включение (44.84). В самом деле, если это включение не имело бы места, то нашлась бы точка $y \in A \setminus E_i^*$. Поскольку $x \in A$, $y \in A$ и $d(A) < 10^{-k}$, то $\rho(x, y) < 10^{-k}$. Следовательно, отрезок с концами в точках x и y, имея длину, меньшую, чем 10^{-k}, и один конец x во множестве G, не пересекается со множеством $S_k(E_0)$, ибо оно отделено от G полосой ширины 10^{-k}. Однако из того, что один конец отрезка принадлежит некоторому множеству, в данном случае — множеству E_i^*, а другой нет, следует (см. лемму 9 в п. 18.2), что на этом отрезке существует точка $z \in \partial E_i^*$. Но (см. (44.78)) $\partial E_i^* \subset E_0 \subset S_k(E_0)$, т. е. $z \in S_k(E_0)$. Следовательно, указанный отрезок пересекается со множеством $S_k(E_0)$. Полученное противоречие и доказывает вложение (44.84).

Докажем единственность множества E_i^*, удовлетворяющего включению (44.84). Пусть существует еще одно множество $E_k^* \in \tau^*$, такое, что $A \subset E_k^*$, $k \neq i$. Тогда $A \subset E_i^* \cap E_k^*$. Если пересечение $E_i^* \cap E_k^*$ содержало бы хоть одну точку, являющуюся одновременно внутренней для множеств E_i^* и E_k^*, то эта точка была бы внутренней и для пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, а тогда имело бы место неравенство $\mu E_i^* \cap E_k^* > 0$. Это неравенство противоречит определению разбиения (см. п. 44.3), в силу которого $\mu E_i^* \cap E_k^* = 0$ при $i \neq k$. Следовательно, каждая точка пересечения $E_i^* \cap E_k^*$, поэтому и каждая точка множества A, является граничной точкой по крайней мере для одного из множеств E_i^*, E_k^*. Но тогда $A \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial E_i^* = E_0 \subset S_k(E_0)$. Это невозможно, так как множество A пересекается со множеством G, которое не пересекается с $S_k(E_0)$. Противоречие получилось из предположения о существовании второго элемента E_k^* из τ^*, содержащего множество A. Следовательно такой элемент единственен.

Возьмем теперь произвольное разбиение $\tau = \{E_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ множества E мелкости $\delta_\tau < 10^{-k}$. Нижнюю сумму Дарбу

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_0} m_j \mu E_j, \quad m_j = \inf_{x \in E_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0,$$

разобьем на два слагаемых, соответствующих тем E_j, которые пересекаются со множеством G, и тем, которые с ним не пересекаются и, следовательно, целиком лежат в множестве P (см. (44.82)).

$$s_\tau = \sum_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j + \sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j. \tag{44.85}$$

Использовав очевидное неравенство

$$|m_j| \leqslant M, \quad j = 1, 2, \ldots, j_0, \tag{44.86}$$

где $|f(x)| \leqslant M$, $x \in E$, и оценку (44.83), получим

$$\left|\sum_{E_j \subset P} m_j \mu E_j\right| \leqslant \sum_{E_j \subset P} |m_j| \mu E_j \leqslant M \sum_{E_j \subset P} \mu E_j \leqslant$$
$$\leqslant M\mu \bigcup_{E_j \subset P} E_j \leqslant M\mu P < M \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

В частности, $\sum\limits_{E_j \subset P} m_j \mu E_j > -\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому из (44.85) имеем

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.87}$$

Теперь заметим, что $d(E_j) \leqslant \delta_\tau < 10^{-k}$, поэтому для каждого E_j, пересекающегося со множеством G, в силу (44.84) существует такое $E_i^* \in \tau^*$, что $E_j \subset E_i^*$. Обозначим через G_i объединение всех тех E_j, которые пересекаются с G и содержатся в E_i^*:

$$G_i = \bigcup_{E_j \subset E_i^*,\ E_j \cap G \neq \Phi} E_j.$$

Группируя в сумме $\sum\limits_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j$ слагаемые, содержащиеся в одном и том же множестве G_i, запишем ее в виде

$$\sum_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j. \tag{44.88}$$

Для оценки внутренней суммы, заметим, что для любого $i = 1, 2, \ldots, i_0$ согласно очевидному равенству

$$E_i^* = (E_i^* \cap G_i) \cup (E_i^* \setminus G_i) = G_i \cup (E_i^* \setminus G_i)$$

(второе равенство следует из включения $G_i \subset E_i^*$) имеем

$$m_i^* \mu E_i^* = m_i^* \mu G_i + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) =$$
$$= m_i^* \mu \bigcup_{E_j \subset G_i} E_j + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) =$$
$$= m_i^* \sum_{E_j \subset G_j} \mu E_j + m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i). \tag{44.89}$$

Оценим второе слагаемое. Каждая точка $x \in E_i^* \setminus G_i$ принадлежит некоторому множеству $E_j \in \tau : x \in E_j$. Это E_j не может пересекаться с G, так как всякое $E_j \in \tau$, пересекающееся с G, целиком содержится в некотором элементе разбиения τ^* (см. (44.84)). Поскольку пересечение $E_j \cap E_i^*$ непусто: $x \in E_j \cap E_i^*$, то в данном случае этим элементом может быть только множество E_i^*, т. е. $E_j \subset E_i^*$. Но тогда, в силу определения множества G_i, имело бы

место включение $E_j \subset G_i$ и, следовательно, $x \in G_i$. Это противоречит предположению, что $x \in E_i^* \setminus G_i$. Итак, множество E_j не пересекается с G и поэтому $E_j \subset P$. Отсюда, в частности, вытекает, что $x \in P$. Поскольку x — произвольная точка множества $E_i^* \setminus G_i$, то $E_i^* \setminus G_i \subset P$, и поэтому $E_i^* \setminus G_i \subset E_i^* \cap P$.

Использовав это включение и неравенство (44.86), получим

$$m_i^* \mu (E_i^* \setminus G_i) \leqslant M \mu E_i^* \cap P.$$

Подставив это неравенство в (44.89), будем иметь

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_i^* \mu E_j + M \mu E_i^* \cap P.$$

Теперь заметив, что из включения $E_j \subset G_i \subset E_i^*$ следует неравенство $m_i^* \leqslant m_j$ (нижняя грань подмножества не меньше, чем нижняя грань самого множества), получим

$$m_i^* \mu E_i^* \leqslant \sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j + M \mu E_i^* \cap P,$$

откуда

$$\sum_{E_j \subset G_i} m_j \mu E_j \geqslant m_i^* \mu E_i^* - M \mu E_i^* \cap P.$$

Просуммировав обе части по i от 1 до i_0, в силу (44.88) будем иметь

$$\sum_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j \geqslant \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu E_i - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P = s_{\tau^*} - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P.$$

Поскольку, согласно (44.83)

$$\sum_{i=1}^{i_0} \mu E_i^* \cap P = \mu \bigcup_{i=1}^{i_0} E_i^* \cap P \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{3M},$$

то

$$\sum_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j > s_{\tau^*} - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.90}$$

Применив теперь последовательно неравенства (44.87), (44.90) и (44.77), получим

$$s_\tau > \sum_{E_j \cap G \neq \Phi} m_j \mu E_j - \frac{\varepsilon}{3} > s_{\tau^*} - \frac{2\varepsilon}{3} > I_* - \varepsilon,$$

т. е. неравенство (44.81), а следовательно, и теорема 11, доказаны. □

С ее помощью можно установить два критерия интегрируемости ограниченной функции.

Теорема 12 (критерий Дарбу). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны.*

Доказательство. Пусть I_* и I^* — соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу функции f, ограниченной на измеримом множестве E. Следовательно, для любого разбиения τ множества E выполняются неравенства (см. (44.76))

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \tag{44.91}$$

Необходимость условия $I_* = I^*$. Если функция f интегрируема на множестве E, то (см. (44.57))

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

и поскольку $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$, то $I_* = I^*$.

Достаточность условия $I_* = I^*$. Если $I_* = I^*$, то в силу теоремы 11

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau - \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = I^* - I_* = 0,$$

и поэтому, согласно теореме 8 из п. 44.4, функция f интегрируема. □

Теорема 13 (критерий Римана). *Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon, \tag{44.92}$$

где s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению τ.

Доказательство. Если функция f интегрируема на множестве E, то для нее выполняется условие (44.57) (см. теорему 8 в п. 44.4). Справедливость (44.92) следует из определения предела сумм Дарбу при $\delta_\tau \to 0$.

Если, наоборот, выполняется условие (44.92), то в силу (44.91) при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$ и потому $I_* = I^*$. Отсюда, согласно теореме 12 и вытекает, что функция f интегрируема на множестве E. □

Итак, вспоминая определение кратного интеграла, данное в п. 44.3, теорему 8 из п. 44.4 и теоремы 12 и 13 этого пункта, получаем эквивалентность следующих пяти утверждений:

1) *функция f интегрируема на множестве E, т. е. существует предел* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)\, dE$;

2) $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$;

3) $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_0} \omega(f;\ E_i)\,\mu E_i = 0$, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_0}$ — *разбиение множества* E;

4) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое разбиение* τ *множества* E, *что* $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$;

5) $I_* = I^*$.

Таким образом выполнение каждого из этих условий равносильно существованию интеграла $\int f(x)dE$, причем

$$\int f(x)dE = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau.$$

Замечание 1. Доказанные теоремы позволяют теперь без труда доказать аддитивность интеграла по измеримым множествам для ограниченных функций (см. п. 44.6, свойство 3) в следующем виде: *если ограниченная функция* f *интегрируема на непересекающихся множествах* E_1 и E_2, *то она интегрируема и на множестве* $E = E_1 \cup E_2$.

Действительно, если функция f ограничена и интегрируема на множествах E_1 и E_2, то, в силу теоремы 13, для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения τ_1 и τ_2 соответственно множеств E_1 и E_2 такие, что

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2},\quad S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.93}$$

Поскольку $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ является разбиением множества $E = E_1 \cup E_2$ и соответствующие ему верхняя S_τ и нижняя s_τ суммы Дарбу выражаются через аналогичные суммы Дарбу, соответствующие разбиениям τ_1 и τ_2, по формулам $S_\tau = S_{\tau_1} + S_{\tau_2}$, $s_\tau = s_{\tau_1} + s_{\tau_2}$, то вычитая из первого из этих равенств второе, получаем в силу (44.93)

$$S_\tau - s_\tau = (S_{\tau_1} - s_{\tau_1}) + (S_{\tau_2} - s_{\tau_2}) < \varepsilon.$$

Из выполнения этого условия следует (снова согласно теореме 13), что функция f интегрируема на множестве E.

Замечание 2. Как уже отмечалось в п. 44.3, для функций одной переменной, определенных на отрезках, мы располагаем двумя определениями интеграла, а именно, определением, данным в п. 27.1 — с помощью разбиений отрезков только на отрезки, и определением из п. 44.3 — с помощью разбиений отрезков на любые измеримые по Жордану множества. Эти два определения эквивалентны.

Докажем это. И при первом и при втором определении необходимым условием интегрируемости является ограниченность рассматриваемой функции: см. теорему 1 в п. 27.2 и замечание к теореме 7 в п. 44.4. (отрезок является замыканием интервала, т. е. замыканием открытого множества). Поэтому рассмотрим

ограниченную на некотором отрезке $[a, b]$ функцию f. Пусть для этой функции существует интеграл $I=\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu E_i$ в смысле п. 44.3, т. е. для всевозможных разбиений $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ отрезка $[a, b]$ на измеримые по Жордану множества E_i. Тогда, если ограничиться лишь частью разбиений τ, для которых все множества E_i являются отрезками, то при $\delta_\tau\to 0$ предел интегральных сумм $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu E_i$ по указанной части разбиений также будет существовать и будет равен тому же числу I. Следовательно, если существует интеграл в смысле п. 44.3, то он существует и в смысле п. 27.1.

Пусть, наоборот, существует интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в смысле п. 27.1. Тогда согласно теореме 2 из п. 27.4 $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}(S_\tau-s_\tau)=0$, где τ — разбиение отрезка $[a, b]$ на отрезки. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$ на отрезки длин, не превышающих δ, справедливо неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$. Но уже из того, что существует по крайней мере одно разбиение τ, для которого выполняется неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$, следует, согласно теореме 13 из этого пункта, что функция f интегрируема в смысле определения п. 44.3.

Итак, оба определения интеграла по отрезку действительно эквивалентны.

Замечание 3. Из доказанного вытекает также следующее усиление достаточных условий интегрируемости функции, доказанных в теореме 2 из п. 27.4: для интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ в смысле определения интеграла в п. 27.1 достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось хотя бы одно такое разбиение τ отрезка $[a, b]$ на отрезки, что для нижних и верхних сумм Дарбу соответствующих этому разбиению, выполнялось бы неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$.

Действительно, в этом случае функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле п. 44.3, а потому, согласно доказанному, и в смысле п. 27.1.

