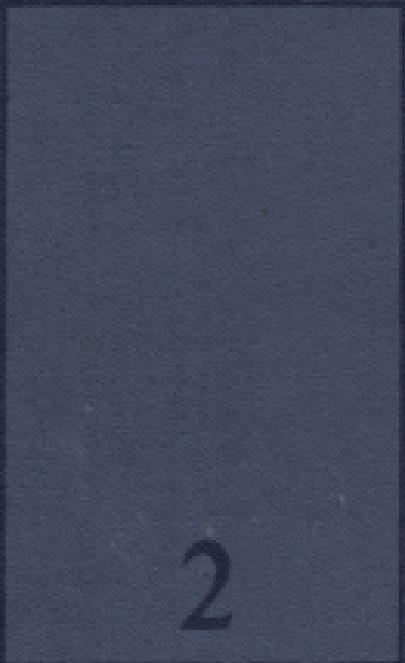


Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

---

КУРС  
математического  
АНАЛИЗА



2

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

Курс  
математического  
анализа

Том II

Допущено

Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов  
физико-математических  
и инженерно-физических  
специальностей вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981

**ББК 22.16**

**К 88**

**УДК 517 (0.75.8)**

**Кудрявцев Л. Д.**

**К88 Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов. М.: Высшая школа, 1981, т. II: — 584 с., ил.**

В пер.: 1 р. 50 к.

Во втором томе содержится интегральное и дифференциальное исчисление функций многих переменных, теория дифференцируемых отображений, теория рядов Фурье и преобразования Фурье, элементы функционального анализа и теория обобщенных функций.

Предназначается студентам университетов и физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов, а также студентам других специальностей для углубленной математической подготовки.

**K 20203—121  
001(01)—81 35—81 1702050000**

**517.2  
ББК 22.16**

**© Издательство «Высшая школа», 1981**

Настоящая книга является второй частью двухтомного курса математического анализа. В ней изложены вопросы, изучаемые обычно студентами на втором курсе. Нумерация глав, параграфов и рисунков в этом томе продолжает соответствующую нумерацию первого тома.

Глава пятая, с которой начинается этот том, посвящена дифференциальному исчислению функций многих переменных и по существу является непосредственным продолжением главы второй первого тома. Дальнейшие главы содержат изложение интегрального исчисления функций многих переменных, теории рядов и интеграла Фурье. Преобразование Фурье излагается сначала в классическом виде, а затем даются его обобщения для пространства  $L_2$  и для обобщенных функций. Заканчивается том небольшим «Дополнением», основная часть которого касается численных методов для вычисления приближенных значений функций приближенных решений уравнений и приближенных вычислений интегралов.

---

# ГЛАВА ПЯТАЯ

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### (продолжение)

#### **§ 39. ФОРМУЛА ТЕЙЛORA И РЯД ТЕЙЛORA ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

##### **39.1 ФОРМУЛА ТЕЙЛORA ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Если функция многих переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности можно (подобно тому как это было сделано для функций одного переменного) представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который «мал» в определенном смысле.

**Теорема 1.** Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка  $m$  включительно ( $m \geq 1$ ) в  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Тогда для всех  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , удовлетворяющих условию  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$ , существует такое  $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$ ,  $0 < \theta < 1$ , что справедлива формула

$$\begin{aligned}\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{3!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(3)} f(x_0, y_0) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(m-1)} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y),\end{aligned}$$

или, короче

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(k)} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \quad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(m)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y). \quad (39.2)$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка  $m-1$ ) для функции  $f$ , функция  $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$  — ее *остаточным членом*, а его запись в виде (39.2) — остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа*.

При  $m=1$  в (39.1) требует разъяснения смысл первого члена правой части, поскольку в этом случае верхний индекс суммирования равен нулю. В этом случае, по определению, полагается, что этот член равен нулю, т. е. что формула (39.1) имеет вид

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y).$$

В дальнейшем всегда, когда встретится выражение, записанное с помощью символа  $\Sigma$ , у которого значение верхнего индекса суммирования меньше значения нижнего индекса будем также считать, что это выражение равно нулю.

**Доказательство.** Пусть  $\Delta x$  и  $\Delta y$  зафиксированы так, что  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$ , тогда все точки вида  $(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y)$ , где  $0 \leq t \leq 1$ , лежат на отрезке, соединяющем точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , и поэтому все они принадлежат  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Вследствие этого имеет смысл композиция функций

$$z = f(x, y)$$

и

$$x = x_0 + t \Delta x, \quad y = y_0 + t \Delta y, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

т. е. сложная функция

$$F(t) = f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (39.3)$$

Очевидно, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \quad (39.4)$$

Поскольку функция  $f$  имеет в  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$   $m$  непрерывных частных производных, то, согласно теореме о производных сложной функции (см. п. 20.3), функция  $F$  также имеет на отрезке  $[0, 1]$   $m$  непрерывных производных и поэтому для нее справедлива формула Тейлора порядка  $m-1$  с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$F(t) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m, \\ 0 < \theta < 1, \quad (39.5)$$

и в рассматриваемой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функцию (39.3) можно  $m$  раз продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции (см. замечание 2 в п. 20.4), причем значения получающихся смешанных частных производных не зависят от порядка дифференцирования (см. п. 21.1).

Выразив производные  $F^{(k)}(t)$  через производные функции  $f(x, y)$  и положив в формуле (39.5)  $t=1$  (см. (39.4)), получим требуемую формулу Тейлора для функции  $f(x, y)$ . Действительно,

из (39.3) следует, что

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{\partial f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y)}{\partial y} \Delta y. \end{aligned}$$

Отсюда для  $F''(t)$ , опустив для краткости обозначения аргументов, получим

$$F''(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2.$$

Вообще по индукции легко установить, что

$$F^{(k)}(t) = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(k)} f(x_0 + t \Delta x, y_0 + t \Delta y), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (39.6)$$

Положив в формулах (39.6)  $t = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y; \\ F''(0) &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2, \end{aligned}$$

и вообще

$$F^{(k)}(0) = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(k)} f(x_0, y_0), \quad k = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (39.7)$$

При  $k = m$ , заменив  $t$  на  $\theta t$ ,

$$F^{(m)}(\theta t) = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(m)} f(x_0 + \theta t \Delta x, y_0 + \theta t \Delta y). \quad (39.8)$$

Подставим теперь (39.7) и (39.8) в (39.5) и положим  $t = 1$ ; тогда в силу соотношения (39.4)

$$\begin{aligned} \Delta z &= F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(k)} f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{m!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(m)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1. \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие.** В предположениях теоремы 1 справедлива формула

$$\Delta z = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(k)} f(x_0, y_0) + r_m(\Delta x, \Delta y), \quad (39.9)$$

причем остаточный член  $r_m(\Delta x, \Delta y)$  может быть записан в каждом из следующих видов:

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^m \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \quad (39.10)$$

т.е.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

или

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho^m, \quad (39.11)$$

где  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$ ,  $m. e.$

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m). \quad (39.12)$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в форме (39.12) называется его записью в *форме Пеано*.

**Доказательство.** Положим

$$\varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^m f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \quad (39.13)$$

В силу непрерывности всех частных производных порядка  $m$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Преобразуем остаток  $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$  (см. (39.2)), используя выражение (39.13), следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m C_m \frac{\partial^m f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} = \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m C_m \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k} + \\ &\quad + \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m C_m \varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k} = \\ &= \frac{1}{m!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} f(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^m \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k}, \end{aligned} \quad (39.14)$$

где  $\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{C_m^k}{m!} \varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y)$ , и потому

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (39.15)$$

Подставляя (39.14) в (39.1), получим формулу Тейлора (39.9) с остаточным членом в виде (39.10).

Покажем, что остаточный член (39.10) можно записать в виде (39.11). Для этого положим

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^m \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}. \quad (39.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} r_m(\Delta x, \Delta y) &= \sum_{k=0}^m \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \Delta x^k \Delta y^{m-k} = \\ &= \rho^m \sum_{k=0}^m \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) \left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \rho^m, \end{aligned}$$

и так как  $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \leq 1$  и  $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leq 1$ , то из (39.15) следует, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad \square$$

Используя понятие дифференциалов высших порядков, формуле Тейлора можно придать более компактную форму, внешне идентичную формуле Тейлора для функций одного переменного, записанной также с помощью дифференциалов. В самом деле, так как (см. п. 21.2)

$$d^k f(x, y) = \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(k)} f(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

то, полагая для краткости  $M_0 = (x_0, y_0)$  и  $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , формулу (39.9) можно записать в виде

$$\Delta z = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + r_m(M). \quad (39.17)$$

Эта форма записи формулы Тейлора наиболее проста и потому удобна для запоминания.

Сделаем несколько замечаний к доказательствам теоремы 1 и ее следствия. Прежде всего в условиях этой теоремы было потребовано, чтобы функция  $f$  имела непрерывные производные до порядка  $m$  включительно в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Можно было бы потребовать непрерывность в указанной окрестности только производных порядка  $m$ , поскольку из их непрерывности вытекает и непрерывность в этой окрестности всех младших производных данной функции, т. е. производных порядков  $k = 0, 1, \dots, m-1$  (см. п. 20.2).

Подчеркнем, что непрерывность частных производных в  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$  была использована, во-первых, для того чтобы встречающиеся частные производные не зависели от порядка дифференцирования (это было использовано как при доказатель-

стве формулы Тейлора (39.1), так и в самой форме записи этой формулы), и, во-вторых, для того, чтобы функцию (39.3) можно было  $m$  раз дифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции. Обратим внимание на то, что при  $m=1$  смешанные производные отсутствуют; для возможности же один раз дифференцировать функцию (39.3) по правилу сложной функции, а следовательно, и для справедливости теоремы 1 достаточно более слабого предположения о рассматриваемой функции  $f$ . Именно, вместо предположения о непрерывной дифференцируемости в вышеуказанной  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функции  $f$  достаточно ее дифференцируемости в этой окрестности (см. определения 2 и 4 в п. 20.2).

Непрерывность частных производных порядка  $m$  (в точке  $(x_0, y_0)$ ) использована также при доказательстве следствия теоремы 1: она нужна для того, чтобы функции  $\varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y)$ , определенные формулами (39.13), стремились к нулю при  $\rho \rightarrow 0$ .

Подчеркнем еще, что при сделанных предположениях в формуле (39.9) доказано, что  $r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m)$  при  $\rho \rightarrow 0$  не в смысле предела по любому фиксированному направлению, как может показаться на первый взгляд из приведенного доказательства, а в более сильном смысле — в смысле предела в точке  $(x_0, y_0)$  (почему?).

Формулу (39.1) можно несколько обобщить, если не стремиться к тому, чтобы она была справедливой для всех точек  $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y)$   $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , а рассматривать эту формулу лишь при фиксированных  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Именно, если функция  $f$  определена и имеет непрерывные частные производные порядка  $m$  на открытом множестве, содержащем отрезок с концами  $(x_0, y_0)$  и  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , то формула (39.1) также остается справедливой вместе с ее доказательством. Из этого следует, что если функция  $f$  определена в выпуклой области  $G$  (см. п. 18.2) и имеет в  $G$  непрерывные частные производные порядка  $m$ , то для любых двух точек  $(x_0, y_0) \in G$  и  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G$  справедлива формула Тейлора (39.1).

**Упражнение 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна вместе со своими частными производными до порядка  $m$  включительно в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Доказать, что ее многочлен Тейлора порядка  $m$ , т. е. многочлен

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{\{k\}} f(x_0, y_0)$$

является многочленом наилучшего приближения функции  $f(x, y)$  «в бесконечно малой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ». Это означает следующее: каков бы ни был многочлен  $Q(x, y)$ , степени не большей  $m$  (т. е. в каждом его члене сумма показателей степеней у переменных  $x$  и  $y$  должна не превышать числа  $m$ ) такой, что

$$f(x, y) = Q(x, y) + o(\rho^n), \quad n \geq m, \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

где

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

он совпадает с указанным многочленом Тейлора  $P(x, y)$  функции  $f(x, y)$ .

Все сказанное переносится и на случай функций любого числа переменных.

**Теорема 1'.** Если функция  $n$  переменных  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка  $m$ ,  $m \geq 1$ , включительно в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ , то справедлива формула

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} f(x^{(0)}) + r_{m-1}(\Delta x), \end{aligned} \quad (39.18)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x) = \frac{1}{m!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(m)} f(x^{(0)} + \theta \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \theta \Delta x_n),$$

$$0 < \theta < 1, \quad \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n), \quad (39.19)$$

а также формула

$$\Delta y = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x), \quad (39.20)$$

где  $r_m(\Delta x)$  можно записать в каждом из следующих видов: либо

$$r_m(\Delta x) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(\Delta x) \Delta x_1^{m_1} \dots \Delta x_n^{m_n}, \quad (39.21)$$

$$\text{где } \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_{m_1, \dots, m_n}(\Delta x) = 0, \quad \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}, \text{ либо}$$

$$r_m(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x) \rho^m, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \quad (39.22)$$

т. е.

$$r_m(\Delta x) = o(\rho^m), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Наконец, через дифференциалы формулу (39.20) можно записать в виде

$$\Delta y = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x). \quad (39.23)$$

Раскроем теперь скобки в формулах (39.18) и (39.19), воспользовавшись алгебраической формулой

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}.$$

Для того чтобы короче записать результат, введем новые обозначения. Положим  $k = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $k! = k_1! \dots k_n!$ ,

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad (x - x^{(0)})^k = (x_1 - x_1^{(0)})^{k_1} \dots (x_n - x_n^{(0)})^{k_n};$$

$k = (k_1, \dots, k_n)$  — называется *мультииндексом*.

