

Решение этой задачи было рассмотрено в § 3 настоящей главы и дается формулой

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{V\pi} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Градиент этой функции при $z = 0$ равен

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{T_0}{V\pi V a^2 t} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}} \Bigg|_{z=0} = \frac{T_0}{V\pi V a^2 t}.$$

Подставляя сюда известные значения геотермического градиента $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ град/см, $T_0 = 1200^\circ\text{C}$, а также значение $a^2 = 0,006 \text{ см}^2/\text{сек}$, соответствующее среднему экспериментально определяемому коэффициенту температуропроводности гранитов и базальтов, получим для продолжительности процесса остывания значение $t = 0,85 \cdot 10^{15}$ сек = 27 000 000 лет. Такое представление о возрасте Земли никак не согласовывалось с геологическими данными. Приближенный характер рассматриваемой теории (пренебрежение кривизной Земли, непостоянство коэффициента температуропроводности, приближенность значения T_0) не может, конечно, изменить порядка найденного значения для возраста Земли, который по современным данным оценивается приблизительно в $2 \cdot 10^9$ лет.

Физическая схема температурного режима Земли подверглась существенному пересмотру после открытия явления радиоактивного распада. Радиоактивные элементы, рассеянные в земной коре, при распаде вызывают ее нагревание, так что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \quad \left(f = \frac{A}{c\rho} \right),$$

где A — объемная плотность тепловых источников. На основании многочисленных измерений радиоактивности горных пород и их тепловыделения принято значение

$$A = 1,3 \cdot 10^{-12} \text{ кал}/\text{см}^3\text{сек.}$$

Это значение учитывает тепло, выделяемое ураном, торием и калием вместе с их продуктами распада.

Предположим, что плотность радиоактивных источников внутри земного шара постоянна и равна значению A , определенному для верхних слоев земной коры. В этом случае количество тепла, выделяющегося во всем земном шаре

за единицу времени, будет равно

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 A.$$

Сделаем второе предположение о том, что Земля радиоактивным теплом не нагревается. В этом случае поток тепла через единицу поверхности

$$q = k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \geq \frac{Q}{4\pi R^2},$$

где k и $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}$ суть коэффициент теплопроводности и геотермический градиент у поверхности Земли.

Отсюда для $\frac{\partial u}{\partial z}$ при $z = 0$ находим значение

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \geq \frac{AR}{3k} \cong 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ град/см},$$

где $R = 6,3 \cdot 10^3$ км — радиус Земли и $k = 0,004$ — среднее значение коэффициента теплопроводности осадочных пород.

Таким образом, геотермический градиент, вычисленный в предположении, что распределение радиоактивных элементов постоянно и что Земля не нагревается благодаря радиоактивному распаду, на два порядка превышает наблюдаемое значение геотермического коэффициента

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \text{ град/см}.$$

Откажемся от гипотезы постоянства распределения радиоактивных элементов и предположим, что радиоактивные элементы расположены в слое мощности H у поверхности Земли. Пренебрегая кривизной Земли, получим для определения стационарной температуры уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\frac{A}{k} & \text{для } 0 \leq z \leq H, \\ 0 & \text{для } z > H \end{cases}$$

с условиями

$$u(0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

Очевидно, что решение поставленной задачи равно

$$u(z) = \begin{cases} \frac{A}{k} \left(Hz - \frac{z^2}{2} \right), & 0 \leq z \leq H, \\ \frac{A}{k} \frac{H^2}{2}, & z \geq H, \end{cases}$$

так как эта функция непрерывна вместе с первой производной при $z = H$ и удовлетворяет условиям задачи.

Определяя значение градиента этой функции при $z = 0$, равное

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{AH}{k},$$

и сопоставляя его с наблюдаемым значением $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ град/см, находим, что

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км.}$$

Оценим влияние сделанной гипотезы стационарности температуры на величину геотермического градиента. Рассмотрим для этого решение уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f, \\ f &= \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 \leq z \leq H, \\ 0, & z > H \end{cases} \end{aligned}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$w(z, 0) = 0,$$

$$w(0, t) = 0.$$

Решение этой задачи представляется, как мы видели в § 3, интегралом

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \xi; t - \tau) f(\xi) d\tau d\xi,$$

где G — функция источника для полубесконечной прямой, равная

$$G(z, \xi; t - \tau) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 (t - \tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z - \xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z + \xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\}.$$

Вычислим значение градиента при $z = 0$, принимая во внимание значение функции f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{A}{c\rho 2 \sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\xi}{V[a^2(t - \tau)]^3} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{V a^2(t - \tau)} \int_0^{H^2/(4a^2(t-\tau))} e^{-a} da d\tau = \\ &= \frac{A}{c\rho \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{V a^2 \theta} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2 \theta}} \right] d\theta, \quad \text{где } \theta = t - \tau. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho V\pi} \left\{ \frac{2Vt}{a} - \frac{H}{a^2} \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right\},$$

где

$$\sigma = \frac{H}{2\sqrt{a^2\theta}}, \quad \sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2t}}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{a^2}{H} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\theta}}.$$

Вычислим интеграл

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = -\frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma} \Big|_{\sigma_0}^{\infty} - 2 \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0} - 2 \int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

откуда

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho a^2} \left\{ \frac{2aVt}{V\pi} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2t}} \right] + H \frac{2}{V\pi} \int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma \right\}. \quad (1)$$

Отметим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{k} H,$$

так как $c\rho a^2 = k$, предел первого слагаемого в фигурных скобках равен нулю, а предел второго слагаемого равен H .

Вычислим отклонение $\frac{\partial w}{\partial z}$ от его предельного значения для

$$t = 2 \cdot 10^9 \text{ лет} = 6 \cdot 10^{16} \text{ сек.}$$

Значение σ_0 мало:

$$\sigma_0 = \frac{H}{2\sqrt{a^2t}} = \frac{10^6}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{16}}} = \frac{1}{2 \cdot 19} \cong 0,025.$$

Разлагая функции, входящие в формулу (1), в ряды, получим:

$$\frac{A}{k} H - \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{A}{k} H \left\{ \frac{-1}{V\pi \sigma_0} [\sigma_0^2 + \dots] + \frac{2}{V\pi} \cdot \sigma_0 \right\} \cong \frac{A}{k} H \cdot 0,014,$$

т. е. $\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0}$ отличается от своего предельного значения на 1,4%.

Нетрудно было бы вычислить функцию $w(z, t)$ для $z > 0$ и убедиться, что для $z \geqslant H$, $w(z, t)$ далеко еще не достигает своего предельного значения для t , равного возрасту Земли¹⁾ (хотя, как мы убедились, градиент у поверхности практически равен своему предельному значению).

¹⁾ А. Н. Тихонов, О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 1937, стр. 431—459.

Приведенные выше рассуждения носят, конечно, лишь оценочный характер; однако, принимая во внимание весьма большую устойчивость скорости радиоактивного распада, не изменяющейся под воздействием доступных нам температур и давлений, мы должны прийти к заключению о том, что концентрация радиоактивных элементов должна быстро убывать с глубиной, если основываться на значении A для верхних слоев земной коры, установленном многочисленными измерениями. Физическое объяснение, позволяющее установить закон убывания концентрации радиоактивных элементов с глубиной, до сих пор отсутствует.

III. Метод подобия в теории теплопроводности

Для решения ряда задач теплопроводности весьма полезен *метод подобия*. В качестве примера рассмотрим две задачи.

1. Функция источника для бесконечной прямой. Уравнение теплопроводности, как нетрудно видеть, остается неизменным при преобразовании переменных

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t, \quad (1)$$

т. е., если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует изменить в k^2 раз.

Будем искать сначала решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (3)$$

При указанном выше изменении масштабов начальное условие (3) остается также без изменения, поэтому для функции $u(x, t)$ должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \quad (4)$$

при любых значениях x, t и k .

Полагая

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad (5)$$

получим:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \quad (6)$$

Таким образом, u зависит только от аргумента

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \quad (7)$$

Вычисляя производные для u из формулы (6)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},\end{aligned}$$

подставляя в уравнение теплопроводности (2) и сокращая на множитель $u_0/4t$, получаем:

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \quad (8)$$

при дополнительных условиях

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad (9)$$

соответствующих начальному условию для функции u .

Интегрируя уравнение (8) будем иметь:

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = C e^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Здесь нижний предел выбран так, чтобы выполнялось первое условие (9). Чтобы удовлетворить второму условию (9), следует положить:

$$C_1 = 1/\sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right], \quad (10)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(интеграл ошибок). Если начальное значение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при } x > \bar{x}, \\ 0 & \text{при } x < \bar{x}, \end{cases} \quad (11)$$

то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}} \right) \right]. \quad (12)$$

Обратимся теперь к решению второй вспомогательной задачи, где начальные значения задаются в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_2 < x, \\ u_0 & \text{при } x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{при } x < x_1. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right].$$

Начальная температура u_0 соответствует количеству тепла

$$Q = c\rho(x_2 - x_1)u_0.$$

Если

$$Q = c\rho,$$

то

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]. \quad (14)$$

Функция влияния источника, сосредоточенного в точке, очевидно, представляет предел функции $u(x, t)$ при $x_2 - x_1 \rightarrow 0$.