Замечание 4. Из предыдущего замечания непосредственно следует, что функция f, ограниченная на некотором отрезке $[a, b]$ и интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a<\eta<b$, интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$ (это факт был отмечен нами без доказательства в п. 33.1). Действительно, если $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[a, b]$, и задано $\varepsilon>0$, то выберем δ, $0<\delta<b-a$, так, чтобы $\delta<\frac{\varepsilon}{4M}$. Тогда в силу интегрируемости функции

f на отрезке $[a, b-\delta]$ существует такое его разбиение τ, что если s_τ и S_τ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для этого разбиения, то

$$S_\tau - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через τ_0 разбиение отрезка $[a, b]$, получающееся из разбиения τ_0 отрезка $[a, b-\delta]$ добавлением точки b: $\tau_0 = \tau \cup \{b\}$, и пусть $m_0 = \inf\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$, $M_0 = \sup\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$. Если s_{τ_0} и S_{τ_0} — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции для разбиения τ_0, то

$$S_{\tau_0} = S_\tau + M_0\delta, \quad s_{\tau_0} = s_\tau + m_0\delta.$$

Поэтому

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = S_\tau - s_\tau + (M_0 - m_0)\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и, следовательно, согласно замечанию 3, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$.

§ 45. СВЕДЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Перейдем теперь к свойствам кратного интеграла, связанным со специфическими чертами, отличающими многомерный случай от одномерного. Использование этих свойств часто существенно облегчает вычисление конкретных кратных интегралов. Полные доказательства будут проводиться лишь для случая функций двух переменных. Общий, n-мерный случай, в идейном отношении не отличается от плоского, однако рассуждения там принимают более громоздкий и трудно обозримый вид.

45.1. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

В настоящем параграфе будет показано, что интегрирование функций многих переменных может быть сведено к последовательному интегрированию функций одной переменной. Начнем с того, что определим понятие повторного интеграла.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, такие, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть на множестве (рис. 173)

$$E = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{45.1}$$

определена функция $f(x, y)$.

Если для любого фиксированного $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, как функция переменного y, интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$,

т. е. при любом $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dx$ и функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{45.2}$$

интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx \tag{45.3}$$

называется *повторным интегралом* и обозначается через

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{45.4}$$

Функция $F(x)$, задаваемая равенством (45.2), называется *интегралом, зависящим от параметра* x. Таким образом, повторный интеграл (45.4) является интегралом от интеграла, зависящего от параметра (см. также § 53, 54).

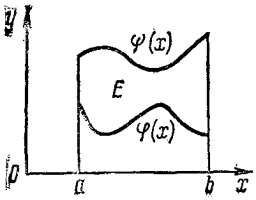

Рис. 173

Заметим, что множество E, задаваемое формулой (45.1) измеримо в смысле плоской меры Жордана и замкнуто. Действительно из непрерывности функций φ и ψ на отрезке $[a, b]$ следует их ограниченность, а поэтому множество E ограничено. Далее, его граница ∂E состоит из графиков указанных функций φ и ψ, а также, быть может, отрезков прямых $x = a$ и $x = b$. Каждое из указанных множеств имеет меру ноль (см. теорему 3 в п. 44.2), а поэтому и граница ∂E множества E также имеет меру ноль. Наконец, множество E задается с помощью нестрогих неравенств $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, где функции φ и ψ непрерывны, следовательно, эти неравенства сохраняются и при предельном переходе, откуда и вытекает замкнутость множества E. Таким образом, E — измеримый компакт.

Достаточные условия для возможности сведéния двукратного интеграла к повторному даются следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве E, заданном формулой* (45.1). *Тогда*

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{45.5}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *В предположениях теоремы* 1 *функция* (45.2) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что интеграл (45.2) существует при любом $x \in [a, b]$. Действительно, функция $f(x, y)$, будучи непрерывной по совокупности переменных x и y, непрерывна по каждому из них. Поэтому указанный интеграл существует как интеграл от непрерывной по y функции на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Выполнив в этом интеграле замену переменной y на t по формуле

$$y = \varphi(x) + [\psi(x) - \varphi(x)]\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{45.6}$$

получим

$$F(x) = \int_0^1 f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\, t]\,(\psi(x) - \varphi(x))\,dt. \tag{45.7}$$

Положим

$$g(x, t) = f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\, t]\,(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Поскольку функция $g(x, t)$ получается с помощью арифметических операций и композиции из непрерывных функций f, φ, ψ и (45.6), то в силу теоремы о непрерывных функциях (см. п. 19.3 и 19.4) $g(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных x, t на прямоугольнике

$$\Delta = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Таким образом, для функции $F(x)$ (см. (45.2)) в силу (45.7) имеет место более простое представление

$$F(x) = \int_0^1 g(x, t)\, dt$$

(более простое в том смысле, что в нем постоянны пределы интегрирования).

Пусть теперь $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$.
Обозначим через $\omega(\delta; g)$ модуль непрерывности (см. п. 19.6) функции $g(x, t)$. Тогда

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_0^1 g(x + \Delta x, t)\, dt - \int_0^1 g(x, t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|\, dt \leqslant \omega(|\Delta x|; g). \tag{45.8}$$

Функция $g(x, t)$, будучи непрерывной на ограниченном замкнутом множестве Δ, равномерно непрерывно на нем, а поэтому (см. п. 19.6) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; g) = 0$. Отсюда в силу неравенства (45.8) имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0,$$

что и означает непрерывность функции $F(x)$, определенной формулой (45.2). □

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что интеграл, стоящий в правой части равенства (45.5), т. е.

$$\int_b^a F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy,$$

является интегралом от непрерывной функции (см. лемму) и потому существует.

Разобьем теперь множество E на части E_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, следующим образом. Рассмотрим разбиение $\tau_k = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ отрезка $[a, b]$ на k равных отрезков:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b,$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

и пусть

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{k}[\psi(x) - \varphi(x)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{k}[\psi(x) - \varphi(x)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{k}[\psi(x) - \varphi(x)] = \psi(x).$$

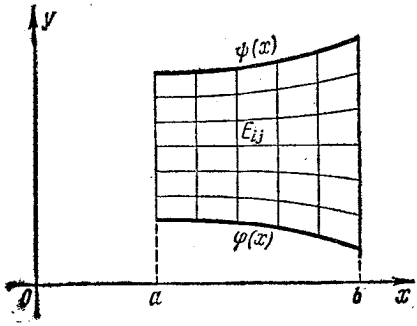

Рис. 174

Положим $E_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ \varphi_{j-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_j(x)\}$, и пусть $\tau_k^* = \{E_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что τ_k^* является разбиением множества E (рис. 174).

Теперь имеем:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy. \qquad (45.9)$$

Положим

$$m_{ij} = \inf_{E_{ij}} f(x, y) \text{ и } M_{ij} = \sup_{E_{ij}} f(x, y), \quad i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Заметив, что

$$\mu E_{ij} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\,dx,$$

получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\,dy \leqslant M_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy =$$

$$= M_{ij} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\,dx = M_{ij}\mu E_{ij}, \qquad (45.10)$$

и аналогично,

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\,dy \geqslant m_{ij}\mu E_{ij}. \qquad (45.11)$$

С помощью неравенств (45.10) и (45.11) для повторного интеграла (45.9) получаем следующую оценку через нижние и верхние суммы Дарбу $s_{\tau_k^*}$ и $S_{\tau_k^*}$ функции $f(x, y)$:

$$s_{\tau_k^*} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} m_{ij}\mu E_{ij} \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} M_{ij}\mu E_{ij} = S_{\tau_k^*}. \qquad (45.12)$$

Для мелкости $\delta_{\tau_k^*}$ разбиения τ_k^* области G имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\tau_k^*} = 0$. Действительно, как уже отмечалось, функции φ и ψ в силу своей непрерывности ограничены на отрезке $[a, b]$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|\varphi(x)| \leqslant M$ и $|\psi(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Поэтому для диаметра $d(E_{ij})$ каждого множества $E_{ij} \in \tau_k^*$ имеем в силу определения функций φ_j

$$d(E_{ij}) \leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \max_{[x_{j-1}, x_j]} [\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x')]} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \left[\omega\left(\frac{b-a}{k}, \psi\right) + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}, \varphi\right) + \frac{2M}{k}\right]^2},$$

где $\omega(\delta, \psi)$ и $\omega(\delta, \varphi)$ — модули непрерывностей функций ψ и φ.

Следовательно, $\delta_{\tau_k^*} = \max\limits_{i, j} d(E_{ij}) \leqslant \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2 + 4M^2} \to 0$ при $k \to +\infty$. Поэтому, в силу интегрируемости функции $f(x, y)$ на E (см. п. 44.4),

$$\lim_{k\to\infty} s_{\tau_k^*} = \lim_{k\to\infty} S_{\tau_k^*} = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy.$$

Переходя теперь к пределу в неравенстве (45.12) при $k \to \infty$, получим формулу (45.5). □

Если множество E таково, что существуют такие непрерывные функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, что

$$E = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d, \quad \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}, \tag{45.13}$$

а функция $f(x, y)$, как и раньше непрерывна на E, то в силу равноправия переменных x и y, из теоремы 1 следует, что

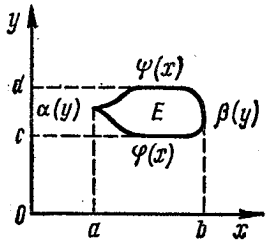

Рис. 175

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx. \tag{45.14}$$

Если же для множества E справедливо как равенство (45.1), так и (45.13) (рис. 175), то приравняя правые части равенств (45.5) и (45.14), для непрерывной на множестве E функции $f(x, y)$ получим формулу

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx, \tag{45.15}$$

выражающую собой правило перемены порядка интегрирования в повторных интегралах.

Отметим, что условия, при которых были доказаны формулы (45.5), (45.14) и (45.15), могут быть ослаблены.

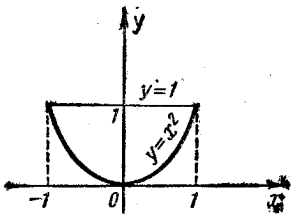

Рис. 176

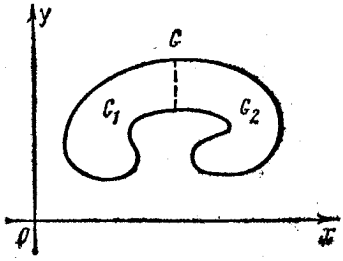

Рис. 177

Пример. Вычислим интеграл от функции $z = x^2 y$ по конечной области G, ограниченной частью параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рис. 176). Имеем

$$\iint\limits_G x^2 y\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx \int\limits_{x^2}^{1} y\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} (1 - x^4)\,x^2\,dx = \frac{4}{21}.$$

Если требуется вычислить двойной интеграл по множеству, которое нельзя задать в виде (45.1) или (45.13), то для того

чтобы использовать полученные формулы, надо попытаться разбить данное множество на части, каждая из которых будет уже иметь вид (45.1) или (45.13) (рис. 177). Если это удастся сделать, то в силу аддитивности интеграла по множествам (см. п. 44.6) вычисление данного интеграла сведется к вычислению интегралов по указанным частям, а последние с помощью формул (45.5) и (45.14) могут быть сведены к однократным.

Упражнения. Вычислить интегралы:

1. $\iint\limits_E \frac{dx\,dy}{y}$, $E=\{(x, y): x^2-6x-5<0;\ y>1;\ 3x-y-2>0,\ x^2-y>0\}$.

2. $\iint\limits_E x^2y^2\,dx\,dy$, $E=\{(x, y): y>0;\ xy<1;\ x^2-3xy+2y^2<0\}$.

3. $\iint\limits_E x\,dx\,dy$, $E=\{(x, y): x<20;\ y<20;\ x-y+5>0,\ xy>6\}$.

4. $\iint\limits_E x\sqrt{1+xy}\,dx\,dy$, $E=\left\{(x, y): xy<1,\ x-1<\frac{xy}{x+1}\right\}$.

5. $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$.

6. $\int\limits_0^{1/2}\int\limits_{2y}^1 \cos(x^2+1)\,dx\,dy$.

7. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3-1)\,dx\,dy$.

8. $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-y} e^{-x^2+2x}\,dx\,dy$.

9. $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3/3}\,dx\,dy$.

10. $\int\limits_0^1\int\limits_{(y-1)/2}^0 \operatorname{tg}(x^2+x)\,dx\,dy$.

Изменением порядка интегрирования упростить выражения (функция f непрерывна во всей области интегрирования):

11. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x, y)\,dx+\int\limits_1^3 dx\int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x, y)\,dy$.

12. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{1/x} f(x, y)\,dy$.

13. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x, y)+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{(3-x)/2} f(x, y)\,dy$.

14. Доказать формулу Дирихле $\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x, y)\,dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x, y)\,dx$.

45.2. ОБОБЩЕНИЕ НА n-МЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим сначала трехмерный случай. Пусть $E\subset R^3$ и функция $f(x, y, z)$ определена на E. Обозначим через E_{xy} проекцию множества E на координатную плоскость переменных x и y

(рис. 178):

$$E_{xy}=\{(x,\ y,\ 0)\text{: существует такое } z\text{, что } (x,\ y,\ z)\in E\}.$$

Если множество E имеет вид

$$E=\{(x,\ y,\ z):(x,\ y)\in E_{xy},\quad \varphi_1(x,\ y)\leqslant z\leqslant \psi_1(x,\ y)\},$$

где функции $\varphi_1(x,\ y)$ и $\psi_1(x,\ y)$ непрерывны на множестве E_{xy}, которое в свою очередь представимо, например в виде (45.1), а функция $f(x,\ y,\ z)$ непрерывна на исходном множестве E, то справедлива формула, аналогичная формуле (45.5),

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x)} dy\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\psi_1(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz. \qquad (45.16)$$

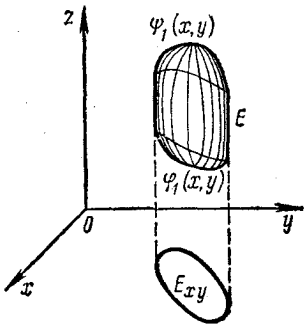

Рис. 178

Объединив в правой части два внешних интеграла, можно переписать (45.16) в виде

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint\limits_{E_{xy}} dx\,dy\int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\psi_1(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz. \qquad (45.17)$$

Обозначим, теперь, через $E(x)$ сечения множества E плоскостями, перпендикулярными координатной оси Ox,

$$E(x_0)=E\cap\{(x,\ y,\ z):x=x_0\}.$$

Объединив в правой части формулы (45.16) два внутренних интеграла, получим:

$$\iiint\limits_E f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_{E(x)} f(x,\ y,\ z)\,dy\,dz. \qquad (45.18)$$

Таким образом, формулы (45.17) и (45.18) показывают, что в трехмерном случае существует два способа сведения трехмерного интеграла к повторному, содержащему интегралы меньшей кратности.

