Сложив эти равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.17)$$

В силу аддитивности двойного интеграла по множествам (см. п. 44.6) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (47.18)$$

В сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), криволинейные интегралы берутся дважды по всем внутренним частям границ γ_i, областей G_i, т. е. таким дугам кривых γ_i, которые являются частью границ двух областей G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, не входят в границу области G; при этом ориентации этих дуг кривых γ_i противоположны (рис. 192). В силу

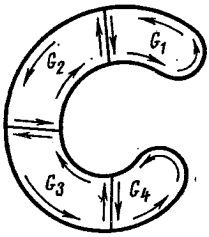


Рис. 192

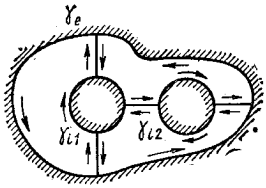


Рис. 193

изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых γ_i равна нулю. Поэтому в правой сумме формулы (47.17) останутся только интегралы по положительно ориентированным частям границы γ области G, дающие в сумме $\int_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma^+} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.18')$$

Из (47.17), (47.18) и (47.18′) следует формула (47.12) в общем случае. □

Пусть G — ограниченная область на плоскости R^2 и пусть ее граница состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $R^2 \setminus \bar{G}$, то будем называть его *внешним*, а если он является одновременно и границей ограниченной области, лежа-

щей в $R^2 \setminus \bar{G}$, то — *внутренним*. Так, на рис. 193 контур γ_e внешний, а контуры γ_{i1} и γ_{i2} внутренние.

Если граница области G состоит из внешнего контура γ_e и внутренних контуров $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{im}$ и если область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обеих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\gamma_e^+} P\,dx + Q\,dy + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\gamma_{ij}^-} P\,dx + Q\,dy. \qquad (47.19)$$

Функции P и Q, как и выше, предполагаются непрерывными вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области $\bar{G}$.

Доказывается эта формула так же, как и (47.12), если только заметить, что в сумме, стоящей в правой части равенства (47.17), останутся криволинейные интегралы по положительно ориентированным частям внешнего контура и по отрицательно ориентированным частям внутренних контуров (см. рис. 193).

Отметим еще, что в формуле (47.19) все контуры (как внешние, так и внутренние) ориентированы таким образом, что при их обходе область интегрирования остается слева.

Определение 7. *Пусть граница ∂G ограниченной плоской области G состоит из конечного числа простых кусочно-гладких контуров. Совокупность этих контуров, ориентированных так, что при обходе по каждому из них область G остается слева (справа), называется положительной (отрицательной) ориентацией границы G и обозначается также ∂G (соответственно — ∂G).*

Формулу Грина можно распространить и на еще более широкий класс областей. Для этого заметим, что в силу доказанного формула Грина справедлива для треугольника, а значит, и для любого многоугольника. Поэтому предельным переходом, аппроксимируя границу области конечнозвенными ломаными, можно получить формулу Грина для любой области (и даже просто открытого множества), граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Мы, однако, не будем останавливаться на доказательстве этого факта, а ограничимся лишь его формулировкой. При этом, используя определение 7, мы запишем формулу (47.19) в более компактном виде.

Теорема 1′. *Пусть граница плоской ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\bar{G}$, то*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G} P\,dx + Q\,dy,$$

где ∂G — положительно ориентированная граница области G.

Формула Грина является для кратных интегралов аналогом формулы Ньютона — Лейбница для однократных интегралов: и в той и в другой формуле интегралы от производных по области интегрирования выражаются через значения функции на границе указанной области (в случае формулы Грина эти значения еще интегрируются).

Упражнения. С помощью формулы Грина вычислить следующие криволинейные интегралы, где Г — простой замкнутый контур, состоящий из частей кривых, уравнения которых указаны для каждого интеграла (направление обхода контура — положительное

5. $\int\limits_{\Gamma} (x^2y+x-y)\,dx+(y^2+2x)\,dy;\ y=2,\ y=x^2+1.$

6. $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\,dx+2\ln x\,dy;\ 2x+y=4,\ x=1,\ y=0.$

