

Если область G такова, что каждая прямая, параллельная оси x , пересекает ее границу не более чем в двух точках, то имеет место обратная теорема:

для каждой заданной в области G бигармонической функции и найдутся такие гармонические функции u_1 и u_2 , что

$$u = xu_1 + u_2.$$

Для доказательства этого утверждения, очевидно, достаточно установить возможность выбора функции u_1 , удовлетворяющей двум условиям:

$$\Delta u_1 = 0, \quad (12)$$

$$\Delta(u - xu_1) = 0. \quad (13)$$

Из условия (13) и формулы (11) следует:

$$\Delta u = \Delta(xu_1) = 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Уравнению (14) удовлетворяет функция

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{1}{2} \Delta u(\xi, y) d\xi.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{u}_1 = \Delta \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_1 = \frac{1}{2} \Delta \Delta u = 0,$$

то $\Delta \bar{u}_1$ зависит только от y :

$$\Delta \bar{u}_1 = v(y).$$

Определим функцию $\bar{u}_1(y)$ так, чтобы

$$\Delta \bar{u}_1 = \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

и положим $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_1$. Эта функция, очевидно, будет удовлетворять обоим условиям (12) и (13).

Рассмотрим другой вид представления бигармонических функций. Допустим, что начало координат выбрано внутри области G и что любой луч, выходящий из начала, пересекает границу области G , в одной точке. Тогда любая бигармоническая в G функция u может быть представлена с помощью двух гармонических функций u_1 и u_2 в виде

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2. \quad (15)$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$, а r_0 — заданная постоянная.

Это доказывается аналогично предыдущему с помощью тождества (10) и соотношений

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

3. Решение бигармонического уравнения для круга. Рассмотрим круг радиуса r_0 с центром в начале координат и будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $r = r_0$ граничным условиям (6). Как было указано выше, исковую функцию можно представить в виде суммы:

$$u = (r^2 - r_0^2) u_1 + u_2, \quad (15)$$

где u_1 и u_2 — гармонические функции. Из граничных условий находим:

$$u_2 \Big|_{r=r_0} = g. \quad (16)$$

Отсюда видно, что u_2 есть решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлено с помощью интеграла Пуассона

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) g \, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \quad (17)$$

Из второго граничного условия получаем:

$$2r_0 u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = h. \quad (18)$$

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что функция

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена интегралом Пуассона

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) h \, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \quad (20)$$

Продифференцировав (17) по r и подставляя значение $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ в формулу (20), найдем u_1 . Заменяя в формуле (15) u_1 и u_2 их выражениями, получим:

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-h \, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)} + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \frac{g [r_0 - r \cos(\alpha - \theta)] \, d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)]^2} \right]. \end{aligned}$$

ГЛАВА V

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе рассматривается задача с начальными данными (задача Коши) для уравнения колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f, \quad u = u(M, t) \quad (1)$$

в неограниченном пространстве ($M = M(x, y, z)$) и на плоскости ($M = M(x, y)$).

§ 1. Задача с начальными условиями

1. Уравнение колебаний в пространстве. Простейшим уравнением гиперболического типа является уравнение колебаний (1), которое в физике часто называют уравнением Даламбера.

В гл. II было показано, что уравнение (1) описывает процесс распространения звука в газе, процесс колебаний мембранны; в этом случае (1) имеет вид

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(x, y, t).$$

К уравнению (1) приводят также задачи о распространении электромагнитных полей в непроводящей среде и задачи теории упругости (см. Приложение I к гл. V).

Для уравнения (1) рассматриваются задача с начальными данными (задача Коши) в бесконечном пространстве и краевые задачи в ограниченной области.

В этой главе мы будем рассматривать задачу Коши в неограниченном пространстве:

найти решение уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(M, t), \quad M = M(x, y, z) \quad (1)$$

при

$$t > 0, \quad -\infty < x, y, z < \infty,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \quad \text{при } t = 0, \quad (2)$$

где f, φ, ψ — заданные функции.

Решением уравнения (1) в некоторой области при $t > 0$ будем называть функцию $u(M, t)$, непрерывную вместе со своими производными, входящими в уравнение (1) во всех точках рассматриваемой области и для всех $t > 0$.

Рассмотрим частные решения однородного уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt}, \quad (3)$$

обладающие центральной симметрией относительно некоторой точки M_0 , т. е. решения вида

$$u(M, t) = u(r, t),$$

где $r = r_{MM_0}$ — расстояние между точками M и M_0 . В этом случае уравнение колебаний (3) сводится к одномерному уравнению для функции $v = ru$

$$v_{rr} = \frac{1}{a^2} v_{tt}. \quad (4)$$

В самом деле, если $u = u(r, t)$, то оператор Лапласа в сферической системе координат с центром в точке M_0 (см. гл. IV, § 1, п. 3) может быть преобразован к виду

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru),$$

в чем можно убедиться дифференцированием. Поэтому уравнение (3) принимает вид $\frac{1}{r} (ru)_{rr} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$. Вводя затем функцию $v = ru$, получаем для нее уравнение (4). Если функция $u(r, t)$ ограничена при $r = 0$, то функция $v = ru$ обращается в нуль при $r = 0$, $v(0, t) = 0$. Поэтому задача Коши для уравнения (3) с начальными данными

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r) \quad (5)$$

сводится к задаче о колебаниях полуограниченной струны ($0 \leqslant r < \infty$) с закрепленным концом $r = 0$:

$$v_{rr} = \frac{1}{a^2} v_{tt}, \quad v(r, 0) = r\varphi(r), \quad v_t(r, 0) = r\psi(r), \quad v(0, t) = 0, \quad (6)$$

рассмотренной в гл. II.

Общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$v(r, t) = f_1 \left(t - \frac{r}{a} \right) + f_2 \left(t + \frac{r}{a} \right)$$

и, следовательно,

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f_1 \left(t - \frac{r}{a} \right) + \frac{1}{r} f_2 \left(t + \frac{r}{a} \right),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Частные решения уравнения (3)

$$u_1 = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

называются сферическими волнами; $u_1(r, t)$ есть расходящаяся сферическая волна, $u_2(r, t)$ — сходящаяся в точку $r = 0$ сферическая волна, a — скорость распространения волн. В отличие от плоских волн $f\left(t \pm \frac{x}{a}\right)$ сферическая волна убывает обратно пропорционально расстоянию от центра.

Таким образом, общее решение уравнения (3) в случае центральной симметрии представляется в виде суммы двух сферических волн.

Учитывая условие $v(0, t)$, находим $0 = f_1(t) + f_2(t)$ или $f_2(t) = -f_1(t) = f(t)$ для всех значений t , т. е.

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right) \quad (7)$$

и, в частности,

$$u(0, t) = \frac{2}{a} f'(t). \quad (7')$$

2. Метод усреднения. Рассмотрим в неограниченном пространстве задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0; \\ u(M, 0) &= \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M), \quad M = M(x, y, z). \end{aligned} \quad (8)$$

Предположим, что решение этой задачи существует и найдем для него интегральное представление. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксированная точка. Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в точке M_0 .

Рассмотрим функцию

$$\bar{u}(r, t) = M_r [u] = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u \, dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_r} u \, d\Omega \quad (dS = r^2 d\Omega), \quad (9)$$

являющуюся средним значением u на сфере S_r радиуса r с центром в точке M_0 , $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Из (9) видно, что

$$u(M_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0). \quad (10)$$

Покажем, что функция $r\bar{u}(r, t) = v$, обладающая сферической симметрией относительно точки M_0 , удовлетворяет уравнению (4). Проинтегрируем уравнение (8) по объему шара K_r ,

ограниченного сферой S_r :

$$\int \int \int_{K_r} \Delta u \, d\tau = \frac{1}{a^2} \int \int \int_{K_r} u_{tt} \, d\tau.$$

Для преобразования левой части полученного равенства используем первую формулу Грина (глава IV) при $v = 1$, $u = \bar{u}(r, t)$ и учтем, что нормаль к S_r направлена по радиусу ($\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$)

$$\int \int \int_{K_r} \Delta u \, d\tau = \int \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \, d\Omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\int \int_{S_r} u \, d\Omega \right] = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{a^2} \int \int \int_{K_r} u_{tt} \, d\tau = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 \, d\rho \left[\int \int_{S_r} u \, d\Omega \right] = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^r \bar{u}_{tt}(\rho, t) \rho^2 \, d\rho. \quad (12)$$

Дифференцируя (11) и (12) по r и полагая $v = r\bar{u}$, получим (4). Из формулы (7') следует, что

$$u(M_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0) = \frac{2}{a} f'(t_0). \quad (13)$$

Выразим f через ϕ и ψ . После дифференцирования $\bar{u} = \frac{1}{r} [f(t + \frac{r}{a}) - f(t - \frac{r}{a})]$ по r и t найдем $(r\bar{u})_r + \frac{1}{a}(r\bar{u})_t = \frac{2}{a} f'(t + \frac{r}{a}) = \frac{2}{a} f'(t_0)$ при $t = 0$ и $r = at_0$. Отсюда и из (13) и (9) следует

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \int \int_{S_r} ru \, d\Omega + \frac{1}{a} \int \int_{S_r} r \frac{\partial u}{\partial t} \, d\Omega \right]_{r=at_0, t=0}. \quad (14)$$

3. Формула Пуассона. Пользуясь начальными условиями (8) и опуская индекс 0 при M_0, t_0 , получаем из (14) формулу Пуассона

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} t \int \int_{S_{at}} \varphi(P) \, d\Omega_P + t \int \int_{S_{at}} \psi(P) \, d\Omega_P \right], \quad (15)$$

$$(dS_P = (at)^2 \, d\Omega_P),$$

которую, учитывая (9), можно записать в виде

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} t M_{at}[\varphi] + t M_{at}[\psi], \quad (16)$$

где

$$M_{at}[\varphi] = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{at}^M} \varphi d\Omega = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} \varphi dS. \quad (17)$$

Здесь $S_{at} = S_{at}^M$ — сфера радиуса at с центром в точке M .

Пусть u_ψ — решение задачи (8) при $\varphi = 0$,

$$u_\psi(M, t) = t M_{at}[\psi]. \quad (18)$$

Из (16) видно, что решение задачи (8) можно записать в виде

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_\varphi + u_\psi, \quad (19)$$

где

$$u_\varphi = t M_{at}[\varphi]^1. \quad (18')$$

Из формулы Пуассона, полученной в предположении существования решения задачи (8), следует единственность указанного решения. В самом деле, предполагая, что задача Коши имеет два решения u_1 и u_2 , получим для их разности начальные условия $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Применяя к функции $u_1 - u_2$ предыдущие рассуждения, приходим к формуле (15), в которой $\varphi = 0$, $\psi = 0$ и, следовательно, $u = 0$ или $u_1 = u_2$.