В частном случае, когда $f(x,\ y,\ z)\equiv 1$, имеем (см. свойство 1° кратных интегралов в п. 44.6) $\iiint dx\,dy\,dz=\mu E$, (μE — объем множества E), $\iint\limits_{E(x)} dy\,dz=\mu E(x)$, ($\mu E(x)$ площадь сечения $E(x)$). Таким образом

$$\mu E=\int\limits_a^b \mu E(x)\,dx. \qquad (45.19)$$

— объем тела равен интегралу от переменной площади сечений $E(x)$.

Пример. Найдем объем эллиптического цилиндра высоты h, в основании которого лежит эллипс с полуосями a и b. Взяв за координатную плоскость xy плоскость одного из оснований цилиндра, а за ось z — его ось симметрии, перпендикулярную основаниям (рис. 179), получим согласно формуле (45.19) $\mu E = \int\limits_0^h \mu E(z)\,dz$. Но $E(z)$ эллипс с полуосями a и b, а поэтому (см. пример 4 в п. 32.1) $\mu E(z) = \pi ab$, следовательно $\mu E = \pi ab \int\limits_0^h dz = \pi abh$.

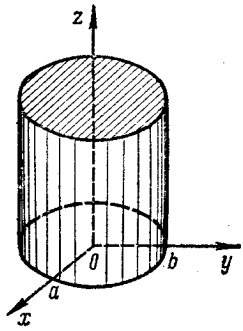

Рис. 179

Аналогично трехмерному случаю кратные интегралы от функций любого числа переменных $n > 3$ можно свести к повторным интегралам. Пусть R^n — n-мерное пространство, R^{n-1} гиперплоскость $x_n = 0$, $E \subset R^n$, $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ проекция множества E на гиперплоскость переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, т. е. на R^{n-1}:

$$E_{x_1 \ldots x_{n-1}} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\text{: существует такое } x_n\text{, что } (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in E\}.$$

Пусть существуют такие непрерывные на $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, что множество E состоит из точек $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, для которых

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E_{x_1 \ldots x_{n-1}},\ \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пусть множество $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ измеримо в смысле $(n-1)$-мерной меры Жордана и замкнуто. Тогда аналогично двумерному случаю (см. п. 45.1) доказывается, что E также измеримо, но уже в смысле n-мерной меры, и замкнуто, а потому является компактом.

Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на компакте E, то справедлива формула

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n \text{ раз}}_{E} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1 \text{ раз}}_{E_{x_1 \ldots x_{n-1}}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\,dx_n, \qquad (45.20)$$

которая сводит интегрирование функции n переменных к последовательному интегрированию функции одной переменной и функции $n-1$ переменных.

Если проекция $E_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ множества E на гиперплоскость R^{n-1} в свою очередь может быть представлена в виде, аналогичном виду множества E, то получившийся в правой части равенства (45.20) $(n-1)$-кратный интеграл можно свести к $(n-2)$-кратному. Продолжая этот процесс, если, конечно, это возможно, дальше, придем к формуле вида

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n \text{ раз}}_{E} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int_{\varphi_2(x_1, x_2)}^{\psi_2(x_1, x_2)} dx_3 \ldots \int_{\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n. \tag{45.21}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интегрирование функции от n переменных сводится к последовательному интегрированию n раз функций одной переменной.

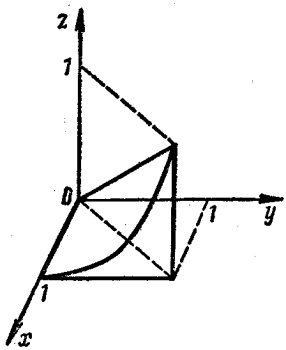

Рис. 180

Обозначим, теперь, через $E_{x_1 \ldots x_m}$ проекцию множества E в пространство $R^m_{x_1 \ldots x_m}$, а через $E(x_1, \ldots, x_m)$ — сечение множества E гиперплоскостями размерности $n-m$, проходящими через точку $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ и ортогональными подпространству $R^m_{x_1 \ldots x_m}$. Объединив в формуле (45.21) m первых и $n-m$ последних интегрирований, получим

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n \text{ раз}}_{E} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int \ldots \int}^{m \text{ раз}}_{E_{x_1 \ldots x_m}} dx_1 \ldots dx_m \overbrace{\int \ldots \int}^{n-m \text{ раз}}_{E(x_1, \ldots, x_m)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{m+1} \ldots dx_n. \tag{45.22}$$

Если $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$ на E, то из этой формулы аналогично (45.19) получаем

$$\mu E = \int \ldots \int_{E_{x_1 \ldots x_m}} \mu E(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m. \tag{45.23}$$

Пример. Вычислим интеграл от функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ по конечной области G, ограниченной поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ и $z = 0$ (рис. 180). Применив формулу (45.16), будем

иметь

$$\iiint\limits_G xy^2z^3\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^x y^2\,dy\int\limits_0^{xy} z^3\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^5\,dx\int\limits_0^x y^6\,dy=\frac{1}{28}\int\limits_0^1 x^{12}\,dx=\frac{1}{364}.$$

Упражнения. Вычислить интегралы:

15. $\iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz,\ E=\{(x,\ y,\ z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant z^2\}.$

16. $\iiint\limits_E (x+y+z)\,x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz,\quad E=\{(x,\ y,\ z):x\geqslant 0;\quad y\geqslant 0;\quad z\geqslant 0;$ $x+y+z\leqslant 1\}.$

17. $\iiint\limits_E (4x-y+z)\,dx\,dy\,dz;$ область E ограничена частями поверхностей $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=2-x^2.$

18. $\iiint\limits_E z^2\,dx\,dy\,dz;$ область E общая часть шаров $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ и $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz.$

45.3*. ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО

В качестве еще одного примера применения правила перемены порядка интегрирования докажем одно часто приемняемое интегральное неравенство.

Пусть функция $f(x,\ y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Delta=\{(x,\ y):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$. Тогда она, очевидно, при любом фиксированном $y\in[c,\ d]$ непрерывна по x на отрезке $[a,\ b]$ и при любом фиксированном $x\in[a,\ b]$ непрерывна по y на отрезке $[c,\ d]$.

Для любого $p>1$ справедливо *обобщенное неравенство Минковского*

$$\left\{\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b|f(x,\ y)|\,dx\right]^p dy\right\}^{1/p}\leqslant\int\limits_a^b dx\left[\int\limits_c^d|f(x,\ y)|^p\,dy\right]^{1/p}. \qquad (45.24)$$

Положим

$$F(y)=\int\limits_a^b|f(x,\ y)|\,dx. \qquad (45.25)$$

Функция F непрерывна (см. лемму 1 в п. 45.1) и неотрицательна на отрезке $[c,\ d]$. Поэтому ее p-я степень также интегрируема и неотрицательна на этом отрезке, и $0\leqslant\int\limits_c^d F^p(y)\,dy<+\infty.$

Если $\int_c^d F^p(y)\,dy = 0$, то, в силу непрерывности функции F, будем иметь (см. свойство 9 п. 28.1): $F(y) \equiv 0$ на $[c, d]$. Поэтому из формулы (45.25) в силу того же свойства следует, что при любом $y \in [c, d]$ имеет место $f(x, y) \equiv 0$ на $[a, b]$, т. е. $f(x, y) \equiv 0$ на Δ. В этом случае неравенство (45.24) очевидно справедливо.

Пусть $\int_c^d F^p(y)\,dy > 0$. Тогда, изменив порядок интегрирования и применив неравенство Гельдера (28.48), получим в силу (45.25)

$$\int_c^d F^p(y)\,dy = \int_c^d F^{p-1}(y)\left[\int_a^b |f(x, y)|\,dx\right]dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\,F^{p-1}(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p\,dy\right]^{1/p} \left[\int_c^d F^{q(p-1)}(y)\,dy\right]^{1/q} dx, \qquad (45.26)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и, следовательно $q(p-1) = p$. Сократив обе части равенства (45.26) на множитель $\left(\int_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/q} \neq 0$, будем иметь

$$\left(\int_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/p} \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p\,dy\right]^{1/p} dx.$$

Подставляя сюда (45.25), получаем неравенство (45.24). Условие непрерывности функции f не является существенным для справедливости неравенства (45.24) и может быть ослаблено. Для простоты доказательства в качестве области определения функции f был взят прямоугольник. При более общих предположениях доказательство неравенства Минковского, основанное на той же идее, можно найти в монографии Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуда, Г. Полиа «Неравенства». М., 1948, 179—180.

§ 46. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

46.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ ЯКОБИАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть G — открытое множество на плоскости R^2_{uv}, G^* — открытое множество на плоскости R^2_{xy}, F — отображение G на G^* и

$$M = (u, v) \in G, \quad M^* = (x, y) \in G^*, \quad F(M) = M^*.$$

Отображение F задается парой функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{46.1}$$

Будем предполагать, что F удовлетворяет следующим условиям:

1) оно взаимно однозначно отображает G на G^*;

2) оно непрерывно дифференцируемо на G;

3) якобиан $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не обращается в нуль на G.

Заметим, что отображение F^{-1}, обратное к F, также является непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением с якобианом, не равным нулю на G^* (см. п. 41.7). Поэтому, в частности, отображение F является диффеоморфным отображением открытого множества G (см. определение 11 в п. 41.7) на G^*.

Если γ — простой замкнутый контур, лежащий в G, то в силу взаимной однозначности отображения F его образ $\gamma^* = F(\gamma)$ также является простым замкнутым контуром.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *открытое ограниченное множество и* $\bar{\Gamma} \subset G$. *Тогда* $\Gamma^* = F(\Gamma)$ *также ограниченное открытое множество и*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \tag{46.2}$$

Доказательство. Поскольку F и F^{-1} — гомеоморфные отображения, то при каждом из них открытые множества отображаются в открытые. Следовательно, внутренние точки какого-либо множества, например, Γ или, соответственно Γ^* переходят во внутренние точки его образа, а граничные — в граничные.

В самом деле, пусть для примера M — внутренняя точка множества Γ, т. е. существует ее окрестность $U = U(M)$, лежащая в Γ: $U \subset \Gamma$. Тогда окрестность $U^* = F(U)$ точки $M^* = F(M)$ лежит в Γ^*: $U^* \subset \Gamma^*$, т. е. M^* внутренняя точка множества Γ^* *).

Пусть теперь M граничная точка множества Γ, $M^* = F(M)$ и U^* — окрестность точки M^*. В силу гомеоморфности отображения F множество $U = F^{-1}(F^*)$ является окрестностью точки M, а поскольку $M \in \partial\Gamma$, то в окрестности U имеются как точки, принадлежащие множеству Γ, так и не принадлежащие ему. Следовательно, в окрестности U^* точки $M^* = F(M)$ (поскольку эта окрестность является образом окрестности $U = U(M)$ точки M при отображении F) также есть точки, как принадлежащие множеству Γ^*, так и не принадлежащие ему, т. е. граничные точки действительно отображаются в граничные:

$$F(\partial\Gamma) \subset \partial\Gamma^*. \tag{46.3}$$

*) Мы получили это утверждение как прямое следствие только гомеоморфности отображения F. Конечно, в данном случае это следует сразу из более сильных сделанных выше предположений (см. следствие из теоремы 7 в п. 41.8).

Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для обратного отображения, то в формуле (46.3) можно заменить знак включения знаком равенства, т. е. выполняется условие (46.2). Кроме того, из открытости множества Γ в силу доказанного вытекает и открытость множества Γ^*. Далее, поскольку Γ — ограниченное множество, то замкнутое множество $\bar{\Gamma}$ также ограничено. Поэтому согласно лемме 3 из п. 41.4, множество $F(\bar{\Gamma})$ ограничено. Из ограниченности множества $F(\bar{\Gamma})$ вытекает и ограниченность множества $\Gamma^* = F(\Gamma)$, ибо $F(\Gamma) \subset F(\bar{\Gamma})$. □

Следствие. *Если в предположениях леммы 1 граница Γ состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых, то открытые множества Γ и Γ^* квадрируемы.*

Доказательство. Если γ непрерывно дифференцируемая кривая, лежащая во множестве G, и $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — некоторое ее представление, то функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. При отображении F кривая γ перейдет в кривую $\gamma^* = F(\gamma)$ с представлением

$$x(t) = x(u(t), v(t)), \quad y(t) = y(u(t), v(t)), \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

у которого в силу формул дифференцирования сложной функции (см. п. 20.3) и теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций (см. п. 19.4) функции $x(t)$ и $y(t)$ также имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Следовательно, кривая γ^* — также непрерывно дифференцируема. Отсюда, очевидно, сразу вытекает, что если γ — кусочно-непрерывно дифференцируемая кривая, т. е. является объединением конечного числа непрерывно дифференцируемых кривых (см. п. 16.3), то γ^* — также кусочно-непрерывно дифференцируемая кривая.