7. $\int \frac{dx}{y^2}-\frac{dy}{x};\ y=x,\ x=2,\ y=1.$

47.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Положив в формуле Грина $Q=x$, $P=0$, получим $\iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_{\gamma^+} x\,dy$ и, следовательно,

$$\mu G=\int\limits_{\gamma^+} x\,dy. \tag{47.20}$$

Аналогично, положив $P=-y$, $Q=0$, получим

$$\mu G=-\int\limits_{\gamma^+} y\,dx. \tag{47.21}$$

Складывая формулы (47.20) и (47.21), будем иметь

$$\mu G=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy-y\,dx. \tag{47.22}$$

Примеры. 1. Найдем с помощью формулы (47.22) площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Используем его параметрическое представление: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Применив формулу (47.22), получим искомую площадь:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=\pi ab.$$

Сравнивая этот метод вычисления площади, ограниченной эллипсом, с приведенным раньше (см. пример 4 в п. 32.1), легко убедиться, на сколько здесь меньше объем вычислений.

2. Найдем площадь, ограниченную астроидой (см. в т. 1, рис. 75) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Замечая, что здесь возрастание параметра t соответствует положительной ориентации контура, имеем:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma^+} x\,dy-y\,dx=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Упражнения. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

8. $x=t^2$, $y=t^3$, $x=1$, $y=0$.

9. $y^2=4-x$, $x=1$, $y=1$ (в первой четверти).

47.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗНАКА ЯКОБИАНА ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Пусть F — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение плоской области $G\subset R^2_{uv}$ в плоскость R^2_{xy} с якобианом, всюду в G не равным нулю. Тогда в силу принципа сохранения области множество $G^*=F(G)$ также является областью (см. п. 41.8), а якобиан, в силу его непрерывности, сохраняет знак на G (см. теорему 4 в п. 19.5), т. е. либо всюду на G положителен, либо всюду отрицателен.

Пусть в координатной записи отображение F задается формулами

$$\begin{aligned} x&=x(u,\ v),\\ y&=y(u,\ v). \end{aligned}\tag{47.23}$$

Лемма 1. *Если γ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в G, то ее образ $\gamma^*=F(\gamma)$ при отображении F также будет кусочно-гладкой кривой.*

Доказательство. Пусть сначала γ — гладкая кривая, т. е. непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек (см. определения 15 и 16 в п. 16.4), и пусть

$$u=u(t),\ v=v(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

— некоторое ее представление. Тогда на отрезке $[a,\ b]$ функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2>0$.

Представлением кривой $\gamma^*=F(\gamma)$ будет являться пара функций

$$x=x(u(t),\ v(t)),\ y=y(u(t),\ v(t)),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

которые в силу свойств композиции непрерывно дифференцируемых функций (см. п. 19.3 и 20.3) также будут непрерывно дифференцируемыми. Покажем, что кривая γ^* также не будет иметь особых точек. В самом деле, поскольку

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

то, рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно $\frac{du}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, видим, что если в некоторой точке $t\in[a, b]$ выполнялись бы равенства $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$, то в силу необращения в ноль якобиана

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

указанная система имела бы единственное решение, которым является нулевое решение, т. е. в той же точке t были бы справедливыми равенства $\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0$ и тем самым соответствующая точка кривой γ была бы особой, что, по предположению, невозможно.

Итак, если кривая γ — гладкая, то кривая $\gamma^*=F(\gamma)$ также гладкая. Отсюда сразу следует, что образ кусочно-гладкой кривой при рассматриваемом отображении является также кусочно-гладкой кривой, ибо кусочно-гладкая кривая (см. определение 16 в п. 16.4) представляет собой объединение конечного числа гладких кривых. □

Пусть, теперь, $\Gamma\subset G$, Γ — ограниченная область, и ее граница $\partial\Gamma$ является простым кусочно-гладким контуром γ (такие границы называются *кусочно-гладкими*). Пусть далее, $\Gamma^*=F(\Gamma)$. Тогда в силу принципа сохранения области множество Γ^* — также область, и кроме того, ее граница $\partial\Gamma^*$ есть образ границы $\partial\Gamma$ области Γ (см. лемму 1 в п. 46.1), т. е. $\partial\Gamma^*=F(\partial\Gamma)$. Поэтому граница $\partial\Gamma^*$ также является простым (в силу взаимной однозначности отображения F) кусочно-гладким (согласно лемме 1 этого пункта) контуром γ^*. Следовательно, по контурам $\gamma=\partial\Gamma$ и $\gamma^*=\partial\Gamma^*$ можно вычислять криволинейные интегралы. Пусть области Γ и Γ^* таковы, что к ним применима формула Грина, например, они удовлетворяют условиям, налагаемым на область в теореме 1 п. 47.5. (На самом деле, как уже отмечалось, при сделанных предположениях формула Грина всегда применима, однако это не было доказано).