Пределенный переход в формуле (14) дает:

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right]_{\xi=x_1}, \quad (15)$$

так как в правой части формулы (14) стоит разностное отношение, пределом которого является производная в (15).

Производя дифференцирование, находим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}}, \quad (16)$$

т. е. $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ — функция мгновенного точечного источника.

2. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности. Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (17)$$

с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры.

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному и начальному условиям

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \quad (18)$$

пределными значениями производной по внешней (внутренней) нормали в точке P_0 ¹).

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на Σ . Производная $\frac{dV}{dz}$ в точке M

оси z , направленной по внутренней нормали, равна

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz}(M) &= \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) d\sigma_P = \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{\cos \psi}{R_{MP}^2} \mu(P) d\sigma_P, \quad (44) \end{aligned}$$

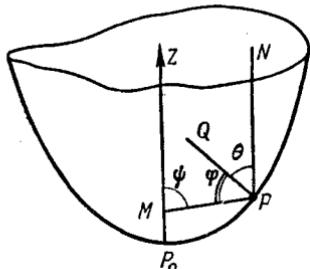


Рис. 63.

где ψ — угол между осью z и вектором \overrightarrow{MP} . Проведем из точки P (рис. 63) нормаль PQ и прямую PN , параллельную оси z (нормали в точке P_0), и обозначим через θ угол NPQ , равный углу между нормалью в точках P и P_0 ²). Выражение для потенциала двойного слоя $W(M)$ содержит множитель $\frac{\cos \phi}{R^2}$, где $\phi = \angle MPQ$. Так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то

$$\cos(\pi - \psi) = \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta \cos \Omega = -\cos \psi,$$

где Ω — двугранный угол с ребром PQ ³). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z}(M) &= - \iint_{\Sigma} (\mu \cos \theta) \frac{\cos \Psi}{R^2} d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \phi}{R^2} d\sigma = \\ &= -W_1 - I(M), \quad (45) \end{aligned}$$

¹⁾ Предел разностного отношения $\frac{V(M) - V(P_0)}{MP_0}$ при $M \rightarrow P_0$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу изнутри для производной по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_0 .

²⁾ Очевидно, что θ и $\sin \theta$ стремятся к нулю, когда $P \rightarrow P_0$. Если поверхность обладает конечной кривизной в окрестности точки P_0 , т. е. ее уравнение можно представить в виде

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ имеет вторые производные, то $\sin \theta$ будет дифференцируемой функцией x, y и, следовательно,

$$\sin \theta < Ar$$

(для поверхностей Ляпунова $\sin \theta < Ar^\delta$).

³⁾ Если направление PQ принять за ось новой сферической системы, то эта формула совпадает с формулой (13) на стр. 326.

для преобразованной функции уравнение $\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \alpha u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\frac{\partial u}{\partial t}$ с начальными и граничными условиями $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 1$. Полагая

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}},$$

получаем для f уравнение

$$\frac{d}{dz} \left[(1 + \alpha f) \frac{df}{dz} \right] = -2z \frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (22)$$

Если коэффициент теплопроводности $k(u)$ является степенной функцией температуры, $k(u) = k_0 u^\sigma$, $k_0 = \text{const} > 0$, $\sigma > 0$, а вместо (18) заданы условия $u(0, t) = u_0 t^n$, $n > 0$, $u(x, 0) = 0$, то уравнение (17) при $c\rho = 1$ имеет решения вида $u(x, t) = u_0 t^n f(z)$, где $z = x/ct^m$, $m = (1 + n\sigma)/2$, $c = \text{const} > 0$. В частности, при $n = \sigma$ получаем решения типа «температурной волны», распространяющейся с конечной скоростью c : $u(x, t) = u_0 t^n \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ при $x \leq ct$, $u(x, t) = 0$ при $x \geq ct$ (см. Дополнение I, рис. 87). На рис. 42 приведены результаты численного интегрирования уравнения (22) для различных значений α .

IV. Задача о фазовом переходе

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления — переход из жидкой фазы в твердую (или обратный переход). На поверхности фазового перехода все время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затвердевания (плавления). Сформулируем те дополнительные условия, которые должны выполняться на поверхности затвердевания¹⁾.

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела является плоскость $x = \xi(t)$. За время t , $t + \Delta t$ граница $x = \xi$ переместится от точки $\xi = x_1$ до точки $\xi = x_2 = x_1 + \Delta\xi$. При этом затвердевает масса $\rho\Delta\xi$ (или расплывается, если $\Delta\xi < 0$) и выделяется соответствующее количество тепла $\lambda\rho\Delta\xi$.

Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности количеств тепла, прошедших через

¹⁾ Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XIII, Гостехиздат, 1937.

границы $\xi = x_1$ и $\xi = x_2$, т. е. должно выполняться условие

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x_2} \right] \Delta t = \lambda \rho \Delta \xi,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, а λ — скрытая теплота плавления.

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, мы и получим дополнительное условие на границе раздела в следующем виде:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}.$$

Это условие имеет место как для процесса затвердевания (когда $\Delta \xi > 0$ и $\frac{d\xi}{dt} > 0$), так и для процесса плавления (когда $\Delta \xi < 0$ и $\frac{d\xi}{dt} < 0$); направление процесса определяется знаком левой части.

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового перехода равна нулю. Будем рассматривать массу воды $x \geq 0$, ограниченную с одной стороны плоскостью $x = 0$. В начальный момент $t = 0$ вода обладает постоянной температурой $c > 0$. Если на поверхности $x = 0$ все время поддерживается постоянная температура $c_1 < 0$, то граница замерзания $x = \xi$ будет со временем проникать в глубь жидкости.

Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз (например, внутри замерзающей воды) сводится к решению уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{для } 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{для } \xi < x < \infty \end{array} \right\} \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = c_1 \quad \text{при } x = 0, \\ u_2 = c \quad \text{при } t = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

и условиями на границе замерзания

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{при } x = \xi, \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}, \quad (4)$$

где k_1 , a_1^2 и k_2 , a_2^2 — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и, соответственно, жидкой фаз. Задачу (1) — (4) часто называют задачей Стефана, задачей о фазовом переходе или задачей о промерзании.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right),$$

где A_1 , B_1 , A_2 и B_2 — пока неопределенные постоянные, а Φ — интеграл ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Удовлетворяя условиям (2) и (3), получим:

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

из условия (2) и

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1 \sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2 \sqrt{t}}\right) = 0$$

из условия (3). Последние условия должны иметь место для любых значений t . Это возможно лишь при выполнении соотношения

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \quad (5)$$

где α — некоторая постоянная. Соотношение (5) определяет закон движения границы замерзания.

Для постоянных A_1 , B_1 , A_2 , B_2 и α получаются выражения

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Чтобы определить постоянную α , надо воспользоваться соотношением (4)

$$\frac{-\frac{a^2}{4a_1^2}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{-\frac{a^2}{4a_2^2}}{a_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7)$$

Решение этого трансцендентного уравнения и дает значение a . Наличие хотя бы одного решения при $c_1 < 0, c > 0$ следует уже из того, что при изменении α от 0 до ∞ левая часть уравнения изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ ¹⁾, а правая — от 0 до $-\infty$.

В случае, если c равно температуре плавления ($c=0$), то выражения (6) и (7) для определения коэффициентов принимают более простой вид:

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \quad (6')$$

и

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda \rho \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7')$$

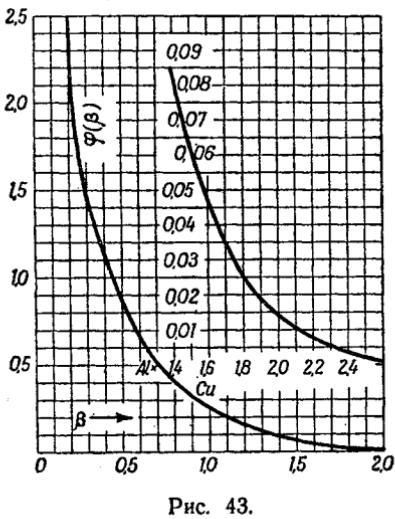


Рис. 43.

Положив $\alpha/2a_1 = \beta$, можем переписать уравнение (7') в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

где постоянная D определяется выражением

$$D = \frac{\lambda \rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Воспользовавшись графиком функции $\Phi(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}}$, данным на рис. 43, легко графически определить значение α .

Решение задачи о промерзании может быть также получено при помощи метода подобия, приведенного в приложении III к этой главе. Задача о промерзании является в некотором смысле предельным случаем нелинейных краевых задач, рассмотренных в приложении III. В самом деле, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости в задаче о промерзании являются кусочно-постоянными функциями, и, кроме того, при $u = 0$ теплоемкость имеет бесконечно большое значение. Этот случай можно получить как предельный при $\epsilon \rightarrow 0$, когда скрытая теплота выделяется не мгновенно, а на некотором промежутке

¹⁾ Асимптотическое представление функции $1 - \Phi(z)$ при $z \rightarrow \infty$ см. стр. 718.

