В качестве примера[1]) рассмотрим интегралы количеств движения и моментов количеств движения для свободной и изолированной от внешних воздействий системы материальных точек[2]):

$$P_x = \sum p_x, \quad P_y = \sum p_y, \quad P_z = \sum p_z,$$

$$M_x = \sum m_x = \sum (yp_z - zp_y), \quad M_y = \sum m_y = \sum (zp_x - xp_z),$$

$$M_z = \sum m_z = \sum (xp_y - yp_x),$$

где

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Функции P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z являются интегралами, т. е. имеют место «интегралы сохранения»

$$P_x = c_1, \quad P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \quad M_z = c_6, \tag{13}$$

если система изолирована. При наличии же внешнего силового поля с главным вектором $\boldsymbol{R}(X, Y, Z)$ и главным моментом $\boldsymbol{L}_O(L_x, L_y, L_z)$ любой из этих интегралов имеет место, если соответствующая из величин X, Y, Z, L_x, L_y, L_z равна нулю.

Составим скобки Пуассона для величин, связанных с одной точкой:

$$(p_x p_y) = 0, \quad (p_x m_y) = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial m_y}{\partial x} = p_z,$$

$$(m_x m_y) = \frac{\partial m_x}{\partial z}\frac{\partial m_y}{\partial p_z} - \frac{\partial m_x}{\partial p_z}\frac{\partial m_y}{\partial z} = xp_y - yp_x = m_z.$$

Заметим, что скобки Пуассона, в которых одна величина (p или m) относится к одной точке, а вторая к другой, всегда равны нулю; поэтому

$$\left.\begin{aligned} (P_x P_y) &= \sum (p_x p_y) = 0, \\ (P_x M_y) &= \sum (p_x m_y) = \sum p_z = P_z, \\ (M_x M_y) &= \sum (m_x m_y) = \sum m_z = M_z. \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

Циклической перестановкой букв x, y, z получаем аналогичные соотношения

$$\left.\begin{aligned} (P_y P_z) &= 0, & (P_z P_x) &= 0, \\ (P_y M_z) &= P_x, & (P_z M_x) &= P_y, \\ (M_y M_z) &= M_x, & (M_z M_x) &= M_y. \end{aligned}\right\} \tag{14''}$$

---

[1]) См. Ландау Л. и Пятигорский Л., Механика, М. — Л., 1940, стр. 151.

[2]) Здесь и далее в этом примере суммирование проводится по всем точкам системы.

Шесть законов сохранения (13) не являются независимыми. Из соотношений (14′) и (14″), следует, что если имеют место интегралы

$$P_x = c_1, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5, \tag{15}$$

то имеют место и интегралы

$$P_y = c_2, \quad P_z = c_3, \quad M_z = c_6. \tag{16}$$

Конечно, все это верно для *потенциального* силового поля. В непотенциальном силовом поле из равенств

$$X = 0, \quad L_x = 0, \quad L_y = 0 \tag{17}$$

не следуют равенства

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad L_z = 0\ ^{1)}. \tag{18}$$

---

[1]) Интегралы сохранения (15) имеют место лишь при выполнении равенств (17). Аналогично интегралы (16) имеют место лишь при наличии равенств (18).

ГЛАВА III

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 16. Принцип Гамильтона

Рассмотрим произвольную голономную систему с независимыми координатами $q_1, \ldots, q_n$ и функцией Лагранжа $L(t, q_i, \dot{q}_i)$.

Интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{1}$$

называется *действием (по Гамильтону)* за промежуток времени (t_0, t_1), а выражение $L\,dt$ — *элементарным действием*[1]).

Так как функция L имеет вид $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$, то для вычисления действия (1) необходимо задать функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ в интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Другими словами *действие W есть функционал, зависящий от движения системы.*

Если мы произвольно зададим функции $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то получим некоторое кинематически возможное (т. е. допускаемое связями) движение. В расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве, где координатами являются величины q_i и время t, это движение изображается некоторой кривой. Мы будем рассматривать всевозможные такие кривые—

---

[1]) Для натуральных систем $L = T - \Pi$ имеет размерность энергии. Поэтому размерность действия есть энергия $\times$ время $\equiv$ сила $\times$ длина $\times$ время.

«пути», проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, q_i^0)$ и $M_1(t_1, q_i^1)$ (см. рис. 29 для $n=2$), т. е. все возможные движения, переводящие систему из данного начального положения (q_i^0), которое она занимала в момент времени t_0, в данное конечное положение (q_i^1), которое она занимает в момент времени t_1. При этом заранее фиксируется начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, начальное и конечное положения системы. В остальном движения произвольны.

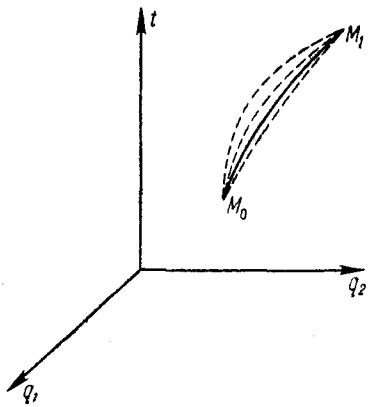

Рис. 29.

Если система натуральная и несвободная, то рассматриваемые здесь движения подчиняются лишь одному ограничению: при движении системы наложенные на точки системы связи не должны нарушаться. Это условие выполняется автоматически, когда мы задаем движение в независимых координатах, полагая $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Допустим, что среди рассматриваемых путей имеется так называемый «прямой» путь, т. е. путь, по которому может двигаться система при заданной функции L (т. е. в данном силовом поле). Для прямого пути функции $q_i = q_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{2}$$

Все остальные пути, проходящие через точки M_0 и M_1, будем называть «окольными» путями. (На рис. 29 прямой путь изображен сплошной линией, а окольные пути пунктирными линиями.)

Мы докажем, что *действие W имеет для прямого пути экстремальное (точнее, стационарное) значение*

по сравнению с окольными путями. В этом и заключается принцип Гамильтона [1]).

Рассмотрим произвольное однопараметрическое семейство путей

$$q_i = q_i(t, \alpha) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \quad -\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad i = 1, \ldots, n),$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ данный прямой путь; при $\alpha \neq 0$ получаются окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало M_0 и общий конец M_1:

$$q_i(t_0, \alpha) = q_i^0, \quad q_i(t_1, \alpha) = q_i^1 \quad (-\gamma \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad i = 1, \ldots, n).$$

Действие W, вычисленное вдоль пути, принадлежащего этому семейству, представляет собой функцию параметра α

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t,\alpha), \dot{q}_i(t,\alpha)]\, dt.$$

Вычислим *вариацию* действия W, т. е. дифференциал по α:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt. \qquad (3)$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям, использовав для этого перестановочность

---

[1]) Этот принцип содержится в работах У. Гамильтона, опубликованных в 1834—1835 гг. (см. сборник «Вариационные принципы механики», М., 1959, стр. 239). При этом Гамильтон предполагал, что исходная система склерономна (он исходил из представления кинетической энергии T в виде квадратичной формы от обобщенных скоростей). Для общего случая нестационарных связей этот принцип был сформулирован и обоснован М. В. Остроградским в 1848 г. (там же, стр. 770—771, 829). В связи с этим данный принцип иногда называют принципом Гамильтона — Остроградского.

операции варьирования δ и операции дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} q_i(t,\alpha)\, \delta\alpha = \\ = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t,\alpha)\, \delta\alpha\right] = \frac{d}{dt}\, \delta q_i.$$

Прямой и все окольные пути проходят через фиксированные начальную и конечную точки в расширенном координатном пространстве. Поэтому при $t = t_0$ и при $t = t_1$ вариации $\delta q_i = 0$ и проинтегрированная часть обращается в нуль.

Из равенства (3) видно, что для прямого пути, т. е. при $\alpha = 0$, выражение, стоящее под знаком преобразованного интеграла, в силу уравнений Лагранжа, равно нулю. Поэтому

$$\textit{для прямого пути } \delta W = 0. \tag{4}$$

Это и есть математическое выражение принципа Гамильтона.

Имеет место и обратное утверждение: если для некоторого пути $\delta W = 0$, то этот путь является прямым. Действительно, вследствие произвольности вариаций δq_i $(i = 1, \ldots, n)$ (они на концах равны нулю, в остальных же точках пути совершенно произвольны) из условия $\delta W = 0$, в силу равенства (3), следуют равенства (2), т. е. уравнения Лагранжа для прямого пути.

Поскольку из принципа Гамильтона вытекают уравнения Лагранжа в независимых координатах (и наоборот), то *принцип Гамильтона может быть положен в основу динамики голономных систем* [1]).

Прямые пути, т. е. «истинные» движения при заданной функции L, могут быть охарактеризованы как при помощи дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа, так и при помощи вариационного принципа Гамильтона. Однако между дифференциальными уравнениями движения и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие.

---

[1]) Приведенная выше формулировка принципа Гамильтона предполагает (в случае натуральной системы) существование потенциала сил. Более общая формулировка принципа, охватывающая и случай непотенциальных сил, будет дана ниже [формула (9) на стр. 109].

Дифференциальные уравнения движения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой момент времени t, положение системы, скорости и ускорения ее точек в этот момент. Если эта зависимость выполняется в каждой точке некоторого пути, то этот путь является прямым. Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом. Он формулирует экстремальное (стационарное) свойство некоторого функционала, выделяющее прямой путь среди других кинематически возможных путей. Вариационные принципы имеют более обозримую и компактную форму и часто используются в качестве фундамента для новых (неклассических) областей механики.

Замечание. Дифференциальные уравнения (2) представляют собой необходимые и достаточные условия для того, чтобы равнялась нулю первая вариация δW, где интеграл W имеет вид (1). В вариационном исчислении уравнения (2) называются *дифференциальными уравнениями Эйлера* для вариационной задачи

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i)\, dt = 0.$$

Для обоснования принципа Гамильтона были использованы уравнения Лагранжа в независимых координатах. Сами же эти уравнения в случае натуральной системы были получены из общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu)\, \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0. \tag{5}$$

Покажем, как *принцип Гамильтона может быть непосредственно обоснован с помощью общего уравнения динамики* (5). Тогда уравнения Лагранжа сразу получаются из принципа Гамильтона.