Обозначим через γ^+ как обычно, положительно ориентированный контур γ (см. п. 47.5). Пусть

$$u=u(t),\ v=v(t),\ a\leqslant t\leqslant b,$$

— представление контура γ^+ и, следовательно,

$$x=x[u(t),\ v(t)],\ y=y[u(t),\ v(t)],\ a\leqslant t\leqslant b, \tag{47.24}$$

— некоторое представление контура γ^*.

Будем предполагать еще, что существуют смешанные производные $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ и что они непрерывны, а следовательно, и равны друг другу во всех точках области G.

Согласно формуле (47.20),

$$\mu\Gamma^*=\varepsilon\int\limits_{\gamma^*} x\,dy, \tag{47.25}$$

где $\varepsilon=+1$, если ориентация контура γ^* положительна, и $\varepsilon=-1$ в противоположном случае. Иначе говоря, $\varepsilon=+1$ (соответственно $\varepsilon=-1$), если положительному обходу данного контура γ соответствует при отображении (47.23) положительный же (соответственно отрицательный) обход контура $\gamma^*=F(\gamma)$.

Преобразовав интеграл (47.25) по формуле (47.8) и использовав представление (47.24) контура γ^*, будем иметь:

$$\mu\Gamma^*=\varepsilon\int\limits_a^b xy'_t\,dt=\varepsilon\int\limits_a^b x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt=$$

$$=\varepsilon\int\limits_{\gamma^+} x\frac{\partial y}{\partial u}\,du+x\frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

К получившемуся интегралу применим формулу Грина (см. теорему 1 в п. 47.5). Положив $P=x\frac{\partial y}{\partial u}$, $Q=x\frac{\partial y}{\partial v}$ и заметив, что в этом случае

$$\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+x\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v},\quad \frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+x\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$$

(здесь нами используется потребованное выше существование вторых частных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)},$$

откуда

$$\mu\Gamma^*=\varepsilon\int\limits_{\gamma^+} P\,du+Q\,dv=\varepsilon\iint\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv=\varepsilon\iint\limits_{\Gamma}\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\,du\,dv.$$

Левая часть этого равенства больше нуля, значит, правая часть также положительна, и так как якобиан отображения (47.23) не меняет знака, то это возможно лишь в том случае, когда $\varepsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, т. е. когда число ε имеет тот же знак, что и якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, а в этом случае $\varepsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$. Тем самым знак ε не зависит от выбора контура γ, а определяется знаком якобиана, который один и тот же во всех точках области G.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены сделанные выше предположения, то справедлива формула*

$$\mu\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv. \tag{47.26}$$

Кроме того, если $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = +1$, *иначе говоря, если якобиан отображения* F *положителен, то положительному обходу всякого контура* $\gamma \subset G$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma \subset G$, *при отображении* F *соответствует положительный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$, *являющегося границей ограниченной области* $\Gamma^* = F(\Gamma)$. *Если же якобиан* $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} < 0$ *на* Γ, *то* $\varepsilon = -1$, *т. е. положительному обходу всякого контура* γ *указанного типа соответствует при отображении* F *отрицательный обход контура* $\gamma^* = F(\gamma)$.

Таким образом, *геометрический смысл знака якобиана состоит в том, что в случае положительного якобиана ориентация контура при отображении сохраняется, а при отрицательном — меняется.*

С помощью формулы Грина (47.19) формула (47.26) легко обобщается на случай, когда граница области Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых контуров.

Отметим еще, что с помощью формулы (47.26) можно без труда получить более простое доказательство теоремы 1 из п.46.1 о геометрическом смысле модуля якобиана. Действительно, пусть $M_0 \in \Gamma$, $d(\Gamma)$ — диаметр области Γ, и область Γ каким-либо образом стягивается к точке M_0 и, следовательно, $d(\Gamma) \to 0$. По теореме о среднем (см. п. 44.6)

$$\mu\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \mu\Gamma, \quad M \in \Gamma,$$

поэтому

$$\frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M.$$

В силу непрерывности якобиана

$$\lim_{d(\Gamma) \to 0} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0},$$

следовательно

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}, \tag{47.27}$$

т. е. мы доказали формулу (46.9) и в некотором смысле даже в более общем виде; так, здесь Γ — не обязательно квадрат (правда, на отображение F мы наложили несколько более сильные условия, потребовав непрерывности смешанных производных $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial v\, \partial u}$ и возможности применения формулы Грина для области Γ^*). Нетрудно убедиться и в том, что стремление к пределу в формуле (47.27) происходит равномерно в смысле, указанном в теореме 1 п. 46.1.