Покажем, что функция $u(M, t)$, определяемая формулой Пуассона, в самом деле дает решение задачи Коши (8), если $\varphi(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\psi(x, y, z)$ — до второго порядка включительно. Доказательство проведем, предполагая сначала, что $\varphi = 0$, т. е. $u = u_\psi$. Введем новые переменные α , β , γ , положив $\xi = x + at\alpha$, $\eta = y + at\beta$, $\zeta = z + at\gamma$. Отсюда видно, что α , β , γ — направляющие косинусы радиуса-вектора точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ сферы S_{at} ($a = \cos(r, x)$ и т. д.). Тогда интеграл по S_{at} преобразуется в интеграл по сфере $S_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$ единичного радиуса, причем $dS_1 = d\Omega_1 = dS/a^2 t^2$, а под знаком интеграла (15) будет

$$\psi(x + at\alpha, y + at\beta, z + at\gamma) = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Нетрудно заметить, что

$$u_\psi = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS_1, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_\psi &= (u_\psi)_{xx} + (u_\psi)_{yy} + (u_\psi)_{zz} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta}) dS_1 = \\ &= \frac{t}{4\pi} \iint_{S_{at}} \Delta \psi d\Omega, \end{aligned} \quad (21)$$

¹⁾ Ср. (19) с формулой Даламбера.

так как $\psi_{xx} = \psi_{\xi\xi}$ и т. д. При дифференцировании по t под знаком интеграла (20) получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = a(\psi_\xi \alpha + \psi_\eta \beta + \psi_\zeta \gamma) = a \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

$$(u_\psi)_t = \frac{u_\psi}{t} + \frac{v}{t}, \quad v = \frac{at^2}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS_1 = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS. \quad (22)$$

Дифференцируя (22) по t , найдем $(t(u_\psi)_t)_t = t(u_\psi)_{tt} + (u_\psi)_t = (u_\psi)_t + v_t$, т. е.

$$(u_\psi)_{tt} = \frac{1}{t} v_t. \quad (23)$$

Первая формула Грина дает

$$v = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}} \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS = \frac{1}{4\pi a} \iiint_{K_{at}} \Delta \Psi d\tau = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{at} \rho^2 d\rho \iint_{S_\rho} \Delta \Psi dS, \quad (24)$$

где K_{at} — шар радиуса at , S_ρ — сфера радиуса ρ с центром в точке $M(x, y, z)$. Вычислим производную, пользуясь при этом равенством (21)

$$v_t = \frac{a^2 t^2}{4\pi} \iint_{S_{at}} \Delta \Psi dS = a^2 t \Delta u_\psi.$$

Отсюда и из (23) следует $(u_\psi)_{tt} = a^2 \Delta u_\psi$, т. е. u_ψ удовлетворяет уравнению (8). Нетрудно убедиться в том, что функция du_ψ/dt также удовлетворяет уравнению (8), если имеет производные до третьего порядка включительно.

Покажем, что u_ψ , определяемая формулой (20), удовлетворяет начальным условиям. Формулы (20), (22) дают $u_\psi(M, 0) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_\psi}{t} = \psi(M), \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v}{t} = 0$, так как функция ψ непрерывна и все интегралы ограничены. Поэтому, согласно (22), $(u_\psi)_t = \frac{1}{t} u_\psi + \frac{1}{t} v \rightarrow \psi(M)$ при $t \rightarrow 0$ и аналогично $u_\psi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Из формулы (18') для u_ψ видно, что $(u_\psi)_{tt} = 0$ при $t = 0$ и, следовательно, функция (16) удовлетворяет условиям (8). Тем самым доказано, что формула Пуассона (16) определяет решение задачи Коши (8).

Из формулы (16) непосредственно видна непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных.

4. Метод спуска. Полученная в предыдущем пункте формула (19) решает в пространстве (x, y, z) однородное уравнение колебаний с начальными условиями, являющимися, вообще гово-

ря, произвольными функциями переменных x , y и z . Если начальные функции φ и ψ не зависят от z , то, очевидно, и функция u , даваемая формулой (19), также не будет зависеть от переменного z . Следовательно, эта функция будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

и начальным условиям

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Таким образом, формула, дающая решение пространственной задачи, позволяет также решить задачу для плоскости.

В формуле (15) интегрирование происходит по сфере S_{at}^M . В силу независимости начальных данных от z интегрирование по верхней полусфере можно заменить интегрированием по кругу Σ_{at}^M , получающемуся при пересечении сферы S_{at}^M с плоскостью (x, y) (рис. 72). Элемент поверхности $d\sigma$ связан с элементом плоскости dS соотношением

$$d\sigma = dS \cos \gamma,$$

где

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}{at} = \\ &= \frac{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}{at}. \end{aligned}$$

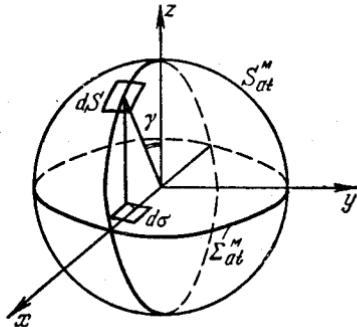


Рис. 72.

То же относится к интегрированию по нижней полусфере; следовательно, интеграл по кругу следует взять дважды.

В результате мы приходим к формуле

$$\begin{aligned} u(M, t) = u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} \right], \quad (25) \end{aligned}$$

в которой интегрирование производится по внутренности круга радиуса at с центром в точке (x, y) .

Аналогично, если начальные функции φ и ψ зависят только от одного переменного x , то формула (19) позволяет найти

функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Для этого введем сферическую систему координат, направив полярную ось по оси x . Элемент поверхности dS выразится следующим образом:

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = -r \, d\varphi \, d\xi,$$

так как

$$\xi = x + r \cos \theta, \quad d\xi = -r \sin \theta \, d\theta.$$

Интегрируя в формуле Пуассона (15) по φ , получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left[\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \, d\xi + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi \right].$$

Выполняя в первом интеграле дифференцирование по t , приходим к известной из главы II, § 2 формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi. \quad (26)$$

Уравнение колебаний с тремя, двумя и, соответственно, одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн. Эта терминология вполне соответствует примененному выше методу, называемому *методом спуска*, поскольку при решении уравнения колебаний на плоскости и на прямой мы исходили из пространственной задачи, как бы «спускаясь» к меньшему числу переменных. Полученные решения для двух и одного переменного носят характер цилиндрических и плоских волн.

Метод спуска применим не только к уравнению колебания, но и к другим типам уравнений и позволяет в ряде случаев из формулы, определяющей решение уравнения для многих переменных, извлечь решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

5. Физическая интерпретация. Формулы (15) и (25) дают возможность выяснить физическую картину распространения сферических и цилиндрических волн. Начнем со случая трех переменных, для которого физический характер процесса распространения существенно отличается, как мы увидим из дальнейшего, от случая двух пространственных переменных.

Ограничимся изучением распространения локального возмущения, когда начальное состояние (функции $\varphi > 0$ и $\psi > 0$) отлично от нуля только в некоторой ограниченной области T_0 . Рассмотрим сначала изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0 , лежащей вне области T_0 (рис. 73). Состояние u в точке M_0 в момент времени t определяется в силу (15) начальным состоянием в точках, лежащих на сфере $S_{at}^{M_0}$ радиуса at с центром в M_0 . Функция $u(M_0, t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера $S_{at}^{M_0}$ пересекает область начальных значений T_0 . Пусть d и D — расстояния от точки M_0 до ближайшей и наиболее удаленной точек области T_0 (рис. 73). Очевидно, если t достаточно мало ($t < t_1 = d/a$), то сфера $S_{at}^{M_0}$ не пересекается с областью T_0 , поверхностные интегралы в формуле (15) равны нулю: до точки M_0 возмущение еще не дошло. Начиная с момента $t_1 = d/a$ до момента $t_2 = D/a$ сфера $S_{at}^{M_0}$ ($t_1 < t < t_2$) будет пересекать область T_0 ; поверхностные интегралы в формуле (15), вообще говоря, отличны от нуля: точка M_0 находится в возбужденном состоянии. При дальнейшем увеличении t сфера $S_{at}^{M_0}$ будет содержать область T_0 внутри себя, поверхностные интегралы равны нулю: возмущение прошло точку M_0 . Таким образом, при распространении локального возмущения в трехмерном пространстве явление последействия отсутствует.

Рассмотрим теперь мгновенную пространственную картину возмущения $u(M, t_0)$ в некоторый момент t_0 . Точки M , находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы $S_{at_0}^M$ пересекают область начальных возмущений T_0 . Иными словами, это означает, что геометрическое место точек W , в которых возмущение отлично от нуля, состоит из точек M , находящихся на сферах $S_{at_0}^P$ радиуса at_0 с центрами в точках P области T_0 . Огибающие семейства сфер $S_{at_0}^P$ будут границами области W . Внешняя огибающая называется передним фронтом, внутренняя — задним фронтом распространяющейся волны. На рис. 74 изображены передний и задний фронты волны (1 и 2) для того случая, когда область T_0 является сферой радиуса R_0 .

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M_0 пространства

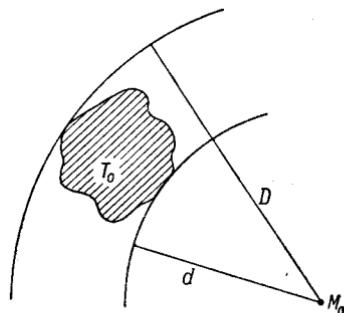


Рис. 73.

действие, локализованное во времени; при этом имеет место распространение волны с резко очерченными передним и задним фронтами (принцип Гюйгенса).

Перейдем к случаю двух переменных. Пусть начальное возмущение задано в области S_0 на плоскости (x, y) . Рассмотрим изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0 , лежащей вне S_0 . Состояние $u(M_0, t)$ в точке M_0 в момент t определяется согласно (25) начальными значениями в точках P , принадлежащих кругу $\Sigma_{at_0}^{M_0}$ радиуса at_0 с центром в M_0 . Для моментов времени

$t < t_1 = d/a$ (d — расстояние от M_0 до ближайшей точки области S_0) функция $u(M_0, t) = 0$ — до точки M_0 возмущение еще не дошло. Если $t > t_1$, то $u(M_0, t) \neq 0$. Это значит, что, начиная с момента $t = t_1$, в точке M_0 возникает возмущение, которое сначала, вообще говоря, возрастает, а затем, начиная с некоторого момента, постепенно убывает до нуля (при $t \rightarrow \infty$). В этом явлении последействия и заключается отличие плоского случая от пространственного. Влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. Принцип Гюйгенса не имеет места.