Если в выражениях для $\boldsymbol{r}_\nu$

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_i) \qquad (\nu = 1, \ldots, N)$$

вместо q_i подставить функции $q_i(t, \alpha)$, то $\boldsymbol{r}_\nu$ станет сложной функцией от t и α. Продифференцируем ее по α, т. е. вычислим вариации

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{6}$$

Эти формулы совпадают с формулами (8) на стр. 44, определяющими виртуальные перемещения точек голономной системы. Таким

образом, *вариации радиусов-векторов при любом t являются виртуальными перемещениями точек системы.*

В справедливости этого положения можно убедиться и не прибегая к формуле (6), а исходя только из определения вариации и виртуального перемещения. Действительно, вариация $\delta r_\nu = \frac{\partial r_\nu}{\partial \alpha}\delta\alpha$ представляет собой бесконечно малое перемещение точки системы P_ν, переводящее точку траектории, получающейся при некотором фиксированном значении α (для прямого пути $\alpha = 0$), в точку смежной траектории, соответствующей значению параметра $\alpha + \delta\alpha$ (рис. 30). При этом *обе точки берутся для одного и того же момента времени t*, так как при дифференцировании по α значение t фиксируется. Следовательно δr_ν осуществляет переход из одного возможного положения точки P_ν в момент времени t в другое возможное положение для того же момента t, т. е. δr_ν — виртуальное перемещение точки системы P_ν.

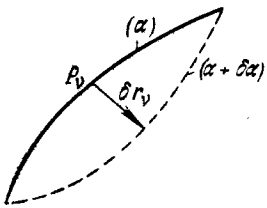

Рис. 30.

Таким образом, в общем уравнении динамики (5) мы можем считать δr_ν вариацией радиуса-вектора r_ν. Но тогда можно изменить последовательность выполнения операции $\frac{d}{dt}$ и операции δ дифференцирования по α:

$$\frac{d}{dt}\delta r_\nu = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha} r_\nu(t, \alpha)\,\delta\alpha = \frac{\partial}{\partial\alpha}\dot{r}_\nu(t, \alpha)\,\delta\alpha = \delta\dot{r}_\nu.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{r}_\nu \delta r_\nu = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \frac{d}{dt}\delta r_\nu =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta\dot{r}_\nu = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu - \delta T, \quad (7)$$

где δT — вариация кинетической энергии $T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu^2$.

Обозначая по-прежнему через δA элементарную работу активных сил F_ν на виртуальных перемещениях δr_ν ($\nu = 1, \ldots, N$), мы с помощью преобразования (7) записываем уравнение (5) в виде

$$\delta T + \delta A - \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu = 0.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по t в пределах от $t=t_0$ до $t=t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T+\delta A)\,dt-\left[\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{r}_\nu \delta r_\nu\right]_{t=t_0}^{t=t_1}=0. \tag{8}$$

Здесь $[\ ]_{t=t_0}^{t=t_1}$ означает разность между значениями (при $t=t_1$ и $t=t_0$) выражения, стоящего в квадратных скобках. Но при $t=t_0$ и $t=t_1$ радиус-вектор r_ν не варьируется, поскольку начальное и конечное положения системы заранее фиксированы:

$$r_\nu(t_0,\alpha)=r_\nu^0, \qquad r_\nu(t_1,\alpha)=r_\nu^1 \qquad (\nu=1,\ \dots,\ N).$$

Поэтому $\delta r_\nu=0$ при $t=t_0$ и при $t=t_1$. Второй член в равенстве (8) равен нулю, и это равенство принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T+\delta A)\,dt=0. \tag{9}$$

Рассмотрим тот случай, когда силы имеют потенциал $\Pi=\Pi(t,q_i)$. В этом случае

$$\delta A=-\delta\Pi,$$

где $\delta\Pi$ — виртуальный дифференциал (вариация) функции $\Pi(t,q_i)$ [1]), и равенство (9) записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T-\delta\Pi)\,dt=\int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt=0,$$

откуда

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=\int_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt=0.$$

Таким образом, основное уравнение динамики (5) привело нас к принципу Гамильтона $\delta W=0$, а отсюда, как было указано выше, сразу получаются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ \dots,\ n).$$

---

[1]) То есть $\delta\Pi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\delta q_i$.

В случае непотенциальных сил Q_i для получения уравнений Лагранжа следует исходить из равенства (9) [вместо равенства (4)]. Применяя к интегралу $\int_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt$ формулу (3) [с заменой функции L функцией $T(t, q_i, \dot{q}_i)$] и используя выражение для элементарной работы активных сил $\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$, мы найдем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i\, dt = 0. \tag{10}$$

Отсюда, в силу произвольности величин δq_i $(i = 1, \ldots, n)$, должны быть равны нулю выражения, стоящие в скобках под знаком интеграла (10), т. е. для прямого пути должны выполняться уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

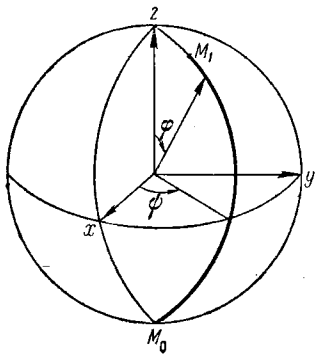

Рис. 31.

Выясним, *является ли значение действия для прямого пути наименьшим по сравнению с окольными путями.*

Рассмотрим в качестве примера *движение несвободной материальной точки, вынужденной двигаться по сфере при отсутствии силового поля* (движение по инерции на сфере). Пусть масса точки $m = 1$. В сферических координатах (рис. 31)

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{R^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\, \dot{\psi}^2).$$

Для прямого пути

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const}$$

(ψ — циклическая координата), т. е.

$$\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\, \dot{\psi}^2 = 0, \qquad \sin^2\varphi\, \dot{\psi} = \sin^2\varphi_0\, \dot{\psi}_0.$$

Без нарушения общности можем считать, что для прямого пути начальная скорость v_0 направлена по меридиану ($\psi = \text{const}$), т. е. $\dot{\psi}_0 = 0$; тогда

$$\dot{\psi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \text{const} \quad \text{и} \quad v^2 = R^2\dot{\varphi}^2 = \text{const}.$$

Таким образом, прямой путь представляет собой равномерное движение по дуге большого круга. При этом

$$W_{\text{ок}} - W_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (v^2 - v_0^2)\,dt =$$

$$= v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)^2\,dt \geqslant$$

$$\geqslant v_0 \int_{t_0}^{t_1} (v - v_0)\,dt = v_0(\sigma_{\text{ок}} - \sigma_{\text{пр}}).$$

Длина дуги большого круга $\sigma_{\text{пр}}$ меньше длины $\sigma_{\text{ок}}$ любой другой кривой на сфере, соединяющей те же точки M_0 и M_1. Поэтому

$$W_{\text{пр}} < W_{\text{ок}}.$$

Однако это справедливо лишь тогда, когда $\sigma_{\text{пр}} = \smile M_0M_1 < \pi R$. Если $\sigma_{\text{пр}} > \pi R$, то $W_{\text{пр}}$ уже не всегда будет меньше $W_{\text{ок}}$, а наименьшее значение действия W будет достигаться на дополнительной дуге большого круга, которая в этом случае будет представлять собой кратчайшее расстояние между M_0 и M_1. Если будем двигать точку M_1 по дуге большого круга, увеличивая эту дугу, то критической точкой M_0^* (до этой точки $W_{\text{пр}}$ будет минимумом, а после перехода точки M_1 через M_0^* уже не будет таковым) является точка, диаметрально противоположная точке M_0.

Аналогично обстоит дело и в общем случае. Доказывается[1]), что если точка M_1 выбрана достаточно близко к M_0, то через M_0 и M_1 проходит один прямой путь. Но при достаточном удалении точки M_1 от M_0 через M_0 и M_1 может

---

[1]) См. Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа, Приложение к т. LXI Зап. Ак. наук, СПб, 1889.

проходить два прямых пути или даже целый пучок прямых путей. Такое положение M_0^* точки M_1 называют *сопряженным кинетическим фокусом* для M_0. Установлено, что *действие вдоль прямого пути M_0M_1 имеет наименьшее значение по сравнению с окольными путями, если на дуге M_0M_1 нет сопряженного для M_0 кинетического фокуса M_0^*.*

§ 17. Вторая форма принципа Гамильтона

Остановимся еще на одной форме вариационного принципа Гамильтона. Вместо $(n+1)$-мерного расширенного координатного пространства рассмотрим $(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве рассмотрим прямой путь, проходящий через две точки $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ и $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$, а также всевозможные другие кривые, соединяющие эти точки («окольные» пути; см. рис. 32, $n=1$).

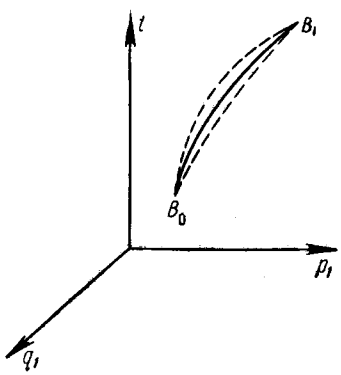

Рис. 32.

Функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, задающие прямой путь, удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \ldots, n). \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение функцию от $4n+1$ независимых переменных $L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)$, определяемую равенством [1])

$$L^*=\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i-H(t, q_i, p_i). \qquad (2)$$

С помощью этой функции канонические уравнения Гамильтона (1), как легко видеть, могут быть записаны в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial q_i}=0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}-\frac{\partial L^*}{\partial p_i}=0 \qquad (i=1, \ldots, n). \qquad (3)$$

---

[1]) В правую часть равенства (2) величины $\dot{p}_i$ фактически не входят. Поэтому функция L^* в данном случае от этих величин не зависит и $\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i}=0$ $(i=1, \ldots, n)$.

Так как прямой путь характеризуется уравнениями (3) типа Лагранжа, то как было установлено ранее, прямой путь в расширенном фазовом пространстве выделяется среди окольных путей тем, что для него интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L^*(t, q_i, p_i, \dot{q}_i, \dot{p}_i)\, dt \tag{4}$$

имеет стационарное значение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L^*\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \tag{5}$$

С первого взгляда может показаться, что вторая форма (5) для принципа Гамильтона ничем не отличается от первой $\delta W = 0$, поскольку, согласно формуле (8) на стр. 85, выражение L^* совпадает с функцией L. Однако это не всегда так. Это справедливо лишь для движений системы, т. е. для таких путей $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, у которых функции $q_i(t)$ и $p_i(t)$ связаны соотношениями

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Однако при второй форме принципа Гамильтона (в отличие от первой!) к сравнению допускаются в качестве окольных путей *произвольные кривые* $(2n+1)$*-мерного расширенного фазового пространства*, проходящие через точки B_0 и B_1. Для этих путей соотношения (6) могут не выполняться, и потому в общем случае для них $L^* \neq L$. Если же в формуле (5) ограничиться только теми окольными путями, для которых имеют место равенства (6), то вторая форма принципа Гамильтона переходит в первую $\delta W = 0$.

Заметим еще, что в отличие от точек M_0 и M_1 в первой форме принципа Гамильтона точки B_0 и B_1 не могут быть выбраны произвольно, так как через две произвольные точки расширенного фазового пространства в общем случае прямой путь провести нельзя. Точки B_0 и B_1 выбираются на том прямом пути, для которого формулируется принцип Гамильтона.

