтобы яснее выделить основную идею доказательства. Для полного доказательства найдем точку (x_1, t_1), в которой $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leqslant 0$ и $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \tag{22}$$

нимы. В силу теоремы о том, что всякая непрерывная функция достигает своего максимального значения в замкнутой области, мы можем быть уверены, что: 1) функция $u(x, t)$ *достигает максимального значения* на нижней или боковых сторонах прямоугольника, которое мы обозначили через M; 2) если $u(x, t)$ хотя бы в одной точке больше M, то существует точка (x_0, t_0), в которой $u(x, t)$ *достигает максимального значения*, превосходящего M:

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

причем

$$0 < x_0 < l, \qquad 0 < t_0 \leqslant T.$$

[1]) Действительно, как известно из анализа, достаточными условиями для того, чтобы функция $f(x)$ в точке x_0, лежащей внутри интервала $(0, l)$, имела относительный минимум, являются следующие условия: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$. Таким образом, если $f(x)$ в точке x_0 имеет максимальное значение, то 1) $f'(x_0) = 0$ и 2) не может быть, чтобы $f''(x_0) > 0$, т. е. $f''(x_0) \leqslant 0$.

[2]) При этом ясно, что если $t_0 < T$, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, если же $t_0 = T$, то $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$.

где k — некоторое постоянное число. Очевидно, что

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

и

$$k(t_0 - t) \leqslant kT.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kT был меньше $\varepsilon/2$, т. е. $k < \varepsilon/2T$; тогда максимальное значение $v(x, t)$ при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = l$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$v(x, t) \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{при } t = 0 \text{ или } x = 0, \text{ или } x = l), \tag{23}$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (22) не превосходит M, а второе $-\varepsilon/2$.

В силу непрерывности функции $v(x, t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения. Очевидно, что

$$v(x_1, t_1) \geqslant v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$ или $x = 0$, $x = l$ имеет место неравенство (23). В точке (x_1, t_1), по аналогии с (20) и (21), должно быть $v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0$, $v_t(x_1, t_1) \geqslant 0$. Учитывая (22), находим:

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0,$$
$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geqslant k > 0.$$

Отсюда следует, что

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geqslant k > 0,$$

т. е. уравнение (19) во внутренней точке (x_1, t_1) не удовлетворяется. Тем самым доказано, что решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности (19) внутри области не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение $u(x, t)$ на границе (т. е. при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Аналогично может быть доказана и вторая часть теоремы о минимальном значении. Впрочем, это не требует отдельного доказательства, так как функция $u_1 = -u$ имеет максимальное значение там, где u — минимальное.

Обратимся теперь к установлению ряда следствий из принципа максимального значения. Прежде всего докажем теорему единственности для первой краевой задачи.

6. Теорема единственности. *Если две функции, $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенные и непрерывные в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{для } 0 < x < l,\ t > 0), \tag{24}$$

одинаковым начальным и граничным условиям

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u_1(l, t) = u_2(l, t) = \mu_2(t),$$

то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$[1]).

Для доказательства этой теоремы рассмотрим функцию

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

Поскольку функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ непрерывны при

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

то и функция $v(x, t)$, равная их разности, непрерывна в этой же области. Как разность двух решений уравнения теплопроводности в области $0 < x < l, t > 0$, функция $v(x, t)$ является решением однородного уравнения теплопроводности в этой области. Таким образом, принцип максимального значения применим к этой функции, т. е. она достигает своего максимального и минимального значений или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$. Однако по условию мы имеем:

$$v(x, 0) = 0, \qquad v(0, t) = 0, \qquad v(l, t) = 0.$$

Поэтому

$$v(x, t) \equiv 0,$$

т. е.

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

Отсюда следует, что решение первой краевой задачи единственно.

Докажем еще ряд прямых следствий из принципа максимального значения. При этом в дальнейшем мы будем говорить просто «решение уравнения теплопроводности» вместо более подробного перечисления свойств функций, удовлетворяющих, кроме того, начальным и граничным условиям.

1. *Если два решения уравнения теплопроводности* $u_1(x, t)$ *и* $u_2(x, t)$ *удовлетворяют условиям*

$$u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0),$$
$$u_1(0, t) \leqslant u_2(0, t), \qquad u_1(l, t) \leqslant u_2(l, t),$$

то

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$$

для всех значений $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

---

[1]) В п. 3, § 2 эта теорема будет усилена и требование непрерывности при $t = 0$ снято.