В этих обозначениях формула Тейлора (39.18) с остаточным членом в виде (39.19) перепишется в виде

$$f(x) = \sum_{|k| < m} \frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!} (x - x^{(0)})^k + \sum_{|k| = m} \frac{f^{(k)}(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}))}{k!} (x - x^{(0)})^k.$$

Здесь как всегда,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  и

$$x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}) = (x_1^{(0)} + \theta(x_1 - x_1^{(0)}), \dots, x_n^{(0)} + \theta(x_n - x_n^{(0)})).$$

В этом виде формула Тейлора для функций любого числа переменных выглядит так же, как и для функций одной переменной.

Иногда, особенно в случае функций многих переменных, для производных употребляется обозначение

$$D^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  — мультииндекс. Если пользоваться этой символикой, то формула Тейлора примет вид

$$f(x) = \sum_{|k| < m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)}) (x - x^{(0)})^k + \\ + \sum_{|k| = m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)})) (x - x^{(0)})^k, \quad 0 < \theta < 1.$$

### 39.2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частный случай формулы Тейлора (39.18), в котором  $m = 1$ , обычно называется формулой конечных приращений Лагранжа для функций многих переменных. В силу сделанных в предыдущем пункте замечаний к теореме 1 о предположениях, при которых справедливы формулы (39.1) и (39.18), из теоремы 1' получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема в каждой точке некоторой выпуклой области  $G \subset R^n$ , то для каждой пары точек  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$  из  $G$  существует такой  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , что

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n + \theta \Delta x_n)}{\partial x_i} \Delta x_i, \end{aligned}$$

или, короче,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x + \theta \Delta x)}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad (39.24)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x + \Delta x = (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n)$  и  
 $x + \theta \Delta x = (x_1 + \theta \Delta x_1, \dots, x_n + \theta \Delta x_n)$ .

Формула (39.24), как указывалось, и называется *формулой конечных приращений Лагранжа*.

Эта формула, так же как и вообще формула Тейлора, находит многочисленные и разнообразные применения в различных вопросах математического анализа.

Обратим внимание на то, что теорема 2 не является частным случаем теоремы 1, поскольку в ней требуется не непрерывная дифференцируемость рассматриваемой функции в каждой точке множества  $G$ , а лишь ее дифференцируемость. Однако доказательство теоремы 2 фактически содержит в доказательстве теоремы 1. Действительно, как это отмечалось в замечаниях к доказательству теоремы 1 и ее следствию (см. п. 39.1), при  $m=1$  приведенное выше доказательство теоремы 1 сохраняет силу и при предположениях теоремы 2, т. е. при предположении лишь дифференцируемости (а не непрерывной дифференцируемости) функции  $f$ .

В качестве примера применения формулы (39.24) докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Если функция дифференцируема в каждой точке выпуклой области  $G$  и имеет в  $G$  ограниченные частные производные, то она разомкно непрерывна в этой области.

**Доказательство.** Если

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \leq c, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in G$$

( $c$  — постоянная), то для любых двух точек  $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  и  $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$  из (39.24) следует, что

$$|f(x'') - f(x')| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i} \right| |x''_i - x'_i| \leq cn\rho(x', x'')$$

(здесь  $\xi$  — некоторая точка отрезка с концами в точках  $x'$  и  $x''$ ). Поэтому, если задано  $\varepsilon > 0$ , достаточно взять  $\delta = \frac{\varepsilon}{cn}$ , чтобы для любых точек  $x' \in G$  и  $x'' \in G$  таких, что  $\rho(x', x'') < \delta$ , выполнялось неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \quad (39.25)$$

а это и означает равномерную непрерывность функции  $f$  в области  $G$ .

### 39.3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА ВО ВСЕЙ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Остаточный член в формуле Тейлора, очевидно, зависит не только от приращений аргументов, но и от самой точки, в окрестности которой рассматривается разложение функции и которую мы в п. 39.1 считали фиксированной. Теперь нас будут интересовать поведение и оценка остаточного члена в зависимости от изменения указанной точки. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы в этом пункте будем остаточный член порядка  $m$  обозначать  $r_m(x, \Delta x)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — точка, в окрестности которой раскладывается данная функция по формуле Тейлора. Как и раньше,  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ .

В формулах (39.21) и (39.22) будем вместо  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(\Delta x)$  и  $\varepsilon(\Delta x)$  соответственно писать  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$  и  $\varepsilon(x, \Delta x)$ . В дальнейшем нам потребуется оценка остаточного члена формулы Тейлора в форме Пеано сразу для всей области существования разложения по указанной формуле.

Введем сначала понятие непрерывности частных производных в замыкании открытого множества. Это требует специального определения, так как в граничной точке открытого множества  $G$  даже в случае, когда функция определена на замыкании  $\bar{G}$  множества  $G$ , понятие частной производной, вообще говоря, не определено (см., например, точку  $M$  границы области  $G$  на рис. 144).

**Определение 1.** Функция  $f$ , определенная на открытом множестве  $G \subset R^n$ , называется непрерывно продолжаемой на его замыкание  $\bar{G}$ , если существует такая непрерывная на  $\bar{G}$  функция  $F$ , что  $F = f$  на  $G$ .

Функция  $F$  называется непрерывным продолжением функции  $f$  (на  $\bar{G}$ ) и для простоты будет также обозначаться символом  $f$ .

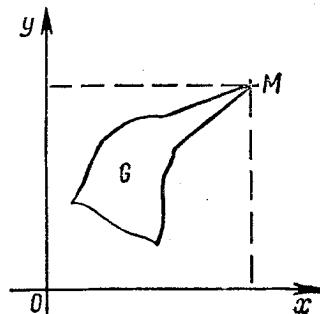


Рис. 144

Очевидно в силу единственности предела функции, если у функции, определенной на  $G$ , существует непрерывное продолжение на  $\bar{G}$ , то оно единственное.

**Определение 2.** Функция  $f$  называется непрерывно дифференцируемой (соответственно  $m$  раз непрерывно дифференцируемой) на  $\bar{G}$ , если функция  $f$  определена на  $G$  и все ее частные производные первого порядка (соответственно частные производные до порядка  $m$  включительно) непрерывно продолжаемы с  $G$  на  $\bar{G}$ .

Упражнение 2. Доказать, что если функция  $f$  определена на открытом множестве  $G \subset R^n$  и имеет на нем непрерывно продолжаемую на его замыкание  $\bar{G}$  производную  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ , и в некоторой точке границы множества  $G$  существует (односторонняя) частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ , то она совпадает с непрерывным продолжением в эту точку частной производной  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ .

З. Доказать, что для того, чтобы непрерывная функция, определенная на ограниченном открытом множестве  $G \subset R^n$ , была непрерывно продолжаемой на его замыкание, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно непрерывной на  $G$ . Показать, что в случае неограниченного открытого множества условие равномерной непрерывности продолжаемой функции, являясь достаточным для непрерывного продолжения, не является необходимым.

4. Построить пример непрерывной и ограниченной в области функции, которую нельзя непрерывно продолжить на замыкание этой области.

Вернемся теперь к формуле Тейлора. Пусть функция  $f$   $m$  раз непрерывно дифференцируема на замыкании  $\bar{G}$  открытого ограниченного множества  $G$ . Тогда, согласно результатам п. 39.1, в каждой точке  $x \in G$  имеет место разложение (39.20) функции  $f$  по формуле Тейлора, причем стремление к нулю  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$  в формуле (39.21) и  $\varepsilon(x, \Delta x)$  в формуле (39.22) при  $\rho \rightarrow 0$  равномерно на множестве  $G$  (см. определение в п. 20.2), т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что если

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} < \delta, \quad (39.26)$$

то

$$|\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$$

для всех точек  $x \in G$ .

Это в данном случае непосредственно следует из метода получения функций  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}$  и  $\varepsilon(\Delta x)$ . Действительно, в силу ограниченности и замкнутости замыкания  $\bar{G}$  открытого множества  $G$  непрерывные продолжения на  $\bar{G}$  частных производных порядка  $m$  данной функции равномерно непрерывны на  $\bar{G}$ , поэтому (см. формулу (39.13) для случая  $n = 2$ ; в общем случае справедлива аналогичная формула) если выполнено условие (39.26), то

$$|\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)| \leq \omega \left( \delta, \frac{\partial f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \bar{G} \right). \quad (39.27)$$

Здесь правая часть (модуль непрерывности соответствующей производной) не зависит от точки множества  $G$  и стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Поэтому из (39.27) следует равномерное стремление  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}$  к нулю на  $G$ .

Теперь можно оценить бесконечно малую  $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$  в формуле (39.22). Для произвольного натурального  $n$  ее можно, аналогично случаю  $n = 2$  (см. (39.16)), представить в виде

$$\varepsilon(x, \Delta x) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x) \left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{\Delta x_n}{\rho}\right)^{m_n}.$$

Отсюда имеем:

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| \leq \sum_{m_1 + \dots + m_n = m} |\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)|. \quad (39.28)$$

В правой части неравенства (39.28) стоит некоторое фиксированное число слагаемых; обозначим его через  $N$ . В силу уже доказанного равномерного в  $G$  стремления к нулю функции  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$  для любого заданного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что если выполнено условие  $\rho(x, x + \Delta x) < \delta$ , то

$$|\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad m_1 + \dots + m_n = m.$$

Отсюда и из неравенства (39.28) следует, что

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Отметим еще одну оценку в целом остаточного члена формулы Тейлора, получающуюся из записи его в форме Лагранжа (39.19).

Если функция  $f$  определена на открытом множестве  $G$  и имеет на  $G$  ограниченные частные производные порядка  $m$ , т. е. существует такая постоянная  $M > 0$ , что

$$\left| \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right| \leq M, \quad m_1 + \dots + m_n = m, \quad x \in G, \quad (39.29)$$

то при выполнении условия  $\rho(x, x + \Delta x) < \delta$  для всех  $x \in G$  справедливо неравенство

$$|r_{m-1}(x, \Delta x)| \leq \frac{M n^m \delta^m}{m!}.$$

Это сразу следует из формулы (39.19), если абсолютные величины каждого слагаемого ее правой части оценить с помощью неравенства (39.29) и очевидного неравенства  $|\Delta x_i| \leq \delta$ .

### 39.4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

В предыдущем пункте мы встретились с понятием равномерной сходимости на данном множестве семейства функций, зависящих от некоторого параметра, когда этот параметр стремится к определенным значениям. Такими функциями в нашем случае являлись  $\varepsilon_{m_1 \dots m_n}(x, \Delta x)$  и  $\varepsilon(x, \Delta x)$ , где роль параметра играло  $\Delta x$ . В простейшем виде этот случай встречался еще раньше в п. 20.2.

Сформулируем определение равномерной сходимости семейства функций в общем случае.

**Определение 3.** Пусть  $X \subset R^n$ ,  $Y \subset R^m$ ,  $y^{(0)}$  — предельная точка множества  $Y$  или одна из бесконечностей<sup>\*)</sup>  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$  (последние две бесконечности имеет смысл рассматривать только при  $m=1$ ). Пусть, далее, функция  $\varphi(x)$  определена для всех  $x \in X$ , а  $f(x, y)$  — для всех  $x \in X$  и  $y \in Y$ .

Функция  $f(x, y)$  называется равномерно стремящейся на множестве  $X$  к функции  $\varphi(x)$  при  $y \rightarrow y^{(0)}$  и пишется

$$f(x, y) \xrightarrow[X]{} \varphi(x), \quad y \rightarrow y^{(0)}$$

если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая проколотая окрестность  $\dot{U}(y^{(0)})$  точки  $y^{(0)}$ , что для всех  $x \in X$  и всех  $y \in Y \cap \dot{U}(y^{(0)})$ , выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon. \quad (39.30)$$

Переменная  $y$  часто называется в этом случае параметром, а функция  $f(x, y)$ ,  $y \in Y$ , — «семейством функций от  $x$ » (в том смысле, что эта функция при различных фиксированных  $y \in Y$  задает функции переменной  $x$ ).

Подобно случаю равномерной сходимости последовательности функций (см. п. 36.1) условие равномерной сходимости функций по параметру можно сформулировать, используя понятие предела, следующим образом.

Функция  $f(x, y)$  равномерно стремится на множестве  $X$  к функции  $\varphi(x)$  при  $y \rightarrow y^{(0)}$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \rightarrow y^0} \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| = 0. \quad (39.31)$$

Таким образом условие  $f(x, y) \xrightarrow[X]{} \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y^{(0)}$ , равносильно стремлению к нулю при  $y \rightarrow y^0$  функции  $F(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)|$ . Доказательство этого утверждения совсем не сложно и

<sup>\*)</sup> Бесконечности  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$  будем для простоты называть в дальнейшем также точками («бесконечно удаленными»).