Если теперь граница $\partial\Gamma$ открытого множества $\Gamma \subset G$ состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых, то и граница $\partial\Gamma^*$ открытого множества $\Gamma^* \subset G^*$ также, в силу сказанного выше, состоит из конечного числа кусочно-непрерывно дифференцируемых кривых. Следовательно, как $\partial\Gamma$, так и $\partial\Gamma^*$ спрямляемы (см. теорему 1 в п. 16.5), вследствие чего они имеют меру ноль (см. теорему 4 в п. 44.2). Поэтому в рассматриваемом случае открытые множества Γ и Γ^*, имея границы меры ноль, — квадрируемы. □

Пусть теперь $(u_0, v_0) \in G$ и h некоторое число. Рассмотрим замкнутый квадрат S (рис. 181) с вершинами в точках

$$(u_0, v_0), \quad (u_0+h, v_0), \quad (u_0+h, v_0+h), \quad (u_0, v_0+h). \qquad (46.4)$$

Пусть $S \subset G$ (при достаточно малом h это включение всегда выполняется; почему?). Граница ∂S квадрата S, состоящая из четырех его сторон, очевидно, является простым замкнутым кусочно-гладким контуром. В силу следствия из леммы 2 множество

$S^* = F(S)$ (см. рис. 181) представляет собой замкнутую квадрируемую область (то, что S^* — замкнутая область, следует из принципа сохранения области, см. п. 41.8).

Изучим поведение отношения

$$\mu F(S)/\mu S\ ^{*)}, \tag{46.5}$$

при стремлении h к нулю.

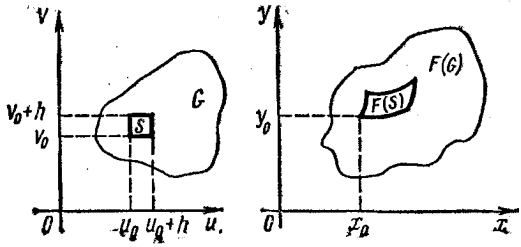

Рис. 181

Введем обозначения:

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0, \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{11}, \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{12},$$

$$\frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{21}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{22}, \quad u - u_0 = \Delta u, \quad v - v_0 = \Delta v,$$

$$r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

В силу дифференцируемости функций (46.1) справедливы формулы

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \varepsilon_1 r, \\ y &= y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \varepsilon_2 r, \end{aligned} \tag{46.6}$$

где функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$, стремятся к нулю при $r \to 0$.

Наряду с отображением F рассмотрим линейное отображение $\tilde{F}$ плоскости R^2_{uv} на плоскость R^2_{xy}, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ \tilde{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0). \end{aligned} \tag{46.7}$$

Из аналитической геометрии известно, что при линейном отображении образ всякого параллелограмма, в частности — квадрата, является параллелограммом, причем отношение площади последнего к площади отображаемого параллелограмма равняется абсолютной величине определителя отображения, который для отобра-

*) Здесь, как всегда, μE обозначает меру (в данном случае — площадь) множества E.

жения $\tilde{F}$ совпадает с якобианом $J(u, v)$ отображения F в точке (u_0, v_0). Таким образом, в рассматриваемом нами случае для отображения (46.7) имеем

$$\frac{\mu\tilde{F}(S)}{\mu S} = \left|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right| = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.8}$$

Непрерывно дифференцируемое отображение F в окрестности точки (u_0, v_0) отличается от линейного отображения $\tilde{F}$ на бесконечно малую функцию более высокого порядка, чем приращение аргументов (см. (46.6)). Покажем, что отсюда следует справедливость равенства

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.9}$$

Более того, покажем, что стремление к пределу в этом равенстве происходит равномерно на любом компакте, лежащем в открытом множестве G. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть отображение F открытого множества $G \subset \subset R^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset R^2_{xy}$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на G и пусть его якобиан $J(u, v)$ не обращается в ноль на G. Тогда, если S — квадрат с вершинами* (46.4), *то*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \tag{46.10}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$ при $h \to 0$ стремится к нулю равномерно относительно (u_0, v_0) на любом компакте $A \subset G$ *).

Следствие. *Для любой точки (u_0, v_0) открытого множества G выполняется равенство* (46.9).

Доказательство. Покажем, что площадь образа квадрата S при отображении F отличается от площади образа этого квадрата при линейном отображении $\tilde{F}$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем площадь h^2 самого квадрата S, и эта оценка равномерна на любом компакте $A \subset G$, т. е. что

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2, \tag{46.11}$$

где ε стремится к нулю равномерно на множестве A, когда длина h стороны квадрата S стремится к нулю (определение равномерного стремления функции к пределу см. в п. 39.4). Поскольку (см. (46.8))

$$\mu\tilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)|\,\mu S \tag{46.12}$$

и

$$\mu S = h^2,$$

то из (46.11) непосредственно следует утверждение теоремы, т. е. формула (46.10).

---

*) Таким образом, $A \ni (u_0, v_0)$.

Переходя к доказательству формулы (46.11), зафиксируем прежде всего множество A. Поскольку A компакт и $A \subset G$, то функции $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$ (см. (46.6)) равномерно стремятся к нулю на множестве A при $r \to 0$ (см. замечание к теореме 4 в п. 20.2, а также п. 39.4). Множества A и $E^2_{uv} \setminus G$ не пересекаются и замкнуты, и кроме того, A ограничено, а поэтому (см. лемму 7 в п. 18.2) $\eta = \rho(A, E^2_{uv} \setminus G) > 0$.

В дальнейшем будем h всегда выбирать таким, что $|h| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. В этом случае из того, что $(u_0, v_0) \in A$, следует, что $S \subset G$.

Оценим расстояние между образами одной и той же точки квадрата S при отображениях F и $\tilde{F}$. Пусть

$$M = (u, v) \in S, \quad F(M) = (x, y) \quad \text{и} \quad \tilde{F}(M) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Тогда из (46.6) и (46.7) получим $x = \tilde{x} + \varepsilon_1 r$, $y = \tilde{y} + \varepsilon_2 r$ и, следовательно,

$$\rho(F(M), \tilde{F}(M)) = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} = r\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Поскольку r — расстояние от вершины (u_0, v_0) квадрата S до точки $M \in S$, а $|h|\sqrt{2}$ — длина диагонали квадрата S, то, очевидно, выполняется неравенство $r \leqslant |h|\sqrt{2}$, а потому имеем

$$d = \sup_{M \in S} \rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant$$
$$\leqslant |h|\,\varepsilon_3(u_0, v_0, h), \qquad (46.13)$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h) = \sup_{M \in S} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$ при $h \to 0$ стремится к нулю равномерно на множестве A.

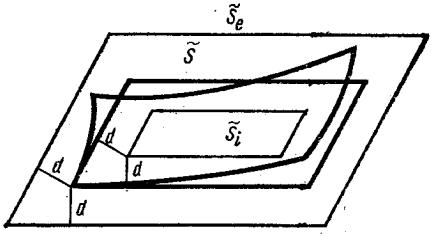

Рис. 182

Построим замкнутый $\tilde{S}_e$*) и открытый $\tilde{S}_i$**) параллелограммы со сторонами, параллельными сторонам параллелограмма $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ и отстоящими от его соответствующих сторон на расстояние d (рис. 182), так, чтобы

$$\tilde{S}_i \subset \tilde{S} = \tilde{F}(S) \subset \tilde{S}_e. \qquad (46.14)$$

Прежде всего покажем, что при достаточно малых h множество $\tilde{S}_i$ не пусто. Более того, покажем, что параллелограмм $\tilde{S}_i$ содержит в себе круг радиуса d с центром в центре параллелограмма $\tilde{S}$.

*) «e» — начальная буква латинского слова exterior (внешний).
**) «i» — начальная буква латинского слова interior (внутренний).

Обозначим через a и b длины сторон параллелограмма $\tilde{S}$, а через H_a и H_b — длины его высот, опущенных соответственно на стороны длин a и b (рис. 183). Для доказательства того, что при достаточно малых h круг радиуса d с центром в центре параллелограмма $\tilde{S}$ содержится в $\tilde{S}_i$, очевидно, достаточно установить справедливость при достаточно малых h неравенств

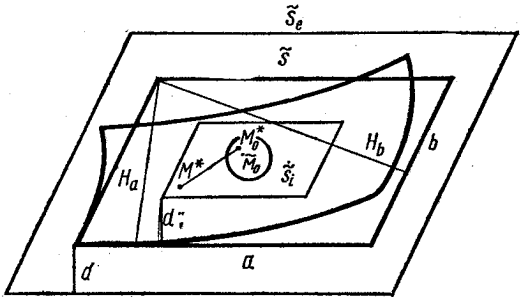

Рис. 183

$$4d < H_a, \quad 4d < H_b. \tag{46.15}$$

Докажем это. Пусть для определенности сторона параллелограмма $\tilde{S}$ длины a соединяет вершины, являющиеся при отображении $\tilde{F}$ образами вершин (u_0, v_0) и (u_0+h, v_0) квадрата S, т. е. соединяет точки (x_0, y_0) и $(x_0+a_{11}h, y_0+a_{21}h)$. Тогда

$$a=\sqrt{a_{11}^2h^2+a_{21}^2h^2}=|h|\sqrt{a_{11}^2+a_{21}^2}. \tag{46.16}$$

Аналогично,

$$b=|h|\sqrt{a_{12}^2+a_{22}^2}. \tag{46.17}$$

Функции $a_{ij}=a_{ij}(u_0, v_0)$, $i, j=1, 2$ являются значениями соответствующих частных производных функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в точках (u_0, v_0) компакта A. В силу предположенной непрерывности этих частных производных они ограничены на множестве A, т. е. существует такая постоянная $c_1>0$, что на A выполняются неравенства $|a_{ij}|\leqslant c_1$, $i, j=1, 2$.

Отсюда и из формул (46.16) и (46.17) следует, что

$$|a|\leqslant c_1\sqrt{2}\,|h|, \tag{46.18}$$

$$|b|\leqslant c_1\sqrt{2}\,|h|. \tag{46.19}$$

Далее, по предположению, якобиан $J(u, v)$ отображения F, являющийся непрерывной функцией, не обращается в ноль на множестве G, а следовательно, и на компакте A. Поэтому существует (почему?) такая постоянная $c_2>0$, что на множестве A выполняется неравенство

$$|J(u, v)|\geqslant c_2. \tag{46.20}$$

Заметив, что $\mu\tilde{S} = aH_a = bH_b = |J(u_0, v_0)|h^2$, получим (см. (46.18), (46.19) и (46.20)):

$$h^2 = \frac{aH_a}{|J(u_0, v_0)|} \leqslant \frac{1}{c_2}\sqrt{2}\,|h|\,H_a,$$

$$h^2 = \frac{bH_b}{|J(u_0, v_0)|} \leqslant \frac{1}{c_2}c_1\sqrt{2}\,|h|\,H_b,$$

т. е.

$$|h| \leqslant \frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}H_a, \tag{46.21}$$

$$|h| \leqslant \frac{c_1\sqrt{2}}{c_2}H_b. \tag{46.22}$$

Располагая этими оценками, легко доказать справедливость неравенств (46.15). Действительно, использовав неравенства (46.13), (46.21) и (46.22), получим

$$4d \leqslant 4\varepsilon_3|h| \leqslant \frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}H_a, \tag{46.23}$$

$$4d \leqslant \frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2}H_b. \tag{46.24}$$

Выберем теперь такое $\delta > 0$, чтобы при $|h| < \delta$ и $(u_0, v_0) \in A$ выполнялось условие

$$\frac{4\sqrt{2}\,c_1\varepsilon_3}{c_2} < 1. \tag{46.25}$$

Это всегда возможно в силу того, что функция $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h)$ (см. (46.13)) стремится к нулю равномерно на компакте A при $h \to 0$. Из (46.23), (46.24) и (46.25) следует, что при $|h| < \delta$ выполняются неравенства (46.15), откуда, в частности, вытекает, что множество $\tilde{S}_i$ не пусто. В дальнейшем в ходе доказательства будем всегда предполагать, что $|h| < \delta$.

Множество $\tilde{S}_e \setminus \tilde{S}_i$ назовем *рамкой* и обозначим через $\tilde{R}$:

$$\tilde{R} = \tilde{S}_e \setminus \tilde{S}_i.$$

Рамка $\tilde{R}$ представляет собой объединение четырех не обладающих общими внутренними точками трапеций, высоты которых имеют длину $2d$, а средние линии совпадают с соответствующими сторонами параллелограмма S. Поэтому $\mu\tilde{R} = 4d(a+b)$.

Заметим, что если множество $\tilde{S}_i$ было бы пустым, то подсчет площади рамки $\tilde{R}$ пришлось бы делать иначе: указанные выше трапеции превратились бы в треугольники, у которых стороны параллелограмма $\tilde{S}$ уже не являлись бы, вообще говоря, средними линиями.