§ 18. Основной интегральный инвариант механики (интегральный инвариант Пуанкаре — Картана)

Выведем формулу для вариации действия δW в общем случае, когда начальные и конечные моменты времени, так же как и начальные и конечные координаты, не фиксированы, а являются функциями параметра α:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= t_0(\alpha), \quad q_i^0 = q_i^0(\alpha), \\ t_1 &= t_1(\alpha), \quad q_i^1 = q_i^1(\alpha) \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, n). \right\} \tag{1}$$

В этом случае, дифференцируя интеграл $W=\int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt$ по параметру α и интегрируя по частям, находим

$$\delta W=\delta\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt=$$

$$=L_1\,\delta t_1-L_0\delta t_0+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\,\delta \dot q_i\right)dt=$$

$$=L_1\delta t_1+\sum_{i=1}^{n} p_i^1\,[\delta q_i]_{t=t_1}-L_0\delta t_0-\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,[\delta q_i]_{t=t_0}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt; \qquad (2)$$

$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda}=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}q_i(t,\ \alpha)\right]_{t=t_\lambda}\delta\alpha \qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ \lambda=0,\ 1). \quad (3)$$

С другой стороны, для вариаций конечных координат $q_i^1=q_i^1\,[t_1(\alpha),\ \alpha]$ имеем формулы

$$\delta q_i^1=\dot q_i^1\,\delta t_1+\left[\frac{\partial q_i(t,\ \alpha)}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha$$

или

$$\delta q_i^1=[\delta q_i]_{t=t_1}+\dot q_i^1\,\delta t_1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда

$$[\delta q_i]_{t=t_1}=\delta q_i^1-\dot q_i^1\,\delta t_1 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \qquad (4)$$

Совершенно аналогично

$$[\delta q_i]_{t=t_0}=\delta q_i^0-\dot q_i^0\,\delta t_0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \qquad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) для $]\delta q_i]_{t=t_1}$ и $[\delta q_i]_{t=t_0}$ в выражение (2) для δW, выражая, как обычно, $\dot q_i$ через p_i и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot q_i-\widehat{L}=H,$$

получаем следующую формулу для вариации действия δW в общем случае:

$$\delta W = \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\Big]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i \, dt, \tag{6}$$

где

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\Big]_0^1 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q_i^0 + H_0 \delta t_0.$$

В частном случае, когда для любого α соответствующий путь является прямым, т. е. когда $q_i = q_i(t, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — семейство прямых путей, интеграл в правой части равенства (6) равен нулю при любом α и формула для вариации действия принимает следующий простой вид:

$$\delta W = \Big[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\Big]_0^1. \tag{7}$$

Вместо расширенного координатного $(n+1)$-мерного пространства возьмем расширенное фазовое $(2n+1)$-мерное пространство, в котором координатами точки будут величины q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$ и t. В этом пространстве возьмем произвольную замкнутую кривую C_0 с уравнениями

$$q_i = q_i^0(\alpha), \quad p_i = p_i^0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \tag{8}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \ 0 \leqslant \alpha \leqslant l).$$

Здесь при $\alpha = 0$ и $\alpha = l$ имеем одну и ту же точку кривой C_0. Из каждой точки кривой C_0, как из начальной, проведем соответствующий прямой путь. Такой путь однозначно определяется (после задания начальной точки) из системы канонических уравнений Гамильтона. Получим замкнутую трубку прямых путей (см. рис. 33, $n = 1$)

$$q_i = q_i(t, \alpha), \quad p_i = p_i(t, \alpha) \quad (i = 1, \ldots, n; \ 0 \leqslant \alpha \leqslant l), \tag{9}$$

где

$$q_i(t, 0) \equiv q_i(t, l), \quad p_i(t, 0) \equiv p_i(t, l) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

На этой трубке произвольно выберем вторую замкнутую кривую C_1, охватывающую трубку и имеющую с каждой образующей лишь одну общую точку. Уравнения кривой C_1 можно записать в виде [1])

$$q_i = q_i^1(\alpha),\ p_i = p_i^1(\alpha),$$
$$t = t_1(\alpha). \qquad (10)$$

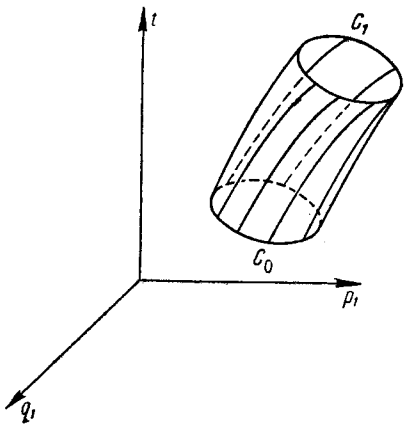

Рис. 33.

Рассмотрим действие W вдоль образующей трубки от кривой C_0 до кривой C_1:

$$W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt.$$

Тогда при любом α, согласно формуле (7),

$$\delta W = W'(\alpha)\,\delta\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\delta t\right]_0^1.$$

Интегрируя это равенство почленно по α в пределах от $\alpha = 0$ до $\alpha = l$, получаем

$$0 = W(l) - W(0) = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\delta t\right]_0^1 =$$
$$= \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^1\,\delta q_i^1 - H_1\,\delta t_1\right] - \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,\delta q_i^0 - H_0\,\delta t_0\right] =$$
$$= \oint_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\delta t\right] - \oint_{C_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\delta t\right],$$

т. е.

$$\oint_{C_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\delta t\right] = \oint_{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\delta t\right]. \qquad (11)$$

---

[1]) Каждому значению α из интервала $0 \leqslant \alpha \leqslant l$ соответствует определенная «образующая» трубки (прямой путь), а на этой образующей имеется только одна точка кривой C_1. Поэтому каждому значению α отвечает только одна точка кривой C_1, т. е. координаты точки кривой C_1 являются функциями параметра α.

Таким образом, установлено, что криволинейный интеграл

$$I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H \, \delta t \right], \tag{12}$$

взятый вдоль произвольного замкнутого контура, не меняет своего значения при произвольном смещении (с деформацией) этого контура вдоль трубки прямых путей, т. е. является *интегральным инвариантом*. Интеграл I мы будем называть *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана*.

Докажем теперь обратное предложение. Пусть известно, что прямые пути определяются системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j, p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Такое предположение является естественным, поскольку движение системы должно определяться однозначно по начальным данным q_i^0, p_i^0 $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть, кроме того, дано, что интеграл Пуанкаре — Картана (12) является интегральным инвариантом по отношению к прямым путям, определяемым системой уравнений (13), т. е. что для любой трубки этих путей интеграл Пуанкаре — Картана, вычисленный вдоль охватывающего трубку замкнутого контура, не изменяет своей величины при произвольном смещении точек контура вдоль образующих трубки. Тогда мы докажем, что между функцией H и функциями Q_i, P_i имеют место зависимости

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{14}$$

т. е. докажем, что уравнения (13) являются каноническими уравнениями Гамильтона с той функцией H, которая входит в выражение под знаком интеграла I.

Для доказательства введем вспомогательную переменную (параметр) μ, дополнив систему (13) еще одним уравнением:

$$\frac{dq_1}{Q_1} = \ldots = \frac{dq_n}{Q_n} = \frac{dp_1}{P_1} = \ldots = \frac{dp_n}{P_n} = \frac{dt}{1} = \pi \, d\mu. \tag{15}$$

Здесь $\pi = \pi(t, q_i, p_i)$ — произвольная функция от точки расширенного фазового пространства. Интегрируя систему

(15), мы находим выражения для q_i, p_i и t в виде функций от переменной μ и от произвольных начальных данных q_i^0, p_i^0 $(i=1, \ldots, n)$ и t_0 (при $\mu=0$):

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), \\ p_i &= \psi_i(\mu;\ q_j^0,\ p_j^0,\ t_0), \qquad (i=1, \ldots, n). \\ t &= \chi(\mu;\ q_i^0,\ p_i^0,\ t_0) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Мы получили параметрические уравнения для семейства всех прямых путей. Так как нам нужны только те прямые пути, которые образуют данную трубку, то мы должны выбирать начальную точку $M_0(q_j^0, p_j^0, t_0)$ на кривой C_0, т. е. в уравнения (16) вместо q_j^0, p_j^0 и t_0 следует подставить

$$q_j^0(\alpha), \qquad p_j^0(\alpha), \qquad t_0(\alpha).$$

Сделав это, мы найдем параметрические уравнения для прямых путей, образующих данную трубку,

$$q_i = q_i(\mu,\ \alpha), \quad p_i = p_i(\mu,\ \alpha), \quad t = t(\mu,\ \alpha) \tag{17}$$
$$(i=1, \ldots, n;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant l);$$

здесь значение α выделяет определенный прямой путь («образующую» трубки), а значение параметра μ фиксирует определенную точку на этом прямом пути.

Полагая $\mu = \text{const}$, мы на каждой образующей получаем точку, а на трубке — замкнутую кривую. Будем считать, что в интеграле (12) вместо q_i, p_i и t подставлены их выражения (17). Тогда интеграл I будет представлять собой функцию параметра μ и при каждом фиксированном значении μ будет криволинейным интегралом вдоль соответствующей замкнутой кривой $\mu = \text{const}$.

В силу инвариантности

$$dI = 0,$$

где буква d означает дифференцирование по параметру μ. Проводя дифференцирование под знаком интеграла, находим:

$$0 = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} (dp_i\, \delta q_i + p_i\, d\, \delta q_i) - dH\, \delta t - H\, d\delta t \right].$$

Написав $\delta\, dq_i$ и $\delta\, dt$ вместо $d\,\delta q_i$ и $d\,\delta t$ и проинтегрировав по частям вдоль замкнутого контура, получим [1]):

$$0=\oint\left[\sum_{i=1}^{n}(dp_i\,\delta q_i-\delta p_i\,dq_i)-dH\,\delta t+\delta H\,dt\right]=$$

$$=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt\right)\delta q_i+\left(-dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt\right)\delta p_i\right]+\right.$$

$$\left.+\left(-dH+\frac{\partial H}{\partial t}\,dt\right)\delta t\right\},$$

или, в силу (15), разделив почленно на $d\mu=\frac{dt}{\pi}$,

$$0=\oint\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(P_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i+\left(-Q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{dH}{dt}+\frac{\partial H}{\partial t}\right)\delta t\right\}\pi. \qquad (18)$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом при произвольном множителе π, а это возможно только тогда, когда выражение в фигурных скобках равно нулю. Приравняв это выражение нулю, получим

$$P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

что и требовалось доказать [2]).

Из доказанного следует, что *инвариантность интеграла Пуанкаре — Картана может быть положена в основу*

---

[1]) Операции d и δ можно переставить местами, так как они представляют собой дифференцирование по различным независимым переменным μ и α. Далее, при интегрировании по частям проинтегрированная часть пропадает (равна нулю), так как конечная точка пути интегрирования совпадает с начальной. Поэтому для любых двух функций u и v при интегрировании по замкнутому контуру $\oint u\,\delta v=-\oint v\,\delta u$.