$-\varepsilon, +\varepsilon$, причем должно выполняться условие

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u) du = \lambda.$$

Однако эту задачу можно решить и непосредственно, пользуясь методом подобия. Нетрудно проверить, что все условия задачи останутся неизменными, если масштаб длины увеличить в k раз, а масштаб времени — в k^2 раз. Это значит, что решение задачи зависит от аргумента $\frac{x}{\sqrt{t}}$, т. е. что

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что движение нулевой изотермы будет описываться уравнением $\xi = \alpha\sqrt{t}$, где α — значение аргумента, при котором $f(\alpha) = 0$. Для определения функции f мы имеем следующие условия:

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad \text{для } 0 < z < a,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad \text{для } a < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(a) = f_2(a) = 0;$$

$$k_1 f'_1(a) - k_2 f'_2(a) = \lambda_0 \frac{a}{2}.$$

Поэтому функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{z}{2a_1}\right), & \text{если } 0 < z < a, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{z}{2a_2}\right), & \text{если } a < z < \infty. \end{cases}$$

Для определения постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 мы должны использовать условия (2) и (3), из которых вытекают формулы (6). Для определения α получается условие (7). Таким образом, аналитическая часть решения в обоих методах одинакова.

Изложенные здесь соображения показывают, что задачу о промерзании можно решать также и в тех случаях, когда скрытая теплота выделяется не при фиксированной температуре, а на некотором интервале температур. Подобным же методом можно решить задачу, если имеется не одна, а несколько критических температур, что встречается при фазовых превращениях в процессе перехода от одной кристаллической структуры к другой, например при перекристаллизации стали. Наиболее эффективным методом численного решения задач о фазовых

переходах является метод конечных разностей, который применим для случая двух и трех пространственных переменных при наличии нескольких фазовых переходов (см. Дополнение I, § 4).

V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова

Микроскопические частицы, находящиеся в среде в свободном, взвешенном состоянии, совершают беспорядочное движение, называемое броуновским. Обозначим вероятность для частицы, вышедшей из точки M_0 в момент t_0 , находиться в момент t в малой окрестности ΔV точки M функцией

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \quad (1)$$

Вероятность здесь понимается в том смысле, что если в течение некоторого малого промежутка $t_0 + \Delta t$ из точки M_0 выходит достаточно большое количество частиц N (причем взаимодействие между ними пренебрежимо мало), то концентрация этих частиц при $\Delta t \rightarrow 0$ в точке M в момент t будет равна $W(M, t; M_0, t_0)$, если за единицу массы частиц принять всю массу выходящих из точки M_0 частиц.

С подобным же явлением мы встречаемся при диффузии газа, происходящей в какой-либо (например, воздушной) среде. Функция $W(M, t; M_0, t_0)$ представляет функцию точечного источника, соответствующего единичной массе.

Очевидно, что

$$\int W(M, t; M_0, t_0) dV_M = 1 \quad (t > t_0) \quad (2)$$

и что если начальная концентрация частиц в некоторый момент времени t_0 равна $\varphi(M)$, то концентрация $u(M, t)$ этих частиц в момент $t > t_0$ будет равна

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0) \varphi(P) dV_P, \quad (3)$$

где интеграл берется по всему пространству.

Из последнего равенства следует уравнение¹⁾

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta) W(P, \theta; M_0, t_0) dV_P \quad (4)$$

$$(t_0 < \theta < t),$$

имеющее место для любого значения $t_0 < \theta < t$. Это последнее уравнение называют уравнением Эйнштейна — Колмогорова.

¹⁾ М. А. Леонович, Статистическая физика, гл. VI, Гостехиздат, 1944; А. Н. Колмогоров, Аналитические методы теории вероятности, Успехи математических наук, вып. V, 1938.

Покажем, что при определенных условиях, наложенных на функцию $W(M, t; M_0, t_0)$, решение уравнения Эйнштейна — Колмогорова удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными параболического типа. Рассмотрим случай, когда положение точки M характеризуется одной координатой x . Предположим, что функция $W(x, t; x_0, t_0)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{x - \xi}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi) W(x, t + \tau; \xi, t) dx = A(\xi, t). \quad (5)$$

Если за время τ частица переходит из положения ξ в положение x , то $\frac{\overline{x - \xi}}{\tau}$ является средней скоростью частицы. Таким образом, первое условие означает требование существования конечной скорости упорядоченного движения частицы.

2°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(x - \xi)^2}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = 2B(\xi, t). \quad (6)$$

Величина $(x - \xi)^2$ не зависит от направления смещения точки x относительно точки ξ . Среднее значение квадрата отклонения за время τ

$$\overline{(x - \xi)^2} = \int (x - \xi)^2 W(x, t + \tau; \xi, t) dx$$

обычно рассматривается как мера неупорядоченности движения за этот промежуток времени. Требование 2° означает предположение линейной зависимости среднего квадрата от времени при малых τ .

3°

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{|x - \xi|^3}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int |x - \xi|^3 \cdot W(x, t + \tau; \xi, t) dx = 0. \quad (7)$$

Функция $W(x, t + \tau; \xi, t)$, являющаяся функцией точечного источника, для малых значений τ должна быстро убывать, когда $|x - \xi| \rightarrow \infty$, и возрастать, когда $|x - \xi|$ мало.

Для получения дифференциального уравнения Эйнштейна — Колмогорова умножим обе части уравнения (4) на произвольную функцию $\psi(x)$, обращающуюся в нуль вместе со своей производной на границах области интегрирования, и проинтегрируем по всей этой области:

$$\begin{aligned} \int W(x, t + \tau; x_0, t_0) \psi(x) dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi \int W(x, t + \tau; \xi, t) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Разложив в правой части функцию $\psi(x)$ в ряд Тейлора по $x - \xi$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x - \xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x - \xi)^3,$$

где ξ^* — среднее значение, заключенное между x и ξ , и разделив на τ , после простых преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \frac{W(x, t + \tau; x_0, t_0) - W(x, t; x_0, t_0)}{\tau} dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) \left[\psi'(\xi) \frac{x - \xi}{\tau} + \psi''(\xi) \frac{(x - \xi)^2}{2\tau} \right] d\xi + \\ + \frac{1}{3!\tau} \int \int \psi'''(\xi^*)(x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx. \end{aligned}$$

Предполагая, что $\psi'''(x)$ ограничена

$$|\psi'''(x)| < A$$

и учитывая, что

$$\int W(\xi, t; x_0, t_0) d\xi = 1,$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau} \int \int \psi'''(\xi^*)(x - \xi)^3 W(\xi, t; x_0, t_0) W(x, t + \tau; \xi, t) d\xi dx \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{A}{\tau} \int |x - \xi|^3 W(x, t + \tau; \xi, t) dx = \frac{A|x - \xi|^3}{\tau}. \end{aligned}$$

Из условия 3° вытекает, что это выражение при $\tau \rightarrow 0$ стремится к нулю. Поэтому, переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ и используя условия 1°, 2°, получаем:

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \frac{\partial W(x, t; x_0, t_0)}{\partial t} dx = \\ = \int W(\xi, t; x_0, t_0) [\psi'(\xi) A(\xi, t) + \psi''(\xi) B(\xi, t)] d\xi. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям правой части, принимая во внимание, что функция ψ обращается в нуль вместе со своей производной на границе области интегрирования, получим:

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (AW)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

Так как это соотношение должно иметь место для произвольной функции $\psi(x)$, то для функции вероятности $W(x, t; x_0, t_0)$ мы получаем дифференциальное уравнение Эйнштейна — Колмогорова

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial (AW)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Полученное уравнение является уравнением параболического типа, подобным уравнению теплопроводности, и может быть записано в виде

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x} (BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \quad (9)$$

где

$$\alpha = -A + B_x, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = a_x.$$

Из уравнения (9) видно, что величина B имеет физический смысл коэффициента диффузии. Если рассматриваемый процесс однороден в пространстве и времени, т. е. функция W зависит только от разности $\xi = x - x_0$ и $\theta = t - t_0$, то коэффициенты A и B не зависят от x и t и являются постоянными. Уравнение (8) в этом случае является уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Если функция W зависит только от $|x - \xi|$, т. е. вероятности смещения направо и налево на одинаковые расстояния от точки ξ равны, то очевидно, что A должно быть равно нулю. Аналитически это следует из формулы (5) в силу того, что подинтегральная функция нечетна.

В этом случае уравнение (8) является простейшим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (11)$$

VI. δ-ФУНКЦИЯ

1. Определение δ-функции. Наряду с непрерывно распределенными величинами (масса, заряд, тепловые источники, механический импульс и т. п.) часто приходится иметь дело с сосредоточенными величинами (точечная масса, точечный заряд, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и т. д.). Не следует забывать, что эти понятия являются «предельными образами» и могут быть характеризованы при помощи понятия «обобщенных функций»¹⁾.

Имея в виду физический смысл задачи, рассмотрим потенциал в точке M (см. главу IV, § 5) единичной массы, сосредоточенной внутри некоторого объема T в окрестности точки M_0 . Возьмем какую-либо последовательность функций $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$), каждая из которых равна нулю вне шара $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ радиуса ε_n с центром в точке M_0 , где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и для

¹⁾ См. подробнее Р. Курант, Уравнения с частными производными, Москва, 1964, а также И. М. Гельфанд и Е. Г. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.