Из полученного для площади $\mu\tilde{R}$ рамки $\tilde{R}$ выражения, в силу неравенств (46.13), (46.18) и (46.19), следует, что $\mu\tilde{R} \leqslant \leqslant 8\sqrt{2}\, c_1\varepsilon_3 h^2$. Положив $\varepsilon_4 = 8\sqrt{2}\, c_1\varepsilon_3$, окончательно будем иметь:

$$\mu\tilde{R} \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.26}$$

где функция ε_4 равномерно стремится к нулю на компакте A при $h \to 0$.

Покажем теперь, что площадь множества $F(S)$ отличается от площади параллелограмма $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ не более чем на площадь рамки $\tilde{R}$. Для этого прежде всего установим, что

$$\tilde{S}_i \subset F(S) \subset \tilde{S}_e. \tag{46.27}$$

Действительно, если $M \in S$, то $\tilde{F}(M) \in \tilde{S}$ и согласно (46.13) $\rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant d$.

Далее, по построению множество $\tilde{S}_e$ содержит все точки плоскости, находящиеся от параллелограмма $\tilde{S}$ на расстоянии, не превышающем числа d. Поэтому $F(M) \in \tilde{S}_e$ и включение $F(S) \subset \subset \tilde{S}_e$ доказано. Осталось доказать, что $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Прежде всего заметим, что

$$F(\partial S) \subset \tilde{R}. \tag{46.28}$$

Действительно, если $M \in \partial S$, то $F(M) \in \partial\tilde{S}$ и, согласно (46.13), $\rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant d$. Но по построению рамка $\tilde{R}$ содержит все точки плоскости, отстоящие от границы $\partial\tilde{S}$ параллелограмма $\tilde{S}$ на расстояние, не превышающее числа d, а поэтому $F(M) \in \tilde{R}$ и включение (46.28) доказано. Поскольку при сделанных предположениях граница $\partial F(S)$ образа $F(S)$ квадрата S совпадает с образом $F(\partial S)$ границы ∂S квадрата S (см. лемму 1 п. 46.1), то включение (46.28) можно переписать в виде

$$\partial F(S) \subset \tilde{R}. \tag{46.29}$$

Пусть теперь M_0 — центр квадрата S. При отображении $\tilde{F}$ он переходит в центр $\tilde{M}_0 = \tilde{F}(M_0)$ параллелограмма $\tilde{S}$. Пусть Q — замкнутый круг радиуса d с центром в точке $\tilde{M}_0$ (величина d определяется формулой (46.13)). Выше было доказано, что $Q \subset \subset \tilde{S}_i$. Если $M_0^* = F(M_0)$, то согласно (46.13), $\rho(M_0^*, \tilde{M}_0) \leqslant d$ и, следовательно, $M_0^* \in Q$, а поэтому и $M_0^* \in \tilde{S}_i$. Таким образом, $\tilde{S}_i$ содержит заведомо одну точку $F(S)$, а именно образ M_0^* центра M_0 квадрата S при отображении F.

Покажем теперь, что и все точки $\tilde{S}_i$ принадлежат $F(S)$. Допустим противное: пусть существует такая точка $M^* \in \tilde{S}_i$, что

$M^* \notin F(S)$ (см. рис. 183). Всякий отрезок является, очевидно, линейно связным множеством, а поэтому, согласно лемме 9 из п. 18.2, на отрезке $M_0^*M^*$ с концами в точках M_0^* и M^* найдется точка границы $\partial F(S)$ множества $F(S)$. Этой точкой не может являться M^*, поскольку множество $F(S)$ замкнуто (см. лемму 3 в п. 41.4), и следовательно, $\partial F(S) \subset F(S)$, а по предположению, $M^* \notin F(S)$. Поэтому точка пересечения множества $\partial F(S)$ с отрезком $M_0^*M^*$ является внутренней точкой параллелограмма $\tilde{S}_i$, а это противоречит включению (46.29).

Таким образом, не существует точки $M^* \in \tilde{S}_i$, для которой одновременно $M^* \notin F(S)$, поэтому $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Формула (46.27) доказана.

Из (46.14) и (46.27) следует, что

$$\mu\tilde{S}_i \leqslant \mu\tilde{F}(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e, \quad \mu\tilde{S}_i \leqslant \mu F(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e,$$

и, следовательно,

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \mu\tilde{S}_e - \mu\tilde{S}_i = \mu\tilde{R}.$$

Поэтому в силу (46.26)

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.30}$$

где ε_4 стремится к нулю равномерно на компакте A при $h \to 0$.

Положим

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)}{h^2}, \tag{46.31}$$

тогда из (46.30) следует, что $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_4|$ и поэтому ε равномерно на множестве A стремится к нулю при $h \to 0$. Из (46.31) имеем

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2,$$

т. е. мы получили формулу (46.11), откуда, как это уже отмечалось, сразу следует (46.10). □

46.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВУКРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Вначале сохраним обозначения и предположения предыдущего пункта, в частности, будем предполагать, что F является взаимно однозначным непрерывно дифференцируемым отображением открытого множества $G \subset R^2_{uv}$ на открытое множество $G^* \subset R^2_{xy}$ с якобианом, не равным нулю на G. Пусть Γ и Γ^* квадрируемые (и, следовательно, ограниченные) открытые множества, $\bar{\Gamma} \subset G$, $\bar{\Gamma}^* \subset G^*$ и пусть при отображении F множество $\bar{\Gamma}$ отображается на $\bar{\Gamma}^*$. Тогда $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^*$ компакты, внутренние точки Γ переходят во внутренние, а граница Γ отображается на границу Γ^*.

Теорема 2 (формула замены переменных в двукратном интеграле). *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на $\overline{\Gamma}^*$. Тогда*

$$\iint\limits_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv. \quad (46.32)$$

Доказательство. Заметим, что входящие в (46.32) интегралы существуют как интегралы от функций, непрерывных на замыкании квадрируемых областей. Действительно, по условию функция $f(x, y)$ непрерывна на $\overline{\Gamma}^*$ и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ — на $\overline{\Gamma}$, а функция $f[x(u, v), y(u, v)]$ непрерывна на $\overline{\Gamma}$ как композиция непрерывных функций.

Возьмем разбиение ранга k плоскости R_{uv} на квадраты. Ранг k выберем столь большим, чтобы всякий квадрат этого ранга, пересекающийся с $\overline{\Gamma}$, целиком содержался в G (почему такой ранг существует?). Обозначим через Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$ всевозможные непустые пересечения внутренностей (множества внутренних точек) квадратов ранга k с множеством Γ. Множества Γ_i квадрируемы и открыты, ибо их границы имеют меру ноль, так как состоят, вообще говоря, из части границы соответствующего квадрата ранга k и части границы множества Γ. Совокупность $\tau_k = \{\Gamma_i\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ, причем, очевидно,

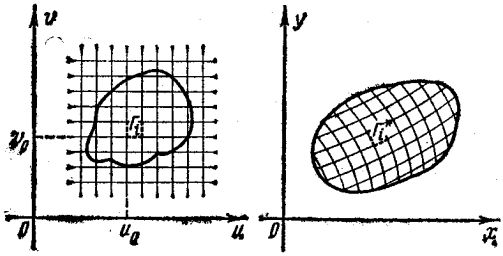

Рис. 184

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k} = 0. \quad (46.33)$$

Пусть далее, $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$; при этом граница Γ_i отображается на границу Γ_i^*, а поэтому граница Γ_i^*, вообще говоря, состоит из части границы множества Γ^* (эта граница в силу предположенной квадрируемости множества Γ^* имеет меру ноль) и части кусочно-гладкой кривой, являющейся образом границы соответствующего квадрата и имеет поэтому также меру ноль. Из сказанного следует, что Γ_i^* является квадрируемым открытым множеством. Из взаимной однозначности отображения F следует, что совокупность $\tau_k^* = \{\Gamma_i^*\}_{i=1}^{i=i_k}$ образует разбиение множества Γ^* (рис. 184).

Оценим мелкость разбиения τ_k^*. Пусть δ_k диаметр квадрата ранга k $\left(\text{очевидно, } \delta_k = \frac{\sqrt{2}}{10^k}\right)$ и $M_1^* = (x_1, y_1) \in \Gamma_i^*$, $M_2^* = (x_2, y_2) \in$

$\in \Gamma_i^*$. Тогда существуют такие $M_1 \in \Gamma_i$ и $M_2 \in \Gamma_i$, что $F(M_1) = M_1^*$, $F(M_2) = M_2^*$, причем $\rho(M_1, M_2) < \delta_k$. Следовательно,

$$\rho(M_1^*, M_2^*) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)}, \qquad (46.34)$$

где $\omega(\delta; x)$ и $\omega(\delta; y)$ — модули непрерывности функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ на компакте $\overline{\Gamma}$. В силу непрерывности этих функций на $\overline{\Gamma}$ они равномерно непрерывны, и поэтому (см. п. 19.6)

$$\lim_{k \to \infty} \omega(\delta_k; x) = \lim_{k \to \infty} \omega(\delta_k; y) = 0. \qquad (46.35)$$

Из (46.34) для диаметра $d(\Gamma_i^*)$ получаем

$$d(\Gamma_i^*) = \sup_{\substack{M_1^* \in \Gamma_i^* \\ M_2^* \in \Gamma_i^*}} \rho(M_1^*, M_2^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

и, следовательно,

$$\delta_{\tau_k^*} = \sup_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*} d(\Gamma_i^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

а поэтому в силу (46.35)

$$\lim_{k \to \infty} \delta_{\tau_k^*} = 0 \text{ *)}. \qquad (46.36)$$

Отберем теперь только те элементы разбиений τ_k и τ_k^*, замыкания которых не пересекаются с границами $\partial\Gamma$ и $\partial\Gamma^*$ множеств Γ и Γ^*. Обозначим их соответственно через $\tau_k(\partial\Gamma)$ и $\tau_k^*(\partial\Gamma^*)$:

$$\tau_k(\partial\Gamma) = \{\Gamma_i\colon \Gamma_i \in \tau_k,\ \overline{\Gamma}_i \cap \partial\Gamma = \varnothing\},$$
$$\tau_k^*(\partial\Gamma^*) = \{\Gamma_i^*\colon \Gamma_i^* \in \tau_k^*,\ \overline{\Gamma}_i^* \cap \partial\Gamma^* = \varnothing\}.$$

В силу сделанных предположений $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$; при этом $\tau_k(\partial\Gamma)$ состоит из тех и только тех элементов $\Gamma_i \in \tau_k$, которые являются целыми квадратами, содержащимися вместе с их границами в множестве Γ.

Составим интегральные суммы $\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)}$ (см. п. 44.3) для функции $f(x, y)$, взяв в качестве точек $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{\Gamma}_i \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ образы каких-либо вершин (u_i, v_i) соответствующих квадратов Γ_i:

$$\xi_i = x(u_i, v_i), \quad \eta_i = y(u_i, v_i). \qquad (46.37)$$

*) Нетрудно убедиться, что равенство (46.36) можно непосредственно получить из равномерной непрерывности непрерывного отображения компакта (см. лемму 4 в п. 41.4).

Иначе говоря, рассмотрим суммы вида

$$\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)} = \sum_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)} f(\xi_i, \eta_i)\,\mu\Gamma_i^*. \tag{46.38}$$

Как известно (см. теорему 5 в п. 44.3), в силу выполнения условия (46.36)

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)} = \iint_{\Gamma^*} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{46.39}$$

С другой стороны, для $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, для которых Γ_i является квадратом, и, следовательно, для $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$, согласно теореме 1 предыдущего пункта,

$$\mu\Gamma_i^* = |J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i + \varepsilon\mu\Gamma_i, \tag{46.40}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(u_i, v_i, \delta_{\tau_k})$ на компакте $\overline{\Gamma}$ равномерно стремится к нулю при $k \to 0$. Подставляя (46.37) и (46.40) в (46.38), получим

$$\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)} = \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i + \\ + \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,\mu\Gamma_i. \tag{46.41}$$

Суммирование в этих суммах распространено на все индексы i, для которых $\overline{\Gamma}_i$ не пересекается с границей Γ. Для первой суммы, стоящей в правой части равенства (46.41), в силу условия (46.33) имеем (см. теорему 5 в п. 44.3)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\,|J(u_i, v_i)|\,\mu\Gamma_i = \\ = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv.$$

Что же касается второй суммы в равенстве (46.41), то она стремится к нулю при $k \to \infty$. Действительно, в силу непрерывности функции $f[x(u, v), y(u, v)]$ на компакте $\overline{\Gamma}$ она ограничена на нем, т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|f[x(u, v), y(u, v)]| \leqslant C, \qquad (u, v) \in \overline{\Gamma}.$$

Если фиксировано произвольное $\varepsilon_0 > 0$, то в силу равномерного на $\overline{\Gamma}$ стремления ε к нулю при $k \to \infty$ можно выбрать k_0 так, чтобы при $k \geqslant k_0$ выполнялось неравенство $|\varepsilon| < \frac{\varepsilon_0}{c\mu\Gamma}$ для

всех $(u_i, v_i) \in \overline{\Gamma}_i$, $\overline{\Gamma}_i \subset \overline{\Gamma}$, тогда:

$$\left| \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)] \mu\Gamma_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)} |\varepsilon| |f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]| \mu\Gamma_i < \frac{\varepsilon_0}{\mu\Gamma} \sum_i \mu\Gamma_i \leqslant \varepsilon_0.$$

Итак,

$$\lim_{k \to \infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma)} = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| \, du \, dv. \quad (46.42)$$