Несмотря на простоту вывода формулы (47.27) (достигнутую во многом за счет более сильных предположений), следует отметить, что доказательство теоремы 1, приведенное в п. 46.1, идейно предпочтительнее, так как оно лучше раскрывает сущность вопроса, связанную с тем, что дифференцируемое отображение в малом достаточно хорошо аппроксимируется линейным отображением.

47.8. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Все кривые (контуры), рассматриваемые в этом пункте, будут всегда предполагаться кусочно-гладкими; для краткости это не будет каждый раз специально оговариваться. Отметим еще, что во всякой области G любые две ее точки всегда можно соединить кусочно-гладкой кривой, например ломаной (см. лемму 5 в п. 41.4), лежащей целиком в G.

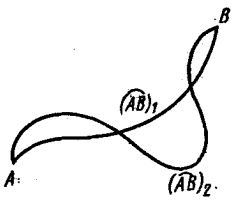


Рис. 194

Пусть задана плоская область G и на ней определены непрерывные функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$. Рассмотрим вопрос о том, при выполнении каких условий криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy$ при произвольно фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависит от выбора кривой $\widehat{AB}$, их соединяющей и лежащей в G.

Лемма 2. *Условие независимости рассматриваемого криволинейного интеграла от указанного пути интегрирования равносильно равенству нулю интеграла по любому замкнутому контуру, лежащему в области G.*

Доказательство. 1. Действительно, пусть для любого замкнутого контура $\gamma \subset G$ имеет место равенство

$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$, и даны две кривые $(\widehat{AB})_1$ и $(\widehat{AB})_2$, соединяющие в G точки A и B (см. рис. 194). Обозначим через $(\widehat{BA})_2$

кривую, получающуюся из $(\widehat{AB})_2$ заменой на ней ориентации на противоположную. Объединение $(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2$ кривых $(\widehat{AB})_1$ и $(\widehat{BA})_2$ является замкнутым контуром, поэтому

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = 0; \tag{47.28}$$

но

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(\widehat{BA})_2} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{(\widehat{AB})_1} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(\widehat{AB})_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{47.29}$$

Из (47.28) и (47.29) следует, что

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_2} P\,dx + Q\,dy,$$

т. е. криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования $\widehat{AB} \subset G$ при фиксированных $A \in G$ и $B \in G$.

2. Обратно, пусть интеграл $\int P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования в указанном смысле и задан замкнутый контур γ, лежащий в G. Выберем на нем две точки A и $B \neq A$; тогда $\gamma = \widehat{AB} \cup \widehat{BA}$ и

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\widehat{AB}} + \int\limits_{\widehat{BA}} = \int\limits_{\widehat{AB}} - \int\limits_{(\widehat{AB})_1} = 0,$$

где $(\widehat{AB})_1$ обозначает кривую, получающуюся из кривой $\widehat{BA}$ заменой на ней ориентации на противоположную. □

Сформулируем критерий независимости интеграла от пути интегрирования.

Теорема 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy$ при фиксированных точках $A \in G$ и $B \in G$ не зависел от пути интегрирования $\widehat{AB} \subset G$, необходимо и достаточно, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, определенной в области G:*

$$du = P\,dx + Q\,dy \tag{47.30}$$

(это равносильно тому, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $(x, y) \in G$).