Мгновенная картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего фронта. Задачу для двух измерений можно рассматривать как пространственную задачу, когда начальные возмущения заданы в бесконечном цилиндре и не зависят от третьей координаты. Пользуясь этой схемой, легко себе представить процесс последействия.

6. Метод отражения. Задача с начальными условиями для уравнения колебаний в случае областей, ограниченных плоскостями, может быть решена методом отражений.

Рассмотрим задачу для полупространства $z > 0$:
найти решение уравнения колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \end{array} \right\} (z \geqslant 0)$$

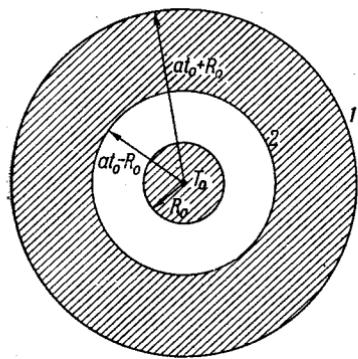


Рис. 74.

и граничному условию

$$u \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Решение этой задачи дается формулой (15), если начальные условия продолжить на все пространство нечетно по z (при $u|_{z=0} = 0$)

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = -\psi(x, y, -z)$$

или четно (при $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$)

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = \psi(x, y, -z).$$

Проверим, что при нечетном по переменной z продолжении функций φ и ψ граничное условие $u|_{z=0} = 0$ выполняется автоматически. В самом деле,

$$\begin{aligned} u(P, t) &= u(x, y, 0, t) = \\ &= \frac{1}{4\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{\varphi(\xi, \eta, \xi)}{at} ds + \int \int \frac{\psi(\xi, \eta, \xi)}{at} ds \right] = 0, \end{aligned}$$

так как поверхностные интегралы по сферам с центрами в точках плоскости $z = 0$ равны нулю при нечетных функциях φ и ψ .

Аналогично может быть решена задача для плоского слоя $0 \leq z \leq l$ при граничных условиях первого и второго рода

$$u = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l$$

и соответствующих начальных условиях.

Формула (15) сразу же дает решение задачи, если начальные условия продолжить нечетно (или четно) относительно плоскостей $z = 0$ и $z = l$. Определяемые таким образом начальные функции φ и ψ будут периодическими по переменному z с периодом $2l$ (ср. гл. II, § 2, п. 7).

Если в слое $0 < z < l$ начальные функции φ и ψ являются локальными функциями, отличными от нуля в области T_0 , то продолженные функции будут отличны от нуля в ряде областей T_n , получающихся из T_0 при помощи зеркальных изображений. Функция $u(M, t)$ для всякого M и t представляется как сумма конечного числа слагаемых, определяемых возмущениями в T_n (ср. с главой II, § 2, п. 7). Физический смысл этого заключается в том, что за конечный промежуток времени происходит конечное число отражений от стенок $z = 0$ и $z = l$. Аналогично может быть решена задача для параллелепипеда.

§ 2. Интегральная формула

1. Вывод интегральной формулы. При решении уравнения колебания струны

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f$$

методом распространяющихся волн мы широко пользовались понятием характеристического угла. Переходя к решению уравнения колебания на плоскости или в пространстве

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f, \quad (1)$$

рассмотрим поверхность

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = |t - t_0|,$$

называемую характеристическим конусом для точки M_0 и момента t_0 . Совокупность точек «фазового» пространства

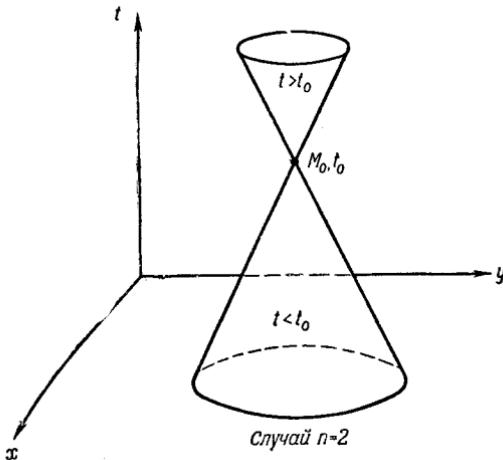


Рис. 75.

(M, t), в которые приходит сигнал, распространяющийся со скоростью a и вышедший из точки M_0 в момент t_0 , определяется уравнением

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t - t_0 \quad (t > t_0)$$

и является верхней полостью характеристического конуса точки M_0 . Аналогично сигнал, вышедший из точки M в момент t ,

приходит в точку M_0 в момент t_0 , если

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t_0 - t \quad (t < t_0).$$

Геометрическое место таких точек (M, t) образует нижнюю полость характеристического конуса (рис. 75).

Для определения в точке (M_0, t_0) функции $u(M, t)$, представляющей решение уравнения (1), введем вместо времени t локальное время t^* точки M_0 , полагая

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a} \right)$$

и оставляя при этом неизменными геометрические координаты. Пользуясь сферической системой координат (r, θ, φ) , связанной с точкой M_0 , мы приходим к новой системе переменных

$$r^* = r, \quad \theta^* = \theta, \quad \varphi^* = \varphi, \quad t^* = t - \left(t_0 - \frac{r}{a} \right).$$

Установим уравнение, которому удовлетворяет функция

$$u(r, \theta, \varphi, t) = u\left(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^* + t_0 - \frac{r}{a}\right) = U(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*).$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Выразим производные функции u через производные функций U :

$$u_r = U_{r^*} + \frac{1}{a} U_{t^*},$$

$$u_{rr} = U_{r^*r^*} + \frac{2}{a} U_{r^*t^*} + \frac{1}{a^2} U_{t^*t^*},$$

$$u_\theta = U_{\theta^*}; \quad u_{\theta\theta} = U_{\theta^*\theta^*},$$

$$u_\varphi = U_{\varphi^*}; \quad u_{\varphi\varphi} = U_{\varphi^*\varphi^*},$$

$$u_t = U_{t^*}; \quad u_{tt} = U_{t^*t^*}.$$

Уравнение (1) переходит в уравнение

$$\Delta U = -\frac{2}{ar^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U_{t^*}) - F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*), \quad (2)$$

где

$$F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*) = f(r, \theta, \varphi, t).$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит некоторому телу T , ограниченному поверхностью S . Рассматривая (2) как неоднородное уравнение Лапласа, в котором t^* играет роль параметра,

воспользуемся основной формулой Грина (глава IV). Применим ее к области T , полагая при этом $t^* = 0$ ¹⁾:

$$4\pi U(M_0, 0) = \int_S \int \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] dS + \\ + \int_T \int \int \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*} \right) d\tau + \int_T \int \int \frac{F}{r^*} d\tau.$$

Точка M_0 является особой точкой сферической системы координат. Поэтому объемные интегралы естественно рассматривать как пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствующих интегралов, взятых по объему $T - T_\varepsilon$, где T_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0 . Преобразуем объемный интеграл

$$I_\varepsilon = \int_{T-T_\varepsilon} \int \int \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*} \right) d\tau = \\ = \int_{T-T_\varepsilon} \int \int \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*} \right) \sin \theta^* dr^* d\theta^* d\varphi^*.$$

Интегрируя по переменному r^* , получим:

$$I_\varepsilon = \int_S \int \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \cos(\hat{n}, \hat{r}^*) dS - \int_S \int \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} dS,$$

так как

$$dS_n = dS \cos(\hat{n}, \hat{r}^*) = r^{*2} \sin \theta^* d\theta^* d\varphi^*.$$

Второе слагаемое в I_ε стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как площадь поверхности S_ε равна $4\pi\varepsilon^2$. Таким образом, предел I_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен

$$I_0 = \int_T \int \int \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*} \right) d\tau = \int_S \int \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr^*}{dn} dS^2,$$

так как

$$\cos(\hat{n}, \hat{r}^*) = \frac{dr^*}{dn},$$

¹⁾ В силу принятого в главе IV условия знаки в формуле соответствуют внешней нормали.

²⁾ При этом преобразовании мы пользуемся тем, что $d\tau = (r^*)^2 d\Omega dr$, интегрируем по r^* и затем заменяем $d\Omega = \frac{dS}{(r^*)^2}$.

что дает:

$$4\pi U(M_0, 0) = \iint_S \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) + \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr^*}{dn} \right) dS + \iiint_T \frac{F}{r^*} d\tau.$$

Вернемся к старым переменным и функции u :

$$u(M, t) = U(M, t^*) \quad \left(t = t^* + t_0 - \frac{r_{M_0 M}}{a} \right),$$

так что

$$U(M_0, 0) = u(M_0, t_0),$$

а также

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr}{dn}.$$

В результате для функции $u(M_0, t_0)$ получаем следующую интегральную формулу:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{ar} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{dr}{dn} \right\} dS_M + \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{[f]}{r} d\tau_M, \quad (3)$$

часто называемую формулой Кирхгоффа¹⁾. Здесь квадратные скобки показывают, что значение функций надо брать для $t^* = 0$, т. е. при $t = t_0 - \frac{r_{M_0 M}}{a}$, так что $[f] = f\left(M, t - \frac{r_{M_0 M}}{a}\right)$.

2. Следствия из интегральной формулы. Формула (3) находит свое применение при решении целого ряда задач. В качестве первого примера рассмотрим задачу с начальными данными:

найти решение уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

в неограниченном пространстве, если заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

¹⁾ Формула Кирхгоффа была обобщена С. Л. Соболевым для уравнения гиперболического типа с четным числом переменных. При помощи этой формулы Кирхгоффа — Соболева может быть построено решение задачи с начальными условиями для указанного уравнения (С. Л. Соболев, ДАН СССР, 1933).