Действительно, разность $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ удовлетворяет условиям, при которых установлен принцип максимального значения, и, кроме того,

$$v(x, 0) \geqslant 0, \qquad v(0, t) \geqslant 0, \qquad v(l, t) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$v(x, t) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,$$

так как иначе функция $v(x,t)$ имела бы отрицательное минимальное значение в области

$$0 < x < l, \qquad 0 < t \leqslant T.$$

2. *Если три решения уравнения теплопроводности*

$$u(x, t), \qquad \underline{u}(x, t), \qquad \bar{u}(x, t)$$

удовлетворяют условиям

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

то эти же неравенства выполняются тождественно, т. е. для всех x, t при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Это утверждение является применением следствия 1 к функциям

$$u(x, t), \quad \bar{u}(x, t) \quad \text{и} \quad \underline{u}(x, t), \quad u(x, t).$$

3. *Если для двух решений уравнения теплопроводности $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ имеет место неравенство*

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad t = 0, \quad x = 0, \quad x = l,$$

то

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon$$

тождественно, т. е. имеет место для всех x, t

$$0 \leqslant x \leqslant l, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Это утверждение вытекает из следствия 2, если его применить к решениям уравнения теплопроводности

$$\underline{u}(x, t) = -\varepsilon,$$
$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$
$$\bar{u}(x, t) = \varepsilon.$$

Следствие 3 позволяет установить непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от начального и граничных значений. Если мы в некоторой физической задаче вместо решения уравнения теплопроводности, соответствующего начальному и граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u(0, t) = \mu_1(t), \qquad u(l, t) = \mu_2(t),$$

возьмем решение $u(x,t)$, соответствующее другим начальному и граничным значениям, определяемым функциями $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$, не отличаемыми в пределах заданной степени точности ε от функций $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x)-\varphi^*(x)|\leqslant\varepsilon, \qquad |\mu_1(t)-\mu_1^*(t)|\leqslant\varepsilon, \quad |\mu_1(t)-\mu_2^*(t)|\leqslant\varepsilon,$$

то функция $u_1(x,t)$ будет отличаться от функции $u(x,t)$ в пределах той же точности ε

$$|u(x,t)-u_1(x,t)|\leqslant\varepsilon.$$

В этом и заключается принцип физической определенности задачи.

Мы подробно провели изучение вопроса о единственности и физической определенности задачи на примере первой краевой задачи для ограниченного отрезка. Теорема единственности первой краевой задачи для ограниченной области в пространстве двух или трех измерений может быть доказана буквальным повторением приведенных выше рассуждений.

Подобные же вопросы возникают при изучении других задач, целый ряд которых был поставлен нами в предшествующем параграфе. Эти задачи требуют некоторого видоизменения метода доказательства.

Единственность решения задачи для неограниченной области (см. п. 7) или задачи без начальных условий имеет место лишь при наложении некоторых дополнительных условий на изучаемые функции.

7. Теорема единственности для бесконечной прямой. При решении задачи на бесконечной прямой существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области, т. е. существование такого M, что $|u(x,t)|<M$ для всех $-\infty<x<+\infty$ и $t\geqslant 0$.

Если $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — непрерывные, ограниченные во всей области изменения переменных (x,t) функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx} \qquad (-\infty<x<\infty,\ t>0) \tag{19}$$

и условию

$$u_1(x,0)=u_2(x,0) \qquad (-\infty<x<\infty),$$

то

$$u_1(x,t)\equiv u_2(x,t) \qquad (-\infty<x<\infty,\ t\geqslant 0).$$

Рассмотрим, как обычно, функцию

$$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t).$$

Функция $v(x,t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, ограничена во всей области

$$|v(x,t)| \leqslant |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0)$$

и удовлетворяет условию

$$v(x,0) = 0.$$

Принцип максимального значения, которым мы пользовались при доказательстве единственности задачи для отрезка, здесь неприменим, так как в неограниченной области функция $v(x,t)$ может нигде не достигать максимальных значений. Чтобы воспользоваться этим принципом, рассмотрим область

$$|x| \leqslant L,$$

где L — вспомогательное число, которое затем будем неограниченно увеличивать, и функцию

$$V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{25}$$

Функция $V(x,t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, в чем нетрудно убедиться дифференцированием, и кроме того, обладает следующими свойствами:

$$V(x,0) \geqslant |v(x,0)| = 0,$$
$$V(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant |v(\pm L, t)|. \tag{26}$$

Для ограниченной области $|x| \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ справедлив принцип максимального значения. Применяя следствие 2 из предыдущего пункта для функции $\underline{u} = -V(x,t)$, $u = v(x,t)$ и $\bar{u} = V(x,t)$ и учитывая (26), получаем:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leqslant v(x,t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Фиксируем некоторые значения (x, t) и, воспользовавшись произволом выбора L, будем его неограниченно увеличивать. Переходя к пределу при $L \to \infty$, получим:

$$v(x,t) \equiv 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Метод разделения переменных

1. Однородная краевая задача. Перейдем к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad (0 < x < l,\ t > 0) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$