[2]) Мы получаем еще тождество $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$, которое является следствием канонических уравнений Гамильтона [см. равенство (20) на стр. 88].

механики, так как из этой инвариантности вытекает, что движение системы подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона.

Замечание. При доказательстве мы ввели вспомогательную переменную μ и использовали то обстоятельство, что интеграл I не меняет своего значения при переходе от одной кривой семейства $\mu = \text{const}$ к другой кривой того же семейства. Из-за произвольности функции $\pi(t, q_i, p_i)$ семейство кривых $\mu = \text{const}$ по существу является произвольным семейством непересекающихся замкнутых кривых, охватывающих данную трубку прямых путей. Если мы не ввели бы параметр μ, а приняли бы в качестве параметра время t, то, повторяя те же рассуждения, мы только частично использовали бы инвариантность интеграла I (только для кривых из одновременных состояний $t = \text{const}$) и не могли бы прийти к нужному результату.

Рассмотрим теперь подробнее структуру интеграла Пуанкаре — Картана.

В интеграле Пуанкаре — Картана (12) время t входит на правах координаты q_i, а роль соответствующего импульса играет величина $-H$, т. е. энергия, взятая с противоположным знаком. Это — далеко идущая аналогия.

Сделаем в интеграле I замену переменных, введя новую переменную z, связанную со старыми переменными соотношением

$$z = -H(t, q_i, p_i). \tag{19}$$

Из этого соотношения выразим p_1:

$$p_1 = -K(t, q_1, \ldots, q_n, z, p_2, \ldots, p_n). \tag{20}$$

Тогда основной интеграл I в новых переменных запишется так:

$$I = \oint z\delta t + p_2\delta q_2 + \ldots + p_n\delta q_n - K\delta q_1. \tag{21}$$

Таким образом, и в новых переменных интеграл I имеет вид интеграла Пуанкаре — Картана, но только теперь роль времени играет переменная q_1, а вместо прежней энергии H стоит импульс p_1, взятый с противоположным знаком, т. е. K. Поэтому, согласно доказанному ранее, в новых переменных движение системы должно описываться следующей гамильтоновой

системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dt}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial z}, \quad \frac{dz}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial t}, \\ &\frac{dq_j}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j=2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь независимой переменной является q_1.

Проиллюстрируем это на примере линейного осциллятора. Для него

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}.$$

Составим канонические уравнения, приняв за независимую переменную q. Для этого положим

$$z=-\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{cq^2}{2}\right),$$

откуда

$$p=\sqrt{m}\sqrt{-2z-cq^2}.$$

Таким образом, в нашем случае

$$K=-\sqrt{m}\sqrt{-2z-cq^2}.$$

Соответствующие канонические уравнения (22) запишутся так:

$$\frac{dt}{dq}=\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{1}{\sqrt{-2\frac{z}{c}-q^2}}, \quad \frac{dz}{dq}=0.$$

Из второго уравнения $z=\text{const}=-h$. При помощи квадратуры находим t:

$$\omega t=\int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{c}-q^2}}-\alpha,$$

где $\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$, а α — произвольная постоянная, или

$$\omega t+\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{c}{2h}}\,q,$$

т. е.

$$q=A\sin(\omega t+\alpha) \quad \left(A=\sqrt{\frac{2h}{c}}\right).$$

§ 19. Гидродинамическая интерпретация основного интегрального инварианта. Теоремы Томсона и Гельмгольца о циркуляции и вихрях

Для конкретной интерпретации понятия об интегральном инварианте рассмотрим движение идеальной жидкости под действием внешних сил с потенциалом $\Pi(t, x, y, z)$. Как известно из гидродинамики [1]), уравнение движения частицы такой жидкости имеет вид

$$\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad}\Pi - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}$ — ускорение частицы, ρ и p — ее плотность и давление, а потенциал Π отнесен к единице массы.

Примем, что ρ и p связаны функциональным соотношением $\rho = f(p)$ (это в частности имеет место при изотермическом протекании процесса). Тогда, положив

$$\tilde{\Pi} = \Pi + \int \frac{dp}{\rho},$$

мы запишем уравнение (1) в виде

$$\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad}\tilde{\Pi}. \tag{1'}$$

Последнее уравнение показывает, что движение частицы жидкости идентично движению материальной точки с массой $m = 1$ в потенциальном поле $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(t, x, y, z)$. Поэтому для движения частиц жидкости интегральным инвариантом будет интеграл Пуанкаре — Картана, который в данном случае имеет вид

$$I = \oint u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t, \tag{2}$$

где u, v, w — компоненты скорости частицы [они в данном случае (при $m = 1$) представляют собой импульсы p_i], E — энергия, определяемая формулой

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \tilde{\Pi}(t, x, y, z). \tag{3}$$

Таким образом, интеграл (2), взятый вдоль произвольно замкнутого контура в семимерном пространстве (t, x, y, z, u, v, w), не меняет своей величины при произвольном смещении точек контура в соответствии с движением жидкости. Это движение происходит

---

[1]) См., например, Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика. т. I, М. — Л., 1948, стр. 48.

в соответствии с дифференциальными уравнениями, которые в силу формулы (1′) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,\\ &\frac{du}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial x},\quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial y},\quad \frac{dw}{dt}=-\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для данного частного случая уравнения (4) представляют собой канонические уравнения Гамильтона.

Если задано конкретное движение жидкости, при котором поле скоростей известно, т. е. если известны функции $u(t, x, y, z)$, $v(t, x, y, z)$, $w(t, x, y, z)$, то интеграл (2) можно рассматривать как интеграл в расширенном координатном пространстве, т. е. в четырехмерном пространстве t, x, y, z. Значение этого интеграла не меняется, если мы точки контура интегрирования произвольно сместим вдоль путей движения частиц, т. е. интеграл

$$\oint_C u(t, x, y, z)\,dx + v(t, x, y, z)\,dy + \\ + w(t, x, y, z)\,dz - E(t, x, y, z)\,dt \tag{5}$$

является интегральным инвариантом в расширенном координатном пространстве для движения жидкости с заданным полем скоростей.

Если контур интегрирования состоит из одновременных состояний ($t=\text{const}$), то интеграл (2) принимает вид

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z. \tag{6}$$

В гидродинамике этот интеграл называется *циркуляцией скорости* вдоль контура C. Мы попутно получили теорему Томсона о сохранении циркуляции скорости: *величина циркуляции* (6) *не изменится, если частицы жидкости, образующие контур в момент времени t_1, перевести в положения, занимаемые ими в произвольный другой момент времени t_2.*

Если частицы жидкости в некоторый момент времени образуют линию, то эти же частицы в другой момент образуют другую линию. Мы будем говорить о перемещающейся и деформирующейся со временем «жидкой линии». Аналогично определяется понятие «жидкой поверхности».

Теорема о сохранении циркуляции утверждает, что *каждой замкнутой жидкой линии отвечает определенная циркуляция.*

Заметим, что согласно формуле Стокса[1]) интеграл (6) записывается в виде интеграла по поверхности S, ограниченной контуром C:

$$\iint_S \xi\,\delta y\,\delta z + \eta\,\delta z\,\delta x + \zeta\,\delta x\,\delta y, \tag{7}$$

---

[1]) См., например, Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, М., 1956, т. 2, гл. 22, § 4.

где

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8}$$

— компоненты некоторого вектора Ω, называемого *вихрем* (*ротором*) *скорости* или просто *вихрем*. Интеграл (7) обычно представляют в виде

$$\iint\limits_S \Omega_n \, dS, \tag{7'}$$

где Ω_n — проекция вектора Ω на нормаль к поверхности, а dS — элемент площади поверхности S. Отсюда видно, что интеграл (7) задает *величину потока вихря* через поверхность. Теорема о сохранении циркуляции скорости переходит в теорему о сохранении потока вихря: *каждой ограниченной жидкой поверхности соответствует определенная величина потока вихря через эту поверхность* [1]).

Движение жидкости с заданным полем скоростей определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(t, x, y, z). \tag{9}$$

По отношению к интегральным кривым системы (9) интеграл (5) является интегральным инвариантом.

Поставим вопрос, какие другие системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(t, x, y, z)} = \frac{dy}{Q(t, x, y, z)} = \frac{dz}{R(t, x, y, z)} = \frac{dt}{U(t, x, y, z)} \tag{10}$$

наряду с системой (9) обладают тем же свойством, т. е. для каких еще систем интеграл (5) является интегральным инвариантом?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, введем на траекториях системы (10) параметр μ и приравняем, как это делалось в предыдущем параграфе, отношения (10) произведению $\pi(t, x, y, z)\, d\mu$, где π — произвольная функция. Рассмотрим трубку интегральных кривых системы (10) и охватывающий эту трубку замкнутый контур C, для которого $\mu = \text{const} = c$. Заметим, что значение интеграла (5) вдоль контура C не зависит от величины $\mu = c$.

Обозначая буквой d дифференцирование по μ и проводя те же рассуждения, что и на стр. 119, мы получим, опираясь на

---

[1]) Отсюда, в частности, следует, что в жидком объеме идеальной жидкости вихри не могут ни исчезать, ни появляться [если, конечно, силы имеют потенциал и имеет место соотношение $\rho = f(p)$].

формулы (8):

$$0 = d\oint u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t =$$
$$= \oint du\,\delta x + dv\,\delta y + dw\,\delta z - dE\,\delta t - \delta u\,dx - \delta v\,dy - \delta w\,dz +$$
$$+ \delta E\,dt = \oint \left[-\zeta\,dy + \eta\,dz + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) dt \right] \delta x + [*]\,\delta y +$$
$$+ [*]\,\delta z + \left[-dE - \frac{\partial u}{\partial t}\,dx - \frac{\partial v}{\partial t}\,dy - \frac{\partial w}{\partial t}\,dz + \frac{\partial E}{\partial t}\,dt \right] \delta t,$$

где коэффициенты при δy и δz получаются из коэффициента при δx циклической перестановкой.

Заменим dx, dy, dz, dt знаменателями дробей (10), умноженными на $\pi(t, x, y, z)\,dt$. Так как при любом выборе функции $\pi(t, x, y, z)$ выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом, то оно должно тождественно равняться нулю. Поэтому выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю (после замены в них дифференциалов dx, dy, dz, dt пропорциональными величинами P, Q, R, U), т. е. имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} \eta R - \zeta Q + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) U = 0, \\ \zeta P - \xi R + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) U = 0, \\ \xi Q - \eta P + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) U = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x}\right) P + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\right) Q + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) R = 0. \tag{12}$$

Соотношение (12) является следствием равенств (11), если $U \neq 0$, и равенств (11) и (1'), если $U = 0$.