аналогично случаю равномерной сходимости последовательности функций. Его проведение предоставляем читателю.

Справедлив в рассматриваемом случае и аналог критерия Коши равномерной сходимости последовательностей.

**Теорема 4 (критерий Коши).** Для того чтобы функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y^{(0)}$  разномерно стремилась на множестве  $X$  к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  нашлась такая проколотая окрестность  $\dot{U}(y^{(0)})$  точки  $y^{(0)}$ , чтобы для любых

$$y' \in \dot{U}(y^{(0)}) \cap Y \quad \text{и} \quad y'' \in \dot{U}(y^{(0)}) \cap Y$$

и любого  $x \in X$  выполнялось неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon. \quad (39.32)$$

Действительно, необходимость условия (39.32), как всегда в подобных ситуациях, легко следует из условия (39.30). Для доказательства же достаточности следует показать, что из условия (39.32) вытекает, что для любого фиксированного  $x \in X$  существует  $\lim_{y \rightarrow y^{(0)}} f(x, y)$  и что стремление функции  $f(x, y)$  к этому пределу при  $y \rightarrow y^{(0)}$  происходит равномерно.

Все это также рекомендуется проделать читателю самостоятельно.

**Упражнение 5.** Доказать: для того чтобы функция  $f(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  равномерно на множестве  $X$  стремилась при  $y \rightarrow y^{(0)}$  к функции  $\varphi(x)$ ,  $x \in X$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности  $y^{(n)} \in Y$ ,  $y^{(n)} \neq y^{(0)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , стремящейся к  $y^{(0)}$ , последовательность  $f(x, y^{(n)})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равномерно на множестве  $X$  сходилась к функции  $\varphi(x)$ .

**Примеры.** 1. Рассмотрим семейство функций  $f(x, y) = e^{-xy}$ , где  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y < +\infty$ . Очевидно

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(таким образом переменная  $y$ , если использовать указанную выше терминологию, является параметром). Обозначим предельную функцию через  $\varphi(x)$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (39.33)$$

Докажем, что стремление функции  $f(x, y)$  к  $\varphi(x)$  при  $y \rightarrow +\infty$  происходит неравномерно. Для этого достаточно показать, что существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что какую бы окрестность  $\dot{U}(+\infty)$  ни взять, найдутся такие  $x \in [0, 1]$  и  $y \in \dot{U}(+\infty)$ , что будет выполнено неравенство  $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geq \varepsilon_0$ . Возьмем  $\varepsilon_0$  таким, что  $0 < \varepsilon_0 < 1$ , и произвольную окрестность  $\dot{U}(+\infty)$ . Тогда, какое бы  $y \in \dot{U}(+\infty)$  ни взять, для него  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-xy} = 1$ , и поэтому най-

дется такое  $x \in (0, 1]$ , что

$$|e^{-xy} - \varphi(x)| = |e^{-xy} - 0| > \varepsilon_0.$$

Таким образом, в данном случае условия критерия Коши (см. теорему 4) не выполняются.

Однако, при любом  $a$ ,  $0 < a < 1$ , семейство функций  $f(x, y) = e^{-xy}$  при  $y \rightarrow +\infty$  равномерно стремится к нулю на отрезке  $[a, 1]$ . Проверим в этом случае выполнение условий критерия Коши (см. теорему 4). Для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\eta_\varepsilon > 0$ , такое, что  $e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon$  (достаточно взять любое  $\eta > \frac{|\ln \varepsilon|}{a}$ ); поэтому для всех  $y > \eta_\varepsilon$  и всех  $x \in [a, 1]$  будем иметь

$$|e^{-xy} - 0| = e^{-xy} < e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Конечно, исследование равномерной сходимости рассматриваемого семейства функций можно выполнить и применив критерий (39.31). Действительно, используя формулу (39.33), получим

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| \geq \sup_{0 < x \leq 1} e^{-xy} = 1,$$

поэтому условие (39.31) заведомо не выполняется. Если же  $0 < a < 1$ , то

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{a \leq x \leq 1} |e^{-xy} - \varphi(x)| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{a \leq x \leq 1} e^{-xy} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-ay} = 0.$$

Таким образом,

$$e^{-xy} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{[0, 1]} \varphi(x), \quad e^{-xy} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{[0, a]} \varphi(x), \quad y \rightarrow +\infty, \quad 0 < a < 1.$$

2. В случае, когда  $Y$  является множеством натуральных чисел  $Y = \{1, 2, 3, \dots\}$ , а  $y^{(0)} = +\infty$ , приведенное определение равномерной сходимости по параметру превращается в определение равномерной сходимости последовательности функций  $f_n(x) = f(x, n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на множестве  $X$ .

3. Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольнике  $Q = \{(x, y): -\infty < a \leq x \leq b < +\infty, -\infty < c \leq y \leq d < +\infty\}$  и пусть  $y_0 \in [c, d]$ .

Обозначим через  $\omega(\delta, f)$  модуль непрерывности функции  $f$  в прямоугольнике  $Q$ ; тогда

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \omega(|y - y_0|; f), \quad (x, y) \in Q. \quad (39.34)$$

Правая часть этого неравенства не зависит от  $x$  и в силу равномерной непрерывности функции  $f$  на прямоугольнике  $Q$   $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta; f) = 0$ . Поэтому из неравенства (39.34) следует, что при  $y \rightarrow y_0$  функция  $f(x, y)$  равномерно на отрезке  $[a, b]$  стремится к функции  $f(x, y_0)$ .

Упражнение 6. Доказать, что если семейство функций  $f(x, y)$ ,  $x \in X \subset R^n$ ,  $y \in Y \subset R^m$  таково, что функции  $f(x, y)$  при любом фиксированном  $y \in Y$  непрерывны по  $x$  на множестве  $X$  и равномерно на этом множестве стремятся к  $\varphi(x)$  при  $y \rightarrow y^{(0)}$ , то  $\varphi(x)$  также непрерывна на множестве  $X$ .

### 39.5. ЗАМЕЧАНИЯ О РЯДАХ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция  $f(x)$  определена и бесконечно много раз дифференцируема в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in R^n$ , то для этой функции формула Тейлора (39.20) будет, очевидно, справедливой при любом натуральном  $n = 1, 2, \dots$  и

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i < \delta^2.$$

Если при этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} f(x^{(0)})$$

будет сходиться к  $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$  (см. п. 38.2), то получится формула

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(k)} f(x^{(0)}),$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда, перенеся  $f(x^{(0)})$  в правую часть, получим разложение функции в степенной ряд, называемый **рядом Тейлора** функции  $f$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ (x_1 - x_1^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_n^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{(k)} f(x^{(0)}),$$

или, что то же

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)}) (x - x^{(0)})^k,$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  — мультииндекс.

Упражнение 7. Разложить в ряд Тейлора функцию  $f(x, y) = e^{xy}$ .

## § 40. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 40.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Изучаемые в настоящем и некоторых следующих параграфах вопросы носят аналитический характер, и их доказательства не усложняются при увеличении числа переменных. Поэтому мы

проведем их рассмотрение сразу в общем  $n$ -мерном случае, указывая при необходимости их специфические особенности для случаев  $n = 2$  и  $n = 3$ .

**Определение 1.** Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $E \subset R^n$ . Точка  $x^{(0)} \in E$  называется точкой строгого максимума, соответственно строгого минимума, если существует такая окрестность  $U(x^{(0)})$  точки  $x^{(0)}$ , что для всех  $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ ,  $x \neq x^{(0)}$ , выполняется неравенство  $f(x) < f(x^{(0)})$  соответственно неравенство  $f(x) > f(x^{(0)})$ .

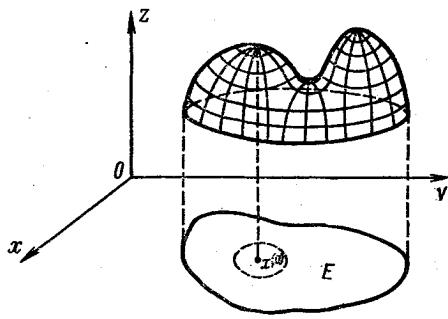


Рис. 145

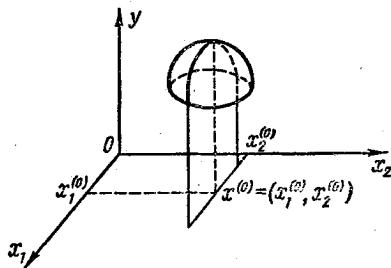


Рис. 146

Таким образом, точка строгого максимума (соответственно строгого минимума) характеризуется тем, что  $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$  (соответственно  $\Delta f > 0$ ) при всех  $x \in U(x^{(0)}) \cap E$ ,  $x \neq x^{(0)}$  (рис. 145).

Если же для точки  $x^{(0)}$  существует такая окрестность  $U(x^{(0)})$ , что при всех  $x \in U(x^{(0)}) \cap E$  выполняется условие  $f(x) \leq f(x^{(0)})$  (соответственно  $f(x) \geq f(x^{(0)})$ ), то  $x^{(0)}$  называется просто точкой максимума (соответственно минимума).

**Определение 2.** Точки (строгого) максимума и минимума функции называются точками (строгого) экстремума.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена в некоторой окрестности точки  $x^{(0)}$ ; если она является точкой экстремума функции  $f(x)$  и если в ней существует какая-либо из производных  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  ( $j$  может принимать одно из значений  $1, 2, \dots, n$ ), то она равна нулю,  $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0$ .

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке экстремума  $x^{(0)}$ , то ее дифференциал равен нулю в этой точке,  $df(x^{(0)}) = 0$ .

**Доказательство** (теоремы и следствия). Пусть для определенности  $j = 1$ . Если  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  является точкой экстремума для функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ , то  $x_1^{(0)}$  является точкой экстремума для функции  $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  одной переменной  $x_1$  (рис. 146), а поэтому если в этой точке существует производная

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ , то по теореме Ферма (см. п. 11.1) она равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \left. \frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{dx_1} \right|_{x_1=x_1^{(0)}} = 0.$$

Аналогично обстоит дело в случае любой переменной  $x_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ).

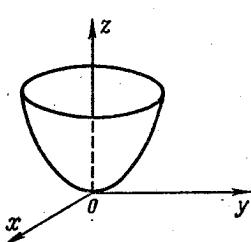


Рис. 147

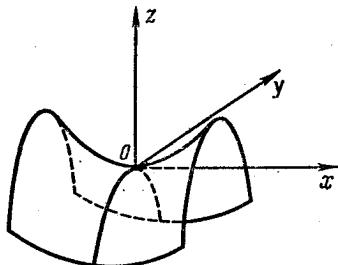


Рис. 148

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке экстремума  $x^{(0)}$ , то в этой точке существуют все производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому и

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{df(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad \square$$

**Примеры.** 1. Найдем точки экстремума функции  $z = x^2 + y^2$ . Точки экстремума в силу доказанного находятся среди тех, для которых  $dz = 0$ . Так как  $dz = 2x dx + 2y dy$ , то условие  $dz = 0$  выполняется в единственной точке  $(0, 0)$ . В этой точке  $z = 0$ , во всех же других точках  $z = x^2 + y^2 > 0$ . Поэтому  $(0, 0)$  является точкой строгого минимума для функции  $z = x^2 + y^2$  (рис. 147).

2. Исследуем точки экстремума функции  $z = x^2 - y^2$ . Поступая аналогично предыдущему случаю, находим, что условие  $dz = 0$  снова выполняется в точке  $(0, 0)$  и в этой точке  $z = 0$ . Однако здесь при  $y = 0$  и любых  $x \neq 0$  имеем  $z > 0$ , а при  $x = 0$  и любом  $y \neq 0$  имеем  $z < 0$ . Поэтому точка  $(0, 0)$  не является точкой экстремума, и, значит, функция  $z = x^2 - y^2$  вообще не имеет экстремальных точек (рис. 148).

## 40.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТРОГОГО ЭКСТРЕМУМА

Напомним несколько определений из курса алгебры.

**Определение 3.** Квадратичная форма  $A(x) = A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ,  $a_{ii} = a_{jj}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , называется положи-

тельно (соответственно отрицательно) определенной, если  $A(x) > 0$  (соответственно  $A(x) < 0$ ) для любой точки  $x \in R^n$ ,  $x \neq 0$ .

Квадратичная форма, являющаяся положительно или отрицательно определенной, называется также просто определенной (или знакоопределенной) квадратичной формой.

**Определение 4.** Квадратичная форма, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется неопределенной.

**Лемма 1.** Пусть  $S$  — единичная сфера в  $R^n$ :

$$S = \{x: x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

и пусть  $A(x)$  — определенная квадратичная форма; тогда

$$\inf_{x \in S} |A(x)| = \mu > 0.$$

**Доказательство.** Функция  $A(x)$  является многочленом второй степени по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , поэтому  $A(x)$ , а, следовательно, и  $|A(x)|$  непрерывны во всем пространстве  $R^n$ . Отсюда вытекает, что функция  $|A(x)|$  непрерывна на компакте  $S$ . Согласно теореме Вейерштрасса, функция  $|A(x)|$  достигает на  $S$  своей нижней грани, т. е. существует такая точка  $x^{(0)} \in S$ , что

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} |A(x)| = |A(x^{(0)})|.$$

По определению знакоопределенной квадратичной формы  $|A(x)| > 0$  для всех точек  $x \in S$ , значит, в частности,  $\mu = |A(x^{(0)})| > 0$ .  $\square$

**Определение 5.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^{(0)} \in R^n$ . Если  $df(x^{(0)}) = 0$ , то  $x^{(0)}$  называется стационарной точкой функции  $f$ .