Нижняя полость характеристического «конуса» $r = a(t_0 - t)$ точки (M_0, t_0) пересекается с многообразием $t = 0$ по сфере $S_{at_0}^{M_0}$ ($r = at_0$) радиуса at_0 с центром в точке M_0 . Воспользуемся формулой (3), полагая в ней $S = S_{at_0}^{M_0}$. Для любой функции $v(M, t)$ значения $[v]$ на сфере $S_{at_0}^{M_0}$ имеет вид

$$[v] = v \left(M, t_0 - \frac{r_{M_0 M}}{a} \right) = v(M, 0), \text{ так как } r_{MM_0} = at_0.$$

Поэтому, если точка M лежит на сфере $S_{at_0}^{M_0}$, то

$$\begin{aligned} [u]_S &= u(M, 0) = \varphi(M), \\ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_S &= \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = \psi(M), \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_S &= \frac{\partial u}{\partial r}(M, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(M). \end{aligned}$$

Далее

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi).$$

Подставляя это выражение в (3), находим:

$$\begin{aligned} u(M_0, t_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{at_0}^{M_0}} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) + \frac{1}{ar} \psi \right\} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \iint_{S_r^{M_0}} r\varphi d\Omega + \frac{1}{a} \iint_{S_r^{M_0}} r\psi d\Omega \right]_{r=at_0}, \end{aligned}$$

откуда, опуская индексы 0 при M_0 и t_0 , получаем формулу Пуассона

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi(P)}{r_{MP}} dS + \iint_{S_{at}^M} \frac{\psi(P)}{r_{MP}} dS \right] \quad (r_{MP} = at) \quad (4)$$

(см. (15), § 1).

В качестве второго примера рассмотрим теперь решение неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными данными. Выбирая по-прежнему $S = S_{at_0}^{M_0}$, убеждаемся в том, что поверхностный интеграл в (3) обращается в нуль, вследствие чего получаем:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{T_{at_0}^{M_0}} \iint \frac{[f]}{r} d\tau_M, \quad (5)$$

где $T_{at_0}^{M_0}$ — шар радиуса at_0 с центром в M_0 . Исследуем подробнее тот случай, когда правая часть является периодической

функцией времени

$$f(M, t) = f_0(M) e^{i\omega t},$$

где ω — заданная частота колебаний. Из (5) находим:

$$u(M_0, t_0) = e^{i\omega t_0} \frac{1}{4\pi} \int_T^M \int_{T_{at_0}}^{M_0} f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r} d\tau_M \quad (k = \frac{\omega}{a}, r = r_{MM_0}). \quad (6)$$

Пусть $f_0(M)$ — локальная функция, т. е. функция, отличная от нуля только внутри некоторой области T . Если M_0 лежит вне области T и расстояние от M_0 до ближайшей точки области T равно d , то интеграл T_{at_0} равен нулю для $t_0 < d/a$. Для таких значений возмущение не успевает дойти до точки M_0 . Если расстояние от M_0 до наиболее удаленной точки области T равно D , то для моментов $t_0 > D/a$ интеграл в правой части постоянен и сводится к интегралу, распространенному по всей области T . Таким образом, во всякой точке M_0 , начиная с момента $t_0 = D/a$, имеют место периодические колебания с амплитудой

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_T^M \int_{T_{at_0}}^{M_0} f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r_{MM_0}} d\tau_M, \quad (7)$$

так что

$$u(M_0, t_0) = v(M_0) e^{i\omega t_0}.$$

Прямая подстановка выражения (6) для u (при $t_0 > D/a$) в уравнение колебаний показывает, что функция $v(M)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(M) \quad (k > \omega/a), \quad (8)$$

которое мы будем в дальнейшем называть волновым уравнением (см. главу VII). Оно часто также называется уравнением Гельмгольца.

Рассмотрим формулу (3) для случая установившихся колебаний, когда

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t},$$

где $v(M)$ — амплитуда колебаний, удовлетворяющая волновому уравнению (8).

В этом случае имеем:

$$[u] = u\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right) = v(M) e^{i(\omega t - kr)},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial v}{\partial n} e^{i(\omega t - kr)}, \quad \frac{1}{a} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = ikv(M) e^{i(\omega t - kr)},$$

$$[f] = f_0(M) e^{i(\omega t - kr)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), приходим к интегральной формуле для волнового уравнения (8):

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] dS_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_T \int f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r} d\tau_M \quad (r = r_{MM_0}), \quad (9)$$

которая часто также называется формулой Кирхгоффа.

При $k = 0$ ($\omega = 0$ — статический случай) формула (9) переходит в основную формулу Грина (гл. IV, § 2) для неоднородного уравнения Лапласа.

§ 3. Колебания ограниченных объемов

1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны. Задача о колебании ограниченных объемов состоит в следующем:

найти решение уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - q(M)u = \rho(M)u_{tt}, \quad k > 0, \quad q \geq 0, \quad (1)$$

где

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$M = M(x, y, z)$, внутри некоторого объема T , ограниченного замкнутой поверхностью Σ , удовлетворяющее дополнительным условиям

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \text{ в } T + \Sigma, \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma} = 0 \text{ для } t \geq 0. \quad (3)$$

В случае однородной среды ($k = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) для $q = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} \quad \left(a^2 = \frac{k}{\rho} \right).$$

С задачами подобного типа мы встречаемся при изучении процесса колебаний мембранны (случай двух независимых геометрических переменных), акустических колебаний газа, электромагнитных процессов в непроводящих средах. Особое значение представляют задачи, связанные с генерацией электромагнитных колебаний в замкнутых полых резонаторах (эндовибраторы, клистроны, магнетроны и т. д.).

Заметим, что однородность граничного условия (3) не связана с ограничением общности. В самом деле, случай

$$u|_{\Sigma} = \mu, \quad (3')$$

где μ — произвольная функция точки P поверхности S и времени t , легко сводится к случаю однородного граничного условия методом, который изложен в § 3 главы II для одного переменного и заключается в том, что рассматривается отклонение от заданной функции. Аналогично ставятся вторая и третья краевые задачи.

Будем искать решение $u(M, t)$ однородного уравнения (1) с условиями (2) и (3) методом разделения переменных. В дальнейшем мы ограничимся изложением формальной схемы решения. С этой целью рассмотрим основную вспомогательную задачу (ср. § 3 гл. II):

найти нетривиальное решение однородного уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = \rho u_{tt} \text{ в } T, t > 0 \quad (k > 0, \rho > 0, q \geq 0), \quad (1^*)$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad (3)$$

представимое в виде произведения

$$u(M, t) = v(M) T(t). \quad (4)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в (1) и разделяя, как обычно, переменные, приходим к следующим уравнениям для функций $v(M)$ и $T(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda \rho v &= 0, \quad v \neq 0; \\ v|_{\Sigma} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$T'' + \lambda T = 0. \quad (6)$$

Для $v(M)$ получаем задачу на собственные значения (задачу Штурма — Лиувилля):

найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda \rho v &= 0 \quad (k > 0, q \geq 0, \rho > 0), \\ v|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (5).

Остановимся подробнее на этой задаче, аналогичной основной задаче § 3 главы II. В нашем случае уравнение для собственных функций представляет собой уравнение с частными производными, вследствие чего трудно рассчитывать на получение явного представления собственных функций для произвольной области T . В дальнейшем (пп. 2 и 3) будут рассмотрены

примеры областей T , для которых явное представление возможно, хотя и требует введения нового класса специальных функций. Здесь мы рассмотрим общие свойства собственных функций и собственных значений и проведем формальную схему метода разделения переменных. Перечислим эти свойства.

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, которым соответствуют собственные функции

$$v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), \dots, v_n(x, y, z), \dots$$

Собственные значения λ_n с возрастанием номера n неограниченно возрастают; $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

2. При $q \geq 0$ все собственные значения λ положительны:

$$\lambda_n > 0.$$

3. Собственные функции $\{v_n\}$ ортогональны между собой с весом $\rho(x, y, z)$ в области T :

$$\int_T v_m(M) v_n(M) \rho(M) d\tau_M = 0 \quad (m \neq n), \quad (7)$$

$$M = M(x, y, z); \quad d\tau_M = dx dy dz.$$

4. Теорема разложимости. Произвольная функция $F(M)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию

$$F = 0 \text{ на } \Sigma,$$

разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{v_n(M)\}$:

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M),$$

где F_n — коэффициенты разложения.

Доказательство свойств 1 и 4 основывается обычно на теории интегральных уравнений. Переходим к доказательству свойств 2 и 3, не требующему специального математического аппарата. Докажем ортогональность собственных функций $\{v_n\}$ (свойство 3). Пусть $v_n(M)$ и $v_m(M)$ — две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_m :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v_m}{\partial z} \right) - q v_m + \lambda_m \rho v_m = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial v_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial v_n}{\partial z} \right) - q v_n + \lambda_n \rho v_n = 0,$$

причем $v_m = 0$ и $v_n = 0$ на S . Умножая первое уравнение на $v_n(M)$ и вычитая из него второе уравнение, умноженное на $v_m(M)$, находим:

$$\int_T \left\{ v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_m) - v_m \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n) \right\} d\tau + \\ + (\lambda_m - \lambda_n) \int_T v_n v_m \rho d\tau = 0.$$

Отсюда после преобразований, аналогичных тем, которые используются при выводе второй формулы Грина¹⁾, получаем:

$$\int_{\Sigma} \left(v_n k \frac{\partial v_m}{\partial v} - v_m k \frac{\partial v_n}{\partial v} \right) d\sigma + (\lambda_m - \lambda_n) \int_T v_m v_n \rho d\tau = 0.$$

В силу граничных условий $v_m = 0$ и $v_n = 0$ на Σ ,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_T v_m v_n \rho d\tau = 0,$$

откуда и следует, что при $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\int_T v_m v_n \rho d\tau = 0 \quad (m \neq n),$$

т. е. собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны между собой с весом $\rho(M)$.

При изучении аналогичной краевой задачи для одного независимого переменного

$$X'' + \lambda \rho X = 0,$$

$$X(0) = 0,$$

$$X(l) = 0$$

было доказано, что каждому собственному значению соответствует одна нормированная собственная функция. Для двух и трех независимых переменных это обстоятельство не имеет места. Как видно из примеров собственных функций прямоугольника и круга, рассмотренных ниже (пп. 2 и 3), одному и тому же собственному значению может соответствовать несколько собственных функций. Однако каждому собственному значению, как это следует из теории интегральных уравнений, может соответствовать лишь конечное число собственных функций, линейно-независимых между собой. Пусть некоторому значению

¹⁾ В эту формулу входят нормальные производные собственных функций на поверхности Σ . Обоснование этой формулы для поверхностей типа Ляпунова см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.

λ_n соответствует система линейно-независимых функций $v_n^{(1)}$, $v_n^{(2)}$, ..., $v_n^{(m)}$. Очевидно, что любая линейная комбинация этих функций

$$\bar{v}_n = \sum_{i=1}^m a_i v_n^{(i)}$$

также является собственной функцией для того же собственного значения λ_n . Пользуясь известным приемом ортогонализации¹⁾, можно построить функции $\bar{v}_n^{(1)}$, ..., $\bar{v}_n^{(m)}$, являющиеся линейными комбинациями исходных функций и ортогональные между собой. Таким образом, если собственные функции, соответствующие некоторому λ_n , не ортогональны между собой, то мы можем ортогонализировать их и получить новую систему собственных функций, ортогональных между собой и соответствующих тому же λ_n .