Равенства (11) совместно с уравнениями (10) определяют все дифференциальные системы, по отношению к которым интеграл (5) является интегральным инвариантом. Среди этих систем будем искать те, для которых $U = 0$, т. е. $dt = 0$. Тогда из (11) найдем:

$$\frac{P}{\xi} = \frac{Q}{\eta} = \frac{P}{\zeta},$$

и система (10) примет вид

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \frac{dt}{0}. \tag{13}$$

Интегральные кривые системы (13) носят название *вихревых линий*.

Таким образом, *система дифференциальных уравнений вихревых линий является единственной системой с* $dt = 0$, *по*

отношению к которой интеграл (5) *является интегральным инвариантом* [1]).

Из этого положения вытекает важное следствие.

Возьмем в пространстве (x, y, z, t) произвольную трубку вихревых линий и два охватывающих ее контура C_1 и C_2 (рис. 34). В силу инвариантности интеграла (5) относительно вихревых линий

$$\oint\limits_{C_1} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t = \oint\limits_{C_2} u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t.$$

Зададим произвольно величину $\tau > 0$ и переместим любую точку пространства (x, y, z, t) в точку $(x', y', z', t+\tau)$, где x', y', z' — координаты в момент $t+\tau$ той частицы жидкости, которая в момент t имела координаты x, y, z. При таком сдвиге вдоль траекторий частиц жидкости вихревые линии перейдут в некоторые новые линии, которые мы назовем «перемещенными линиями». Взятая нами трубка вихревых линий перейдет в трубку перемещенных линий, а контуры C_1 и C_2 — в контуры D_1 и D_2 (см. рис. 34)[2]). Так как сдвиг осуществлялся движением частиц жидкости, то при сдвиге интеграл (5) не меняет своего значения:

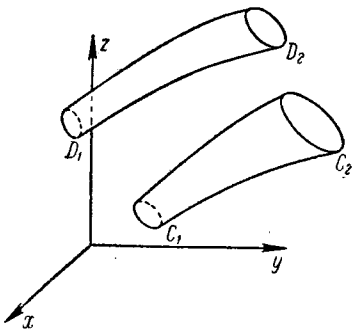

Рис. 34.

$$\oint\limits_{C_1} = \oint\limits_{D_1}, \quad \oint\limits_{C_2} = \oint\limits_{D_2};$$

но тогда

$$\oint\limits_{D_1} = \oint\limits_{D_2}. \tag{14}$$

Можно считать, что D_1 и D_2 — два произвольных контура, охватывающих трубку перемещенных линий. Поэтому равенство (14) выражает инвариантность интеграла (5) по отношению к «перемещенным линиям». При этом вдоль каждой перемещенной линии, как и вдоль вихревой, $dt = 0$. Следовательно, перемещенные линии обладают теми свойствами, которыми, как было показано ранее, могут обладать только вихревые линии. Значит, перемещенные линии являются вихревыми линиями. При этом время смещения τ является произвольным. Таким образом, любая вихревая линия при движении образующих ее частиц жидкости остается все время вихревой.

Мы пришли к теореме Гельмгольца, которую можно сформулировать и так: *вихревая линия есть жидкая линия.*

---

[1]) Интеграл (5) является интегральным инвариантом и для других систем [например, для системы (9)], у которых $dt \neq 0$.

[2]) Рассматриваемые здесь трубки вихревых линий расположены в четырехмерном пространстве (x, y, z, t), но на рис. 34 ось t не изображена.

Попутно мы получили, что с каждой вихревой трубкой связана определенная «интенсивность», определяемая интегралом

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z - E\,\delta t. \tag{15}$$

Величина этой интенсивности не меняется при движении жидкости. Если будем брать трубку вихревых линий для одного и того же момента времени t ($\delta t = 0$), то интенсивность (15) представляет собой циркуляцию скорости вдоль контура C

$$\oint_C u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z.$$

§ 20. Обобщенно-консервативные системы. Уравнения Уиттекера. Уравнения Якоби. Принцип наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа

Рассмотрим обобщенно-консервативную систему, т. е. произвольную (быть может, и ненатуральную) систему, для которой функция H не зависит явно от времени. Для нее имеет место обобщенный интеграл энергии

$$H(q_i, p_i) = h. \tag{1}$$

Этот интеграл аналогичен интегралу сохранения импульса $p_1 = c$, который имеет место в случае, когда q_1 является циклической координатой, т. е. когда $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$.

Исходя из аналогии между переменной времени t и циклической координатой, следует ожидать, что с помощью интеграла энергии (1) удастся понизить порядок системы дифференциальных уравнений движения на две единицы.

С этой целью рассмотрим обычное (т. е. нерасширенное) $2n$-мерное фазовое пространство, в котором координатами точки являются величины q_i, p_i ($i = 1, \ldots, n$). *Ограничимся рассмотрением только тех точек фазового пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению* (1) *с фиксированным значением постоянной* h_0. Другими словами, мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех состояний системы, которым соответствует заданная величина полной энергии

$$H = H(q_i^0, p_i^0) = h_0.$$

Тогда основной интегральный инвариант I представится в виде

$$I = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i, \tag{2}$$

поскольку, в силу равенства (1),

$$\oint H \delta t = h_0 \oint \delta t = 0.$$

Теперь разрешим уравнение (1) относительно одного из импульсов, например p_1:

$$p_1 = -K(q_1, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, h_0), \tag{3}$$

и полученное выражение подставим вместо p_1 в интеграл (2); тогда

$$I = \oint \left[\sum_{j=2}^{n} p_j \delta q_j - K \delta q_1 \right]. \tag{4}$$

Но интегральный инвариант (4) снова имеет вид интеграла Пуанкаре — Картана, если считать, что основными координатами и импульсами являются величины q_j и p_j ($j = 2, \ldots, n$), а переменная q_1 играет роль переменной времени (вместо функции H имеем функцию K). Поэтому (см. § 18) движение обобщенно-консервативной системы должно удовлетворять следующей гамильтоновой системе дифференциальных уравнений порядка $2n - 2$:

$$\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \qquad (j = 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Эти уравнения были получены Уиттекером и носят название *уравнений Уиттекера.*

Проинтегрировав систему уравнений Уиттекера, мы найдем величины q_j и p_j ($j = 2, \ldots, n$) как функции от переменной q_1 и $2n - 2$ произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_{2n-2}$; кроме того, интегралы уравнений Уиттекера будут содержать произвольную постоянную h_0, т. е. будут иметь вид

$$q_j = \varphi_j(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}), \qquad p_j = \psi_j(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2})$$
$$(j = 2, \ldots, n). \tag{6}$$

После этого, подставив выражение (6) в формулу (3), найдем аналогичное выражение для

$$p_1 = \psi_1(q_1, h_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{6'}$$

Таким образом определяются все траектории в фазовом пространстве т. е. геометрическая картина движения.

Зависимость координат от времени t мы получим из уравнения $\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}$ при помощи квадратуры

$$t=\int\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}+c_{2n-1}; \tag{7}$$

при этом в частной производной $\frac{\partial H}{\partial p_1}$ все переменные выражены через q_1 с помощью равенств (6) и (6').

Гамильтонова система уравнений Уиттекера (5) может быть заменена эквивалентной системой уравнений типа Лагранжа:

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial P}{\partial q'_j}-\frac{\partial P}{\partial q_j}=0 \qquad (j=2,\ \ldots,\ n), \tag{8}$$

где $q'_j=\frac{dq_j}{dq_1}$, а функция P (аналог функции Лагранжа) связана с функцией K (аналогом функции Гамильтона) равенством[1])

$$P=P(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ q'_2,\ \ldots,\ q'_n)=\sum_{j=2}^{n}p_jq'_j-K. \tag{9}$$

Обратим внимание на то, что система (8) содержит не n, а $n-1$ уравнений второго порядка. В последней части этого соотношения импульсы p_j должны быть заменены их выражениями через

$$q'_2=\frac{dq_2}{dq_1},\ \ldots,\quad q'_n=\frac{dq_n}{dq_1},$$

которые могут быть получены из первых $n-1$ уравнений (5).

Преобразуем выражение для функции P, исходя из равенств (3) и (9):

$$P=\sum_{j=2}^{n}p_jq'_j+p_1=\frac{1}{\dot q_1}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i=\frac{1}{\dot q_1}(L+H). \tag{10}$$

---

[1]) См. равенство (8) на стр. 85.

В случае натуральной, т. е. обычной, консервативной системы $L = T - \Pi$ и $H = T + \Pi$; следовательно

$$P = \frac{1}{\dot{q}_1}(L + H) = \frac{2T}{\dot{q}_1}, \tag{11}$$

причем кинетическая энергия T может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \dot{q}_1^2 G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n'); \tag{12}$$

здесь

$$G(q_1, \ldots, q_n, q_2', \ldots, q_n') = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k' \qquad (q_1' = 1). \tag{13}$$

Из равенств (1) и (12) находим

$$\dot{q}_1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}} \tag{14}$$

и получаем для функции P следующее выражение:

$$P = \frac{2T}{\dot{q}_1} = 2\sqrt{G(h - \Pi)}. \tag{15}$$

Дифференциальные уравнения (8), в которых функция P имеет вид (15) и которые, таким образом, относятся к натуральным, т. е. обычным, консервативным системам, носят название уравнений Якоби [1]).

Интегрируя уравнения Якоби, мы определяем все траектории в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$:

$$q_j = \varphi_j(q_1, h, c_1, \ldots, c_{2n-2}). \tag{16}$$

Связь координат с переменной времени устанавливается из соотношения (14) с помощью квадратуры

$$t = \int \sqrt{\frac{G}{h - \Pi}}\, dq_1 + c_{2n-1}. \tag{17}$$

Переходим теперь к установлению принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа. Поскольку уравнения (8)

---

[1]) Эти уравнения были выведены немецким математиком К. Якоби и содержатся в его классических «Лекциях по динамике», изданных в 1886 г. (русский перевод ГОНТИ, 1936). В случае ненатуральной обобщенно-консервативной системы функция P, входящая в уравнения Якоби, определяется формулой (9).

являются уравнениями типа Лагранжа, то из них вытекает вариационный принцип, согласно которому для прямого пути

$$\delta W^* = 0, \tag{18}$$

где

$$W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P\, dq_1 \tag{19}$$

— *действие по Лагранжу*. Здесь «допускаются к соревнованию» все движения обобщенно-консервативной системы, которые переводят систему из заданного начального положения q_i^0 в заданное конечное положение q_i^1 (рис. 35). При этом моменты времени t_0 и t_1 не фиксируются и при переходе от прямого пути к окольным могут варьироваться [1]).