которых, начиная с некоторого n ,

$$\int \int \int_T \rho_n(P) d\tau_P = \int \int \int_{S_{\varepsilon_n}^{M_0}} \rho_n(P) d\tau_P = 1. \quad (1)$$

Рассматривая последовательность функций

$$u_n = \int \int \int_T \frac{\rho_n}{r} d\tau,$$

являющихся потенциалами масс, распределенных с плотностями ρ_n , и совершая предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0 M}}. \quad (2)$$

Этот результат, очевидно, не зависит от выбора последовательности $\{\rho_n\}$. Хотя последовательность $\{u_n\}$ и сходится к $1/r$, однако последовательность $\{\rho_n\}$ не имеет предела в классе рассматриваемых кусочно-дифференцируемых функций. «Предельный образ», соответствующий последовательности $\{\rho_n\}$, называют функцией $\delta(M, M_0)$.

Основным свойством, определяющим δ -функцию, является следующее формальное операторное соотношение:

$$\int \int \int_T \delta(M_0, M) f(M) d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & \text{если } M_0 \in T, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin T, \end{cases} \quad (3)$$

где $f(M)$ — произвольная непрерывная функция точки M . Имея в виду, что при $n \rightarrow \infty$ функции ρ_n равномерно стремятся к нулю во всякой области, не содержащей точки M_0 , и неограниченно возрастают в окрестности $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ точки M_0 , иногда определяют δ -функцию формально при помощи соотношений

$$\left. \begin{array}{ll} \delta(M, M_0) = 0 & \text{при } M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) = \infty & \text{при } M = M_0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

и

$$\int \int \int_T \delta(M, M_0) d\tau_M = \begin{cases} 1 & \text{при } M_0 \in T, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin T. \end{cases} \quad (5)$$

Равенство (5) является очевидным следствием формулы (3) при $f = 1$.

При рассмотрении последовательностей функций в различных задачах приходится иметь дело с разными определениями сходимости.

Говорят, что последовательность функций

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (6)$$

сходится равномерно на интервале (a, b) , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что при $n, m > N$ для любого x из (a, b) будет выполняться условие

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \text{ при } n, m > N.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится в среднем на интервале (a, b) , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что при $n, m > N$

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится слабо на интервале (a, b) , если для любой непрерывной функции f существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

При рассмотрении сходящихся последовательностей обычно вводят предельные элементы последовательностей. Рассмотрим класс непрерывных функций на интервале (a, b) . В случае равномерной сходимости предельный элемент принадлежит тому же классу функций, что не всегда имеет место для сходимости в среднем и слабой сходимости.

Если предельный элемент не принадлежит рассматриваемому классу функций, то вводят предельные элементы, расширяя исходный класс. При этом под расширением понимается совокупность исходных и предельных элементов. С понятием расширения встречаются в теории действительного числа, когда иррациональные числа вводятся как предельные элементы, определяемые классом эквивалентных последовательностей.

Говоря о предельных элементах в смысле слабой сходимости, мы будем говорить, что две последовательности, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, имеют один и тот же предельный элемент, если эти последовательности эквивалентны, т. е. последовательность $\{u_n - v_n\}$ слабо сходится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

Будем называть последовательность неотрицательных функций $\{\delta_n\}$ нормированной локальной последовательностью точки x_0 ,

если функция δ_n равна нулю вне интервала $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$\int_a^b \delta_n(x) dx = 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{\delta_n\}$ сходится слабо. Предельный элемент последовательности $\{\delta_n\}$ обычно называют δ -функцией точки x_0 .

В том случае, если предельный в смысле слабой сходимости элемент u последовательности $\{u_n\}$ выходит из класса функций u_n , то интеграл от произведения некоторой функции $f(x)$ на элемент u определяется как предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx = \int_a^b f(x) u dx.$$

Очевидно, что для δ -функции точки x_0 имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) \delta(x_0, x) dx = f(x_0).$$

Это соотношение часто принимают за определение δ -функции.

2. Разложение δ -функции в ряд Фурье. δ -функцию можно определить так же, как предельный образ других последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости приведенной выше последовательности $\delta_n(x)$ локальных нормированных функций точки x_0 .

Рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n(x_0, x) &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \left(\cos \frac{m\pi}{l} x_0 \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x + \sin \frac{m\pi}{l} x_0 \sin \frac{m\pi}{l} x \right) = \\ &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^n \cos \frac{m\pi}{l} (x - x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

или в комплексной форме

$$\bar{\delta}_n(x, x_0) = \frac{1}{2l} \sum_{-n}^n e^{im \frac{\pi}{l} (x-x_0)}, \quad (7')$$

определенную на интервале $(-l, l)$.

Очевидно, что для любой функции $g(x)$, разлагаемой в ряд Фурье, имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l \bar{\delta}_n(x_0, x) g(x) dx = g(x_0), \quad (8)$$

которое показывает, что в классе функций $\{g(x)\}$, разлагаемых в ряды Фурье, приведенная выше последовательность $\delta_n(x_0, x)$ эквивалентна в смысле слабой сходимости последовательности $\bar{\delta}_n(x_0, x)$, т. е. что

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{l} (x_0 - x), \quad (9)$$

если это равенство понимать с изложенной выше точки зрения слабой сходимости.

С этой же точки зрения имеет место равенство

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_n(x_0), \quad (10)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортогональная и нормированная система функций, определенная на некотором интервале (a, b) , а также равенство

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0-x)} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x_0 - x) dk. \quad (11)$$

Покажем, что при вычислении интегралов, содержащих δ-функцию, можно пользоваться рядом (9), производя почленное интегрирование подынтегральной функции.

Рассмотрим некоторую функцию $g(x)$, разложимую в ряд Фурье, и интеграл

$$\int_{-l}^l g(x) \delta(x_0, x) dx.$$

Подставляя сюда вместо $\delta(x_0, x)$ ее выражение из формулы (9), выполним почленное интегрирование ряда, стоящего под знаком интеграла. В результате получим:

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{g}_m \cos \frac{\pi m}{l} x + \bar{\bar{g}}_m \sin \frac{\pi m}{l} x \right), \quad (11')$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \cos \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0, \\ \bar{\bar{g}}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x_0) \sin \frac{\pi m}{l} x_0 dx_0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Сопоставление формулы (11) с равенством

$$\int_{-l}^l \delta(x, x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (-l < x_0 < l)$$

показывает, что выполненное выше почленное интегрирование ряда для δ -функции приводит к правильному результату.

Таким образом, в классе функций, разложимых в ряд Фурье, последовательность частичных сумм

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^k e^{i \frac{\pi n}{l} (x-x')}$$

эквивалентна нормированной локальной последовательности $\{\delta_n\}$.

Другие формы представления δ -функции также основаны на использовании некоторых функциональных последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости последовательности $\{\delta_n\}$.

3. Применение δ -функции к построению функции источника. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (15)$$

Заданной функции $\varphi(x)$ соответствует единственное решение задачи

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)].$$

Допустим, что оператор \mathcal{L} можно представить в виде

$$u(x, t) = \mathcal{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где $G(x, \xi, t)$ — ядро оператора \mathcal{L} .

Для того чтобы найти ядро $G(x, \xi, t)$, положим:

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (14')$$

Заменяя в формуле (16) $\varphi(x)$ δ -функцией, получим:

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \quad (17)$$

т. е. $G(x, x_0, t)$ является решением задачи (13) при начальном условии (14').

Представим δ -функцию в виде ряда Фурье

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Ядро G , очевидно, надо искать в виде суммы

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (18)$$

каждое слагаемое которой должно удовлетворять уравнению теплопроводности. Отсюда следует, что

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Из начального условия сразу же получаем:

$$B_n = \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x_0.$$

Таким образом, мы формально получили для ядра G выражение

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x_0, \quad (19)$$

совпадающее с представлением для функции источника, которое было исследовано в § 3. Решение задачи (13) — (15) дается формулой (16), где $G(x, x_0, t)$ — функция, определяемая формулой (19).

Подобным же образом можно найти выражение для функции источника на неограниченной прямой. Функция G в этом случае будет определяться условиями

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (20)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \quad (21)$$

Имея в виду разложение δ-функции в интеграл Фурье

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda (x - x_0) d\lambda,$$

будем искать $G(x, x_0, t)$ в виде

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_{\lambda}(t) \cos \lambda (x - x_0) d\lambda. \quad (22)$$

Из уравнения (20) находим:

$$A_{\lambda}(t) = A_{\lambda}^{(0)} e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (23)$$

Полагая $t = 0$ и сравнивая формулы (23) и (21), получаем:

$$A_{\lambda}^{(0)} = 1.$$

Таким образом,

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda (x - x_0) d\lambda.$$

Вычисление этого интеграла дает:

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

Отсюда следует, что решение задачи о распространении начальной температуры на бесконечной прямой должно выражаться формулой

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (24)$$

Выяснение границы применимости формул, полученных методом δ -функции, требует специального исследования.