Очевидно, что точка  $x^{(0)}$ , в которой функция  $f$  дифференцируема, является стационарной в том и только в том случае, если

$$\frac{df(x^{(0)})}{dx_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (40.1)$$

Согласно следствию из теоремы 1, точка экстремума, в которой функция  $f$  дифференцируема, является стационарной; обратное, конечно, вообще говоря, неверно: не всякая стационарная точка, в которой функция дифференцируема, является точкой экстремума (см. пример 2 в конце п. 40.1).

**Теорема 2 (достаточные условия строгого экстремума).** Пусть функция  $f$  определена и имеет непрерывные производные второго порядка в некоторой окрестности точки  $x^{(0)}$ . Пусть  $x^{(0)}$  является стационарной точкой функции  $f$ ; тогда если квадратичная форма

$$A(dx_1, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad (40.2)$$

т. е. второй дифференциал функции  $f$  в точке  $x^{(0)}$ , положительно определенна (отрицательно определена), то  $x^{(0)}$  является точкой строгого минимума (соответственно строгого максимума); если же квадратичная форма (40.2) неопределенна, то в точке  $x^{(0)}$  нет экстремума.

**Доказательство.** Пусть  $U(x^{(0)}, \delta_0)$  —  $\delta_0$ -окрестность стационарной для функции  $f$  точки  $x^{(0)}$ , в которой функция  $f$  имеет непрерывные вторые производные. Пусть точка

$$x^{(0)} + dx = (x_1^{(0)} + dx_1, \dots, x_n^{(0)} + dx_n)$$

принадлежит этой окрестности.

По формуле Тейлора (см. (39.23)), учитывая условия стационарности (40.1), получим

$$\Delta f = f(x^{(0)} + dx) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \epsilon(dx) \rho^2,$$

где  $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$ ,  $\rho^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ , и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon(dx) = 0, \quad (40.3)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{\rho^2}{2} \left[ \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_j}{\rho} + 2\epsilon(dx) \right] = \\ &= \frac{\rho^2}{2} \left[ A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right) + 2\epsilon(dx) \right]. \end{aligned} \quad (40.4)$$

Точка  $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$  лежит на единичной сфере  $S$  (т. е. на сфере с центром в начале координат и радиусом, равным 1), ибо  $\left(\frac{dx_1}{\rho}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{\rho}\right)^2 = 1$ .

Пусть квадратичная форма (40.2) знакопределена. Тогда, согласно лемме,  $\inf_S |A| = \mu > 0$ . Выберем  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta_0$ , так, чтобы  $2|\epsilon(dx)| < \mu$  при  $\rho < \delta$ . Тогда при  $\rho < \delta$ , т. е. при  $x^{(0)} + dx \in U(x^{(0)}, \delta)$  и  $dx \neq 0$ , все выражение в квадратных скобках в правой части формулы (40.4) будет иметь тот же знак, что и первое слагаемое  $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ :

$$\operatorname{sign} \Delta f = \operatorname{sign} A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right).$$

Поэтому, если квадратичная форма (40.2) является положительно определенной, то  $\Delta f > 0$ , а если отрицательно определенной, то  $\Delta f < 0$  при  $x^{(0)} + dx \in U(x^{(0)}, \delta)$ . Значит, в первом случае  $x^{(0)}$  является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума.

Пусть теперь квадратичная форма (40.2) является неопределенной; это означает, что существуют две такие точки  $dx' = (dx'_1, \dots, dx'_n)$  и  $dx'' = (dx''_1, \dots, dx''_n)$ , что  $A(dx'_1, \dots, dx'_n) > 0$ , а  $A(dx''_1, \dots, dx''_n) < 0$ . Мы не можем на основании этого сразу сказать, что приращение функции  $\Delta f$  меняет знак в любой окрестности точки  $x^{(0)}$ , так как точки  $x^{(0)} + dx' = (x^{(0)}_1 + dx'_1, \dots, x^{(0)}_n + dx'_n)$  и  $x^{(0)} + dx'' = (x^{(0)}_1 + dx''_1, \dots, x^{(0)}_n + dx''_n)$  могут, вообще говоря, даже и не принадлежать области определения функции  $f$ . Однако, нужный нам результат будет следовать из того, что квадратичная форма  $A(dx)$  сохраняет один и тот же знак или равенство нулю на каждой прямой, проходящей через точку  $x^{(0)}$ , из которой удалена сама эта точка, а значение  $A\left(\frac{dx}{\rho}\right)$ ,  $dx \neq 0$ , вообще не зависит от выбора точки на этой прямой.

Рассмотрим точку  $dx' = (dx'_1, \dots, dx'_n)$ . Проведем полупрямую, начинающуюся в точке  $x^{(0)}$  и проходящую через точку  $x^{(0)} + dx'$ . Для любой точки  $x = (x_1, \dots, x_n)$  этой полупрямой положим  $dx_i = x_i - x^{(0)}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n dx_i^2}$ . Тогда (рис. 149)

$$\frac{dx_i}{\rho} = \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (40.5)$$

где  $\cos \alpha_i$  суть направляющие косинусы рассматриваемой полупрямой. Поэтому точка

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n), \quad (40.6)$$

лежащая, очевидно, на единичной сфере \*)  $S$  с центром  $x^{(0)}$ , будет одной и той же для всех точек  $x$  этой полупрямой, т. е. точка (40.6) не зависит от расстояния  $\rho$  между  $x$  и  $x^{(0)}$ .

Следовательно и значение квадратичной формы (40.2) в точке (40.6), т. е.  $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ , не зависит от  $\rho$ . Отсюда для любой точки (40.6) имеем

$$A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = A\left(\frac{dx'_1}{\rho'}, \dots, \frac{dx'_n}{\rho'}\right) = \frac{1}{\rho'^2} A(dx'_1, \dots, dx'_n) > 0.$$

Пусть  $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \dots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = \mu' > 0$ . Выберем  $\rho_0 > 0$  так, чтобы при  $\rho < \rho_0$  имело место неравенство  $2|\epsilon(dx)| < \mu'$ , что возможно

\*) Напомним, что для направляющих косинусов справедливо равенство  $\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1$ .

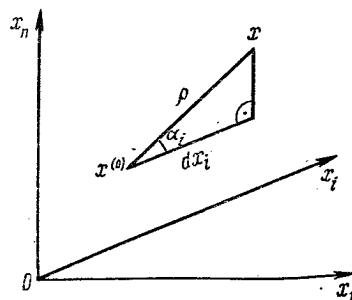


Рис. 149

в силу (40.3). Тогда для любой точки  $x^{(0)} + dx$ , лежащей на полу-прямой (40.5) и такой, что  $0 < \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n dx_i^2} < \rho_0$ , в формуле (40.4) выражение в квадратных скобках будет иметь знак первого члена, и поэтому  $\Delta f > 0$ . Итак, в любой окрестности точки  $x^{(0)}$  имеются точки, для которых  $\Delta f > 0$ .

Аналогично, исходя из отрицательного значения квадратичной формы (40.2) в точке  $(dx_i'')$ , доказывается, что в любой окрестности точки  $x^{(0)}$  существуют точки, для которых  $\Delta f < 0$ . А это и означает, что в рассматриваемом случае  $x^{(0)}$  не является точкой экстремума.  $\square$

При практическом применении этой теоремы возникает вопрос: как установить, будет ли квадратичная форма (40.2) положительно или отрицательно определенной. Для этой цели может служить, например, так называемый критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы, доказываемый в курсах алгебры. Он состоит в следующем.

*Для того чтобы квадратичная форма*

$$A(x) = A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad (40.7)$$

*у которой  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Замечая, что квадратичная форма  $A(x)$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма  $-A(x) = -\sum_{i,j=1}^n (-a_{ij})x_i x_j$  положительно определена, получаем, пользуясь известными свойствами определителя, следующий критерий отрицательной определенности.

*Для того чтобы квадратичная форма (40.7) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Сформулируем теперь теорему 2 для случая двух переменных, выразив условия, накладываемые на квадратичную форму (40.2), в явном виде через вторые частные производные.

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , которая является стационарной для  $f(x, y)$ , т. е. в ней

$$f_x = f_y = 0. \quad (40.8)$$

Тогда если в  $(x_0, y_0)$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \quad (40.9)$$

то она является точкой строгого экстремума, а именно строгого максимума, если в ней

$$f_{xx} < 0^*,$$

и строгого минимума, если

$$f_{xx} > 0.$$

Если же в точке  $(x_0, y_0)$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, \quad (40.10)$$

то экстремума в ней нет.

Наконец, когда

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \quad (40.11)$$

в точке  $(x_0, y_0)$ , то может случиться, что экстремум в ней есть, и может случиться, что экстремума нет.

Действительно, если  $f_{xx} \neq 0$  в точке  $(x_0, y_0)$ , то квадратичную форму (40.2) в нашем случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} A(dx, dy) &= f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2 = \\ &= \frac{1}{f_{xx}} [(f_{xx} dx + f_{xy} dy)^2 + (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) dy^2]. \end{aligned} \quad (40.12)$$

Все частные производные здесь и ниже взяты в точке  $(x_0, y_0)$ .

Мы непосредственно видим, что при выполнении условия (40.9) выражение в квадратных скобках в формуле (40.12) положительно при  $dx^2 + dy^2 > 0$ , т. е.  $A(dx, dy)$  является определенной квадратичной формой, а именно положительно определенной при  $f_{xx} > 0$  и отрицательно определенной при  $f_{xx} < 0$ . Это, конечно, следует и из вышеприведенного критерия Сильвестра. В первом случае, согласно теореме 2,  $(x_0, y_0)$  является точкой строгого минимума, а во втором — точкой строгого максимума. Если же выполнено условие (40.10), то при  $dy = 0, dx \neq 0$ , из (40.12) имеем  $\operatorname{sign} A(dx, 0) = \operatorname{sign} f_{xx}$ , а при  $dx = f_{xy}, dy = -f_{xx}$  получим  $\operatorname{sign} A(f_{xy}, -f_{xx}) = -\operatorname{sign} f_{xx}$ , откуда следует, что квадратичная

\*). Очевидно, из условия (40.9) следует, что  $f_{xx} \neq 0$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

форма  $A(dx, dy)$  при выполнении условия (40.10) является неопределенной.

Итак, полностью разобран случай

$$f_{xx} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0.$$

Случай

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} \neq 0 \quad \text{и} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$$

исследуется аналогично.

Если же  $f_{xx} = f_{yy} = 0$ , но по-прежнему  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ , то, очевидно,  $f_{xy} \neq 0$ , следовательно, в этом случае выполняется условие (40.10) и  $A(dx, dy) = 2f_{xy} dx dy$ . Отсюда сразу видно, что квадратичная форма  $A(dx, dy)$  при сделанных предположениях является неопределенной, ибо  $\operatorname{sign} A(dx, dy) = -\operatorname{sign} A(dx, -dy)$ . Поэтому достаточно взять сначала  $dx$  и  $dy$  одного знака, а затем разных знаков, чтобы получить значения квадратичной формы разных знаков. По теореме 2 ( $x_0, y_0$ ) не является в этом случае точкой экстремума.

Наконец, случай  $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$  несовместим с предположением  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ . Таким образом, разобраны все возможные случаи при выполнении неравенства  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ .

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать на примерах, что, когда имеет место соотношение (40.11), экстремум может быть, а может и не быть.

У функции  $z = x^2 + 2xy + y^2$  точка  $(0, 0)$  является стационарной, и в ней  $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 2$ , и, значит, выполняется условие (40.11). Замечая, что  $z = (x+y)^2$ , видим, что всюду  $z \geq 0$ , причем  $z=0$  на прямой  $x+y=0$ ; поэтому точка  $(0, 0)$  является точкой экстремума, правда, нестрогого.

Для функции  $z = xy^3$  точка  $(0, 0)$  также является стационарной, и в ней  $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0$ , поэтому условие (40.11) также выполняется. Однако в силу того, что в формулу, задающую эту функцию, переменные  $x$  и  $y$  входят в нечетных степенях, функция меняет знак в любой окрестности нуля, значит,  $(0, 0)$  не является точкой экстремума.

### § 40.3. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ЭКСТРЕМУМАХ НА МНОЖЕСТВАХ

Пусть функция  $f$  дифференцируема на открытом ограниченном множестве  $G$  и непрерывна на его замыкании  $\bar{G}$ . Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на множестве  $\bar{G}$  (они существуют по теореме 3 п. 19.5). Для этого можно, например, найти все стационарные точки функции  $f$  в  $G$ , вычислить в них значения функции и выбрать, если, конечно, это возможно (а теоретически возможно это, например, когда число стационарных точек конечно), точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения из всех значений в ста-

ционарных точках. После этого следует сравнить эти значения со значениями, которые функция принимает на границе открытого множества  $G$ , например, найдя, если это удастся сделать, наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на границе области  $G$ . Сравнив наибольшее и наименьшее значения в стационарных точках с наибольшим и наименьшим значениями на границе множества  $G$ , мы можем, очевидно, найти искомый максимум и минимум  $f$  на  $\bar{G}$ .