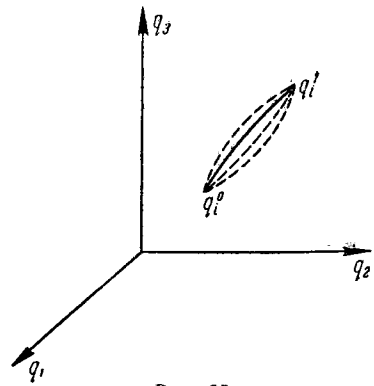

Рис. 35.

Выражая в интеграле (19) функцию P с помощью равенства (10), находим связь между действием по Лагранжу W^* и действием по Гамильтону W:

$$W^* = \int_{t_0}^{t_1} (L + H)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt + h \int_{t_0}^{t_1} dt = W + h(t_1 - t_0). \tag{20}$$

В случае обычной (натуральной) консервативной системы можно воспользоваться выражением (11) и представить действие

---

[1]) Равенство (18) устанавливает, что для прямого пути действие по Лагранжу имеет стационарное значение. Вопрос о том, когда действие W^* имеет для прямого пути наименьшее значение, решается с привлечением кинетических фокусов совершенно так же, как и для принципа Гамильтона. Более подробно об этом см. Суслов Г. К., Теоретическая механика, § 248.

по Лагранжу в виде

$$W^* = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\,dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\,ds_\nu. \quad (21)$$

Но при этом уже имеется в виду, что «к соревнованию» допускаются только те движения системы, при которых полная энергия системы имеет одно и то же значение h (изоэнергетичность!).

Полученное выражение для W^* показывает, что *действие по Лагранжу W^* равно работе векторов количеств движения точек системы на соответствующем перемещении системы.*

Вариационный принцип (18) носит название *принципа наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа* [1]).

В качестве примера рассмотрим сравнение оптического принципа Ферма с принципом наименьшего действия Мопертюи — Лагранжа [2]).

Согласно принципу Ферма свет в неоднородной среде распространяется так, чтобы время пробега

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v} \quad (22)$$

было минимальным.

Введя в каждой точке среды коэффициент преломления $n = \frac{c}{v}$ — отношение скорости света c в пустоте к скорости v в данной среде, — мы преобразуем эту формулу к виду

$$t = \frac{1}{c}\int_{s_0}^{s} n\,ds,$$

где n — функция точки среды. Поэтому принцип Ферма запишется так:

$$\delta \int_{s_0}^{s} n\,ds = 0. \quad (23)$$

---

[1]) Впервые в несколько туманной формулировке этот принцип был сформулирован Мопертюи в 1747 г. Строгая формулировка и обоснование принципа были даны Лагранжем в 1760 г.

[2]) См., например, Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938, стр. 93—94.

С другой стороны, для одной материальной точки с массой m принцип Мопертюи — Лагранжа дает (поскольку $^1/_2\, mv^2 + \Pi = h$)

$$\delta \int_{s_0}^{s} mv\, ds = \sqrt{m}\ \delta \int_{s_0}^{s} \sqrt{2(h-\Pi)}\, ds = 0. \tag{24}$$

Траектория светового луча совпадает с траекторией материальной точки, если [см. формулы (23) и (24)]

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n^2. \tag{25}$$

Если принять, что вблизи поверхности Земли показатель преломления n убывает как линейная функция высоты z

$$n = n_0 \left(1 - k\frac{z}{H}\right), \tag{26}$$

где H — высота атмосферы, то, пренебрегая малыми членами порядка $\left(\frac{z}{H}\right)^2$, можно написать

$$\Pi = h - \frac{1}{2} n_0^2 \left(1 - 2k\frac{z}{H}\right) = c + gz, \tag{27}$$

где

$$c = h - \frac{1}{2} n_0^2, \qquad g = \frac{kn_0^2}{H}. \tag{28}$$

Формула (27) определяет потенциал силы тяжести вблизи поверхности Земли с видоизмененным значением g.

Поэтому если показатель преломления n указанным образом изменяется с высотой, то свет распространяется по параболе с вертикальной осью.

§ 21. Движения по инерции. Связь с геодезическими линиями при произвольном движении консервативной системы

Пусть дана произвольная склерономная система; ее кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_k. \tag{1}$$

Введем метрику в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$, определив квадрат длины дуги ds^2 с помощью положительно определенной квадратичной дифференциальной формы

$$ds^2 = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\, dq_i\, dq_k. \tag{2}$$

Тогда величина дуги кривой, соединяющей две точки координатного пространства (q_i^0) и (q_i), определится равенством

$$s=\int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} ds=\int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)}\sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\,dq_i\,dq_k}. \tag{3}$$

Сопоставляя формулы (1) и (2), найдем, что при движении системы

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{4}$$

т. е. что *кинетическая энергия системы* [при метрике (2)] *всегда совпадает с кинетической энергией изображающей точки в n-мерном координатном пространстве, если этой точке приписать массу* $m=1$.

Рассмотрим теперь движение системы по инерции ($\Pi=0$). Тогда все возможные при таком движении траектории изображающей точки носят название *геодезических линий* [по отношению к метрике (2)]. Из интеграла энергии

$$T=h,$$

согласно формуле (4), следует, что

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2h}, \tag{5}$$

т. е. движению по инерции (а также любому движению с постоянным значением h кинетической энергии) соответствует в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$ равномерное движение изображающей точки со скоростью $\sqrt{2h}$.

В соответствии с принципом наименьшего действия геодезические линии являются экстремалями[1]) вариационной задачи

$$\delta W^*=0, \tag{6}$$

где W^* — действие по Лагранжу. Но в рассматриваемом случае как для прямого, так и для окольного пути имеет место интеграл энергии $T=h$ с фиксированным значением h; поэтому

$$W^*=\int\limits_{t_0}^{t} 2T\,dt=2h\,(t-t_0)=\sqrt{2h}\,s, \tag{7}$$

где $s=\sqrt{2h}\,(t-t_0)$ — длина кривой в координатном пространстве $(q_1, \ldots, q_n)$.

---

[1]) То есть кривыми, для которых W^* имеет стационарное значение.

Вариационная задача (6) принимает вид

$$\delta s = \delta \int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, *геодезическая линия характеризуется тем, что длина дуги этой кривой имеет экстремальное (точнее, стационарное) значение по сравнению с дугами других кривых, имеющими с геодезической одни и те же концы*[1]) (см. рис. 35 на стр. 131).

В случае, когда для прямого пути действие по Лагранжу имеет минимум, длина дуги геодезической меньше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки, что и дуга геодезической.

Поэтому геодезические линии называются также *кратчайшими линиями* в пространстве.

Рассмотрим теперь консервативную систему, т. е. склерономную систему с не зависящей явно от t потенциальной энергией $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_n)$. Тогда, согласно формулам (15) и (19) предыдущего параграфа,

$$W^* = 2\int\limits_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{G(h-\Pi)}\, dq_1 = 2\int\limits_{q_i^0}^{q_i} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k}. \tag{9}$$

Поэтому движение консервативной системы с данным значением полной энергии h осуществляется в координатном пространстве вдоль экстремали вариационной задачи (с закрепленными концами)

$$\delta \int\limits_{(q_i^0)}^{(q_i)} \sqrt{(h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k} = 0. \tag{10}$$

Сопоставляя формулу (10) с формулой (8), заключаем, что *для консервативной системы траектории прямых путей являются геодезическими линиями в координатном пространстве с метрикой*

$$ds_1^2 = (h-\Pi)\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dq_i\, dq_k. \tag{11}$$

---

[1]) Это всегда имеет место, когда концы дуги геодезической достаточно близки.

§ 22. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна

Рассмотрим теперь интеграл $I=\oint\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i - H\delta t\right]$ вдоль контура C, состоящего из одновременных состояний системы. Такой контур получается, если трубку прямых путей (см. рис. 33 на стр. 116) рассечь гиперплоскостью $t=\text{const}$. Для такого контура $\delta t=0$ и основной интегральный инвариант принимает вид

$$I_1=\oint\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i. \tag{1}$$

Этот интеграл был впервые введен Пуанкаре. Позже Картан распространил этот интеграл и на контуры, состоящие из неодновременных состояний, введя дополнительное слагаемое $-H\delta t$.

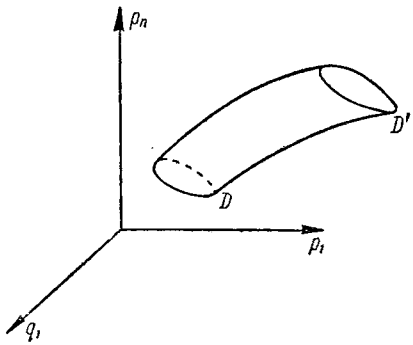

Рис. 36.

Интегральный инвариант Пуанкаре I_1 не меняет своего значения, если контур C смещается вдоль трубки прямых путей, переходя в контур C', состоящий снова из одновременных состояний. Интеграл I_1 удобно рассматривать в обычном (нерасширенном) $2n$-мерном фазовом пространстве $(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$. В этом пространстве контурам C и C' (рис. 33) соответствуют контуры D и D', охватывающие трубку «прямых» траекторий (рис. 36); при этом

$$\oint\limits_{D}\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i=\oint\limits_{D'}\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i.$$

Заметим, что один из контуров D и D', например D, можно выбрать совершенно произвольно. Можно считать, что точки контура D являются различными состояниями системы в один и тот же момент времени t; тогда соответствующие состояния системы в момент времени t' составят контур D'.

Вместо фазового пространства рассмотрим отдельно n фазовых плоскостей (q_i, p_i) $(i=1, \ldots, n)$. Спроектируем произвольный замкнутый контур D, расположенный в фазовом пространстве, на эти плоскости (рис. 37). Получим контуры D_i $(i=1, \ldots, n)$. Тогда для любого i

$$\oint_D p_i\,\delta q_i = \oint_{D_i} p_i\,\delta q_i = \pm S_i, \tag{2}$$

где S_i — площадь области, ограниченной контуром D_i в плоскости (q_i, p_i) $(i=1, \ldots, n)$. Направление обхода контура D индуцирует направление обхода на проекции D_i. В формуле (2) перед S_i берется знак плюс, если контур D_i обходится по часовой стрелке (т. е. в направлении кратчайшего поворота оси p_i к оси q_i), и знак минус — в противном случае.

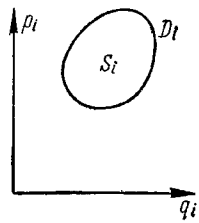

Рис. 37.

Тогда

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \pm S_i. \tag{3}$$

Таким образом, при движении системы меняются контуры D и D_i, изменяются и площади S_i, но *алгебраическая сумма* (3) *этих площадей остается неизменной.* Это и есть геометрическая интерпретация инвариантности интеграла Пуанкаре.

В выражение для I_1 не входит H. Следовательно, интеграл Пуанкаре I_1 является инвариантом для любой гамильтоновой системы. Поэтому интеграл I_1 называется *универсальным интегральным инвариантом.*

Нетрудно доказать и следующее положение.