Совокупность таких систем собственных функций для разных λ_n образует ортогональную систему собственных функций рассматриваемой краевой задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda_n v &= 0, \\ v &= 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned}$$

Число

$$\|v_n\| = \left[\int_T \int \int v_n^2 \rho d\tau \right]^{1/2}$$

называется нормой собственной функции. Умножая каждую функцию v_n на $\frac{1}{\|v_n\|}$, получим систему собственных функций, нормированных к единице.

Для доказательства положительности собственных значений (свойство 2) достаточно воспользоваться первой формулой Грина

$$\begin{aligned} \int_T \int \int (k \operatorname{grad} v_n)^2 d\tau &= \\ &= - \int_T \int \int v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n) d\tau + \int_{\Sigma} \int v_n k \frac{\partial v_n}{\partial n} d\sigma = \\ &= - \int_T \int \int q v_n^2 d\tau + \lambda_n \int_T \int \int v_n^2 \rho d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $q \geq 0$ собственные значения λ_n положительны.

¹⁾ См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.

В дальнейшем мы будем пользоваться теоремой разложимости (свойство 4), отсылая за доказательством к соответствующему разделу интегральных уравнений. Пусть

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M).$$

Отсюда обычным способом, используя условие ортогональности (7), находим коэффициенты разложения

$$F_n = \frac{\int \int \int F(M) v_n(M) \rho d\tau}{\int \int \int v_n^2 \rho d\tau}. \quad (8)$$

Вернемся теперь к уравнению в частных производных. Решение уравнения

$$T_n'' + \lambda_n T_n = 0$$

имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t,$$

так что решением нашей основной вспомогательной задачи будет произведение

$$u_n(M, t) = T_n(t) v_n(M) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) v_n(M).$$

Общее решение исходной задачи с начальными данными естественно искать в виде суммы

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) v_n(M). \quad (9)$$

Удовлетворяя начальным условиям (2)

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(M),$$

$$u_t(M, 0) = \psi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} v_n(M)$$

и пользуясь теоремой разложимости 4, находим:

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n \sqrt{\lambda_n} = \psi_n,$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ в их разложении по ортогональной с весом $\rho(M)$ системе функций $v_n(M)$. Тем самым формальное построение решения исходной задачи закончено.

Физическая интерпретация полученного решения вполне аналогична случаю одного переменного. Частные решения

$$u_n(M, t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t) v_n(M)$$

представляют собой стоячие волны, которые могут существовать внутри ограниченного объема T .

«Профили» стоячих волн, определяемые функцией $v_n(M)$, для разных моментов времени отличаются лишь множителем пропорциональности. Линии или поверхности (соответственно для двух или трех переменных), вдоль которых $v_n(M) = 0$, называются узловыми линиями (поверхностями) стоячей волны $v_n(M)$. Точки, в которых $v_n(M)$ достигает относительных максимумов или минимумов, называются пучностями этой стоячей волны¹⁾. Общее решение представляется в виде бесконечной суммы таких стоячих волн. Возможность представления общего решения в виде суммы слагаемых подобного типа и означает возможность представления произвольного колебания в виде суперпозиции стоячих волн²⁾.

Таким образом, задача о колебании мембран или объемов сводится по существу к нахождению соответствующих собственных функций. В пп. 2 и 3 мы рассмотрим колебания прямоугольной и круглой мембран, обращая при этом главное внимание на построение собственных функций. Как уже отмечалось выше, нахождение собственных функций в явной аналитической форме сопряжено с большими трудностями для областей более сложной формы. В случае произвольных областей для построения собственных функций могут быть использованы приближенные методы. Существуют различные приближенные методы, основанные на использовании интегральных уравнений, вариационных принципов, конечных разностей.

2. Колебания прямоугольной мембранны. Процесс колебаний плоской однородной мембранны, как было показано в главе II, § 1, описывается уравнением колебаний

$$u_{tt} = a^2 \Delta u. \quad (10)$$

Пусть в плоскости (x, y) расположена прямоугольная мембрана со сторонами b_1 и b_2 , закрепленная по краям и возбуждаемая с помощью начального отклонения и начальной скo-

¹⁾ Если возбудить колебания мембранны, посыпанной песком, то песок из пучностей будет сбрасываться к узловым линиям, образуя при этом так называемые хладниевые фигуры, воспроизводящие узловые линии собственных функций.

²⁾ Обоснованию метода разделения для случая многих переменных посвящена работа О. А. Ладыженской (ДАН СССР 85, 3 (1952)) и работа В. А. Ильина, О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений, УМН 15, вып. 2 (1960),

ности. Для нахождения функции $u(x, y, t)$, характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия, мы должны решить уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (10')$$

при заданных начальных условиях

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{array} \right\} \quad (11)$$

и граничных условиях

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b_1, y, t) = 0, \quad (12)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b_2, t) = 0. \quad (13)$$

Мы ищем, как обычно, решение методом разделения переменных, полагая

$$u(x, y, t) = v(x, y) T(t). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10) и разделяя переменные, получаем для функции $T(t)$ уравнение

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad (15)$$

а для функции $v(x, y)$ — следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{array}{l} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0; \\ v(0, y) = 0, \quad v(b_1, y) = 0; \\ v(x, 0) = 0, \quad v(x, b_2) = 0. \end{array} \right\} \quad (16)$$

Таким образом, сама задача для собственных значений состоит в решении однородного уравнения в частных производных при однородных граничных условиях. Будем и эту задачу решать методом разделения переменных, полагая

$$v(x, y) = X(x) Y(y).$$

Проводя разделение переменных, получаем следующие одномерные задачи на собственные значения:

$$\left. \begin{array}{l} X'' + \nu X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(b_1) = 0; \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} Y'' + \mu Y = 0, \\ Y(0) = 0, \quad Y(b_2) = 0; \end{array} \right\} \quad (18)$$

где ν и μ — постоянные разделения переменных, связанные соотношением $\mu + \nu = \lambda$. При этом граничные условия для $X(x)$ и $Y(y)$ вытекают из соответствующих условий для функции v .

Например, из

$$v(0, y) = X(0) Y(y) = 0$$

следует $X(0) = 0$, так как $Y(y) \neq 0$ (мы ищем нетривиальные решения).

С решением задач, подобных (17) и (18), мы уже встречались при изучении колебаний струны. Решения уравнений (17) и (18) имеют вид

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin \frac{n\pi}{b_1} x, \quad Y_m(y) = \sin \frac{m\pi}{b_2} y; \\ v_{n,m} &= \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2; \quad \mu_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2. \end{aligned}$$

Собственным значениям

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2,$$

таким образом, соответствуют собственные функции

$$v_{n,m} = A_{n,m} \sin \frac{n\pi}{b_1} x \sin \frac{m\pi}{b_2} y,$$

где $A_{n,m}$ — некоторый постоянный множитель. Выберем его так, чтобы норма функции $v_{n,m}$ с весом 1 была равна единице

$$\int_0^{b_1} \int_0^{b_2} v_{n,m}^2 dx dy = A_{n,m}^2 \int_0^{b_1} \sin^2 \frac{n\pi}{b_1} x dx \int_0^{b_2} \sin^2 \frac{m\pi}{b_2} y dy = 1.$$

Отсюда

$$A_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}.$$

Ортогональность функций $\{v_{n,m}\}$ очевидна и не нуждается в доказательстве. Следовательно, функции

$$v_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \sin \frac{n\pi}{b_1} x \sin \frac{m\pi}{b_2} y \quad (19)$$

образуют ортонормированную систему собственных функций прямоугольной мембранны.

Число собственных функций, принадлежащих $\lambda_{n,m}$ (кратность $\lambda_{n,m}$), зависит от количества целочисленных решений n и m уравнения

$$\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2 = \lambda_{n,m}.$$

Найденная система собственных функций $v_{n,m}$ такова, что любая функция $F(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $v_{n,m}$. Это

утверждение можно обосновать, сославшись на теорию кратных рядов Фурье.

Покажем, что система (19) содержит все собственные функции нашей задачи о собственных значениях. Предположим, что существует собственная функция u_0 , принадлежащая собственному значению λ_0 . Так как функция u_0 ортогональна всем собственным функциям, принадлежащим другим значениям λ , то в ее разложении по системе (19) останется лишь конечное число членов, соответствующих собственным функциям, принадлежащим собственному значению $\lambda_{n,m} = \lambda_0$. Поэтому u_0 является линейной комбинацией лишь тех функций (19), которые соответствуют $\lambda_{n,m} = \lambda_0$. Таким образом, все функции прямоугольной мембранны даются формулой (19).

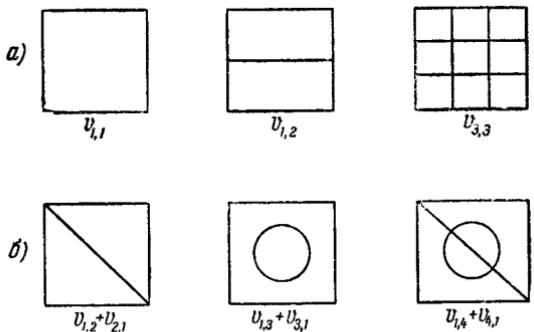


Рис. 76.

Возвращаясь к исходной задаче для уравнения (10), мы видим, что частные решения

$$u_{n,m} = v_{n,m}(x, y) (\bar{B}_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} at + \bar{B}_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} at)$$

представляют собой стоячие волны, профиль которых определяется собственными функциями $v_{n,m}$. Геометрические места точек внутри прямоугольника, в которых собственные функции обращаются в нуль, называются узловыми линиями. Рассмотрим для простоты квадрат со стороной b ($b_1 = b_2$). Узловые линии функций

$$v_{n,m} = \frac{2}{b} \sin \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

являются прямыми, параллельными осям координат (рис. 76, а).

При кратных собственных значениях линейная комбинация собственных функций также будет собственной функцией. Ее узловые линии могут иметь весьма сложную форму (рис. 76, б).