В случае, когда  $G$  — плоская область и ее граница является кривой, заданной некоторым представлением  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , вопрос о нахождении экстремальных значений функции  $f(x, y)$  на границе  $G$  сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного  $f(x(t), y(t))$ , что делается уже известными нам методами.

Методы, которые можно применять в многомерном случае для отыскания экстремальных точек на границе области будут рассмотрены в § 43.

**Упражнение 1.** Найти экстремумы функции  $z = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y$ .

2. Имеет ли функция  $z = x^4y^2 - 3x^2y + 2x + y$  экстремум в точке  $(1, 1)$ ?

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$  в замкнутой области, ограниченной линиями  $x = 4$ ,  $y = -1$ ,  $x - y = 3$ .

4. Пусть  $a = \text{const} > 0$ ,  $E = \{(x, y) : |x| < a, y \in \mathbb{R}\}$ . Найти все экстремумы функции  $z = \frac{3}{2a}x^2 + \sqrt{6(a^2 - x^2)} \cos y$  в  $E$  и все ее наибольшие и наименьшие значения в  $\bar{E}$ .

5. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна  $6a^2$ . При каких значениях длин ребер его объем — наибольший?

## § 41. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

### 41.1 НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет однозначную функцию, т. е. определяет одну из этих переменных как функцию остальных. Начнем наше рассмотрение с изучения уравнения, содержащего два неизвестных,

$$F(x, y) = 0.$$

Если функция двух переменных  $F(x, y)$  задана на некотором подмножестве  $A$  плоскости  $R_{xy}^2$ ,  $A \subset R_{xy}^2$  и существует такая функция одной переменной  $y = f(x)$ , определенная на множестве  $B \subset \mathbb{R}_x$ , содержащемся в проекции множества  $A$  на ось  $Ox$ , что для всех  $x \in B$  имеет место  $(x, f(x)) \in A$  и справедливо тождество  $F(x, f(x)) = 0$ , то  $f$  называется *неявной функцией*, определяемой уравнением  $F(x, y) = 0$ .

**Лемма.** Пусть функция  $F(x, y)$  непрерывна в некоторой прямугольной окрестности

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \eta\}^*$$

точки  $(x_0, y_0)$  и при каждом фиксированном  $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$  строго монотонна по  $y$  на интервале  $(y - \eta, y_0 + \eta)$ . Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то существуют окрестности  $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$  и  $U(y_0) = (y - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  точки  $y_0$  такие, что для каждого  $x \in U(x_0)$  имеется и притом единственное решение  $y \in U(y_0)$  уравнения  $F(x, y) = 0$ . Это решение, являющееся функцией от  $x$  и обозначаемое  $y = f(x)$ , непрерывно в точке  $x_0$  и

$$f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, лемма, в частности, утверждает, что при сданных предположениях неявная функция  $y = f(x)$ , определяемая уравнением  $F(x, y) = 0$ , существует и обладает тем свойством, что при условии  $x \in U(x_0)$ ,  $y \in U(y_0)$  равенства

$$F(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad y = f(x)$$

равносильны.

**Доказательство.** По условиям леммы функция  $F(x, y)$  при каждом фиксированном  $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$  строго монотонна по переменной  $y$  на интервале  $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ , в частности на нем строго монотонна функция  $F(x_0, y)$ . Пусть для определенности она строго возрастает. Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ , подчиненное лишь условию  $0 < \varepsilon < \eta$ . Поскольку функция  $F(x_0, y)$  переменной  $y$  строго возрастает на отрезке  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ , и по условию  $F(x_0, y_0) = 0$ , то

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Но функция двух переменных  $F(x, y)$  по предположению непрерывна на открытом множестве  $U(x_0, y_0)$  и  $(x_0, y_0 - \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$ ,  $(x_0, y_0 + \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$ , поэтому существует такое  $\delta > 0$ ,  $0 < \delta < \xi$ , что в  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0 - \varepsilon)$  выполняется неравенство  $F(x, y) < 0$ , а в  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0 + \varepsilon)$  — неравенство  $F(x, y) > 0$  (см. лемму 1 в п. 19.3). В частности, при всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  (рис. 150) будут справедливыми неравенства

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0. \quad (41.1)$$

Положим

$$U(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad U(y_0) \stackrel{\text{def}}{=} (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

\*.) В соответствии с принятыми в курсе обозначениями окрестность точки  $(x_0, y_0)$  правильнее было бы обозначить через  $U((x_0, y_0))$ , а не через  $U(x_0, y_0)$ . Для простоты обозначений мы будем опускать вторые скобки.

Поскольку при фиксированном  $x \in U(x_0)$  функция  $F(x, y)$  переменной  $y$  непрерывна на отрезке  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ , то из условия (41.1) согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции (см. теорему 2 в п. 6.2) следует, что существует такое  $y^* \in U(y_0)$  (см. рис. 150), что  $F(x, y^*) = 0$ . В силу строгой

монотонности функции  $F(x, y)$  на отрезке  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$  по переменной  $y$ , указанное  $y^*$  единственно.

Таким образом, получено однозначное соответствие (однозначная функция)  $x \mapsto y^*$ ,  $x \in U(x_0)$ ,  $y^* \in U(y_0)$ , которое будем обозначать через  $f$ :  $y^* = f(x)$ .

По определению этого соответствия для любого  $\dot{x} \in U(x_0)$  и  $y^* = f(\dot{x})$  имеем

$$F(\dot{x}, y^*) = 0, \quad y^* \in U(y_0),$$

причем точка  $y^*$ , обладающая этим свойством, единственна. Тем самым нами доказаны существование и единственность искомой функции  $f$ .

Далее, по условию леммы  $F(x_0, y_0) = 0$ , и так как  $x_0 \in U(x_0)$ ,  $y_0 \in U(y_0)$ , то в силу единственности функции  $f$  имеем  $y_0 = f(x_0)$ .

Наконец, заметим, что  $\varepsilon > 0$  было фиксировано произвольным образом при условии, что  $\varepsilon < \eta$ , и что для него было найдено такое  $\delta > 0$ , что из  $|x - x_0| < \delta$  (т. е. из условия  $x \in U(x_0)$ ) вытекало включение  $f(x) \in U(y_0)$ , т. е. неравенство  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Это и означает непрерывность функции  $f$  в точке  $x_0$ .  $\square$

Удобные для приложения достаточные условия однозначной разрешимости уравнения  $F(x, y) = 0$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , для которой  $F(x_0, y_0) = 0$ , даются следующей теоремой.

**Теорема 1.** Пусть функция  $F(x, y)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и имеет в этой окрестности частную производную  $F_y(x, y)$ , которая непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда, если

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то найдутся такие окрестности  $U(x_0)$  и  $U(y_0)$  соответственно точек  $x_0$  и  $y_0$ , что для каждого  $x \in U(x_0)$  существует и при этом единственное решение  $y = f(x) \in U(y_0)$  уравнения  $F(x, y) = 0$ \*.

Это решение непрерывно входит в  $U(x_0)$  и  $y_0 = f(x_0)$ .

Если дополнительно предположить, что функция  $F$  имеет в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  частную производную

\* В этом случае говорят также, что уравнение  $F(x, y) = 0$  однозначно разрешимо в окрестности  $U(x_0, y_0) = \{(x, y) : x \in U(x_0), y \in U(y_0)\}$  точки  $(x_0, y_0)$ .

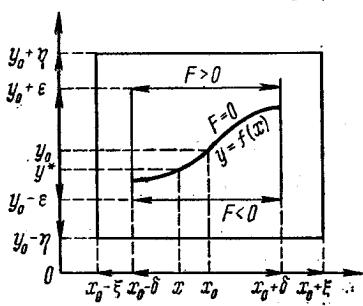


Рис. 150

$F_x(x, y)$ , непрерывную в точке  $(x_0, y_0)$ , то функция  $f(x)$  также имеет в точке  $x_0$  производную и для нее справедлива формула

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

**Доказательство.** В силу непрерывности функции  $F(x, y)$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и непрерывности частной производной  $F_y(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$ , существует прямоугольная окрестность

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \eta\}$$

точки  $(x_0, y_0)$ , в которой сама функция  $F(x, y)$  непрерывна, а значения частной производной  $F_y(x, y)$  имеют тот же знак, что и ее значение в точке  $(x_0, y_0)$ . Поэтому при каждом фиксированном  $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$  функция  $\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y)$  дифференцируема на интервале  $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ , а ее производная  $\varphi'(y) = F_y(x, y)$  сохраняет постоянный знак. Следовательно, функция  $\varphi(y)$  строго монотонна на указанном интервале.

Таким образом все условия леммы для функции  $F(x, y)$  в построенной прямоугольной окрестности  $U(x_0, y_0)$  выполнены. Следовательно, существуют окрестности  $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  и единственная функция  $y = f(x)$ , определенная на  $U(x_0)$ , такие, что при каждом  $x \in U(x_0)$  имеют место включение  $f(x) \in U(y_0)$  и равенство  $F(x, f(x)) = 0$ , причем функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Поскольку для каждой точки  $(x, y)$ , для которой  $x \in U(x_0)$ ,  $y \in U(y_0)$ , существует ее прямоугольная окрестность  $U(x, y)$ , содержащаяся в прямоугольной окрестности

$$U_0(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon\}$$

(рис. 151), то для  $U(x, y)$  также выполняются все условия леммы. Следовательно, в силу единственности решения  $f(x)$  уравнения  $F(x, y) = 0$  в окрестности  $U_0(x_0, y_0)$  согласно той же лемме функция  $y = f(x)$  непрерывна в каждой точке  $x \in U(x_0)$ .

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. В силу непрерывности частных производных  $F_x$  и  $F_y$  в точке  $(x_0, y_0)$ , функция  $F$  дифференцируема в этой точке:

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) &= \\ &= F_x(x_0, y_0) \Delta x + F_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \end{aligned} \quad (41.2)$$

где

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

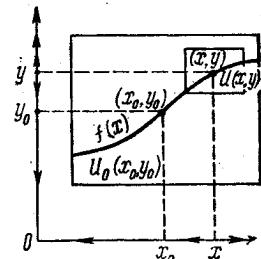


Рис. 151

Возьмем в формуле (41.2)

$$x_0 + \Delta x \in U(x_0), \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тогда в силу условия  $F(x, f(x)) = 0$  получим

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0,$$

и так как  $F(x_0, y_0) = 0$ , то из (41.2) имеем

$$F_x(x_0, y_0) \Delta x + F_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{F_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \quad (41.3)$$

Пусть теперь  $\Delta x \rightarrow 0$ ; тогда, в силу непрерывности функции  $f$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , а, значит, при  $\Delta x \rightarrow 0$  имеем  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$ , откуда следует, что в формуле (41.3)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ . Поэтому при  $\Delta x \rightarrow 0$  предел правой части равенства (41.3) существует и равен  $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$  (напомним, что  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ), следовательно, при  $\Delta x \rightarrow 0$  существует и предел левой части, т. е. существует производная

$$f'(x_0) = - \frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \quad \square \quad (41.4)$$

**Замечание.** Если функции  $F_x$  и  $F_y$  непрерывны в окрестности  $U_0(x_0, y_0)$  точки  $(x_0, y_0)$ , то производная  $f'$  непрерывна на интервале  $U(x_0)$ . Действительно, применив формулу (41.4) к произвольной точке  $x \in U(x_0)$  получим

$$f'(x) = - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

откуда по теореме о композиции непрерывных функций вытекает непрерывность функции  $f'(x)$  на  $U(x_0)$ .

Аналогичным образом вводится понятие неявной функции, определяемой уравнением

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \quad (41.5)$$

а также формулируется и доказывается теорема, аналогичная теореме 1. Для того чтобы получить ее формулировку, достаточно лишь в формулировке теоремы 1 под  $x$  понимать точку  $n$ -мерного пространства,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ , в частности  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ .

**Теорема 1'.** Пусть функция  $F(x, y) \equiv F(x_1, \dots, x_n, y)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  и имеет в этой окрестности частную производную  $F_y$ , непрерывную в точке  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ . Если  $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ , а  $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$ , то найдутся такие

окрестности  $U_x$  и  $U_y$  соответственно точек  $x^{(0)}$  и  $y^{(0)}$ , что для каждого  $x \in U(x)$  существуют, и притом единственное, решение

$$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in U_y$$

уравнения  $F(x, y) = 0$  \*), причем это решение  $y = f(x)$  непрерывно на  $U_x$  и  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ .

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  существуют все частные производные  $F_{x_i}$ , непрерывные в точке  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , то в точке  $x^{(0)}$  существуют и частные производные  $f_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , причем если частные производные  $F_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и  $F_y$  непрерывны в окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , то частные производные  $f_{x_i}$  существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки  $x^{(0)}$ .