В качестве примера рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}, \quad (25)$$

где $F(x, t)$ — плотность распределенных тепловых источников. Если в точке $x = \xi$ в момент $t = t_0$ помещен мгновенный источник тепла мощности Q_0 , то

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi) \delta(t - t_0). \quad (26)$$

Найдем решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho} \delta(x - \xi) \delta(t - t_0) \quad (t_0 > 0) \quad (27)$$

при нулевом начальном условии

$$u(x, 0) = 0.$$

Учитывая интегральное представление

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda (x - \xi) d\lambda,$$

будем искать функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_\lambda(t) \cos \lambda (x - \xi) d\lambda.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (27), получаем уравнение для $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2 \lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \delta(t - t_0)$$

с начальным условием

$$u_\lambda(0) = 0.$$

Как известно, решение неоднородного уравнения

$$\dot{u} + a^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

имеет вид

$$u(t) = \int_0^t e^{-a^2(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

В нашем случае

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho} \int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \frac{Q_0}{c\rho} e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (29)$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{c\rho} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho} G(x, \xi, t - t_0),$$

где

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

— функция влияния мгновенного точечного источника.

Подобный метод построения функции влияния часто используется в теоретической физике¹⁾.

¹⁾ См. подробное изложение теории δ -функции и многочисленные примеры ее применения в книге Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова, Классическая теория поля, гл. I, Гостехиздат, 1951.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Функция u называется гармонической в области T , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач. Рассмотрим стационарное тепловое поле. В главе III было показано, что температура нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right).$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y, z)$, не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \tag{2}$$

где F — плотность тепловых источников, а k — коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют уравнением Пуассона.

Рассмотрим некоторый объем T , ограниченный поверхностью Σ . Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела T формулируется следующим образом:

найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (2)$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I. $u = f_1$ на Σ (первая краевая задача),

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (вторая краевая задача),

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача),

где f_1, f_2, f_3, h — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности Σ ¹).

Физический смысл этих граничных условий очевиден (см. гл. III, § 1). Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую задачу — задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0 , внутренней (или внешней) по отношению к поверхности Σ , то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля. В качестве второго примера рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников. Пусть внутри некоторого объема T с границей Σ имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое скоростью $v(x, y, z)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость v является потенциальным вектором, т. е.

$$v = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (3)$$

где φ — скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (4)$$

Подставляя сюда выражение (3) для v , получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

¹) Очевидно, что стационарное распределение температуры может установиться лишь при условии равенства нулю суммарного потока тепла через границу области. Отсюда следует, что функция f_2 должна удовлетворять дополнительному требованию:

$$\iint_{\Sigma} f_2 d\sigma = 0.$$

или

$$\Delta\varphi = 0, \quad (5)$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с объемной плотностью $j(x, y, z)$. Если в среде нет объемных источников тока, то

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (6)$$

Электрическое поле E определяется через плотность тока из дифференциального закона Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (7)$$

где λ — проводимость среды. Поскольку процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым или потенциальным¹⁾, т. е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$E = -\operatorname{grad} \varphi \quad (j = -\lambda \operatorname{grad} \varphi). \quad (8)$$

Отсюда на основании формул (6) и (7) заключаем, что

$$\Delta\varphi = 0, \quad (9)$$

т. е. потенциал электрического поля стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad (10)$$

т. е. поле является потенциальным и

$$E = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (8)$$

Пусть $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов, имеющихся в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной $\epsilon = 1$. Исходя из основного закона электродинамики

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T \rho d\tau, \quad (11)$$

где T — некоторый объем, S — поверхность, его ограничивающая, $\sum e_i$ — сумма всех зарядов внутри T , и пользуясь теоремой Остроградского

$$\iint_S E_n dS = \iiint_T \operatorname{div} E d\tau, \quad (12)$$

¹⁾ Из второго уравнения Максвелла $\frac{\mu}{c} \dot{H} = -\operatorname{rot} E$ следует, что $\operatorname{rot} E = 0$.

получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Подставляя сюда выражение (8) для \mathbf{E} , будем иметь:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (13)$$

т. е. электростатический потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет ($\rho = 0$), то потенциал φ должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основные краевые задачи для рассмотренных процессов относятся к трем типам, приведенным выше. Мы не будем здесь останавливаться на некоторых других краевых задачах, характерных для различных физических процессов. Некоторые из этих задач будут приведены в приложениях.

3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат. Пусть в пространстве вместо декартовых координат x, y, z введены криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 с помощью соотношений

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \quad (14)$$

разрешая которые относительно x, y, z , можно написать

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \quad (15)$$

Полагая $q_1 = C_1, q_2 = C_2, q_3 = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные, получим три семейства координатных поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2$$

и

$$f_3(x, y, z) = C_3. \quad (16)$$

Рассмотрим элемент объема в новых координатах, ограниченный тремя парами координатных поверхностей (рис. 44). Вдоль ребра

AB $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, вдоль AD $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, вдоль AC $q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$. Направляющие косинусы касательной к ребрам AB , AC и AD пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

Условие ортогональности ребер будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i} \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i} \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i} \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k). \quad (17)$$

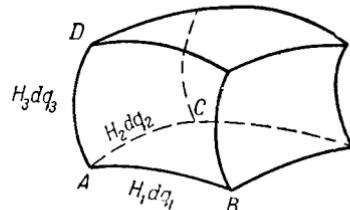


Рис. 44.

Вычислим элемент длины в новых координатах

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial q_3} dq_3 \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Раскрывая скобки и учитывая условия ортогональности (17), получаем:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial q_1} \right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial q_2} \right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial q_3} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Вдоль каждого из ребер элементарного объема меняется только одна координата, поэтому для длины этих ребер согласно формуле (19) будем иметь:

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3, \quad (21)$$

так что элемент объема равен

$$dv = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь некоторое векторное поле $\mathbf{A}(x, y, z)$. Вычислим $\operatorname{div} \mathbf{A}$, определяемую известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{v_M \rightarrow 0} \frac{\iint_S A_n dS}{v_M}, \quad (23)$$

где S — поверхность, ограничивающая некоторый объем v_M , содержащий рассматриваемую точку M . Применим эту формулу к элементу объема dv , изображенному на рис. 44.

Пользуясь теоремой о среднем, можно представить разность потоков вектора \mathbf{A} через противоположные грани, например через правую и левую грани, в виде

$$Q_1 = A_1 ds_2 ds_3 |_{q_1+dq_1} - A_1 ds_2 ds_3 |_{q_1}.$$

Принимая во внимание формулы (21), получим:

$$\begin{aligned} Q_1 &= [H_2 H_3 A_1 |_{q_1+dq_1} - H_2 H_3 A_1 |_{q_1}] dq_2 dq_3 = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично вычисляются две другие разности потоков через противоположные грани

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) dq_1 dq_2 dq_3, \quad (25)$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) dq_1 dq_2 dq_3. \quad (26)$$

Подставляя в формулу (23) значение $\iint_S A_n ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$

и пользуясь формулой (22), получаем выражение дивергенции в криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) \right]. \quad (27)$$

Предположим, что поле \mathbf{A} потенциальное, т. е.

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} u. \quad (28)$$

Тогда

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}. \quad (29)$$

Подставляя в (27) выражения (29) для A_1, A_2, A_3 , получим выражение для оператора Лапласа

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (30)$$

Таким образом, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2 и q_3 записывается следующим образом:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\} = 0. \quad (31)$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Сферические координаты. В этом случае $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, и формулы преобразования (15) принимают вид

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Вычислим ds^2 :

$$ds^2 = (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)^2 + \\ + (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)^2 + \\ + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2,$$

после раскрытия скобок и упрощений находим:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

т. е.

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

Подставляя значения H_1, H_2, H_3 в формулу (31), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

или окончательно

$$\Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (32)$$

2. Цилиндрические координаты. В этом случае $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$;

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

так что

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta_{\rho, \varphi, z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (33)$$

Если искомая функция u не зависит от z , то уравнение (33) упрощается:

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (34)$$

4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа. Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от одной переменной r или ρ .

Решение уравнения Лапласа $u = U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1 = 1, C_2 = 0$, получаем функцию

$$U_0 = \frac{1}{r}, \quad (35)$$

которую часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.

Аналогично, полагая

$$u = U(\rho)$$

и пользуясь уравнением (33) или (34), найдем решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Выбирая $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$, будем иметь:

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \quad (36)$$

Функцию $U_0(\rho)$ часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости (для двух независимых переменных).

Функция $U_0 = \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где она обращается в бесконечность. С точностью до множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда e , помещенного в начале координат; потенциал этого поля равен

$$u = \frac{e}{r}.$$

Аналогично, функция $\ln \frac{1}{\rho}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $\rho = 0$, где она обращается в (положительную) бесконечность, и с точностью до множителя совпадает с полем заряженной линии (см. подробнее § 5, п. 2), потенциал которого равен

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

где e_1 — плотность заряда, рассчитанная на единицу длины. Эти функции имеют большое значение в теории гармонических функций.