Искомое решение уравнения (10) при дополнительных условиях (11) — (13) имеет вид

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{B}_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} at + \bar{\bar{B}}_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} at) v_{n,m}(x, y),$$

где $v_{n,m}$ определяется формулой (19), а коэффициенты $\bar{B}_{n,m}$ и $\bar{\bar{B}}_{n,m}$ равны:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{n,m} &= \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \varphi(x, y) v_{n,m}(x, y) dx dy = \\ &= \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \Phi(x, y) \sin \frac{n\pi}{b_1} x \sin \frac{m\pi}{b_2} y dx dy, \\ \bar{\bar{B}}_{n,m} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 \lambda_{n,m}}} \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \Psi(x, y) \sin \frac{n\pi}{b_1} x \sin \frac{m\pi}{b_2} y dx dy. \end{aligned}$$

3. Колебания круглой мембранны. При изучении колебаний круглой мембранны полезно перейти к полярным координатам. Тогда уравнение колебаний запишется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u^2}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Будем искать решение этого уравнения при заданных начальных условиях

$$\left. \begin{array}{l} u(r, \theta, 0) = f_1(r, \theta), \\ u_t(r, \theta, 0) = f_2(r, \theta) \end{array} \right\} \quad (21)$$

и граничном условии

$$u(r_0, \theta, t) = 0 \quad (22)$$

(закрепленная по краям мембрана радиуса r_0). Как и в случае прямоугольной мембранны, мы прибегаем к разделению переменных. Положив

$$u(r, \theta, t) = v(r, \theta) T(t),$$

мы получим уравнение для $T(t)$

$$\begin{aligned} T'' + a^2 \lambda T &= 0, \\ T &= C_1 \cos \sqrt{a^2 \lambda} t + C_2 \sin \sqrt{a^2 \lambda} t \end{aligned}$$

и следующую задачу на собственные значения для функции $v(r, \theta)$:

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \lambda v = 0 & (0 < r < r_0), \\ |v(0, \theta)| < \infty & (\text{условия ограниченности}), \\ v(r_0, \theta) = 0 & (\text{граничное условие}), \\ v(r, \theta) = v(r, \theta + 2\pi) & (\text{условие периодичности}). \end{array} \right\}$$

Функция v должна быть однозначной и дифференцируемой функцией точки; поскольку же θ является циклической координатой, то для однозначности v мы должны потребовать, чтобы выполнялось условие периодичности с периодом 2π , т. е. $v(r, \theta + 2\pi) = v(r, \theta)$.

Положим

$$v(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в наше уравнение и производя деление на $R\Theta$, получаем:

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \lambda r^2 = 0.$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \Theta'' + \mu^2 \Theta &= 0; \\ \Theta(\theta) &= \Theta(\theta + 2\pi); \quad \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi); \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R &= 0, \\ R(r_0) &= 0, \quad |R(0)| < \infty. \end{aligned}$$

Нетривиальные периодические решения для $\Theta(\theta)$ существуют лишь при $\mu^2 = n^2$ (n — целое число) и имеют вид

$$\Theta_n(\theta) = D_{1n} \cos n\theta + D_{2n} \sin n\theta.$$

Отметим, что собственному значению n^2 принадлежат две линейно-независимые собственные функции $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$.

Для определения функции $R(r)$ мы имеем уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \tag{23}$$

с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} R(r_0) &= 0, \\ |R(0)| &< \infty. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, для определения функции $R(r)$ мы должны решить задачу о собственных значениях.

Второе условие, налагаемое на функцию $R(r)$, представляющее условие ограниченности при $r = 0$, связано с тем, что $r = 0$ является особой точкой уравнения; для особых же точек в качестве граничного условия достаточно выставить требование ограниченности (см. Дополнение II, ч. I).

Вводя новую переменную

$$x = \sqrt{\lambda} r$$

и обозначая

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x),$$

получим для определения функции $y(x)$ уравнение цилиндрических функций n -го порядка (см. Дополнение II, ч. I)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (25)$$

с дополнительными граничными условиями

$$\begin{aligned} y(x_0) &= 0 & (x_0 = \sqrt{\lambda} r_0), \\ |y(0)| &< \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

Общее решение уравнения цилиндрических функций имеет вид

$$y(x) = d_1 J_n(x) + d_2 N_n(x), \quad (27)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя, N_n — функция Неймана n -го порядка (см. Дополнение II, ч. I). Из второго условия следует, что $d_2 = 0$. Первое условие дает:

$$J_n(\sqrt{\lambda} r_0) = 0 \quad \text{или} \quad J_n(\mu) = 0 \quad (\mu = \sqrt{\lambda} r_0). \quad (28)$$

Если $\mu_m^{(n)}$ — m -й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$, то

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \quad (29)$$

Этому собственному значению принадлежит собственная функция

$$R_{n,m} = y(\sqrt{\lambda} r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \quad (30)$$

Отметим следующие свойства собственных функций (30) ¹⁾:

1. Собственные функции $R(r)$, принадлежащие различным собственным значениям λ , ортогональны с весом r :

$$\int_0^{r_0} r R_{nm_1}(r) R_{nm_2}(r) dr = 0 \quad (m_1 \neq m_2)$$

или

$$\int_0^{r_0} r J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) dr = 0. \quad (31)$$

2. Норма этих функций равна

$$\int_0^{r_0} r J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) dr = \frac{r_0^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2. \quad (31')$$

В частности, норма функции $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$ равна

$$\int_0^{r_0} r [J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)]^2 dr = \frac{r_0^2}{2} [J_1(\mu_m^{(0)})]^2. \quad (32)$$

3. Всякая непрерывная в интервале $(0, r_0)$ функция $f(r)$, имеющая кусочно-непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right), \quad (33)$$

причем коэффициенты разложения определяются формулой

$$f_m = \frac{\int_0^{r_0} r f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2}. \quad (34)$$

Возвращаясь к задаче о собственных значениях для круглой мембраны, получим для собственного значения

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$$

¹⁾ См. Дополнение II, ч. I, § 2.

две собственные функции

$$\bar{v}_{n, m} = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \cos n\theta, \quad \bar{v}_{n, m} = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \sin n\theta. \quad (35)$$

Составив их линейную комбинацию, получим:

$$v_{n, m}(r, \theta) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) (A_{n, m} \cos n\theta + B_{n, m} \sin n\theta). \quad (36)$$

Вычислим норму собственной функции $v_{n, m}$; попутно получится доказательство ортогональности собственных функций, вытекающее также из общей теории. Для упрощения вычислений ограничимся собственными функциями $\bar{v}_{n, m}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \bar{v}_{n_1, m_1} \bar{v}_{n_2, m_2} r dr d\theta = \\ &= \int_0^{r_0} J_{n_1} \left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{r_0} r \right) J_{n_2} \left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{r_0} r \right) r dr \int_0^{2\pi} \cos n_1 \theta \cos n_2 \theta d\theta = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } n_1 \neq n_2, \\ 0 & \text{при } n_1 = n_2, \quad m_1 \neq m_2, \\ \frac{r_0^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2 \pi & \text{при } n_1 = n_2 = n \neq 0 \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m, \\ \frac{r_0^2}{2} [J'_0(\mu_m^{(n)})]^2 2\pi & \text{при } n_1 = n_2 = 0 \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогичные условия имеют место для функции

$$\bar{v}_{n, m} = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \sin n\theta.$$

Выражение для нормы можно записать в виде

$$\iint_{\Sigma} v_{n, m}^2 d\sigma = \frac{r_0^2}{2} \pi e_n [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2, \quad (d\sigma = r dr d\theta) \quad (38)$$

где

$$e_n = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Из общей теории следует, что

всякая непрерывная функция $F(r, \theta)$ с непрерывными первыми и вторыми производными, удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$F(r, \theta) = \sum_{n, m} (A_{n, m} \bar{v}_{n, m}(r, \theta) + B_{n, m} \bar{v}_{n, m}(r, \theta)) \quad (39)$$

по собственным функциям задачи о собственных значениях для круга.

Коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} F(r, \theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \epsilon_n [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2}, \\ B_{n,m} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} F(r, \theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \epsilon_n [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Отметим, что функция

$$v_{0,m}(r, \theta) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$$

не зависит от θ .

Если заданная функция F зависит только от r , $F = F(r)$, то ряд, представляющий разложение F по собственным функциям, будет содержать лишь функции $v_{0,m}$:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right), \quad (41)$$

где

$$A_{0,m} = \frac{\int_0^{r_0} F(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}. \quad (42)$$

Все остальные коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ равны нулю.

Возвращаясь к исходной задаче колебания мембранны при заданном начальном отклонении и начальной скорости, можем написать ее решение в виде

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{v}_{n,m}(r, \theta) \left(A_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + B_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t \right) + \\ &+ \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{\bar{v}}_{n,m}(r, \theta) \left(C_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + D_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ определяются из начальных условий

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{n,m} \bar{v}_{n,m} + C_{n,m} \bar{\bar{v}}_{n,m}) = f_1(r, \theta),$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (B_{n,m} \bar{v}_{n,m} + D_{n,m} \bar{\bar{v}}_{n,m}) \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r, \theta)$$

по формулам

$$A_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f_1(r, \theta) J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \cos n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \epsilon_n [J'_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r_0)]^2},$$

$$C_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f_2(r, \theta) J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \sin n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \epsilon_n [J'_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r_0)]^2}.$$

Аналогичные формулы имеют место для $a\sqrt{\lambda_{n,m}} B_{n,m}$ и, соответственно, для $a\sqrt{\lambda_{n,m}} D_{n,m}$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

1. Решить задачу с начальными данными для уравнения колебаний $u_{tt} = a^2 \Delta u$ в пространстве, предполагая, что начальная скорость всюду равна нулю, а начальные отклонения $u|_{t=0} = \varphi$ имеют вид

$$\text{а)} \quad \varphi = \begin{cases} 1 & \text{внутри единичной сферы,} \\ 0 & \text{вне единичной сферы} \end{cases}$$

или

$$\text{б)} \quad \varphi = \begin{cases} A \cos \frac{\pi}{2r_0} r & \text{внутри сферы радиуса } r_0, \\ 0 & \text{вне сферы радиуса } r_0. \end{cases}$$

2. Решить задачу о колебании полупространства $z > 0$ при однородном граничном условии первого или второго рода, если заданы

а) локальное возмущение, т. е. начальная скорость и начальное отклонение в некоторой области T_0 ;

б) сосредоточенная сила, действующая по произвольному закону.

3. Решить ту же задачу для слоя $-l \leq z \leq l$.

4. Решить уравнение колебаний в области, представляющей собой клин, угол раствора которого равен $\pi/2$ и вообще π/n (n — целое число), если заданы однородные граничные условия первого или второго рода, а также начальная скорость и начальное отклонение.

5. Вывести аналог интегральной формулы (3) § 2 для уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + cu, \quad \text{где } c = \text{const.}$$

Рассмотреть случай $c < 0$ и найти решение задачи с начальными данными для неоднородного уравнения. Дать физическую интерпретацию полученных результатов.