Если для некоторой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_k, p_k), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_k, p_k) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4}$$

интеграл I_1 является инвариантом, то система (4) *является гамильтоновой.*

Действительно, в этом случае

$$0=\frac{d}{dt}I_1=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\frac{d}{dt}\delta q_i\right)=$$

$$=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i+p_i\delta\frac{dq_i}{dt}\right)=\oint\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dp_i}{dt}\delta q_i-\frac{dq_i}{dt}\delta p_i\right)=$$

$$=\oint\sum_{i=1}^{n}(P_i\,\delta q_i-Q_i\,\delta p_i).$$

Отсюда следует, что выражение, стоящее под знаком интеграла, является полным виртуальным дифференциалом некоторой функции — $H(t,\ q_k,\ p_k)$[1]:

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i\,\delta q_i-Q_i\,\delta p_i)=-\delta H(t,\ q_k,\ p_k),$$

т. е.

$$Q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad P_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad(i=1,\ \ldots,\ n),$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще следующие термины: интеграл Пуанкаре — Картана I и интеграл Пуанкаре I_1 называются *относительными* интегральными инвариантами первого порядка. Термин «относительный» означает, что область интегрирования представляет собой замкнутый контур; первый порядок означает, что в выражение, стоящее под знаком интеграла, дифференциалы входят линейно. Заметим, что относительный интегральный инвариант первого порядка I_1 при помощи формулы Стокса может быть представлен в виде абсолютного интегрального инварианта второго порядка

$$\oint_D\sum_{i=1}^{n}A_i\,\delta x_i=\iint_S\sum_{i<k}^{1,\ldots,n}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\delta x_i\,\delta x_k,\qquad(5)$$

---

[1]) Здесь $\delta H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right)$.

где интеграл в правой части берется по поверхности S, ограниченной замкнутым контуром D.

Эта формула в применении к интегралу I_1 дает

$$I_1 = \iint \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \, \delta q_i.$$

Известно, что в фазовом $2n$-мерном пространстве существуют следующие универсальные относительные интегральные инварианты I_{2k-1} нечетных порядков и абсолютные интегральные инварианты J_{2k} четных порядков,

$$I_1 = \oint \sum p_i \, \delta q_i = J_2 = \iint \sum \delta p_i \, \delta q_i,$$

$$I_3 = \oiiint \sum p_i \, \delta q_i \, \delta p_k \, \delta q_k = J_4 = \iiiint \sum \delta p_i \, \delta q_i \, \delta p_k \, \delta q_k,$$

. . . . . .

$$I_{2n-1} = \oint \cdots \oint \sum p_{i_1} \, \delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n} \, \delta q_{i_n} =$$

$$= J_{2n} = \int \ldots \int \delta p_{i_1} \, \delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n} \, \delta q_{i_n}.$$

В 1947 г. китайский ученый Ли Хуа-чжун доказал единственность этих универсальных интегральных инвариантов. Он показал, что всякий другой универсальный интегральный инвариант отличается постоянным множителем от одного из перечисленных интегралов [1]).

Нам в дальнейшем понадобится теорема Ли Хуа-чжуна для интегрального инварианта первого порядка; поэтому мы формулируем эту теорему для произвольного n и докажем ее для $n = 1$.

Теорема Ли Хуа-чжуна. *Если*

$$I' = \oint \sum_{i=1}^{n} [A_i(t, q_k, p_k) \, \delta q_i + B_i(t, q_k, p_k) \, \delta p_i]$$

— универсальный относительный интегральный инвариант, то

$$I' = cI_1, \tag{6}$$

где c — постоянная, а I_1 — интеграл Пуанкаре.

Доказательство. Пусть

$$I' = \oint A(t, q, p) \, \delta q + B(t, q, p) \, \delta p$$

---

[1]) Hwa-Chung Lee, Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, ser. A, v. LXII, 1947, p. 237—247.

— универсальный интегральный инвариант. Интегрирование ведется по замкнутому контуру в фазовой плоскости (q, p). Пусть, далее, дана какая-либо гамильтонова система дифференциальных уравнений с функцией $H(t, q, p)$:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{7}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$q=q(t, q_0, p_0), \quad p=p(t, q_0, p_0), \tag{8}$$

где q_0, p_0 — начальные значения q, p при $t=t_0$.

Пусть

$$q=q_0(\alpha), \quad p=p_0(\alpha) \tag{9}$$

$$[0\leqslant\alpha\leqslant l; \quad q_0(0)=q_0(l), \quad p_0(0)=p_0(l)]$$

— уравнения замкнутого контура D_0 в фазовой плоскости (рис. 38). Точки, которые в момент $t=t_0$ находились на контуре D_0, в произвольный другой момент времени t образуют контур D. Параметрические уравнения этого контура получаются из равенств (8), если туда вместо q_0 и p_0 подставить их выражения (9). Сделав это, получим:

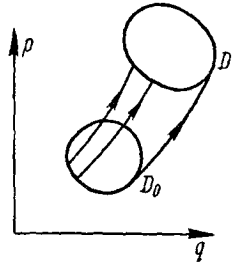

Рис. 38.

$$q=q(t, \alpha), \quad p=p(t, \alpha) \quad (0\leqslant\alpha\leqslant l). \tag{10}$$

Подставляя эти функции вместо q и p в интеграл I', мы получим I' как функцию параметра t. Из инвариантности I' следует, что $\frac{dI'}{dt}=0$. Дифференцируя под знаком интеграла и интегрируя по частям [1]), находим

$$0=\frac{dI'}{dt}=\oint\frac{dA}{dt}\delta q+\frac{dB}{dt}\delta p+A\frac{d}{dt}\delta q+B\frac{d}{dt}\delta p=$$

$$=\oint\frac{dA}{dt}\delta q+\frac{dB}{dt}\delta p+A\delta\frac{dq}{dt}+B\delta\frac{dp}{dt}=$$

[1]) См. примечание 1 к стр. 119. В процессе преобразований мы полагаем $\delta A=\frac{\partial A}{\partial q}\delta q+\frac{\partial A}{\partial p}\delta p$, $\delta B=\frac{\partial B}{\partial q}\delta q+\frac{\partial B}{\partial p}\delta p$ и затем используем уравнения (7).

$$=\oint \frac{dA}{dt}\,\delta q-\delta A\,\frac{dq}{dt}+\frac{dB}{dt}\,\delta p-\delta B\,\frac{dp}{dt}=$$

$$=\oint\left[\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\frac{dp}{dt}+\frac{\partial A}{\partial t}\right]\delta q+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial p}\right)\frac{dq}{dt}+\frac{\partial B}{\partial t}\right]\delta p=$$

$$=\oint\left(-Z\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial A}{\partial t}\right)\delta q+\left(-Z\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial t}\right)\delta p,$$

где

$$Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}.$$

Последний интеграл равен нулю при любом значении переменной t, рассматриваемой как параметр, и при произвольном контуре интегрирования. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла, должно быть полным дифференциалом относительно переменных q и p. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(-Z\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial B}{\partial t}\right),$$

или после элементарных преобразований

$$-\frac{\partial Z}{\partial p}\,\frac{\partial H}{\partial q}+\frac{\partial Z}{\partial q}\,\frac{\partial H}{\partial p}+\frac{\partial Z}{\partial t}=0.$$

Так как функцию H можно выбрать совершенно произвольно, то

$$\frac{\partial Z}{\partial p}=\frac{\partial Z}{\partial q}=\frac{\partial Z}{\partial t}=0,$$

т. е.

$$Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=\text{const}=c.$$

Тогда

$$\frac{\partial(A-cp)}{\partial p}=\frac{\partial B}{\partial q}$$

и, следовательно, существует функция $\Phi(t,\ q,\ p)$, такая, что [1])

$$(A-cp)\,\delta q+B\,\delta p=\frac{\partial\Phi}{\partial q}\,\delta q+\frac{\partial\Phi}{\partial p}\,\delta p=\delta\Phi.$$

---

[1]) Здесь время t рассматривается как параметр.

Но тогда

$$A\,\delta q + B\,\delta p = cp\,\delta q + \delta\Phi$$

и потому

$$\Gamma = \oint A\,\delta q + B\,\delta p = c\oint p\,\delta q = cI_1,$$

что и требовалось доказать.

При $n > 1$ идея доказательства сохраняется, хотя само доказательство становится более сложным.

§ 23. Инвариантность объема в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля

Рассмотрим «полный» абсолютный интегральный инвариант

$$J = \int \ldots \int \delta p_1\,\delta q_1 \ldots \delta p_n\,\delta q_n. \tag{1}$$

Инвариантность этого интеграла означает инвариантность фазового объема в $2n$-мерном фазовом пространстве и устанавливается следующим образом [1]).

Запишем конечные уравнения движения, получающиеся после интегрирования уравнений Гамильтона, в следующем виде:

$$q_i = q_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0),\quad p_i = p_i(t,\ q_k^0,\ p_k^0)\qquad (i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

где q_k^0, p_k^0 — начальные значения q_k, p_k при $t = t_0$ ($k = 1, \ldots, n$).

Выберем в фазовом пространстве некоторый объем J_0 и примем каждую точку из этого объема за начальную (при $t = t_0$). Тогда преобразование (2) к моменту времени t переводит объем J_0 в объем J. При этом

$$J = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} I\,\delta q_1^0\,\delta p_1^0 \ldots \delta q_n^0\,\delta p_n^0, \tag{3}$$

где

$$I = \left| \frac{\partial(q_1,\ p_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_n)}{\partial(q_1^0,\ p_1^0,\ \ldots,\ q_n^0,\ p_n^0)} \right|,$$

---

[1]) В дальнейшем (см. § 31) инвариантность фазового объема будет установлена, исходя из общих свойств движения гамильтоновых систем.

т. е. I является якобианом, составленным из частных производных от q_j, p_j по начальным данным q_i^0, p_i^0 $(i, j = 1, \ldots, n)$. Без нарушения общности, мы можем считать, что якобиан, стоящий в равенстве (3) под знаком интеграла, положителен, и опустить знак абсолютной величины.

При $t = t_0$ этот якобиан равен 1, поскольку при этом значении t все $q_k = q_k^0$ и $p_k = p_k^0$. При изменении t якобиан изменяется непрерывно, не обращаясь в нуль, так как особые точки, в которых этот якобиан мог бы обратиться в нуль, исключаются из рассмотрения, т. е. предполагается, что в рассматриваемом объеме таких точек нет. Тогда якобиан положителен в этом объеме[1]).