При этом формулы для частных производных неявной функции, определяемой уравнением (41.5), имеют вид

$$\frac{dy}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

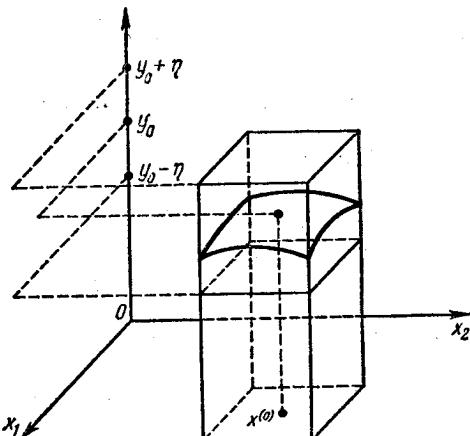


Рис. 152

**Упражнение 1.** Сформулировать условия, при которых функция  $f(x)$ , определяемая уравнением  $F(x, y) = 0$  (теорема 1), имеет в точке  $(x_0, y_0)$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно. Найти формулы для  $f''(x_0)$  и  $f'''(x_0)$ .

**2.** С помощью теоремы 1 и ответа на предыдущие упражнения найти достаточные условия существования функции  $x = \varphi(y)$ , обратной к  $y = f(x)$  и имеющей в точке  $y_0$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно. Доказать, что

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{|f'(x)|^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{|f'(x)|^5}.$$

**3.** Найти  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , если  $y$  — функция, определяемая уравнением  $\cos x^2 y^2 + xy = 2$ .

\* ) На рис. 152 изображен случай, когда  $n = 2$  и окрестность  $U_x$  прямоугольная.

## 41.2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Прежде чем рассмотреть вопрос о разрешимости систем уравнений, введем некоторые новые понятия.

Пусть  $R_x^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать через  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $R_y^m$  —  $m$ -мерное евклидово пространство, точки которого будем обозначать  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , а  $R_{xy}^{n+m}$  —  $(n+m)$ -мерное евклидово пространство точек

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

**Определение 1.** Пусть  $A \subset R_x^n$  и  $B \subset R_y^m$ . Множество точек  $(x, y)$  пространства  $R_{xy}^{n+m}$  таких, что  $x \in A$  и  $y \in B$ , называется произведением \*) множеств  $A$  и  $B$  и обозначается  $A \times B$  (см. п. 1.2 \*). Таким образом,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Примеры. 1. Если  $A = R_x^n$ ,  $B = R_y^m$ , то

$$A \times B = R_x^n \times R_y^m = R_{xy}^{n+m}.$$

2. Пусть  $n = 2$  и  $A$  — круг;  $m = 1$  и  $B$  — отрезок. Тогда  $A \times B$  — прямой круговой цилиндр (рис. 153).

3. Пусть  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in R_x^n$  и  $A = P(x^{(0)})$ ;  $\delta_1, \dots, \delta_n = \{x : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  — прямоугольная окрестность точки  $x^{(0)}$ ; пусть  $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \in R_y^m$  и  $B = P(y^{(0)})$ ;  $\eta_1, \dots, \eta_m = \{y : |y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j, j = 1, 2, \dots, m\}$  — прямоугольная окрестность точки  $y^{(0)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} A \times B = \{(x, y) : & |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, n; \\ & |y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j, j = 1, 2, \dots, m\} = \\ & = P((x^{(0)}, y^{(0)}); \delta_1, \dots, \delta_n, \eta_1, \dots, \eta_m) \end{aligned} \quad (41.6)$$

является прямоугольной окрестностью точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ .

Очевидно и обратное: поскольку всякая прямоугольная окрестность точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  записывается формулой, стоящей в середине равенства (41.6), то она всегда может быть представлена как произведение прямоугольных окрестностей точек  $x^{(0)}$  и  $y^{(0)}$ .

Упражнение 4. Доказать, что если множества  $A \subset R_x^n$  и  $B \subset R_y^m$  являются открытыми множествами соответственно в пространствах  $R_x^n$  и  $R_y^m$ , то и их произведение  $A \times B$  — открытое множество в пространстве  $R_{xy}^{n+m}$ .

\*) Применяется также термин *декартово произведение*.

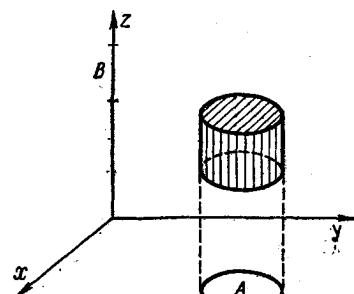


Рис. 153

### 41.3. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим условия, при которых система уравнений

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad (41.7)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0, \\ \dots &\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned} \quad (41.8)$$

однозначно разрешима относительно  $y_1, \dots, y_m$  в некоторой окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , в которой  $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Определение 2.** Пусть задана система функций  $u_i = u_i(t_1, \dots, t_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , имеющих в некоторой точке  $t^{(0)}$  все частные производные первого порядка. Тогда матрица, составленная из частных производных этих функций в точке  $t^{(0)}$ ,

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{array} \right|$$

или, короче,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u_i}{\partial t_j} \end{array} \right| \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

называется матрицей Якоби \*) данной системы функций.

Если  $m = n$ , то определитель матрицы Якоби называется определителем Якоби, или якобианом, системы функций  $u_1, \dots, u_n$  по переменным  $t_1, \dots, t_n$  и обозначается следующим образом \*\*)

$$\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}.$$

Мы увидим в дальнейшем, что якобиан системы функций естественным образом возникает в различных вопросах теории функций многих переменных.

Прежде чем перейти к изложению основной теоремы, кратко поясним на простом примере (не оговаривая все детали) идею ее

\*) К. Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

\*\*) Применяется также обозначение  $\frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}$ .

доказательства и покажем, каким образом в ее условиях возникает якобиан рассматриваемой системы. Пусть в какой-то окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  заданы непрерывно дифференцируемые функции  $F$  и  $\Phi$ , причем

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ \Phi(x_0, y_0, z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Допустим, что необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

в некоторой окрестности указанной точки, найдя из нее переменные  $y = \varphi(x)$  и  $z = \psi(x)$ , как такие непрерывные функции  $\varphi$  и  $\psi$  переменной  $x$ , что  $\varphi(x_0) = y_0$ ,  $\psi(x_0) = z_0$ . Разрешив для этого, например, первое уравнение относительно  $z$ , получим  $z = f(x, y)$ . Подставив это выражение во второе уравнение и разрешив его относительно  $y$ , будем иметь  $y = \varphi(x)$ . Полагая  $\psi(x) = f[x, \varphi(x)]$ , получим искомое решение:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x), \\ z &= \psi(x). \end{aligned}$$

Возникает, конечно, вопрос о том, при выполнении каких условий возможно проделать указанные операции, или, точнее, когда существуют и однозначно определены все вышеупомянутые функции. (Естественно, при этом надо выяснить, где, т. е. для каких значений переменных  $x$  и  $y$ , определены эти функции? Этот вопрос мы сейчас не будем подробно анализировать, чтобы не отвлекаться от основной идеи. Он будет рассмотрен при доказательстве теоремы 2 этого пункта.)

Для того чтобы одно из данных уравнений, например первое, было разрешимым в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  относительно переменной  $z$ , достаточно, чтобы (см. теорему 1' в п. 41.1)  $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$ . Если  $z = f(x, y)$  — соответствующее решение, то, для того чтобы уравнение, получающееся в результате подстановки этого решения во второе уравнение,  $\Phi[x, y, f(x, y)] = 0$  было разрешимым относительно переменной  $y$ , достаточно, чтобы полная частная производная по  $y$  левой части получившегося равенства не обращалась в нуль в точке  $(x_0, y_0)$ , т. е. чтобы в этой точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Но согласно п. 41.1,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

следовательно, подставляя это выражение в предыдущее неравенство, получим, что условие разрешимости можно записать в виде

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0 \text{ в точке } (x_0, y_0, z_0).$$

Из этого условия, очевидно, вытекает, что в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  либо  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ , либо  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \neq 0$ , т. е. одно из заданных уравнений разрешимо относительно  $z$ .

Таким образом, для заданной системы уравнений неравенство нулю в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  якобиана  $\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)}$  обеспечивает существование в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  решения вида

$$y = \varphi(x)$$

$$z = \psi(x).$$

Сформулируем теперь основную теорему этого пункта.

**Теорема 2.** Пусть функции  $F_i(x, y) = F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , где  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ,  $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ . Тогда если  $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и если в точке  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  якобиан  $\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}$  не равен нулю, то найдутся такие окрестности  $U_x$  и  $U_y$  точек  $x^{(0)}$  и  $y^{(0)}$  соответственно в пространствах  $R_x^n$  и  $R_y^m$ , что для каждого  $x \in U_x$  существует единственное решение

$$y = f(x) \in U_y$$

системы уравнений (41.7):

$$y = f(x) = \{y_k = f_k(x_1, \dots, x_n), k = 1, 2, \dots, m\}^*),$$

причем функции  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , образующие это решение, непрерывно дифференцируемы на  $U_x$  и  $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$ .

Таким образом, если выполняются предположения теоремы, то условие

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (x, y) \in U_x \times U_y$$

эквивалентно условию

$$y = f(x), \quad x \in U_x, \quad y \in U_y.$$

\*). Система функций  $f_k(x_1, \dots, x_n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  обозначена одним символом  $f(x)$ , поскольку она задает определенное соответствие: точкам некоторого множества пространства  $R_x^n$  указанная система функций ставит в соответствие определенные точки пространства  $R_y^m$ , или, как говорят, отображает указанное множество пространства  $R_x^n$  в пространство  $R_y^m$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что утверждение: решение  $y = f(x)$  системы уравнений (41.7) удовлетворяет условию  $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$ , очевидно, непосредственно следует из утверждения о единственности решения  $y = f(x) \in U_y$  при  $x \in U_x$  и условий  $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, i = 1, 2, \dots, m, x^{(0)} \in U_x, y^{(0)} \in U_y$ .

Для доказательства теоремы применим метод математической индукции. Для случая одного уравнения, т. е. когда  $m=1$ , теорема была установлена нами в п. 41.1. Пусть теперь она верна для  $m-1$  уравнений ( $m > 1$ ). Докажем, что тогда она имеет место и для  $m$  уравнений.

Покажем сначала, что каждое из уравнений (41.8), например последнее

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0,$$

можно разрешить в окрестности точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  по крайней мере относительно одного переменного. Действительно, по условию теоремы, в точке  $(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а поэтому в этой точке хотя бы один элемент последней строчки определителя Якоби отличен от нуля. Пусть для определенности это будет последний элемент:

$$\frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0.$$

Отсюда в силу теоремы 1' п. 41.1 следует, что уравнение  $F_m(x, y) = 0$  может быть разрешено относительно  $y_m$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Сформулируем это более точно. Обозначим через  $U$  окрестность точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , в которой функции  $F_i, i = 1, 2, \dots, m$ , непрерывно дифференцируемы, и положим  $\tilde{y} \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, \dots, y_{m-1})$ . Тогда найдутся прямоугольная окрестность  $U^{m+n-1}$  точки

$$(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_{m-1}^{(0)}) \quad (41.9)$$

и окрестность  $U^1$  точки  $y_m^{(0)}$  такие, что  $U^{m+n-1} \times U^1 \subset U$ , и существует единственная определенная на  $U^{m+n-1}$  функция

$$y_m = \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}), \quad (41.10)$$

удовлетворяющая следующим условиям: если

$$(x, \tilde{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) \in U^{m+n-1},$$

то

$$\varphi(x, \tilde{y}) = \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) \in U^1, \quad (41.11)$$

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x, \tilde{y})) = 0. \quad (41.12)$$

Кроме того, согласно той же теореме 1', функция  $\varphi(x, \tilde{y})$  непрерывно дифференцируема на  $U^{m+n-1}$  и

$$\varphi(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = y_m^{(0)}. \quad (41.13)$$

При этом если  $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$  и  $y_m \in U^1$ , то система (41.8) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} F_j(x, y) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ y_m &= \varphi(x, y). \end{aligned} \quad (41.14)$$

Подставим в первые  $m-1$  уравнения системы (41.14) выражение (41.10). Тогда, введя обозначение

$$\begin{aligned} \Phi_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) &= \\ &= F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1})), \\ i &= 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (41.15)$$

получим следующую систему  $m-1$  уравнений с  $m+n-1$  неизвестными:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) &= 0, \\ \dots &\dots \\ \Phi_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (41.16)$$

При этом для  $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$ ,  $y_m \in U^1$  система уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, \tilde{y}) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\ y_m &= \varphi(x, \tilde{y}) \end{aligned} \quad (41.17)$$

эквивалентна системе (41.14).

Покажем, что система (41.16) удовлетворяет условиям, отличающимся от тех, которым удовлетворяет система (41.8), только тем, что  $m-1$  заменено через  $m$ . Действительно, функции  $\Phi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , непрерывно дифференцируемы в окрестности  $U^{m+n-1}$  как композиции непрерывно дифференцируемых функций. Из условий  $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и (41.15), (41.13) следует, что  $\Phi_k(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ .

Докажем, что в точке  $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$  (см. (41.9))

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{m-1})} \neq 0.$$

Для этого предварительно заметим, что из (41.10) и (41.15) следует, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (41.18)$$

а из (41.12) — что

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (41.19)$$

Теперь в определителе  $\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}$  к  $k$ -му столбцу прибавим последний столбец, умноженный на  $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$ ,  $k = 1, \dots, m-1$ , от чего, как известно, значение определителя не изменится. Поэтому, использовав (41.18) и (41.19) и разложив получившийся определитель по элементам последней строки, получим

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \\ &= \left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} & & \end{array} \right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \\ &= \left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{array} \right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})} = \\ &= \frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m} \left. \frac{\partial (\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1})}{\partial (y_1, \dots, y_{m-1})} \right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})}, \end{aligned}$$

и так как левая часть равенства отлична от нуля, то отлична от нуля и правая, откуда

$$\left. \frac{\partial (\Phi_1, \dots, \Phi_{m-1})}{\partial (y_1, \dots, y_{m-1})} \right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})} \neq 0.$$

В силу выполнения для функций  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m-1$ , условий, аналогичных условиям для функций  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и еогласно предположению индукции система уравнений (41.16) однозначно разрешима относительно переменных  $y_1, \dots, y_{m-1}$  в некоторой окрестности точки  $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ . Точнее, пусть  $U^{m+n-1}$  — прямоугольная окрестность точки  $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ , полученная при разрешении уравнения  $F_m = 0$  относительно переменной  $y_m$ . Разложим ее в произведение прямоугольных окрестностей  $U'_x$  и  $U'_{\tilde{y}}$  точек  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  и  $\tilde{y}_1^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_{m-1}^{(0)})$  соответственно в пространствах  $R_x^n$  и  $R_{\tilde{y}}^{m-1}$  (здесь  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{m-1})$ ):  $U^{m+n-1} = U'_x \times U'_{\tilde{y}}$ . Тогда существует окрестность  $U_x \subset U'_x$  точки  $x^{(0)}$ , окрестность

$U_{\tilde{y}} \subset U_y'$  точки  $\tilde{y}^{(0)}$  и единственная система функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_{m-1} &= f_{m-1}(x) = f_{m-1}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (41.20)$$

определенных на множестве  $U_x$  и удовлетворяющих следующим условиям: если  $x \in U_x$ , то

$$(f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) \in U_{\tilde{y}}. \quad (41.21)$$

и на  $U_x$  функции (41.20) непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе уравнений (41.16):

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \quad (41.22)$$

Важно заметить, что в силу единственности решения (41.20) системы (41.16) при  $x \in U_x$ ,  $\tilde{y} \in U_{\tilde{y}}$  и  $y_m \in U^1$ , система уравнений

$$\begin{aligned} y_k &= f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ y_m &= \varphi(x, \tilde{y}) \end{aligned} \quad (41.23)$$

эквивалентна системе (41.17).

Подставляя выражения (41.20) в (41.10) получим функцию от  $x$ , определенную на  $U_x$ ; обозначим ее через  $f_m$ :

$$y_m = \varphi(x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) = f_m(x_1, \dots, x_n) = f_m(x). \quad (41.24)$$

Покажем, что система функций

$$y_k = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (41.25)$$

(см. (41.20) и (41.24)) и является искомой системой функций, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в теореме. В самом деле, пусть  $U_y = U_{\tilde{y}} \times U^1$ ; тогда если  $x \in U_x$ , то в силу (41.21) и (41.11)  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in U_y$ . Из (41.15), (41.22), (41.24) и (41.12) следует, что  $F_i(x, f(x)) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , для всех  $x \in U_x$ . В силу теоремы 1' и предположения индукции функции (41.10) и (41.20), а поэтому и функция (41.24) непрерывно дифференцируемы.

Таким образом, доказано, что отображение  $f(x)$ , задаваемое функциями (41.25), является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений (41.8) на множестве  $U_x$ , причем если  $x \in U_x$ , то  $y = f(x) \in U_y$ . Отметим еще, что если  $x \in U_x$ , то система (41.25) эквивалентна системе (41.23).

Остается доказать единственность решения системы уравнений (41.8). Для доказательства изобразим проделанные в процессе доказательства переходы от одних систем уравнений к другим,

им эквивалентным, т. е. имеющим в точности те же решения, системам в виде схемы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_i(x, y) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 &\Downarrow \\
 F_j(x, y) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\
 y_m &= \varphi(x, y). \\
 &\Downarrow \quad \Phi_j(x, \tilde{y}) \equiv F_j(x, \tilde{y}, \varphi(x, \tilde{y})), \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\
 \Phi_j(x, \tilde{y}) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\
 y_m &= \varphi(x, \tilde{y}). \\
 &\Downarrow \\
 y_j &= f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \\
 y_m &= \varphi(x, \tilde{y}). \\
 &\Downarrow \quad f_m(x) \equiv \varphi(x, f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) \\
 y_i &= f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Двойные стрелки обозначают эквивалентность рассматриваемых систем уравнений, которая имеет место во всяком случае для  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$ . Из этой эквивалентности и следует единственность решения (41.25) системы (41.8) в рассматриваемых окрестностях, откуда, как было отмечено выше, в силу условия  $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , вытекает, что  $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$ .  $\square$

Доказанная теорема о неявных функциях является одной из основных теорем математического анализа и имеет много разнообразных приложений в различных его разделах. С некоторыми из них мы познакомимся в последующих частях нашего курса. Она является «чистой теоремой существования»: ни из ее формулировки, ни из приведенного ее доказательства не следует, вообще говоря, никакого конкретного метода для решения системы (41.8). Например, если все  $F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  в указанной системе уравнений являются элементарными функциями, то, следуя схеме доказательства теоремы, вообще говоря, не удастся «найти в явном виде» все те функции, существование которых использовалось при проведении указанного доказательства, и получить решение системы так же в виде элементарных функций. И в действительности в этом случае решение системы уравнений (41.8), которое существует в силу указанной теоремы, не является, вообще говоря, набором элементарных функций (даже если эта система состоит из одного уравнения).

Конечно, если функции  $F_k$  элементарные и, следовательно, задаются некоторыми формулами, то решение системы (41.8) может быть найдено с любой степенью точности, т. е. принципиально с любой степенью точности можно составить таблицы значений этих решений. Фактическая же точность, с которой вычисляются решения, определяется, конечно, конкретной целью, для которой решается рассматриваемая система. Сама теорема 2 в этом случае

дает объективную уверенность, что проводя правильно соответствующие вычисления, мы действительно вычисляем искомое решение системы. Мы не будем останавливаться на численных методах решения систем уравнений; лишь некоторые вопросы численного решения уравнений рассмотрены в «Добавлении» в конце этого тома.

Существенным является также то обстоятельство, что теорема 2, как и вообще теоремы подобного типа, дает качественные методы в данном случае для изучения свойств решений системы уравнений.

Интересно отметить, что частные производные решения системы (41.8) при выполнении условий теоремы 2 легко выражаются в явном виде через частные производные функций  $F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Действительно, чтобы найти частную производную  $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ , надо про-дифференцировать равенства (41.8) по  $x_i$ , считая их тождествами по  $x_1, \dots, x_n$ , т. е. подставив в них их решения  $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Тогда получим

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Эта система уравнений, линейных относительно  $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ , в силу того, что в рассматриваемой точке ее определитель не равен нулю:

$$\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \neq 0,$$

имеет, и притом единственное, решение, которое может быть найдено, например, по правилу Крамера \*).

Если нужно найти все производные

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

то целесообразно вычислить дифференциалы обеих частей указанных выше тождеств (41.8). Используя инвариантность формы первого дифференциала относительно выбора переменных, получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j} dy_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Эта система линейных относительно  $dy_1, \dots, dy_m$  уравнений в силу того же условия  $\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \neq 0$  имеет, и притом един-

\* Г. Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

ственное, решение. Если его найти, то коэффициент при  $dx_i$  в выражении для  $dy_j$ , и будет частной производной  $\frac{dy_j}{dx_i}$ .

Оба эти метода применимы и для вычисления производных высших порядков функций  $y_j(x_1, \dots, x_n)$ , являющихся решениями системы уравнений (41.8) (например, в предположении, что все функции  $F_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , имеют соответствующих порядков непрерывные производные). Применяя метод дифференциалов, следует, конечно, помнить, что дифференциалы порядка выше первого в случае, когда они выражаются через дифференциалы функций, имеют более сложный вид, чем когда они выражаются только через дифференциалы независимых переменных (см. п. 21.2).

Производные высших порядков функций  $y_j(x_1, \dots, x_n)$  можно получить последовательным дифференцированием и из выражений для первых производных  $\frac{dy_j}{dx_i}$ , найденных по формулам Крамера из указанной ранее системы уравнений

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k=1, 2, \dots, m,$$

в виде отношения двух определителей. Это отношение можно дифференцировать столько раз, сколько раз дифференцируемы функции  $F_k$ ,  $k=1, \dots, m$ . При этом, если все производные функций  $F_k$ ,  $k=1, \dots, m$ , до порядка  $r$  включительно непрерывны, то будут непрерывными и все частные производные функций  $y_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j=1, \dots, m$ , до того же порядка  $r$ .

Множество (называемое также часто классом) всех  $r$  раз непрерывно дифференцируемых в области  $G$  функций обозначается через  $C^r(G)$ . Таким образом: если, дополнительно к условиям теоремы 2,  $F_k \in C^r(U)$ ,  $k=1, \dots, m$ , где  $U$  — некоторая окрестность точки  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , то решения  $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$  системы уравнений (41.7) также принадлежат классу  $C^r(U_x)$  в некоторой окрестности  $U_x$  точки  $x^{(0)}$ .

**Упражнения.** 5. При каких условиях, налагаемых на  $f$  и на  $g$ , уравнение  $y = xf(z) + g(z)$  определяет, в некоторой окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0)$ , функцию  $z(x, y) \in C^2(U)$ ? Доказать, что если эти условия выполнены, то для всех  $(x, y) \in U$

$$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0.$$

6. Даны система уравнений

$$uf'(v) = [y - f(v)]^2,$$

$$(x+v)f'(v) = y - f(v).$$

Найти условия, налагаемые на функцию  $f$ , при которых эта система определяет в некоторой окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0)$ , функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  класса  $C^1(U)$ . Доказать, что в этом случае  $u_x u_y = u$  всюду в  $U$ .

#### 41.4. ОТОБРАЖЕНИЯ

В этом пункте будут изучаться отображения  $f: E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , т. е. такие соответствия, которые каждой точке  $x = (x_1, \dots, x_n)$  множества  $E$ , лежащего в  $n$ -мерном арифметическом точечном пространстве  $R^n$  (см. п. 18.1) ставят в соответствие точку  $y = (y_1, \dots, y_m)$   $m$ -мерного арифметического точечного пространства  $R^m$ . Таким образом,  $f: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in E$ . Очевидно, что задание такого отображения  $f$  равносильно заданию  $m$  функций  $f_j: E \rightarrow R$ , таких, что  $f_j: x \mapsto y_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $x \in E$ ,  $y_j \in R$ . Эти функции

$$f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in E, \quad (41.26)$$

называются *координатными функциями отображения*  $f$  и пишется

$$f = (f_1, \dots, f_m).$$

На рассматриваемые отображения обобщается понятие непрерывности.

**Определение 3.** Отображение  $f: E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , называется *непрерывным в точке*  $x^{(0)} \in E$ , если для любой окрестности  $V(y^{(0)})$  точки  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$  существует такая окрестность  $U(x^{(0)})$  точки  $x^{(0)}$ , что

$$f(U(x^{(0)}) \cap E) \subset V(y^{(0)}).$$

Поскольку в любой окрестности точки <sup>\*)</sup> содержится ее сферическая окрестность, то это определение равносильно следующему.

Отображение  $f: E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , называется *непрерывным в точке*  $x^{(0)} \in E$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$  существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $x^{(0)}$ , что

$$f(U(x^{(0)}, \delta) \cap E) \subset U(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Это, в свою очередь, с помощью неравенств можно переформулировать следующим образом.

Отображение  $f: E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , называется *непрерывным в точке*  $x^{(0)} \in E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех точек  $x \in E$ , удовлетворяющих условию  $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$ , выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(x^{(0)})) < \varepsilon.$$

Можно сформулировать определение непрерывности и в терминах последовательностей.

**Определение 3'.** Отображение  $f: E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , называется *непрерывным в точке*  $x^{(0)} \in E$ , если для любой последовательности

---

<sup>\*)</sup> Напомним, что окрестностью точки называется любое открытое множество, содержащее эту точку (см. определение 14 в п. 18.2).

$x^{(k)} \in E$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , такой что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ , имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}).$$

Равносильность этих двух определений доказывается аналогично тому, как это было сделано для равносильности определений предела функций по Коши и по Гейне. Проведем это доказательство.

Пусть отображение  $f$  непрерывно в точке  $x^{(0)}$  в смысле определения 3,  $x^{(k)} \in E$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \quad (41.27)$$

Зададим  $\varepsilon > 0$ . Для него существует такая  $\delta > 0$ , что при  $x \in E$ ,  $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$  выполняется неравенство  $\rho(f(x), f(x^{(0)})) < \varepsilon$ .