Из (46.39) и (46.42) и следует непосредственно формула (46.32). □

Доказанная теорема легко обобщается и на несколько более общий случай, когда якобиан отображения (46.1) может обращаться в ноль на границе области интегрирования, а само отображение быть не взаимно однозначным на этой границе. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 2′. *Пусть G и G^* открытые квадрируемые множества: $G \subset R^2_{uv}$, $G^* \subset R^2_{xy}$, и*

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v)$$

— непрерывное отображение $\overline{G}$ на $\overline{G}^*$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отображающее G на G^*, якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ этого отображения не обращается в ноль на G и непрерывно продолжаем на G. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $\overline{G}^*$, то

$$\iint_{G^*} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{G} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv.$$

Доказательство. Пусть Γ_k, $k = 1, 2 \ldots$ — последовательность ограниченных открытых квадрируемых множеств, граница которых состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, и

$$\overline{\Gamma}_k \subset G, \quad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = G.$$

В качестве Γ_k можно взять, например совокупность всех внутренних точек множества $S_k(G)$ (см. п. 44.1). Пусть $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$; тогда Γ_k^* также является ограниченным открытым квадрируемым множеством и

$$\overline{\Gamma}_k^* = F(\overline{\Gamma}_k)' \subset G^*, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^*, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^* = G^*.$$

Из выполнения этих условий следует, что (см. теорему 2. п. 31.2)

$$\lim_{k\to\infty} \mu\Gamma_k = \mu G, \quad \lim_{k\to\infty} \mu\Gamma_k^* = \mu G^*. \tag{46.43}$$

Для каждого из множеств Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняются все условия теоремы 2 этого пункта, поэтому

$$\iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.44}$$

Функция $f(x, y)$, как непрерывная на $\bar{G}^*$ функция, интегрируема на G^*, а функция $f[x(u, v), y(u, y)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ по тем же соображениям интегрируема*) на G. Поэтому в силу выполнения условий (46.43) получаем (см. свойство 10° в п. 44.6):

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_k^*} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_k} f[x(u, v)\,y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{G} f[x(u, v), \quad y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{46.45}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, в равенстве (46.44) в силу формул (46.45) мы получим искомую формулу замены переменного в интеграле. □

Замена переменных в кратном интеграле часто существенно упрощает его исследование и вычисление. При этом в отличие от однократного интеграла нередко целью замены переменного является не упрощение подынтегральной функции, а переход к более простой области интегрирования, даже ценой некоторого усложнения подынтегральной функции.

Пример. Вычислим интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Для этого введем новые переменные r, φ (полярные координаты) по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{46.46}$$

Тогда $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$. Отображение (46.46) отображает прямоугольник $G = \{(r, \varphi): 0 < r < 1, \ -\pi < \varphi < \pi\}$ (здесь r

*) Напомним, что в силу условий теоремы эта функция непрерывно продолжаема с множества G на $\bar{G}$, причем значения продолженной функции на границе множества G не влияют на значение интеграла (см. п. 44.3).

и φ рассматриваются как декартовы координаты на плоскости r, φ) взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и с якобианом, не равным нулю, на круг $K=\{(x, y): x^2+y^2<1\}$, из которого исключен радиус, лежащий на отрицательной части оси Ox, т. е. на множество (рис. 185) $G^*=$ $=K\setminus\{(x, y): x\leqslant 0,\ y=0\}$.

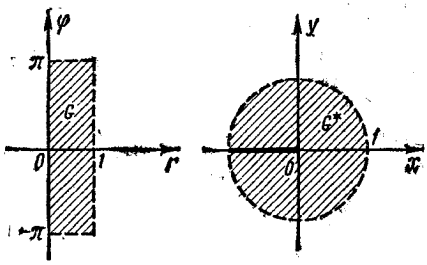

Рис. 185

Замкнутый же прямоугольник $\bar{G}$ при отображении (46.46) переходит в замкнутый круг $\bar{G}^*=\bar{K}$, причем на границе $\bar{G}$ это отображение уже не взаимно однозначно. Якобиан отображения (46.46) непрерывен на $\bar{G}$, причем в одной точке границы, в начале координат, он обращается в ноль. Все условия, накладываемые на отображение (46.1) в теореме 2′ этого пункта выполняются для отображения (46.46), а поэтому можно применить формулу замены переменного в интеграле:

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{\substack{0<r<1\\-\pi<\varphi<\pi}} r\cos\pi r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r\cos\pi r\,dr=2\pi\left[\frac{r\sin\pi r}{\pi}\Big|_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin\pi r\,dr\right]=-\frac{4}{\pi}.$$

Формула (46.32) замены переменных в двойном интеграле может быть доказана и для более общего случая, в частности, когда якобиан отображения обращается в ноль в области интегрирования, а подынтегральная функция имеет разрывы. Если множества указанных точек имеют меру ноль и отображаются также во множества меры ноль, причем эти множества разбивают области интегрирования G и G^* на конечное число открытых множеств, на каждом из которых подынтегральная функция продолжаема до непрерывной вплоть до границы функции, то формула (46.32) непосредственно следует из доказанного выше.

Упражнения. 1. Пусть $f(x, y)=2\pi(x^2-y^2)\sin\pi(x-y)^2$, а E — квадрат с вершинами (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1). С помощью замены переменных $u=x+y$, $v=x-y$ вычислить интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy$.

2. Переходом к полярным координатам вычислить интеграл $\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy$, где

а) $f(x, y)=y$, $E=\{(x, y): x^2+y^2<2x,\ 0<x<y\}$;

б) $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $E=\{(x, y): x^2+y^2<1,\ x<y<\sqrt{3}\,x\}$.

46.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Формулы

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{46.47}$$

можно рассматривать не только как отображение, но и как переход от одной системы координат к другой, вообще говоря, криволинейной. Поясним прежде всего понятие криволинейной системы координат.

Пусть G — некоторое открытое множество на плоскости R^2_{xy} и каждой точке $M = (x, y) \in G$, а значит, и каждой упорядоченной паре чисел (x, y), являющихся координатами точки M в выбранной прямоугольной системе координат, поставлена в соответствие пара чисел (u, v) таким образом, что разным точкам M_1 и M_2 соответствуют разные пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2). В этом случае говорят, что на множестве G задана система координат u, v. При этом если точке M соответствует пара (u, v), то пишут $M = (u, v)$. Каждая пара (u, v) является функцией точки $M \in G$, поэтому и каждый из ее элементов u и v также является функцией точки $M : u = u(M)$, $v = v(M)$, или, что то же, ее декартовых координат:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \tag{46.48}$$

Обратно, каждой паре (u, v) из рассматриваемого множества пар соответствует точка $M \in G$, т. е. точка M есть функция пар $(u, v) : M = M(u, v)$, а поэтому ее декартовы координаты x и y также являются функциями указанных пар (u, v). Иначе говоря, справедливы формулы (46.47), задающие отображение, обратное отображению (46.48).

Множества точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих условию $u(x, y) = u_0$ и соответственно $v(x, y) = v_0$, где u_0 и v_0 некоторые фиксированные постоянные, называются *координатными линиями* в системе координат u, v.

Используя формулы (46.47), координатные линии можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u_0, v), \\ y &= y(u_0, v), \end{aligned} \tag{46.49}$$

соответственно в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u, v_0), \\ y &= y(u, v_0). \end{aligned} \tag{46.50}$$

В случае декартовых координат координатные линии суть прямые, в общем же случае — некоторые кривые, задаваемые представлениями (46.49) и (49.50). Этим и объясняется название «криволинейные координаты» (рис. 186).

Будем предполагать, что функции (46.47) удовлетворяют на G всем условиям, при которых была выведена формула (46.32) замены переменного в интеграле, в частности, что они непрерывно дифференцируемы и что якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не равен нулю на G. В силу этого координатные линии в окрестности каждой точки из G являются непрерывно дифференцируемыми кривыми.

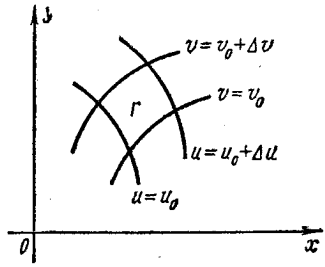

Рис. 186

Исследуем, какой смысл будет иметь в этом случае модуль якобиана. Зафиксируем какие-либо значения u_0, Δu, v_0, Δv. Пусть $M_0=(u_0, v_0)$, Γ — множество всех точек, криволинейные координаты u, v которых удовлетворяют неравенствам $u_0<u<u_0+\Delta u$, $v_0<v<v_0+\Delta v$, и пусть: $\bar{\Gamma}\subset G$. Множество Γ называется *координатным (криволинейным) параллелограммом*. Множество Γ открыто (почему?), и его граница представляет собой кусочно-гладкий контур (он состоит из кривых вида $x=x(u_0, v)$, $y=y(u_0, v)$, где $v_0\leqslant v\leqslant v_0+\Delta v$ и т. п.), поэтому Γ квадрируемая область. Вычислим ее площадь (см. рис. 186). Применив формулу замены переменного в интеграле и интегральную теорему о среднем (см. п. 44.6) получим

$$\mu\Gamma=\iint\limits_{\Gamma} dx\,dy=\iint\limits_{\substack{u_0<u<u_0+\Delta u\\ v_0<v<v_0+\Delta v}}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv=$$

$$=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}du\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}dv=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M\Delta u\,\Delta v,\quad M\in\bar{\Gamma}.$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций (46.47)

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}+\varepsilon,$$

где $\lim\limits_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0}\varepsilon=0$. Таким образом,

$$\mu\Gamma=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}\Delta u\,\Delta v+\varepsilon\,\Delta u\,\Delta v. \tag{46.51}$$

Формула (46.51) показывает, что модуль якобиана в точке (u_0, v_0) представляет собой коэффициент главной части площади координатного параллелограмма с вершиной в точке (u_0, v_0) относительно произведения $\Delta u\,\Delta v$ при $\Delta u^2+\Delta v^2\to 0$. Это замечание часто используется на практике при вычислении якобиана преобразования криволинейных координат в декартовы. Покажем

это на примере полярных координат r, φ. Зафиксируем какие-либо значения r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$ и рассмотрим координатный параллелограмм Γ (рис. 187), образованный координатными линиями r, $r+\Delta r$, φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Длины двух его сторон равны соответственно Δr и $r\Delta\varphi$. Вычислив площадь этого параллелограмма так, как если бы он был обыкновенным прямоугольником, будем иметь

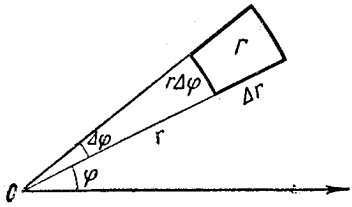

Рис. 187

$$\mu\Gamma \approx r\,\Delta r\,\Delta\varphi.$$

Таким образом, коэффициент у произведения $\Delta r\,\Delta\varphi$ оказался равным r, откуда естественно ожидать, что $\dfrac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}=r$. В действительности (см. пример в п. 46.2) так и есть. Это произошло потому что при наших неточных вычислениях площади Γ допущена ошибка более высокого порядка малости, чем произведение $\Delta r\,\Delta\varphi$ при $\Delta r^2+\Delta\varphi^2\to 0$. В самом деле, вычислив $\mu\Gamma$ как разность площадей двух секторов, получим

$$\mu\Gamma=\frac{\Delta\varphi}{2n}\,\pi\,(r+\Delta r)^2-\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,\pi r^2=r\,\Delta r\,\Delta\varphi+\frac{1}{2}\,\Delta r^2\,\Delta\varphi.$$

46.4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В n-КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Все сказанное в предыдущих пунктах этого параграфа вместе с доказательством переносится и на n-мерный случай, поэтому мы ограничимся лишь формулировкой соответствующих теорем.

Теорема 3. *Пусть $G_x\subset R_x^n$ и $G_t\subset R_t^n$ — открытые множества, $x=F(t)=\{x_i=x_i(t_1,\ldots,t_n),\ i=1,2,\ldots,n\}$ — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение G_t на G_x, якобиан $J(t)=\dfrac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_n)}$ которого не равен нулю на G_t. Пусть далее S — n-мерный куб:*

$$S=\{t:t_i^{(0)}\leqslant t_i\leqslant t_i^{(0)}+h,\quad i=1,2,\ldots,n\}\subset G_t,\quad t^{(0)}=(t_1^{(0)},\ldots,t_n^{(0)}).$$

Тогда $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mu F(S)}{\mu S}=|J(t^{(0)})|$; *при этом, если*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S}=|J(t^{(0)})|+\varepsilon(t^{(0)},h),$$

то для любого компакта $A\subset G_t$ функция $\varepsilon(t^{(0)},h)$, $t^{(0)}\in A$, равномерно стремится к нулю на A при $h\to 0$.

Теорема 4. *Пусть: 1) G_x и G_t — измеримые открытые множества $G_x\subset R_x^n$, $G_t\subset R_t^n$; 2) $x=F(t)$ — непрерывное отображение $\bar G_t$ на $\bar G_x$, взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо отобра-*

жающее G_t на G_x; 3) якобиан $J(t)=\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ этого отображения не обращается в ноль на G_t и непрерывно продолжаем на $\bar{G}_t$. Тогда если функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\bar{G}_x$, то

$$\int f(x)\, dG_x = \int f(x(t))\, |J(t)|\, dG_t.$$

Упражнения. Написать формулы замены переменных в тройных интегралах для преобразований координат:

3. $x=r\cos\psi\cos\varphi$, $y=\cos\psi\sin\varphi$, $z=r\sin\psi$, $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$ (сферические координаты).

4. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $0\leqslant r<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$ (цилиндрические координаты).

Замечание. В силу формулы замены переменного для любого измеримого множества $G\subset R^n$ и любых криволинейных координат $u_1, \ldots, u_n$ справедлива формула

$$\int\limits_G \ldots \int dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_G \ldots \int \left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right| du_1 \ldots du_n.$$

В частности, если

$$\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right| = 1, \tag{46.52}$$

то

$$\int\limits_G \ldots \int dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_G \ldots \int du_1 \ldots du_n. \tag{46.53}$$

Условие (46.52) заведомо выполняется, если $u_1, \ldots, u_n$ также являются декартовыми координатами в пространстве R^n, и следовательно, выражаются через $x_1, \ldots, x_n$ с помощью линейного преобразования, определитель которого равен ± 1;

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}u_j, \quad i=1, 2, \ldots, n, \quad \det\|c_{ij}\| = \pm 1.$$

Левая часть формулы (46.53) равна мере μG множества G «в координатах $x_1, \ldots, x_n$» (см. свойство 1° кратного интеграла в п. 44.6), а правая часть этой формулы в случае, когда $u_1, \ldots, u_n$ — декартовы координаты, равна соответственно мере множества G «в координатах $u_1, \ldots, u_n$». Таким образом, формула (46.53) показывает, что мера открытого измеримого множества не зависит от выбора декартовой системы координат.

Справедливости ради следует заметить, что при доказательстве формулы замены переменных в кратном интеграле мы использовали тот доказываемый в геометрии факт, что при аффинных (т. е. невырожденных линейных) отображениях абсолютная величина определителя преобразования равна отношению объема парал-

лелепипеда, являющегося образом некоторого куба к объему этого куба.

Упражнения. 5. Пусть $G=\{(x, y, z): 1<x<2;\ 1<x+y<3;\ 1<x+y+y+z<5\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y)(x+y+z)}$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x+y+z=u$, $x+y=uv$, $x=uvw$.

6. Пусть $G=\{(x, y, z): x<yz<2x;\ y<zx<2y;\ z<xy<2z\}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz$ путем перехода к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $ux=yz$, $vy=zx$, $wz=xy$.

§ 47. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

47.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Пусть в трехмерном пространстве R^3 задана кривая $\gamma=\{r(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ (см. § 16). Мы будем рассматривать однозначные функции F, определенные на точках $r(t)$ этой кривой: $F=F(r(t))$. Если $\rho(t)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — какое-либо другое представление той же кривой γ и $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, осуществляющее эквивалентность этих представлений (т. е. $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ — допустимое преобразование параметра, см. п. 16.1), то, поскольку значение функции F определяется лишь точкой кривой, будем иметь

$$F(\rho(\tau))=F(r(t)),\ t=(\tau),\ \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta.$$

Рассматриваемые функции F принимают, вообще говоря, различные значения в точках кривой, соответствующих различным значениям параметра, но совпадающих как точки пространства (см. кратные точки в п. 16.1). Такая точка зрения соответствует физической интерпретации кривой γ, например, как траектории движения материальной точки, а функции F — как некоторой силы, действующей на нее, и зависящей не только от положения точки в пространстве, но и от момента, в котором эта точка находится в данном месте. Кроме того, такой подход дает и определенные математические преимущества, которые будут видны в дальнейшем.

Из сказанного следует, что указанные функции, заданные на кривой, нельзя рассматривать как функции, определенные на некотором множестве пространства R^3 и потому, строго говоря, их нельзя обозначать через $F(x, y, z)$, где x, y, z — декартовы координаты пространственных точек. Однако в рассматриваемых ниже вопросах такое обозначение является традиционным, поэтому мы будем его употреблять. Если всегда помнить, что в этих вопросах речь идет о функциях, определенных на точках кривых, то его использование не приведет к недоразумениям.

Пусть теперь задана спрямляемая ориентированная кривая γ, причем $r(s)=\{x(s),\ y(s),\ z(s);\ 0\leqslant s\leqslant S\}$ — ее представление, где в качестве параметра взята переменная длина дуги s и пусть $A=r(0)$ и $B=r(S)$ — начальная и конечная точки этой кривой. В этом случае будем писать $\gamma=\widehat{AB}$. Противоположно ориентированную кривую обозначим $\widehat{BA}$.

Определение 1. *Пусть на точках $r(s)$ кривой γ задана некоторая функция F. Тогда выражение $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds$, определяемое по формуле*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_0^S F(x(s),\ y(s),\ z(s))\,ds, \tag{47.1}$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\widehat{AB}$.

Этот интеграл обозначается также символами

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F[r(s)]\,ds \text{ и } \int\limits_{\gamma} F[r(s)]\,ds, \text{ или, короче, } \int\limits_{\gamma} F\,ds.$$

Таким образом, хотя определение криволинейного интеграла первого рода и связано с понятием кривой, т. е. с геометрическим образом, оно сводится к обычному интегралу по отрезку, и поэтому на криволинейный интеграл переносятся все свойства обычного интеграла.

Отметим некоторые специфические свойства интеграла (47.1)

1°. $\int\limits_{\widehat{AB}} ds=S.$

Это очевидно.

2°. *Если функция F непрерывна в точках кривой γ как функция параметра s, т. е. если непрерывна функция $F[r(s)]$, $0\leqslant s\leqslant S$, то интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ существует.*

В самом деле, согласно определению (47.1), интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ сводится к интегралу $\int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\,ds$ от непрерывной функции по отрезку, который, как известно, существует.

3°. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой:*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y,\ z)\,ds.$$

Действительно, пусть $M=r(s)$ — точка кривой $\widehat{AB}$ и s — длина дуги $\widehat{AM}$. Если $\sigma=S-s$, то σ равняется длине дуги $\widehat{BM}$ (рис. 188).

Функция $r=r(S-\sigma)$, $0\leqslant\sigma\leqslant S$, является представлением кривой $\widehat{BA}$, поэтому, выполнив в интеграле (47.1) замену переменного $s=S-\sigma$ и заметив, что $ds=-d\sigma$, получим

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,ds=\int\limits_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\,ds=$$

$$=-\int\limits_S^0 F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\,d\sigma=$$

$$=\int\limits_0^S F[x(S-\sigma),\ y(S-\sigma),\ z(S-\sigma)]\,d\sigma=\int\limits_{\widehat{BA}} F(x,\ y,\ z)\,d\sigma.$$

Это свойство криволинейного интеграла первого рода связано с тем, что, согласно определению, длина дуги кривой считается положительной независимо от конца, от которого она отсчитывается.

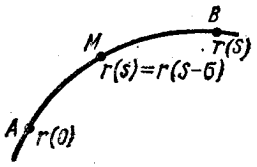

Рис. 188

Прежде чем перейти к следующему свойству, заметим, что $\int\limits_\gamma F\,ds$, как и всякий интеграл, является пределом соответствующих интегральных сумм; специфика этого случая состоит лишь в том, что эти суммы можно описать в геометрических терминах, связанных с кривой γ, по которой ведется интегрирование. Сформулируем это более точно.

4°. *Пусть* $\tau=\{s_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[0,\ S]$, $\xi_i\in[s_{i-1},\ s_i]$, $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ — *длина дуги кривой* γ *от точки* $r(s_{i-1})$ *до точки* $r(s_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0$, *и* $\sigma_\tau=\sum\limits_{i=1}^{i_0}F[r(\xi_i)]\,\Delta s_i$. *Тогда, если функция* $F[r(s)]$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[0,\ S]$, *то*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau=\int\limits_\gamma F\,ds. \tag{47.2}$$

Действительно, σ_τ, очевидно, является интегральной суммой Римана интеграла $\int\limits_0^S F[r(s)]\,ds$, и поэтому формула (47.2) непосредственно следует из (47.1).

Формула (47.1) очень удобна для изучения свойства интеграла $\int\limits_\gamma F\,ds$, однако она далеко не всегда удобна для его вычисления, так как нередко бывает очень сложно или даже практически невозможно найти представление данной кривой, где за параметр

взята переменная длина дуги. Укажем поэтому формулу для интеграла $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ при любом параметрическом представлении кривой γ.

5°. *Пусть γ — гладкая кривая* (см. определение 16 в п. 16.4), $r(t)=\{\varphi(t), \psi(t), \chi(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ — *ее непрерывно дифференцируемое представление*, и следовательно, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)>0$, $a\leqslant t\leqslant b$ *).

Пусть функция F непрерывна на кривой γ (в том смысле, что функция $F[r(t)]$ непрерывна на отрезке $[a, b]$). Тогда

$$\int\limits_{\gamma} F(x, y, z)\,ds=\int\limits_{a}^{b} F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \quad (47.3)$$

В самом деле, при сделанных предположениях кривая γ спрямляема, и переменную длину дуги $s=s(t)$ можно принять за параметр (см. следствие 2 из теоремы 2 в п. 16.5) и потому интеграл $\int\limits_{\gamma} F\,ds$ имеет смысл. Выполнив замену переменного $s=s(t)$ в правой части равенства (47.1) и вспомнив, что (см. п. 16.5)

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2},$$

получим формулу (47.3).

Из (47.3) следует, что для данной кривой значение интеграла, стоящего в правой части равенства (47.3), не зависит от выбора параметра на кривой, ибо при любом выборе параметра этот интеграл равен интегралу, стоящему в левой части этого равенства.

47.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Ряд математических и прикладных задач приводит к криволинейным интегралам другого типа. Например, если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ является радиус-вектором движущейся материальной точки, а $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$ — сила, действующая на эту точку, то естественно определить работу силы $\boldsymbol{F}$ вдоль траектории Γ рассматриваемой точки как интеграл $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{r}$ или, если $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$, а $d\boldsymbol{r}=(dx, dy, dz)$, в координатной записи как интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \quad (47.4)$$

Вспоминая, что (см. п. 16.5)

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma, \quad (47.5)$$

*) Напомним, что это условие означает отсутствие особых точек на кривой (см. определение 15 в п. 16.4).

где $\boldsymbol{t}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор, интеграл (47.4) можно представить формально в виде

$$\int (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds.$$

Сформулируем теперь строгое определение интегралов вида (47.4). Пусть $\gamma=\widehat{AB}$ — гладкая ориентированная кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек. Тогда существует такое ее непрерывно дифференцируемое представление

$$r(t)=\{x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t);\ a\leqslant t\leqslant b\},\ A=r(a),\ B=r(b),$$

что

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)>0,\ a\leqslant t\leqslant b.$$

Пусть $s=s(t)$ — переменная длина дуги, $0\leqslant s\leqslant S$, S — длина всей кривой γ, отсчитываемой от конца A, $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ — единичный касательный вектор к кривой, $\alpha=\alpha(s)$, $\beta=\beta(s)$, $\gamma=\gamma(s)$, $0\leqslant s\leqslant S$, и пусть функция F, как и в предыдущем пункте, определена на множестве $\{r(t),\ a\leqslant t\leqslant b\}$ всех точек кривой γ.

Определение 2. *Интеграл* $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx$ *определяется по формуле*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx=\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\cos\alpha\,ds. \tag{47.6}$$

Аналогично, по определению, полагается

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dy=\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\cos\beta\,ds,$$

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dz=\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\cos\gamma\,ds. \tag{47.7}$$

Интегралы вида (47.6) *и* (47.7) *называются криволинейными интегралами второго рода от функции F по кривой $\widehat{AB}$.*

Естественность этих определений видна из формул (47.5).

Отметим некоторые свойства криволинейных интегралов второго рода, ограничиваясь для краткости только случаем интеграла (47.6).

1°. *Если функция F непрерывна на кривой γ, т. е. непрерывна функция $F[r(t)]$, $a\leqslant t\leqslant b$, то интеграл* (47.6) *существует.*

Действительно, при сделанных относительно кривой γ предположениях функция $t=t(s)$, (t — параметр на кривой γ, s — переменная длина дуги) непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\ S]$, а поэтому функция $\cos\alpha=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$ непрерывна на этом отрезке и,

следовательно, в силу свойства 2° криволинейных интегралов первого рода (см. п. 47.1) интеграл (47.6) существует. □

В дальнейшем в этом пункте для простоты будем предполагать, что функция F непрерывна на кривой γ. В этом случае все написанные ниже интегралы заведомо существуют.

2°. *Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\,dx = -\int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\,dx.$$

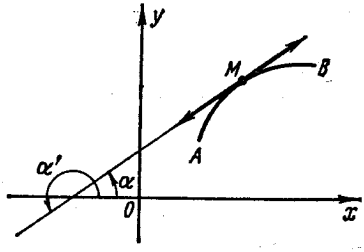

Рис. 189

В самом деле, если α — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\widehat{AB}$ с осью Ox, а α' — угол, образованный положительным направлением касательной к кривой $\widehat{BA}$ с осью Ox, то для соответствующих точек будем иметь $\alpha' = \alpha + \pi$ (рис. 189), и, следовательно, $\cos\alpha' = -\cos\alpha$.