Дифференцируя по t под знаком интеграла, получаем:

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0} = \underbrace{\int \ldots \int}_{J_0} \left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0} \delta q_1\, \delta p_1 \ldots \delta q_n\, \delta p_n.$$

Подсчитаем производную от якобиана I:

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{2n} |I_i|_{t=t_0},$$

где I_i — определитель, получаемый из якобиана дифференцированием i-й строки. Учитывая теперь, что

1° при $i \neq j$ $\quad \left|\frac{\partial q_j}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial p_j}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} = 0,$

2° при любом i $\quad \left|\frac{\partial q_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial p_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} = 0,$

3° при любом i $\quad \left|\frac{\partial q_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial p_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} = 1,$

находим:

$$|I_i|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i^0}\right|_{t=t_0} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n$$

и

$$|I_i|_{t=t_0} = \left|\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right|_{t=t_0} \quad \text{для} \quad i = n+1, \ldots, 2n;$$

---

[1]) В доказательстве на стр. 185—186, упомянутом в предыдущем примечании, не требуется каких-либо предположений об особых точках.

поэтому

$$\left|\frac{dI}{dt}\right|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{2n}|I_i|_{t=t_0}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i^0}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i^0}\right]_{t=t_0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial q_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial p_i^0}-\frac{\partial}{\partial p_i^0}\frac{\partial H_0}{\partial q_i^0}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i^0\,\partial p_i^0}-\frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i^0\,\partial q_i^0}\right]=0.$$

Таким образом, $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{t=t_0}=0$. Так как начальный момент t_0 можно выбрать совершенно произвольно, то для любого t

$$\frac{dJ}{dt}=0, \tag{4}$$

т. е. величина фазового объема J не изменяется при сдвиге точек этого объема из состояний, занимаемых в момент времени t_0, в состояния, занимаемые в произвольный другой момент времени t.

Из инвариантности фазового объема вытекает одна из основных теорем статистической механики — теорема Лиувилля.

Представим себе, что имеется очень большое число совершенно одинаковых «экземпляров» системы, отличающихся друг от друга только начальными состояниями q_i^0, p_i^0 ($i=1, \ldots, n$). Все эти «экземпляры» образуют *статистический ансамбль*.

Примером статистического ансамбля является совокупность молекул газа, находящегося в данном объеме.

Каждому элементу объема dV фазового пространства можно отнести «массу» $d\mu$, характеризующую количество «экземпляров», приходящихся на данный элемент объема dV. В силу доказанной инвариантности объема в фазовом пространстве величина dV не меняется с течением времени. По своему физическому смыслу не изменяется и величина $d\mu$, так как экземпляры, находившиеся в объеме dV в какой-то момент времени, будут перемещаться вместе с этим объемом. Поэтому при движении остается неизменной плотность стати-

стического ансамбля

$$\rho(t, q_i, p_i) = \frac{d\mu}{dV}, \tag{5}$$

т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

В развернутом виде равенство (6) может быть записано так (см. § 15):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho H) = 0, \tag{6'}$$

где (ρH) — скобки Пуассона. Согласно равенству (6) функция $\rho(t, q_i, p_i)$ является интегралом движения.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема Лиувилля. *Плотность статистического ансамбля всегда является интегралом движения.*

Так, например, для консервативной системы любая функция от энергии системы может служить плотностью статистического ансамбля.

ГЛАВА IV

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

§ 24. Канонические преобразования

Преобразование координат в $2n$-мерном фазовом пространстве (содержащее в общем случае переменную времени t как параметр)

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(t, q_k, p_k)\\ \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(t, q_k, p_k)\end{aligned} \quad \left(i = 1, \ldots, n;\ \frac{\partial(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{q}_n, \tilde{p}_n)}{\partial(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)} \neq 0\right) \quad (1)$$

называется *каноническим*, если это преобразование переводит *любую* гамильтонову систему

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

снова в гамильтонову систему (вообще говоря, с другой функцией Гамильтона $\tilde{H}$):

$$\frac{d\tilde{q}_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \quad \frac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (3)$$

Важность изучения канонических преобразований связана с тем, что эти преобразования дают возможность заменить данную гамильтонову систему (2) другой гамильтоновой системой (3), в которой функция $\tilde{H}$ имеет более простую структуру, чем H.

Если в фазовом пространстве последовательно выполнить два канонические преобразования, то результирующее преобразование снова будет каноническим. Кроме того, преобразование, обратное некоторому каноническому преобразованию, всегда является кано-

ническим и тождественное преобразование $\tilde{q}_i = q_i$, $\tilde{p}_i = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ есть каноническое. Поэтому все канонические преобразования в совокупности образуют *группу*.

Примеры. 1. Преобразование

$$\tilde{q}_i = \alpha q_i, \quad \tilde{p}_i = \beta p_i \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0),$$

как легко проверить, является каноническим. Оно переводит систему (2) в систему (3) с

$$\tilde{H} = \alpha\beta H.$$

2. Преобразование

$$\tilde{q}_i = \alpha p_i, \quad \tilde{p}_i = \beta q_i \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0)$$

будет каноническим. В этом случае

$$\tilde{H} = -\alpha\beta H.$$

3. Преобразование

$$\tilde{q}_i = p_i \operatorname{tg} t, \quad \tilde{p}_i = q_i \operatorname{ctg} t \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

будет каноническим, так как легко проверяется, что из уравнений (2) всегда получаются уравнения (3) при

$$\tilde{H} = -H + \frac{1}{\sin t \cos t} \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \tilde{p}_i.$$

Для вывода условий, при которых преобразование (1) является каноническим, рассмотрим два расширенных

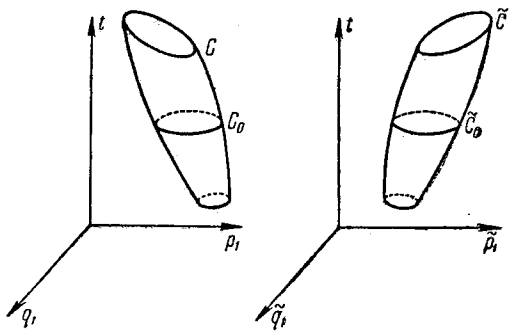

Рис. 39.

$(2n+1)$-мерных фазовых пространства (q_i, p_i, t) и $(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$, переходящих одно в другое при каноническом преобразовании (1), и две трубки прямых путей гамильтоновых систем (2) и (3) (рис. 39).

Возьмем два произвольных замкнутых контура C и $\tilde{C}$, которые охватывают эти трубки и соответствуют друг другу в силу преобразования (1). Кроме того, пересечем обе трубки одной и той же гиперплоскостью $t=\text{const}$. В сечении получим два «плоских» контура C_0 и $\tilde{C}_0$. Эти контуры также переходят друг в друга при каноническом преобразовании (1), так как при каноническом преобразовании величина t остается неизменной. Из инвариантности интеграла Пуанкаре — Картана следует, что

$$\oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] = \oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i, \tag{4}$$

$$\oint_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] = \oint_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i. \tag{5}$$

С другой стороны, если в универсальном интегральном инварианте $\oint \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i$ перейти к переменным q_i, p_i $(i=1,\ldots,n)$ с помощью канонического преобразования (1), то этот интеграл перейдет в некоторый универсальный интегральный инвариант первого порядка в $2n$-мерном фазовом (q_i, p_i)-пространстве; по теореме Ли Хуа-чжуна полученный инвариант может отличаться только постоянным множителем c от $\oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i$. Поэтому

$$\oint_{\tilde{C}_0} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i = c \oint_{C_0} \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i. \tag{6}$$

Из равенств (4) — (6) следует, что

$$\oint_{\tilde{C}} \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta \tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] = c \oint_{C} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right]. \tag{7}$$

Если в первом интеграле считать, что переменные $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ выражены через переменные $q_1, \ldots, p_n$ (при этом контур

интегрирования $\tilde{C}$ заменяется контуром интегрирования C), то равенство (7) может быть переписано так:

$$\oint_C \left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t\right] - c\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right] = 0. \qquad (8)$$

Но C — совершенно произвольный контур в $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла в равенстве (8), должно быть полным дифференциалом некоторой функции от $2n+1$ аргументов $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ и t. Эту функцию нам удобно будет обозначать через $-F(t, q_i, p_i)$; тогда [1])

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i - H\,\delta t\right) - \delta F. \qquad (9)$$

Заметим, что постоянная c в тождестве (9) всегда отлична от нуля, $c \neq 0$, так как выражение $\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\,\delta\tilde{q}_i - \tilde{H}\,\delta t$ не является полным дифференциалом [2]) и потому не может быть равным $-\delta F$.

Функцию F будем называть *производящей функцией*, а постоянную c — *валентностью* рассматриваемого канонического преобразования (1). Каноническое преобразование будем называть *унивалентным*, если для него $c = 1$.

Необходимым и достаточным условием каноничности преобразования (1) *является существование производящей функции F и некоторой постоянной c, при которых равенство* (9) *тождественно выполняется в силу преобразования* (1).

Замечание. Если преобразование (1) является каноническим, то существуют производящая функция F и валентность $c \neq 0$ такие, что имеет место равенство (9) при *любой* функции H и соответствующей $\tilde{H}$. Однако если равенство (9)

---

[1]) Здесь $\delta F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\,\delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\,\delta p_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\,\delta t.$

[2]) По отношению к независимым переменным $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t$, а следовательно, и по отношению к независимым переменным q_i, p_i, t $(i = 1, \ldots, n)$.

справедливо для одной пары функций H и $\tilde{H}$, то преобразование (1) уже является каноническим[1]).

Действительно, наряду с H возьмем произвольную другую функцию H_1 и определим $\tilde{H}_1$ из условия

$$\tilde{H}_1 - \tilde{H} = c(H_1 - H).$$

Умножая обе части этого равенства на δt и вычитая почленно полученное равенство из равенства (9), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i \, \delta \tilde{q}_i - \tilde{H}_1 \, \delta t = c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta q_i - H_1 \, \delta t\right) - \delta F.$$

Таким образом, равенство (9) справедливо для любой функции H_1 и соответствующей $\tilde{H}_1$.

Канонические преобразования иногда называют также *контактными преобразованиями*.

В литературе часто рассматривают только унивалентные канонические преобразования. Многие авторы ошибочно считают, что этими преобразованиями исчерпываются все преобразования (1), переводящие гамильтоновы системы снова в гамильтоновы. Эти авторы не замечают произвольного постоянного множителя c, который должен фигурировать в общей формуле для произвольного канонического преобразования.

§ 25. Свободные канонические преобразования

Проведем более подробное исследование так называемых *свободных* канонических преобразований. Эти преобразования характеризуются дополнительно неравенством

$$\frac{\partial(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0, \tag{1}$$

обеспечивающим независимость величин $t, q_1, \ldots, q_n, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$, которые теперь могут быть выбраны в качестве основных

---

[1]) Однако отсюда не следует, что каноническое преобразование можно определить как преобразование, переводящее одну *заданную* гамильтонову систему в некоторую другую гамильтонову систему.

Так, например, произвольное неканоническое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, p_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ переводит гамильтонову систему с $H \equiv 0$ в гамильтонову систему с $\tilde{H} \equiv 0$.