6. Найти функцию $u(\rho, \varphi, t)$, характеризующую колебания мембранны под действием импульса K , сосредоточенного

- в центре круглой мембранны,
- в произвольной точке круглой мембранны,
- в произвольной точке прямоугольной мембранны.

7. Найти собственные частоты и собственные функции мембран, имеющих форму

- полукруга,
- кольца,
- кругового сектора,
- кольцевого сектора.

Рассмотреть первую и вторую краевые задачи.

8. Найти установившиеся колебания круглой мембранны (мембранны микрофона) под действием периодической силы, распределенной по мемbrane с постоянной плотностью $f = A \sin \omega t$. Решить ту же задачу, если $f = A \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) \sin \omega t$, где c — радиус мембранны.

9. Вывести уравнение распространения звука в среде, движущейся с постоянной скоростью. Преобразовать полученное уравнение, перейти к системе координат, движущейся вместе со средой.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ V

I. Приведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний

Теория упругости ставит своей целью изучение возникающих в упругих телах деформаций и движений при помощи математических методов. Возникающие под действием внешних сил деформации и движения можно характеризовать с помощью вектора смещений \mathbf{u} , проекции которого на координатные оси x, y, z будем обозначать $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$. Эти смещения возникают в упругом теле под действием внутренних сил (напряжений), которые образуют симметрический тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ — составляющие силы (напряжения), действующей на единицу площади поверхности элемента, перпендикулярного к оси x ; аналогично $\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}$ и $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ — компоненты напряжений, действующих на единицу площади поверхности элементов, перпендикулярных к осям y и z .

Компоненты σ_x , σ_y , σ_z называют нормальными напряжениями, а τ_{xy} , τ_{xz} и так далее называют скальвающими напряжениями. Рассматривая элемент объема и составляя для него уравнение движения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ρ — объемная плотность в точке (x, y, z) , X, Y, Z — составляющие внешних объемных сил. Связь напряжений, возникающих при деформации, с ее характеристиками дается законом Гука, который записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left\{ \epsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right\}, & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left\{ \epsilon_y + \frac{\theta}{m-2} \right\}, & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left\{ \epsilon_z + \frac{\theta}{m-2} \right\}, & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При этом величины

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

образуют симметрический тензор деформаций

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

В формулах (2) мы пользуемся следующими обозначениями: G — модуль сдвига, m — коэффициент, характеризующий сжатие тела в поперечном направлении при его удлинении в продольном направлении, $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

К уравнениям (1) и (2) следует еще присоединить граничные условия (на границе заданы, например, смещения u, v, w , либо поверхностные силы и т. д.), на которых мы здесь не будем останавливаться.

Уравнения (1) и (2) образуют полную систему дифференциальных уравнений в частных производных для напряжений

и деформаций. Подставляя выражения для напряжений из (2) в уравнения движения (1) и учитывая соотношения (3), получаем систему уравнений для смещений

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \left\{ \Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} + X, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G \left\{ \Delta v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} + Y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G \left\{ \Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} + Z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Часто вводят вместо постоянных G и m так называемые постоянные Ламэ λ и μ , связанные с ними соотношениями

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2}{m-2} G.$$

Это позволяет записать предыдущую систему уравнений в виде одного векторного уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (5)$$

где \mathbf{u} — вектор смещения с составляющими u , v и w , \mathbf{F} — вектор объемных сил с составляющими X , Y , Z . Уравнение (5) обычно называют уравнением Ламэ.

Покажем, что уравнения (5) могут быть сведены к волновым уравнениям для соответствующим образом выбранных функций¹⁾.

Произвольный вектор \mathbf{F} всегда можно представить в виде суммы

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \mathbf{L},$$

где U — скалярный, а \mathbf{L} — векторный потенциал.

Положим

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

где

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi + U, \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{A} + \mathbf{L}.$$

Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что определенный таким способом вектор \mathbf{u} действительно удовлетворяет уравнениям упругости (4).

Если объемные силы отсутствуют, то для потенциалов Φ и \mathbf{A} мы получаем однородные уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi, \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{A}.$$

¹⁾ С. Л. Соболев, Некоторые вопросы теории распространения колебаний; Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XII, Гостехиздат, 1937.

Уравнение колебаний для векторного потенциала \mathbf{A} в некоторых случаях (например, в декартовой системе координат) распадается на три скалярных уравнения. Однако вопрос о приведении уравнений упругости к отдельным скалярным уравнениям колебаний не может быть рассмотрен до конца без привлечения граничных условий, которые могут связывать разные компоненты и тем самым представлять значительные трудности для полного расщепления уравнений.

II. Уравнения электромагнитного поля

1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия. Электромагнитное поле характеризуется векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} напряженностей электрического и магнитного полей и векторами \mathbf{D} и \mathbf{B} электрической и магнитной индукции. Полная система уравнений Максвелла, связывающих эти величины, имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (4)$$

где \mathbf{j} — объемная плотность токов проводимости, $\mathbf{j}^{(e)}$ — плотность токов, происходящих от действия сторонних э. д. с., ρ — объемная плотность зарядов, c — скорость света в пустоте. В дальнейшем мы часто будем считать $\mathbf{j}^{(e)} = 0$.

К этим уравнениям следует присоединить так называемые материальные уравнения поля

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7)$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость среды. В дальнейшем мы будем предполагать среду однородной и изотропной. В этом случае $\epsilon = \epsilon = \text{const}$, $\mu = \mu = \text{const}$. Мы часто будем рассматривать электромагнитные процессы в пустоте, где $\epsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, при условии отсутствия зарядов и токов. В этом случае уравнения Максвелла упрощаются:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

Уравнения (1) и (4) совместны, так как между ρ и j имеется соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0,$$

выражающее закон сохранения электрического заряда.

Законы электромагнитного поля, выраженные в дифференциальной форме уравнениями (1) — (4), могут быть выражены в интегральной форме

$$\oint_C H_s ds = \frac{4\pi}{c} \iint_{\Sigma} i_n d\sigma, \quad (1')$$

$$\oint_C E_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B_n d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2')$$

где

$$i = j_{cm} + j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} + j \quad (8)$$

— полный ток, $j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}$ — ток смещения. Интегрирование производится по контуру C и по поверхности Σ , опирающейся на этот контур; $\Phi = \iint_{\Sigma} B_n d\sigma$ — поток индукции, пронизывающий контур C . Обозначая через T некоторый замкнутый объем, а через Σ — ограничивающую его поверхность, будем иметь вместо (3) и (4)

$$\iint_{\Sigma} B_n d\sigma = 0, \quad (3')$$

$$\iint_{\Sigma} D_n d\sigma = 4\pi \iiint_T \rho d\tau = 4\pi e, \quad (4')$$

где e — полный заряд внутри объема T .

Уравнения (1') — (4') имеют простой физический смысл и являются математическим выражением основных опытных фактов, послуживших основанием для вывода уравнений Максвелла. Так, уравнение (1') является обобщением известного закона Био и Савара, уравнение (2') выражает собой закон электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (4') может быть непосредственно выведено из закона Кулона. Уравнение (3') является следствием замкнутости силовых линий магнитного поля.

Если среда неоднородна, то к уравнению Максвелла следует присоединить условия сопряжения. На границе раздела двух разных сред (1) и (2) должны выполняться следующие условия:

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)} \quad (9)$$

(непрерывность тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E}),

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)} \quad (10)$$

(непрерывность тангенциальных составляющих вектора \mathbf{H}), а также

$$B_{n_1}^{(1)} = B_{n_2}^{(2)} \quad (11)$$

(непрерывность нормальных составляющих вектора \mathbf{B}),

$$D_{n_1}^{(1)} - D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n_1}^{(1)} - \varepsilon_2 E_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \quad (12)$$

где n_1 и n_2 — нормали к поверхности раздела двух сред, причем n_1 направлена внутрь первой среды, а n_2 — внутрь второй среды, ν — поверхностная плотность зарядов. Эти условия легко получаются из уравнений (1')—(4').

Уравнения Максвелла вместе с граничными условиями позволяют однозначно найти электромагнитное поле в пространстве по заданному начальному состоянию поля. При этом для однозначного определения поля достаточно использовать условия (9) и (10) непрерывности тангенциальных составляющих поля.

Если электромагнитный процесс является статическим, т. е. не меняется во времени, то уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)},$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0.$$

Если, кроме того, среда не обладает проводимостью, т. е. $\sigma = 0$, то мы получаем две независимые системы уравнений для электрического и магнитного полей

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения электростатики}),$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mu \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{уравнения магнитостатики}).$$

Уравнения электростатики были рассмотрены нами в главе IV и в приложениях к главе IV.

В случае однородной среды нетрудно получить уравнения для каждого из векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в отдельности. Предположим, что $\rho = 0$, $\mathbf{j}^{(e)} = 0$.

Применяя к уравнению (1) операцию rot , имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

откуда в силу уравнения (2) и соотношения $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$ получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

или

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \left(a^2 = \frac{c^2}{\epsilon\mu} \right), \quad (13)$$

так как

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Аналогично выводится уравнение для \mathbf{E}

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (14)$$

В частности, уравнению (13) или (14) будут удовлетворять компоненты E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (15)$$

где u — одна из компонент E_x, E_y, E_z или H_x, H_y, H_z .

Характер процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая ($\sigma = 0$), то мы получаем обычное уравнение колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (16)$$

т. е. электромагнитные процессы распространяются в непроводящей среде без затухания со скоростью $a = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ и, в частности, в пустоте со скоростью света c .

Если среда обладает большой проводимостью и можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то будем иметь уравнение параболического типа

$$\Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (17)$$

В общем случае, когда токи проводимости и токи смещения одного порядка, уравнение (15) является уравнением гиперболического типа, описывающим процессы распространения с затуханием, вызываемым диссипацией энергии вследствие проводимости.

Для установившихся процессов, например, в задачах дифракции

$$u = v(x, y, z) e^{i\omega t},$$

мы приходим к уравнению эллиптического типа

$$\Delta v + (k^2 - iq^2)v = 0, \quad (18)$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \quad q^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \quad (19)$$

Статические поля, как было уже отмечено в главе IV, описываются уравнением Лапласа.