5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного. Весьма общим методом решения двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— некоторая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем u и v являются вещественными функциями переменных x и y . Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю многими способами. Для каждого из способов стремления

Δz к нулю, вообще говоря, может получиться свое значение предела. Однако если функция $w = f(z)$ аналитическая, то предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ не зависит от выбора пути.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются так называемые условия Коши — Римана

$$\left. \begin{array}{l} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Эти условия можно получить, например, следующим образом.

Пусть $w = u + iv = f(z)$ — аналитическая функция. Вычисляя производные

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz}$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i \frac{dw}{dz}$$

и требуя равенства значений $\frac{dw}{dz}$, определяемых из этих двух соотношений, получаем:

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

откуда и следуют условия Коши — Римана. На доказательстве достаточности этих условий мы не будем останавливаться.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что функция, аналитическая в некоторой области G плоскости $z = x + iy$, имеет в этой области производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. В частности, для такой функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные производные 2-го порядка по x и y .

Дифференцируя первое равенство формулы (37) по x , а второе по y , получим:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 u = 0.$$

Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 v = 0.$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что u и v , удовлетворяющие условию Коши — Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

Рассмотрим преобразование

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{array} \right\} \quad (38)$$

взаимно однозначно отображающее некоторую область G плоскости (x, y) , на область G' плоскости (u, v) , так что каждой точке области G соответствует определенная точка области G' и, обратно, каждой точке области G' соответствует определенная точка области G .

Пусть

$$U = U(x, y)$$

— некоторая вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная внутри области G .

Выясним, как изменяется при этом преобразовании оператор Лапласа функции $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \tilde{U}(u, v)$.

Вычислим производные функции

$$\begin{aligned} U_x &= \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, \quad U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y, \\ U_{xx} &= \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_{uu} u_{xx} + \tilde{U}_v v_{xx}, \\ U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_{uu} u_{yy} + \tilde{U}_v v_{yy}, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv} (v_x^2 + v_y^2) + \\ &+ 2\tilde{U}_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_u (u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v (v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned} \quad (39)$$

Если u и v являются сопряженными гармоническими функциями, то преобразование (38) эквивалентно преобразованию, осуществляющему аналитической функцией

$$w = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \quad (40)$$

В этом случае в силу условий Коши — Римана (37) для функций u и v должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0. \end{aligned}$$

Формула (39) принимает вид

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv}) |f'(z)|^2 \quad (41)$$

или

$$\Delta_{uv} \tilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_{x,y} U. \quad (41')$$

Отсюда следует, что в результате преобразования (40) гармоническая в области G функция $U(x, y)$ переходит в функцию $\tilde{U} = U(u, v)$, гармоническую в области G' , если только $|f'(z)|^2 \neq 0$.

6. Преобразование обратных радиусов-векторов. При изучении гармонических функций часто пользуются преобразованием обратных радиусов-векторов. Преобразованием обратных радиусов-векторов в сфере радиуса a называется такое преобразование, при котором всякой точке M ставится в соответствие точка M' , лежащая на том же луче из начала координат, что и точка M , радиус-вектор которой r' связан с радиусом-вектором r точки M соотношением

$$r'r = a^2 \quad \text{или} \quad r' = \frac{a^2}{r}. \quad (42)$$

В дальнейшем будем считать $a = 1$, чего можно всегда добиться изменением масштаба длины.

Покажем, что гармоническая функция двух независимых переменных $u(\rho, \varphi)$ преобразованием обратных радиусов-векторов переводится в гармоническую функцию

$$v(\rho', \varphi) = u(\rho, \varphi), \quad \text{где} \quad \rho = \frac{1}{\rho'}. \quad (43)$$

В самом деле, функция $u(\rho, \varphi)$, а тем самым и функция $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ как функции переменных ρ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Переходя к переменным ρ' и φ , получим:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'},$$

откуда и следует, что $v(\rho', \varphi)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_{\rho, \varphi} v = 0$, так как

$$\rho'^2 \Delta_{\rho', \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Переходя к случаю трех независимых переменных, покажем, что функция

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{где} \quad r = \frac{1}{r'} \quad (44)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0$, если $u(r, \theta, \varphi)$ — гармоническая функция своих переменных, $\Delta_{r, \theta, \varphi} u = 0$.

Преобразование (44) часто называют преобразованием Кельвина.

Легко убедиться непосредственным дифференцированием, что первое слагаемое в операторе Лапласа (32) преобразуется

к виду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \quad (45)$$

так что

$$r \Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial r} = -r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'},$$

находим, что v удовлетворяет уравнению $\Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0$, так как

$$r'^2 \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right) + r'^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

или

$$r'^4 \Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0.$$

§ 2. Общие свойства гармонических функций

В настоящем параграфе дается интегральное представление гармонических функций, являющееся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Одним из важнейших следствий интегральной формулы является принцип максимального значения, многократно используемый нами в дальнейшем как при доказательстве теоремы единственности, так и при решении краевых задач. Здесь также дается математическая постановка внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа и доказывается единственность и устойчивость решения этих задач.

1. Формулы Грина. Интегральное представление решения. При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид¹⁾

$$\iint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma} R \cos \gamma d\sigma, \quad (1)$$

где T — некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью Σ , $R(x, y, z)$ — произвольная функция, непрерывная внутри $T + \Sigma$ и имеющая непрерывные производные внутри

¹⁾ Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

T , γ — угол между направлением оси z и внешней нормалью к Σ . В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, выполняя интегрирование по z .

Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\int \int \int_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \int \int_{\Sigma} \{P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma\} d\sigma, \quad (2)$$

где $d\tau = dx dy dz$ — элемент объема, $\alpha = (\widehat{nx})$, $\beta = (\widehat{ny})$, $\gamma = (\widehat{nz})$ — углы внешней нормали n к поверхности Σ с координатными осями, P , Q , R — произвольные дифференцируемые функции¹⁾.

Если P , Q , R рассматривать как компоненты некоторого вектора $\mathbf{A} = Pi + Qj + Rk$, то формулу Остроградского (2) можно записать следующим образом:

$$\int \int \int_T \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \int \int_{\Sigma} A_n d\sigma, \quad (2')$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и

$$A_n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

— составляющая вектора \mathbf{A} вдоль внешней нормали.

Перейдем теперь к выводу формул Грина.

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $T + \Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T .

Полагая

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского (2'), приходим к так называемой первой формуле Грина

$$\int \int \int_T u \Delta v d\tau = \int \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \int \int \int_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\tau, \quad (3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ — производная по направлению внешней нормали.

¹⁾ В дальнейшем мы будем предполагать, что к тем областям, с которыми мы будем иметь дело, применима формула Остроградского. Такими поверхностями являются, например, поверхности с кусочно-непрерывной кривизной, а также поверхности Ляпунова (см. § 5).

где $W_1(M)$ — потенциал двойного слоя с плотностью $\mu_1 = \mu \cos \theta$, имеющий разрыв на поверхности Σ . Очевидно, что интеграл $I(M)$ является функцией, непрерывной в точке P_0 , так как $I(M)$ сходится равномерно в этой точке (см. примечание, стр. 358).

Возвращаясь к формуле (45), видим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_B &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_H &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 &= -W_1(P_0) - I(P_0) = \\ &= \left[- \iint_{\Sigma} (\mu \cos \theta) \frac{\cos \varphi}{R^2} d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu \sin \theta \cos \Omega \frac{\sin \varphi}{R^2} d\sigma \right]_{M=P_0} = \\ &= \iint_{\Sigma} \mu \frac{\cos \psi_0}{R_{P_0 P}^2} d\sigma, \end{aligned}$$

где ψ_0 — угол между осью z и вектором $\vec{P_0 P}$.

Замечая, что $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$, находим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_B} \right)_B &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_B} \right)_0 - 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_H} \right)_H &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_H} \right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

так как по условию ось z направлена по внутренней нормали. Если ось z направить по внешней нормали, то знак $\cos \varphi$ изменяется, и мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_H} \right)_B &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_H} \right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_B} \right)_H &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_B} \right)_0 - 2\pi\mu(P_0). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Для случая двух переменных имеют место аналогичные формулы с заменой 2π на π .

10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач. Метод разделения переменных и метод функции источника позволяют получить явное выражение для решения краевых задач только в случае областей простейшего вида. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа (или Пуассона)

ограничена в области $T - K_\varepsilon$ с границей $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$, где K_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_ε (рис. 45).