В силу условия (41.27) существует такой номер  $k_0$ , что для всех  $k \geq k_0$  имеем  $x^{(k)} \in U(x^{(0)}, \delta)$ , а следовательно и  $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) < \varepsilon$ . Это и означает, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)})$ .

Пусть, теперь, отображение  $f$  непрерывно в точке  $x^{(0)}$  в смысле определения 3' и пусть условия определения 3 не выполнены, т. е. существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для любой  $\delta > 0$  существует такое  $x_\delta \in U(x^{(0)}, \delta) \cap E$ , для которого  $\rho(f(x_\delta), f(x^{(0)})) \geq \varepsilon_0$ . Взяв последовательно  $\delta = \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и положив для краткости  $x^{(k)} = x_{1/k}$ , получим  $x^{(k)} \in U\left(x^{(0)}, \frac{1}{k}\right) \cap E$ , т. е.  $\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) < \frac{1}{k}$ . Следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$  и  $x^{(k)} \in E$ ; однакор  $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) \geq \varepsilon_0$  и, таким образом, последовательность  $\{f(x^{(k)})\}$  не имеет своим пределом точку  $f(x^{(0)})$ . Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.  $\square$

**Лемма 1.** Отображение  $f = (f_1, \dots, f_m) : E \rightarrow R^m$ ,  $E \subset R^n$ , непрерывно в точке  $x^{(0)}$  тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все координатные функции  $f_1, \dots, f_m$ .

**Доказательство необходимости.** Пусть отображение  $f$  непрерывно в точке  $x^{(0)} \in E$ ,  $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^{(0)})$ . Согласно определению 3, для каждой окрестности  $V(y^{(0)})$  точки  $y^{(0)}$ , в частности — для каждой ее кубической окрестности (см. п. 18.1)

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) = \{y : |y_i - y_i^{(0)}| < \varepsilon\}$$

существует такая окрестность  $U(x^{(0)})$  точки  $x^{(0)}$ , что

$$f(U(x^{(0)}) \cap E) \subset P(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Следовательно для всех  $x \in U(x^{(0)}) \cap E$  выполняются неравенства

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Это и означает, что все координатные функции  $f_1, \dots, f_m$  непрерывны в точке  $x^{(0)}$ .

**Доказательство достаточности.** Пусть все координатные функции  $f_1, \dots, f_m$  непрерывны в точке  $x^{(0)} \in E$ ,  $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = f(x^{(0)})$  и задана окрестность  $V(y^{(0)})$  точки  $y^{(0)}$ . Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\varepsilon$ -кубическая окрестность  $P(y^{(0)}, \varepsilon)$  точки  $y^{(0)}$  содержитя в  $V(y^{(0)})$ ,

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) \subset V(y^{(0)}).$$

В силу непрерывности каждой функции  $f_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , в точке  $x^{(0)}$  существуют такие окрестности  $U_j = U(x^{(0)})$ , что при  $x \in U_j \cap E$  выполняется неравенство

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon. \quad (41.28)$$

Положим  $U = \bigcap_{i=1}^m U_i$ . Тогда  $U$ , как пересечение конечного числа открытых множеств  $U_i$ , будет открытым множеством, причем, поскольку все  $U_i$  содержали точку  $x^{(0)}$ , то  $U$  также содержит ее. Таким образом, множество  $U$  является окрестностью точки  $x^{(0)}$ . При этом, если  $x \in U \cap E$ , то при всех  $j = 1, 2, \dots, m$  выполняются неравенства (41.28). Это означает, что

$$f(x) \in P(y^{(0)}, \varepsilon),$$

а следовательно,  $f(x) \in V(y^{(0)})$ . Итак, для произвольной окрестности  $V(y^{(0)})$  найдена такая окрестность  $U$  точки  $x^{(0)}$ , что

$$f(U \cap E) \subset V(y^{(0)}). \quad \square$$

Лемма 1 в частности показывает, что определение непрерывных отображений отрезка, данные при рассмотрении понятия кривой в п. 16.1 (для случая отображений отрезка в трехмерное пространство) и в п. 18.2 (для случая отображения отрезка в произвольное  $n$ -мерное евклидово пространство) как отображений, координатные функции которых непрерывны, равносильны определению непрерывных отображений отрезка, как таких отображений, которые в каждой точке отрезка удовлетворяют условиям определения 3 этого пункта.

Отображение:  $f: E \rightarrow R_y^m$ ,  $E \subset R_x^n$ , называется *непрерывным на множестве  $E$* , если оно непрерывно в каждой точке множества  $E$ .

**Лемма 2.** *Отображение  $f$  открытого множества пространства  $R_x^n$  в пространство  $R_y^m$  непрерывно на этом множестве тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества пространства  $R_y^m$  при отображении  $f$  является открытым множеством пространства  $R_x^n$ .*

**Доказательство необходимости.** Пусть  $f$  непрерывно отображает открытое множество  $G \subset R_x^n$  в пространство  $R_y^m$  и пусть

$U$  — открытое множество пространства  $R_y^n : U \subset R_y^n$ . Покажем, что прообраз  $f^{-1}(U)$  этого множества — открытое в пространстве  $R_x^n$  множество. Если множество  $f^{-1}(U)$  пусто, то утверждение очевидно, так как пустое множество открыто.

Пусть множество  $f^{-1}(U)$  не пусто, т. е. существует точка  $x^{(0)} \in f^{-1}(U)$  и, следовательно,  $f(x^{(0)}) \in U$ . Поскольку  $U$  — открытое множество, то оно является окрестностью точки  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ . Поэтому, в силу непрерывности отображения  $f$  в точке  $x^{(0)}$  (см. определение 3'), существует такая окрестность  $U_x$  этой точки, что  $f(U_x \cap G) \subset U$ , следовательно,  $U_x \cap G \subset f^{-1}(U)$ . Поскольку множество  $U_x \cap G$ , как пересечение двух открытых множеств  $U_x$  и  $G$ , является открытым и  $x^{(0)} \in U_x \cap G$ , то  $x^{(0)}$  — внутренняя точка множества  $f^{-1}(U)$ .

Таким образом, каждая точка прообраза открытого множества  $U$  является внутренней точкой этого прообраза, значит, он — открытое множество.

**Доказательство достаточности.** Пусть  $f$  — отображение открытого множества  $G$  пространства  $R_x^n$  в  $R_y^n$  и пусть при этом отображении прообраз каждого открытого в пространстве  $R_y^n$  множества является открытым в  $R_x^n$  множеством. Пусть  $x^{(0)} \in G$ . Покажем, что отображение  $f$  непрерывно в точке  $x^{(0)}$ .

Пусть  $U_y$  — некоторая окрестность точки  $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ . Поскольку прообраз  $f^{-1}(U_y)$  открытого множества  $U_y$  является, по предположению, открытым множеством и, очевидно,  $x^{(0)} \in f^{-1}(U_y) \subset G$ , то множество  $U_x = f^{-1}(U_y)$  является окрестностью точки  $x^{(0)}$ , причем  $f(U_x) = U_y$ . Отсюда непосредственно и вытекает непрерывность отображения  $f$  в точке  $x^{(0)}$  (см. определение 3).  $\square$

**Пример.** Рассмотрим отображение  $f: R^2 \rightarrow R$ , заданное формулой  $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ . Согласно лемме 2 прообраз открытого множества  $(-\infty, 0)$ , т. е. множество точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$  (и, следовательно, составляющих внутренность эллипса), а также прообраз открытого множества  $(0, +\infty)$ , т. е. множество таких точек  $(x, y)$ , что  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$  (эти точки образуют внешность эллипса), являются открытыми множествами.

Вообще, если  $f: R^n \rightarrow R$  — непрерывная на  $R^n$  функция, то для любого числа  $a \in R$  множества  $\{x : f(x) < a, x \in R^n\}$  и  $\{x : f(x) > a, x \in R^n\}$  являются открытыми множествами как прообразы открытых множеств  $(-\infty, a)$  и  $(a, +\infty)$ .

Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывных на компактах функций и достижимости этими функциями их нижних и верхних граней обобщается и на случай непрерывных отображений. Более точно — справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $f: A \rightarrow R^n$ ,  $A \subset R^n$  — непрерывное отображение компакта  $A$  в пространство  $R^m$ . Тогда множество  $f(A)$  также является компактом.

Короче: непрерывный образ компакта является компактом.

**Доказательство.** Пусть  $y^{(k)} \in f(A)$  — произвольная последовательность точек из  $f(A)$ . В силу определения образа множества при заданном отображении, для любого  $k = 1, 2, \dots$  существует такая точка  $x^{(k)} \in A$ , что  $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$ . Поскольку  $A$  — компакт, то из последовательности  $\{x^{(k)}\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x^{(k_s)}\}$ , предел которой  $x^{(0)}$  принадлежит компакту  $A$ :  $\lim_{s \rightarrow \infty} x^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$ .

В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $x^{(0)}$  имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(x^{(k_s)}) = f(x^{(0)}), \text{ т. е. } \lim_{s \rightarrow \infty} y^{(k_s)} = f(x^{(0)}) \in f(A).$$

Таким образом, из любой последовательности точек, принадлежащей множеству  $f(A)$ , можно выделить сходящуюся, предел которой принадлежит этому множеству. Это и означает, что  $f(A)$  — компакт.  $\square$

**Замечание.** Из леммы 3 следует доказанная ранее теорема о достижимости нижней и верхней граней действительной функцией, непрерывной на компакте (см. п. 19.5). В самом деле, согласно лемме 3, множество значений такой функции является компактом на числовой прямой, а всякий компакт на числовой прямой имеет конечные минимальную и максимальную точки. Это следует из того, что компакт — ограниченное множество и, следовательно, имеет конечную верхнюю (нижнюю) грань, которая в силу своего определения является точкой прикосновения множества. Поскольку компакт замкнут, то она ему принадлежит и является, очевидно, его максимальной (минимальной) точкой.

Обобщается на случай отображений и понятие равномерной непрерывности.

**Определение 4.** Отображение  $f$  множества  $E \subset R_x^n$  в пространство  $R_y^m$  называется равномерно непрерывным, если для любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , что для любых точек  $x' \in E$  и  $x'' \in E$ , удовлетворяющих условию  $\rho(x', x'') < \delta$ , выполняется неравенство  $\rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$ .

Для отображений имеет место и утверждение, аналогичное теореме Кантора (см. п. 19.6) для непрерывных функций.

**Лемма 4.** Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.

**Доказательство.** Воспользуемся тем же методом, что и при доказательстве теоремы Кантора о равномерной непрерывности действительных функций, непрерывных на компактах (см. теорему 5 в п. 19.5).

Допустим, что существует отображение  $f: A \rightarrow R^m$ ,  $A \subset R^n$ , непрерывное на компакте  $A$ , но не равномерно непрерывное на нем. Тогда существует такое  $\epsilon_0 > 0$ , что для любого  $\delta > 0$  найдутся точки  $x'_\delta \in A$  и  $x''_\delta \in A$ , для которых имеют место неравенства

$$\rho(x''_\delta, x'_\delta) < \delta \text{ и } \rho(f(x''_\delta), f(x'_\delta)) \geq \epsilon_0.$$

Пусть  $\delta = \frac{1}{k}$ ,  $x'^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} x'_{1/k}$ ,  $x''^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} x''_{1/k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $A$  — компакт, то из последовательности  $\{x'^{(k)}\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x'^{(k_s)}\}$ , предел  $x^{(0)}$  которой содержится во множестве  $A : \lim_{s \rightarrow \infty} x'^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$ . При этом из

$$\begin{aligned} \rho(x''^{(k_s)}, x^{(0)}) &\leq \rho(x''^{(k_s)}, x'^{(k_s)}) + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) < \\ &< \frac{1}{k_s} + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

следует, что подпоследовательность  $\{x''^{(k_s)}\}$  второй последовательности  $\{x''^{(k)}\}$  также сходится к точке  $x^{(0)}$ .

Теперь заметим, что из непрерывности отображения  $f$  в точке  $x^{(0)}$  явствует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(x'^{(k_s)}) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(x''^{(k_s)}) = f(x^{(0)}),$$

и так как

$$\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \leq \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x^{(0)})) + \rho(f(x^{(0)}), f(x'^{(k_s)})) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty,$$

то  $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) = 0$ . Это противоречит условию  $\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \geq \epsilon_0$ .  $\square$

С помощью доказанных свойств непрерывных отображений можно получить одно полезное для дальнейшего свойство областей (т. е. открытых линейно связных множеств, см. п. 18.2). Сформулируем это свойство также в виде леммы.

**Лемма 5.** Открытое множество является областью тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить целиком лежащей в нем ломаной.

Доказательство. Достаточность сформулированного условия не требует доказательства. В самом деле, если у некоторого открытого множества  $G \subset R^n$  любые две точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в нем, то, поскольку всякая ломаная является кривой (см. п. 16.5), любые две точки множества  $G$  оказываются соединимыми в нем кривой, что и означает, согласно определению (см. определение 25 в п. 18.2), что открытое множество  $G$  линейно связано, т. е. является областью (см. определение 26 там же).