Использовав теперь свойство независимости криволинейного интеграла первого рода от ориентации кривой (см. п. 47.1), получим

$$\int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha'\,ds = -\int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds =$$
$$= -\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha\,ds = -\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\,dx.$$

Таким образом, это свойство криволинейного интеграла второго рода вытекает из того факта, что криволинейные интегралы

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\widehat{BA}} F(x, y, z)\,dx$$

равны соответствующим криволинейным интегралам первого рода, подынтегральные выражения которых отличаются только знаком. □

3°. *Если F — непрерывная на кривой γ функция, то для интеграла* (47.6) *справедлива формула*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\,dx = \int\limits_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (47.8)$$

Действительно, согласно определению (47.6),

$$\int\limits_{\widehat{AB}} F(x, y, z)\,ds = \int\limits_0^S F[x(s), y(s), z(s)]\cos\alpha(s)\,ds.$$

Выполнив в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, замену переменного $s=s(t)$ и замечая, что (см. (47.5) $\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'_t}{s'_t}$, получим

$$\int_0^S F[x(s),\ y(s),\ z(s)]\cos\alpha(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\frac{x'_t}{s'_t}\,s'_t\,dt = \int_a^b F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]\,\varphi'_t(t)\,dt. \ \square$$

Отметим, что мы доказали также, что интеграл, стоящий в правой части этой формулы, не зависит от выбора параметра на кривой, сохраняющего ее ориентацию.

В частном случае, когда за параметр t можно взять переменную x, т. е. когда кривая γ обладает представлением $y=y(x)$, $z=z(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, и, следовательно, не имеет кратных точек, функция F является однозначной функцией не только точек кривой, но и соответствующих точек пространства (в этом случае разным точкам кривой соответствуют разные точки пространства и наоборот).

Формула (47.8) принимает в этом случае вид

$$\int_\gamma F(x,\ y,\ z)\,dx = \int_a^b F[x,\ y(x),\ z(x)]\,dx. \tag{47.9}$$

4. *Интеграл* $\int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx$ *является пределом соответствующих интегральных сумм, описываемых в терминах, связанных с кривой* γ, *точнее: пусть* $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — *разбиение отрезка* $[a,\ b]$, δ_τ — *его мелкость*, $\xi_i\in[t_{i-1},\ t_i]$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0$, *и*

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, *тогда*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\tilde{\sigma}_\tau = \int\limits_{\widehat{AB}} F(x,\ y,\ z)\,dx. \tag{47.10}$$

В самом деле, по формуле конечных приращений Лагранжа $\Delta x_i = \varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i$, где

$$\eta_i\in[t_{i-1},\ t_i],\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ i_0,$$

поэтому

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\,\varphi'(\eta_i)\,\Delta t_i.$$

Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\varphi'(\xi_i)\Delta t_i.$$

Сумма σ_τ является интегральной суммой Римана для функции $F[r(t)]\varphi(t)$, поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F[r(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{47.11}$$

С другой стороны

$$|\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} |F[r(\xi_i)]|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\,\Delta t_i \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta_\tau;\ \varphi')(b-a) \sup_{a \leqslant t \leqslant a} |F[r(t)]|,$$

где $\omega(\delta;\ \varphi')$ — модуль непрерывности функции φ'. Так как из непрерывности функции $F[r(t)]$ на отрезке $[a, b]$ следует, что $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |F[r(t)]| < \infty$, а из непрерывности функции φ' на том же отрезке следует, что $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau;\ \varphi') = 0$, то $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau) = 0$. Поэтому в силу (47.11) получим

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \tilde{\sigma}_\tau = \int_a^b F[r(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, согласно свойству 3, следует формула (47.10). □

Мы остановились только на тех свойствах криволинейных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с кривой, по которой производится интегрирование. Естественно, что, поскольку рассматриваемые интегралы сводятся к обычным интегралам по отрезку, на них переносятся и различные их свойства (линейность относительно интегрируемых функций, интегральная теорема о среднем и т. д.).

47.3. РАСШИРЕНИЕ КЛАССА ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПАРАМЕТРА КРИВОЙ

Непрерывно дифференцируемая ориентированная кривая без особых точек определялась нами (см. п. 16.1 и 16.2*) как кривая, имеющая непрерывно дифференцируемые векторные представления $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такие, что $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. В качестве допустимых преобразований параметра при этом рассматривались такие функции

$$t = t(\tau),\quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,\quad t(\alpha) = a,\quad t(\beta) = b,$$

которые были непрерывно дифференцируемыми и имели положительную производную на отрезке $[a, b]$. Это требование, однако, часто оказывается слишком обременительным. Например, для дуги γ единичной окружности с центром в начале координат представления

$$y=\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad \text{и}\quad x=\sin t,\ y=\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2},$$

оказываются неэквивалентными в этом смысле. Да и само представление $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, не определяет в нашем смысле непрерывно дифференцируемую кривую, поскольку у него при $x=1$ производная не существует. Поэтому естественно расширить класс допустимых преобразований параметров и допустимых представлений непрерывно дифференцируемых кривых. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим совокупность векторных представлений $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b). *Допустимым преобразованием параметра* будем называть всякую функцию $t=t(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$, $t(\alpha)=a$, $t(\beta)=b$, непрерывную на отрезке $[\alpha, \beta]$, непрерывно дифференцируемую и имеющую положительную производную на интервале (α, β). Как всегда, два представления называются *эквивалентными*, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметра.

Определение 3. *Класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую кривую, если в этом классе существует по крайней мере одно представление* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, *непрерывно дифференцируемое на всем отрезке* $[a, b]$.

Определение 4. *Непрерывно дифференцируемая кривая называется кривой без особых точек, или, короче, гладкой кривой, если при некотором ее представлении* $\boldsymbol{r}(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ *(а значит, и при всех ее представлениях) выполняется условие* $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$, $a<t<b$.

В смысле этого определения два вышеуказанных представления дуги окружности оказываются эквивалентны и задают гладкую кривую.

Остаются в силе и все данные выше определения криволинейных интегралов и их свойства, естественно, при учете того, что при некоторых представлениях кривых можем получить несобственный интеграл.

Следует подчеркнуть, что расширение класса представлений кривой позволяет производить вычисление криволинейного интеграла при более разнообразных представлениях кривой. Например, интеграл $\int\limits_{\gamma} P(x, y)\,dy$, где γ — рассматриваемая выше дуга единичной окружности, а P — непрерывная на γ функция,

можно вычислить, пользуясь обоими указанными представлениями:

$$\int_{\gamma} P(x, y)\,dy = -\int_{0}^{1} P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_{\gamma} P(x, y)\,dy = -\int_{0}^{\pi/2} P(\sin t, \cos t)\sin t\,dt.$$

В первом случае здесь может получиться несобственный интеграл.

Вместе с тем при доказательстве теорем можно выбирать «хорошие представления», т. е. непрерывно дифференцируемые вплоть до концов отрезка, а проведенные рассмотрения окажутся справедливыми и для расширенного понятия кривой.

Упражнение 1. Доказать, что при новом определении непрерывно дифференцируемой кривой $\gamma = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ее длина выражается формулой $\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$, где написанный интеграл, вообще говоря, несобственный.

47.4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ КРИВЫМ

Определение 5. *Если кривая γ кусочно-гладкая, т. е. представима в виде объединения конечного числа гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, а функция $F(x, y, z)$ по-прежнему определена на точках кривой γ, то, по определению, положим*

$$\int_{\gamma} F(x, y, z)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F(x, y, z)\,dx.$$

Если γ — кусочно-гладкая кривая и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — ее кусочно-гладкое представление, то также будем писать

$$\int_{\gamma} F(x, y, z)\,dx = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt$$

(здесь производная $x'(t)$ может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[a, b]$), понимая интеграл, стоящий в правой части равенства, вообще говоря, в несобственном смысле.

Аналогичные определения имеют место и для интегралов вида (47.7). В дальнейшем придется иметь дело с суммами интегралов вида (47.6) и (47.7), т. е. с интегралами вида (47.4), где P, Q и R — некоторые функции, определенные на точках кривой γ. Согласно определениям (47.6) и (47.7), справедлива

формула

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Замечание 1. Если Г обозначает конечную совокупность кусочно-гладких ориентированных кривых γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, то, по определению

$$\int_{\Gamma} F\,ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F\,ds, \quad \int_{\Gamma} F\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F\,dx \text{ и т. д.}$$

Замечание 2. Мы дали определение криволинейных интегралов для кривых, лежащих в трехмерном пространстве R^3. Совершенно аналогично они определяются и для кривых, лежащих в любом n-мерном пространстве R^n, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Криволинейные интегралы в n-мерном пространстве обладают свойствами, аналогичными рассмотренным выше в трехмерном случае, причем доказательства их также совершенно аналогичны приведенным выше. Поэтому мы не будем останавливаться ни на формулировках, ни на доказательствах соответствующих утверждений.

Упражнения. 2. Доказать, что данные в настоящем пункте определения криволинейных интегралов по кусочно-гладким кривым не зависят от способа разбиения этих кривых на гладкие дуги.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} \sqrt{x+2y}\,dx + \sqrt{x+y}\,dy$, где Г — треугольный контур с вершинами O (0; 0); B (2; 0), C (2; 4).

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, где Г — дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, ограниченная точками $(a, 0)$ и $(0, a)$.

47.5. ФОРМУЛА ГРИНА

Определение 6. *Пусть простой замкнутый контур γ является границей ограниченной плоской области G. Если ориентация контура выбрана таким образом, что при обходе контура γ, соответствующем возрастанию параметра, область G остается слева (такой обход обычно называется обходом контура против направления движения часовой стрелки), то эта ориентация называется положительной, в противном же случае (т. е. когда обход контура производится по направлению движения часовой стрелки) — отрицательной* (рис. 190).

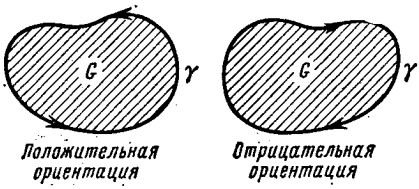

Рис. 190

Положительно ориентированный контур будем обозначать γ^+, а отрицательно ориентированный — через γ^-. Эти понятия опреде-

лены не строго, не в точных математических терминах. Однако мы не будем давать здесь точных определений, с одной стороны, потому что это нельзя коротко сделать, а с другой стороны, поскольку в дальнейшем во всяком отдельном случае рассматриваемая ориентация всегда будет конкретно указываться. Тем самым наше «общее» определение положительной и отрицательной ориентации простого замкнутого контура послужит лишь для геометрической наглядности рассматриваемых ниже вопросов.

В дальнейшем плоскую область G, замыкание которой может быть представлено одновременно в виде (45.1) и (45.13) (см. рис. 156), будем для кратности называть *элементарной областью*.

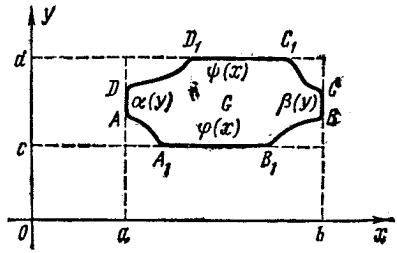

Рис. 191

Теорема 1 (формула Грина *)). *Пусть G — плоская область и ее граница γ является кусочно-гладким контуром. Пусть область G может быть разбита на конечное число элементарных областей G_i**) с кусочно-гладкими границами γ_i, $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть, далее, в замкнутой области $\bar{G}$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные на $\bar{G}$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.* ***)

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\gamma^+} P\, dx + Q\, dy. \qquad (47.12)$$

Доказательство. Пусть сначала область G сама элементарна и, следовательно, ее границу можно представить как объединение графиков двух кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и, быть может, отрезков прямых $x=a$ и $x=b$, а также как объединение двух графиков кусочно непрерывно дифференцируемых функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ и, быть может, отрезков прямых $y=c$ и $y=d$ (рис. 191).

В этом случае, применяя правило сведения двойного интеграла к повторному, теорему Ньютона — Лейбница (п. 29.3) и формулу

---

*) Дж. Грин (1793—1841) — английский математик.

**) Это означает, что $\{G_i\}_{i=1}^{i=k}$ является разбиением замкнутой области $\bar{G}$ (см. п. 44.3).

***) Непрерывность частных производных на $\bar{G}$ понимается как их непрерывность на открытом множестве G и их непрерывная продолжаемость на границу G (см. п. 39.3).

(47.9), имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \{P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]\}\,dx = \int\limits_a^b P[x, \psi(x)]\,dx -$$

$$- \int\limits_a^b P[x, \varphi(x)]\,dx = \int\limits_{\widehat{DC}} P(x, y)\,dx - \int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)\,dx =$$

$$= - \int\limits_{\widehat{CD}} P(x, y)\,dx - \int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)\,dx. \qquad (47.13)$$

Замечая, что для отрезков BC и DA

$$\int\limits_{BC} P(x, y)\,dx = \int\limits_{DA} P(x, y)\,dx = 0 \qquad (47.14)$$

(это сразу следует, например, из формулы (47.6), ибо здесь $x = \text{const}$ и потому $\cos\alpha = 0$), и, сложив равенства (47.13) и (47.14), получим

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = - \int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx - \int\limits_{\widehat{BC}} P\,dx - \int\limits_{\widehat{CD}} P\,dx - \int\limits_{\widehat{DA}} P\,dx = - \int\limits_{\gamma^+} P\,dx. \qquad (47.15)$$

При этом получилась ориентация граничного контура γ, при которой следуют последовательно одна за другой точки A, B, C, D. Эта ориентация является положительной (см. определение 6) и обозначается через γ^+.

Совершенно аналогично, исходя из того, что область G элементарна, выводится формула

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\gamma^+} Q\,dy. \qquad (47.16)$$

Сложив (47.15) и (47.16), мы получим формулу Грина (47.12) для рассматриваемого случая.

Рассмотрим общий случай. Пусть область G разбита на области G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, указанного в условиях теоремы вида. В силу доказанного для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy.$$