Применяя вторую формулу Грина (5) к функциям u и $v = 1/R$ в области $T - K_\varepsilon$, получаем:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{T-K_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau = \\ & = \int \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \int \int_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma - \int \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (6) \end{aligned}$$

В правой части этого равенства только последние два интеграла зависят от ε . Вычисляя производную по внешней нормали к области $T - K_\varepsilon$ на Σ_ε , найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

откуда

$$\int \int_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \int \int_{\Sigma_\varepsilon} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (7)$$

где u^* — среднее значение функции $u(M)$ на поверхности Σ_ε . Преобразуем третий интеграл

$$\int \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \int \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (8)$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$ — среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере Σ_ε . Подставляя выражения (7) и (8) в формулу (6) и учитывая, что $\Delta(1/R) = 0$ в $T - K_\varepsilon$, будем иметь:

$$\int \int \int_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \right) \Delta u d\tau = \int \int_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*. \quad (9)$$

Устремим теперь радиус ε к нулю. Тогда получим:

1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$, так как $u(M)$ — непрерывная функция, а u^* — ее среднее значение по сфере радиуса ε с центром в точке M_0 ;

2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0$, так как из непрерывности первых производных функций $u(M)$ внутри T сразу же вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

в окрестности точки M_0 ;

3) по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \int_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau = \int \int \int_T \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau.$$

В результате указанного предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к основной интегральной формуле Грина:

$$4\pi u(M_0) = - \int \int_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma_P - \int \int \int_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau, \quad (10)$$

где $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ — точка с координатами ξ, η, ζ , лежащая на поверхности Σ .

Если точка M_0 находится вне области T , то $v = 1/R_{MP}$ непрерывна и гармонична во всех точках области T . Поэтому слева в формуле (10) получим нуль.

Рассмотрим случай, когда M_0 принадлежит поверхности Σ . Предположим, что Σ имеет в M_0 касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами. Сфера Σ_ε радиуса ε центром в M_0 пересекает поверхность Σ и делит ее на две части Σ_1 и Σ_2 , часть Σ_1 лежит внутри шара K_ε . Формулу Грина (5) применим к u и $v = 1/R$ в области $T - T_1$, где T_1 — область, ограниченная Σ_1 и частью сферы Σ'_ε , лежащей внутри T . Общая схема рассуждений, приведших к (9), остается неизменной. При этом следует лишь учесть, что интеграл по $\Sigma_1 + \Sigma'_\varepsilon$ стремится к $2\pi u(M_0)$, и внести соответствующие изменения в (7), (8) и (8'). В результате мы приходим к формуле, получающейся из (10) при замене 4π на 2π .

Объединяя все случаи, запишем основную формулу Грина в виде

$$\Omega \cdot u(M_0) = \int \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P - \int \int \int_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0 P}} d\tau_P, \quad (10')$$

где Ω принимает значения:

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит внутри } T, \\ 2\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит на границе } \Sigma, \\ 0 & \text{если точка } M_0 \text{ лежит вне } T. \end{cases}$$

Отметим, что если точка M_0 является конической вершиной поверхности Σ , то $\Omega = \alpha$, где α — величина телесного угла, образуемого касательными к Σ в точке M_0 .

Для гармонической функции $\Delta u = 0$ и формула (10) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_P \quad (11)$$

(M_0 — внутри T).

Таким образом, значение гармонической функции в любой внутренней точке области выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на поверхности области. При этом предполагается непрерывность функции u и ее первых производных вплоть до границы. Отметим сразу же, что каждый из интегралов

$$\iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) v(P) d\sigma_P, \quad (12)$$

где μ и v — непрерывные функции, является гармонической функцией вне поверхности Σ . В самом деле, так как подинтегральные функции и все их производные непрерывны вне поверхности Σ , то производные функций (12) любого порядка можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Так как, кроме того, функции

$$\frac{1}{R_{MP}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_P + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_P$$

удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным $M(x, y, z)$, то в силу обобщенного принципа суперпозиции (см. лемму на стр. 221), функции (12) также удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным x, y, z .

Отсюда вытекает важное следствие: всякая гармоническая функция внутри области гармоничности дифференцируема бесконечное множество раз¹⁾. Отметим также, что гармоническая функция аналитична (разлагается в степенной ряд) во всякой точке M_0 области T . В этом можно убедиться с помощью рассуждений, основанных на том же интегральном представлении (11).

Аналогичные формулы имеют место и для гармонических функций двух независимых переменных. Пусть S — некоторая область на плоскости (x, y) , ограниченная контуром C , а n —

¹⁾ Если для функции u , гармонической внутри T , не выполнено условие непрерывности ее вместе с первой производной на поверхности Σ , то теорема все же сохраняет силу, в чем можно убедиться, окружая точку M областью, лежащей вместе со своей границей внутри T .

направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области S .

Полагая во второй формуле Грина $v = \ln(1/R_{M_0P})$, где $R_{M_0P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние $P(x, y)$ от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0)$, и проводя рассуждения, подобные тем, которые были проведены для трехмерного случая, получим основную формулу Грина на плоскости

$$\Omega u(M_0) = \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P - \int_S \Delta u(P) \ln \frac{1}{R_{M_0P}} ds_P,$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит внутри } S, \\ \pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит на границе } C, \\ 0, & \text{если } M_0 \text{ лежит вне } S. \end{cases}$$

Если $u(M)$ — гармоническая внутри S функция и M_0 лежит внутри S , то

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P.$$

2. Некоторые основные свойства гармонических функций. Установим несколько важнейших свойств гармонических функций:

1. Если v — функция, гармоническая в области T , ограниченной поверхностью Σ , то

$$\int_S \int \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (13)$$

где S — любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T .

В самом деле, подставляя в первую формулу Грина (3') какую-либо гармоническую функцию $v(\Delta v = 0)$ и функцию $u \equiv 1$, сразу же получим формулу (13). Из формулы (13) следует, что вторая краевая задача ($\Delta u = 0$ в T , $\frac{\partial u}{\partial n} = f|_{\Sigma}$) может иметь решение только при условии

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = 0.$$

Это свойство гармонических функций можно интерпретировать как условие отсутствия источников внутри области T .

2. Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T , а M_0 — какая-нибудь точка, лежащая внутри области T , то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u d\sigma, \quad (14)$$

где Σ_a — сфера радиуса a с центром в точке M_0 , целиком лежащая в области T (теорема среднего значения).

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере Σ_a с центром в M_0 , если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции $u(M)$.

Применим формулу (11) к шару K_a с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_a :

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \text{ на } \Sigma_a \text{ и } \iint_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(направление внешней нормали к Σ_a совпадает с направлением радиуса), сразу же получаем (14)¹⁾.

Записывая (14) в виде

$$4\pi r^2 u(M_0) = \iint_{\Sigma_0} u(P) d\sigma_P$$

и интегрируя по r от 0 до a , получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \iiint_{K_a} u d\tau_P, \quad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

т. е. $u(M_0)$ есть среднее по объему шара K_a с границей Σ_a .

¹⁾ При доказательстве этой теоремы мы пользовались равенством (13), предполагающим существование производных на поверхности сферы. Если функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ только для внутренних точек T , то предшествующее заключение для сферы Σ_{a_0} , касающейся Σ , было бы необоснованным. Однако теорема верна для любого $a < a_0$, и, переходя к пределу при $a \rightarrow a_0$, получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \iint_{\Sigma_{a_0}} u(M) d\sigma.$$

Для случая двух независимых переменных имеет место аналогичная теорема о среднем значении:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u ds, \quad (15)$$

где C_a — окружность радиуса a с центром в точке M_0 , лежащая в области гармоничности u .

3. Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T , то максимальные и минимальные значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ (принцип максимального значения).

Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области T , так что $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$, где M — любая точка области T . Окружим точку M_0 сферой Σ_ρ радиуса ρ , целиком лежащей внутри области T . Поскольку, по предположению, $u(M_0)$ есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $T + \Sigma$, то $u|_{\Sigma} \leq u(M_0)$. Пользуясь формулой среднего значения (14) и заменяя под интегралом всюду $u(M)$ значением $u(M_0)$, получим:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma_M \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0). \quad (16)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы Σ_ρ $u(M) < u(M_0)$, то очевидно, что вместо знака \leq будем иметь знак $<$, что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности Σ_ρ $u(M) \equiv u(M_0)$.

Если ρ_0^m — минимальное расстояние от M_0 до поверхности Σ , то $u(M) \equiv u(M_0)$ для всех точек, лежащих внутри $\Sigma_{\rho_0^m}$. Отсюда следует, что в точках M^* , принадлежащих общей части $\Sigma_{\rho_0^m}$ и Σ , по непрерывности $u(M^*) = u(M_0)$. Это и доказывает теорему, поскольку мы убедились, что максимальное значение $u(M_0)$ достигается в точках границы M^* .

Нетрудно убедиться, что если область T связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_0 , то $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области. Пусть $M^{(0)}$ — какая-либо другая точка области T . Соединим точку $M^{(0)}$ с точкой M_0 ломаной линией L (рис. 46), длину которой обозначим l . Пусть M_1 есть последняя точка выхода линии L из $\Sigma_{\rho_0^m}$. В этой точке $u(M_1) = u(M_0)$. Опишем из этой точки сферу $\Sigma_{\rho_1^m}$ радиуса ρ_1^m , касающуюся Σ , и пусть M_2 — последняя точка выхода L из

$\Sigma_{\rho^{(m)}}$; в этой точке $u(M_2) = u(M_0)$. Продолжая этот процесс далее, получим, что не более чем через $p = l/\rho^{(m)}$ шагов, где $\rho^{(m)}$ — минимальное расстояние L до Σ , одна из этих сфер захватит точку $M^{(0)}$, откуда следует, что $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. В силу произвольности $M^{(0)}$ и непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $T + \Sigma$, заключаем, что $u(M) = u(M_0)$ всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области.