2. Потенциалы электромагнитного поля. Для определения электромагнитного поля мы должны найти шесть величин, являющихся составляющими векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . В ряде случаев, однако, можно свести эту задачу к отысканию четырех, а иногда и меньшего числа величин. С этой целью вводят потенциалы поля — векторный \mathbf{A} , скалярный φ — следующим образом. Рассмотрим уравнение Максвелла в однородной среде, например, в пустоте. Из уравнения (3)

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

следует, что вектор \mathbf{H} соленоидален и потому может быть представлен с помощью другого вектора \mathbf{A} в виде

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

получаем:

$$\operatorname{rot} \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0,$$

т. е. вектор $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ является потенциальным и потому может быть представлен в виде градиента некоторой скалярной функции φ

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (21)$$

откуда следует

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Введенные таким образом векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ определены не однозначно. В самом деле, из формул (20) и (21) видно, что мы получим одни и те же поля, если заменим \mathbf{A} и φ потенциалами

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} F, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t},$$

где F — произвольная функция. Чтобы устранить эту неопределенность, налагают на потенциалы \mathbf{A} и φ дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

называемое часто условием Лоренца. Покажем, что при выполнении этого условия потенциалы \mathbf{A} и φ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (23)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (24)$$

где ρ и \mathbf{j} — плотности заданных зарядов и токов.

Подставляя выражения (20) и (21) в уравнение (1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1)$$

и пользуясь векторным тождеством

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

будем иметь

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \Delta \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

откуда в силу условия (22) и следует уравнение (24). Подставляя затем выражение (21) в четвертое уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (4)$$

и учитывая условие (22), получим уравнение (23) для φ .

В случае однородной проводящей среды ($\sigma \neq 0$) потенциалы вводятся с помощью соотношений

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (25)$$

\mathbf{A} и φ связаны между собой соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \varphi = 0 \quad (26)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j} \quad (27)$$

$$\Delta\varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi\rho}{c}, \quad (28)$$

к которым относится все сказанное выше по поводу уравнений (23) и (24).

Если свободных зарядов нет ($\rho \equiv 0$), то потенциал $\varphi = 0$ и векторы поля выражаются через один вектор-потенциал \mathbf{A} , удовлетворяющий дополнительному условию

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

В ряде случаев электромагнитные поля можно описывать с помощью векторного потенциала, у которого отлична от нуля лишь одна компонента.

Некоторые из примеров будут рассмотрены в дальнейшем (см. также приложение I к гл. VII).

3. Электромагнитное поле осциллятора.

1. В теории излучения электромагнитных волн часто пользуются понятием осциллятора или вибратора. Это понятие тесно связано с представлением о линейных токах. Осциллятор представляет собой линейный ток бесконечно малой длины.

Рассмотрим прямолинейный ток L , сила которого меняется во времени. В простейшей модели предполагается, что сила тока неизменна по длине проводника.

Ток, постоянный по длине проводника, связан с наличием на его концах зарядов, меняющихся во времени. По аналогии с электростатическим диполем, представляющим совокупность двух зарядов $+e$ и $-e$, осциллятор можно характеризовать моментом

$$\mathbf{p}(t) = e(t) \mathbf{l}. \quad (1)$$

Сила тока в осцилляторе, очевидно, равна

$$\mathbf{J}(t) = \dot{e}(t),$$

так что

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{J}(t) \mathbf{l}. \quad (2)$$

Произведение $\mathbf{J}(t) \mathbf{l} = J_0(t)$ называют моментом тока.

2. Найдем электрическое поле, возбуждаемое осциллятором с моментом

$$\mathbf{p} = p_0 f(t) \quad (3)$$

в неограниченном пространстве, предполагая, что $\sigma = 0$, $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ (вакуум).

Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитного поля прямолинейным током L , предельным случаем которого является осциллятор.

Вне тока L электромагнитное поле определяется из уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

На линии тока L векторы поля \mathbf{H} и \mathbf{E} должны иметь особенность, характеризующуюся тем, что циркуляция по бесконечно

малой окружности K_ϵ , охватывающей линию тока L , имеет следующее значение:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{K_\epsilon} H_s ds = \frac{4\pi}{c} J, \quad (5)$$

где $J = J(t)$ — сила тока.

Из этого условия следует, что составляющая H_s на токе имеет особенность типа

$$H_s \approx \frac{2J}{c\rho}, \quad (6)$$

где $\rho = |\overrightarrow{M_0P}|$, M_0 — точка на линии L , P — точка на K_ϵ (при $\rho = \epsilon$).

Для однозначного определения поля надо добавить начальные условия, которые мы предполагаем нулевыми.

Для решения этой задачи целесообразно ввести потенциалы A и φ , через которые, как мы видели (см. стр. 444), поля выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

причем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Векторный потенциал вне тока L удовлетворяет однородному уравнению колебаний

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Введем декартову систему координат, направив ось z вдоль тока L . Положим

$$\mathbf{A} = A(x, y, z) \mathbf{z}^0,$$

где \mathbf{z}^0 — единичный вектор оси z .

Функция $A(x, y, z)$, очевидно, удовлетворяет вне линии тока L однородному уравнению колебаний

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Чтобы выяснить особенность вектора \mathbf{A} на токе, воспользуемся условием (6). Из уравнения (7) следует, что

$$H_s = \frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Пользуясь далее условием (6), находим, что функция $A(x, y, z)$ должна в точках линии L иметь особенность вида

$$A \approx \frac{2J}{c} \ln \rho. \quad (11)$$

Будем искать потенциал A в виде

$$A(P, t) = \int_L A_1(P, M, t) dL_M \quad (P = P(x, y, z)), \quad (12)$$

где $A_0(P, M, t) = A_1(P, M, t) dL_M$ — вектор-потенциал элементарного тока осциллятора, момент которого равен $J_0 = J dl$.

Для того чтобы потенциал A имел нужную особенность, функция $A_0(P, M, t)$ должна иметь особенность вида

$$A_0(P, M, t) \approx \frac{J_0(t)}{cR_{PM}}. \quad (13)$$

В самом деле, предполагая, что A_0 имеет указанную особенность, и вычисляя по формуле (12) значение A вблизи тока $L(0 < z < l)$, получаем:

$$\begin{aligned} A &\approx J \int_0^l \frac{1}{cR_{MP}} d\zeta = \frac{J}{c} \int_0^l \frac{d\zeta}{V\rho^2 + (z - \zeta)^2} = \\ &= \frac{J}{c} \ln [z - \zeta + V\rho^2 + (z - \zeta)^2] \Big|_0^l = \frac{J}{c} \ln \frac{z - l + V\rho^2 + (z - l)^2}{z + V\rho^2 + z^2} = \\ &= \frac{J}{c} \ln \frac{(l - z) \left[-1 + 1 + \frac{\rho^2}{2(l - z)^2} + \dots \right]}{z + V\rho^2 + z^2} = \frac{2J}{c} \ln \rho + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены члены, не обращающиеся в бесконечность при $\rho = 0$.

3. Таким образом, функция $A_0(P, M, t)$ должна удовлетворять по переменным $P(x, y, z)$, t уравнению колебаний

$$\Delta A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

всюду, кроме точки M , а в этой точке она должна иметь особенность вида

$$A_0 \approx \frac{J_0(t)}{cR_{MP}}. \quad (15)$$

Начальные условия в силу сказанного выше — нулевые.

Решение этой задачи, как мы видели в главе V, представляется в виде запаздывающего потенциала

$$A_0(M, P, t) = \frac{J_0 \left(t - \frac{R_{MP}}{c} \right)}{cR_{MP}}. \quad (16)$$

Как было отмечено выше, момент тока равен

$$\mathbf{J}_0(t) = J(t) d\ell = \frac{dp}{dt} = p_0 \dot{\ell}(t). \quad (17)$$

Таким образом, вектор-потенциал осциллятора можно также представить в виде

$$A_0 = \frac{p_0 \dot{\ell} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{cr}. \quad (18)$$

Часто вместо вектора-потенциала пользуются поляризационным потенциалом или вектором Герца Π , полагая

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (19)$$

Вектор Π также удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

и связан со скалярным потенциалом соотношением

$$\varphi = -\operatorname{div} \Pi. \quad (21)$$

Векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через поляризационный потенциал с помощью формул

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi, \quad (22)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (23)$$

Учитывая соотношение (18), получаем следующее выражение поляризационного потенциала для осциллятора

$$\Pi_0 = \frac{p_0 \dot{\ell} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \quad \text{или} \quad \Pi_0 = \frac{p \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (24)$$

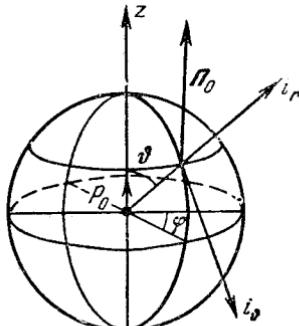


Рис. 77.

4. Для вычисления полей \mathbf{E} и \mathbf{H} перейдем к сферической системе координат (r, θ, ϕ) , в начале координат которой поместим осциллятор и направим ось $z(\theta = 0)$ вдоль вектора \mathbf{p}_0 (рис. 77). Обозначим i_r, i_θ, i_ϕ единичные векторы сферической системы координат.

Вектор Π_0 , параллельный вектору \mathbf{p} , может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \Pi_0 \cos \theta i_r - \Pi_0 \sin \theta i_\theta, \\ \Pi_0 &= |\Pi_0|. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в формулы (22) и (23), пользуясь выражением дифференциального оператора $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ в сферической системе координат

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{F} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{i}_\varphi\end{aligned}$$

и учитывая, что $\Pi_0 = \Pi_0(r, t)$, получим:

$$\left. \begin{aligned}E_r &= -\frac{2 \cos \vartheta}{r} \frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \\ E_\theta &= \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} \right), \quad E_\varphi = 0,\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}H_r &= 0, \quad H_\theta = 0, \\ H_\varphi &= -\sin \vartheta \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r \partial t}.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Из уравнений (26) и (27) следует, что электрическое и магнитное поля осциллятора взаимно перпендикулярны.

5. Рассмотрим частный случай, когда момент диполя периодически зависит от времени

$$\mathbf{p}(t) = p_0 e^{-i\omega t}.$$

В этом случае формулы (26) и (27) дают:

$$\left. \begin{aligned}E_r &= 2 \cos \vartheta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \Pi_0, \\ E_\theta &= \sin \vartheta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2 \right) \Pi_0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \right), \\ H_\varphi &= ik \sin \vartheta \left(ik - \frac{1}{r} \right) \Pi_0,\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

где

$$\Pi_0 = p_0 \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t}. \quad (29)$$

Исходя из формул (28), легко установить особенности строения поля осциллятора. На расстояниях, малых по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ ($kr \ll 1$), в формулах (28) можно ограничиться одним членом. Получающиеся при этом формулы для напряженности электрического поля соответствуют полю статического диполя, электрический момент которого p равен мгновенному значению момента осциллятора $p(t)$. Для напряженности магнитного поля получается выражение, соответствующее закону Био и Савара. На больших расстояниях от диполя