Аналогичную теорему можно доказать и относительно минимального значения.

Следствие 1. Если функции u и U непрерывны в области $T + \Sigma$, гармоничны в T и если

$$u \leq U \text{ на } \Sigma,$$

то и

$$u \leq U \text{ всюду внутри } T.$$

В самом деле, функция $U - u$ непрерывна в $T + \Sigma$, гармонична в T и

$$U - u \geq 0 \text{ на } \Sigma.$$

В силу принципа максимального значения

$$U - u \geq 0 \text{ всюду внутри } T,$$

откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. Если функции u и U непрерывны в области $T + \Sigma$, гармоничны в T и если

$$|u| \leq U \text{ на } \Sigma,$$

то

$$|u| \leq U \text{ всюду внутри } T.$$

Из условий теоремы следует, что три гармонические функции — U , u и U удовлетворяют условиям

$$-U \leq u \leq U \text{ на } \Sigma.$$

Применяя дважды следствие 1, получим, что

$$-U \leq u \leq U \text{ всюду внутри } T$$

или

$$|u| \leq U \text{ внутри } T.$$

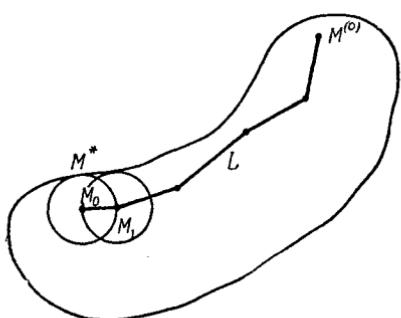


Рис. 46.

Следствие 3. Для гармонической в T и непрерывной в $T + \Sigma$ функции $u(M)$ выполняется неравенство $|u| \leq \max |u|_{|\Sigma|}$ всюду в $T + \Sigma$. Для доказательства положим $U = \max |u|_{|\Sigma|}$ и воспользуемся следствием 2.

Хотя изложение проводилось для трех измерений, однако все результаты переносятся на случай гармонических функций любого числа переменных.

3. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Пусть дана область T , ограниченная замкнутой поверхностью Σ , на которой задана некоторая функция f . В простейшем случае, когда граничная функция f непрерывна, первая внутренняя краевая задача (внутренняя задача Дирихле) для уравнения Лапласа обычно ставится следующим образом.

Требуется найти функцию u , которая:

- определенна и непрерывна в замкнутой области $T + \Sigma$, включая границу;*
- удовлетворяет внутри области T уравнению $\Delta u = 0$;*
- принимает на границе Σ заданные значения f .*

В условии а) предполагается гармоничность функции внутри области T . Требование гармоничности на границе является излишним, так как оно повлекло бы за собой дополнительные ограничения для граничных значений.

Условие непрерывности u в замкнутой области (или какое-либо другое условие, разъясняющее смысл того, что функция u принимает на границе заданные значения) необходимо для единственности. Если отказаться от этого условия, то любую функцию, равную постоянной C внутри T и заданной функции f на Σ , можно рассматривать как решение задачи, поскольку она удовлетворяет условиям б), в).

Докажем теорему единственности:

первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.

Допустим, что существуют две различные функции, u_1 и u_2 , являющиеся решениями задачи, т. е. функции, непрерывные в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяющие внутри области уравнению Лапласа и на поверхности Σ принимающие одно и то же значение f . Разность этих функций $u = u_1 - u_2$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\Delta u = 0$ внутри области T ;
- 2) u непрерывна в замкнутой области $T + \Sigma$;
- 3) $u|_{|\Sigma|} = 0$.

Функция $u(M)$, таким образом, непрерывна и гармонична в области T и равна нулю на границе. Как известно, всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает своего максимального значения. Убедимся в том, что $u \equiv 0$. Если функция $u \not\equiv 0$ и хотя бы в одной точке $u > 0$, то она должна

достигать положительного максимального значения внутри области, что невозможно. Совершенно так же доказывается, что функция u не может принимать нигде внутри T отрицательных значений. Отсюда следует, что

$$u \equiv 0.$$

Перейдем к доказательству *непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от граничных данных*. Напомним, что задача называется физически определенной, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, в данном случае граничных условий, соответствует малое изменение самого решения.

Пусть u_1 и u_2 — непрерывные в $T + \Sigma$ и гармонические внутри T функции, для которых $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ на Σ . Тогда это же неравенство выполняется внутри T .

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 2, стр. 296, в силу того, что $U \equiv \varepsilon$ является гармонической функцией.

Таким образом, мы доказали непрерывную зависимость решения от граничных условий и единственность первой внутренней задачи.

4. Задачи с разрывными граничными условиями. Часто встречается также первая краевая задача с разрывными граничными условиями. Функция, непрерывная в замкнутой области, не может быть решением этой задачи. Поэтому требуется уточнить постановку первой краевой задачи применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть на кривой C , ограничивающей область S , на плоскости (x, y) задана кусочно-непрерывная функция $f(P)$. Требуется найти функцию $u(M)$: 1) гармоническую внутри области S ; 2) непрерывно примыкающую к граничным значениям в точках непрерывности последних; 3) ограниченную в замкнутой области $S + C$.

Заметим, что дополнительное требование ограниченности фактически относится к окрестностям точек разрыва функции $f(P)$.

Докажем следующую теорему:

решение первой краевой задачи с кусочно-непрерывными граничными значениями единственно.

Пусть u_1 и u_2 — два решения поставленной задачи. Разность

$$v = u_1 - u_2$$

1) является гармонической функцией внутри S ;

2) непрерывно примыкает к нулевым граничным значениям на границе, за исключением точек разрыва $f(P)$, в которых она может претерпевать разрыв;

3) ограничена в $S + C$: $|v| < A$.

Построим гармоническую функцию

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^n \ln \frac{D}{r_i},$$

где ε — произвольное положительное число, D — диаметр области, r_i — расстояние от рассматриваемой точки M до i -й точки разрыва P_i . Функция $U(M)$ положительна, так как все слагаемые больше нуля.

Построим в каждой точке разрыва P_i круг K_i радиуса δ , выбрав δ так, чтобы каждое слагаемое

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

на соответствующей окружности C_i превосходило A , т. е. чтобы $\varepsilon \ln \frac{D}{\delta} \geqslant A$. Функция v непрерывна в замкнутой области $S - \sum_{i=1}^n K_i = S'$ и $|v| \leqslant U$ на границе этой области.

Поэтому в силу принципа максимума U является мажорантой функции v :

$$|v(M)| \leqslant U(M).$$

Фиксируем произвольную точку M из области S и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0;$$

следовательно,

$$v(M) = 0,$$

так как v не зависит от ε , или

$$u_1 \equiv u_2,$$

что и требовалось доказать.

5. Изолированные особые точки. Рассмотрим особые точки гармонической функции. Пусть P — изолированная особая точка, лежащая внутри области гармоничности функции u . Представляются возможными два случая:

1) гармоническая функция ограничена в окрестности точки P ;

2) гармоническая функция не ограничена в окрестности точки P . С особыми точками второго рода мы уже встречались (например, $\ln(1/r)$). Следующая теорема показывает, что первый тип особых точек не может быть осуществлен.

Если ограниченная функция $u(M)$ является гармонической внутри области S , за исключением точки P , то можно так

определить значение $u(P)$, чтобы функция $u(M)$ была гармонической всюду внутри S .

Возьмем круг K_α радиуса α с центром в точке P , целиком лежащий внутри S , и рассмотрим внутри него гармоническую функцию v , совпадающую с функцией u на окружности C_α круга K_α ¹⁾.

Составим разность

$$w = u - v,$$

которая

- 1) гармонична всюду внутри K_α , кроме точки P , в которой w не определена,
- 2) непрерывно примыкает к нулевым граничным условиям на C_α ,
- 3) ограничена в замкнутой области $K_\alpha + C_\alpha (|w| < A)$.

Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы (п. 4), построим неотрицательную гармоническую функцию

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{a}{r}.$$

Здесь ε — произвольное положительное число, a — радиус круга K_α , r — расстояние от рассматриваемой точки M до точки разрыва P .

Построим круг K_δ с центром в точке P , выбрав его радиус δ так, чтобы на его окружности значение U превосходило A , и рассмотрим область $K_\alpha - K_\delta$. Функция w непрерывна в замкнутой области $\delta \leq r \leq \alpha$ и на границе этой области имеет место неравенство $|w| \leq U$. В силу принципа максимального значения неотрицательная функция U является мажорантой функции w

$$|w| \leq U(M) \quad \text{для } \delta \leq r \leq \alpha.$$

Фиксируя произвольную точку M области K_α , не совпадающую с P , и совершая предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0,$$

следовательно, всюду, за исключением, быть может, точки P :

$$w = 0.$$

Таким образом, функция u всюду в области S , за исключением точки P , совпадает с функцией v . Полагая $u(P) = v(P)$, мы получим функцию $u \equiv v$, гармоническую всюду внутри области S . Тем самым теорема доказана.

¹⁾ Существование такой функции будет установлено в § 3, причем построение ее не базируется на доказываемой теореме.