При выполнении этого условия для любых двух точек $A = (x_0, y_0) \in G$ и $B = (x_1, y_1) \in G$ и любой кривой $\widehat{AB}$, соеди-

няющей эти точки в $G: \widehat{AB} \subset G$, *имеет место тождество*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \qquad (47.31)$$

Доказательство необходимости условия (47.30). Допустим, что рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Пусть $M_0 = (x_0, y_0) \in G$, $M = (x, y) \in G$ и $\widehat{M_0M}$ — некоторая кусочно-гладкая кривая, соединяющая в G точки M_0 и M (такая кривая, даже ломаная, всегда существует, см. лемму 5 в п. 41.4). Положим

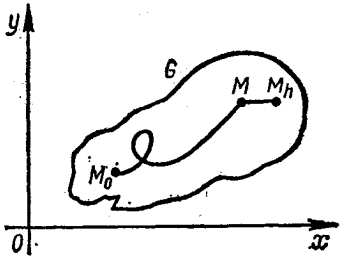


Рис. 195

$$u(M) = u(x, y) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy.$$

Функция $u(x, y)$ однозначна, так как значение $u(M) = u(x, y)$ не зависит от выбора кривой, соединяющей в G точки M_0 и M.

Покажем, что

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Зафиксируем точку $M = (x, y)$, а точку $M_h = (x+h, y) \in G$, $h \neq 0$, выберем так, чтобы отрезок MM_h, соединяющий M и M_h (который, очевидно, параллелен оси Ox и имеет длину $|h|$), содержался в G (рис. 195). Для всех достаточно малых чисел h такой выбор всегда можно сделать (почему?). Тогда имеем

$$u(x+h, y) - u(x, y) = \int\limits_{\widehat{M_0M_h}} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{MM_h} P\,dx + Q\,dy.$$

Вдоль отрезка MM_h координата y постоянна, поэтому $\int\limits_{MM_h} Q\,dy = 0$ и, следовательно, $u(x+h, y) - u(x, y) = \int\limits_{MM_h} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+h} P(t, y)\,dt$. Применив интегральную теорему о среднем, получим

$$u(x+h, y) - u(x, y) = P(x+\theta h, y)\,h, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = P(x+\theta h, y), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (47.32)$$

Правая часть этого равенства в силу непрерывности функции $P(x, y)$ имеет предел при $h \to 0$, следовательно, и левая часть при $h \to 0$ имеет предел. Перейдя к пределу в (47.32), будем иметь $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$.

Совершенно аналогично доказывается и равенство $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Итак, существование функции $u(x, y)$, для которой имеет место соотношение (47.30), доказано.

Пусть теперь $A \in G$, $B \in G$, $\widehat{AB}$ — некоторая кривая, соединяющая в G точки A и B, и пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — ее представление и, следовательно, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$. Тогда

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]dt =$$

$$= \int\limits_a^b u'_t(x(t), y(t))\,dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A),$$

т. е. формула (47.31) также доказана.

Доказательство достаточности условия (47.30) для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования непосредственно следует из формулы (47.31). Действительно, начальная точка любого замкнутого контура γ совпадает с конечной, а поэтому в силу (47.31)

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Согласно лемме 2 это и означает независимость соответствующего криволинейного интеграла от пути интегрирования. □

Заметим, что хотя доказанная теорема и дает необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, эти условия трудно проверяемы.

Если сузить класс рассматриваемых областей, то можно получить существенно более простой и эффективный критерий. Введем следующее определение.

Определение 8. *Плоская область G называется односвязной, если, каков бы ни был простой контур $\gamma \subset G$, ограниченная область Γ, границей которой является γ, содержится в G.*

Образно говоря, односвязность области означает, что область не имеет «дыр». Круг является примером односвязной области, круговое кольцо — неодносвязной (рис. 196).

Прежде чем формулировать другой критерий независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, докажем лемму, которая понадобится при доказательстве этого критерия.

Лемма 3. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G, γ — гладкая кривая, лежащая в G, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, — ее представление, $\tau=\{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, λ_τ — ломаная с вершинами в точках $(x(t_i), y(t_i))$, $i=0, 1, \ldots, i_0$* (см. п.16.5). *Тогда*

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\int_{\lambda_\tau} P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma} P\,dx+Q\,dy. \qquad (47.33)$$

Заметим, что в силу равномерной непрерывности на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ и $y(t)$ длины звеньев ломаной λ_τ, т. е. длины отрезков с вершинами в точках $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ и $(x(t_i), y(t_i))$, при $\delta_\tau\to 0$ также стремятся к нулю.

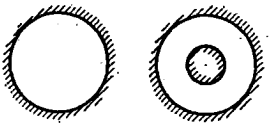


Рис. 196

Доказательство. Кривая γ является компактом; поскольку этот компакт не пересекается с замкнутым множеством $R^2_{xy}\setminus G$, то расстояние между ними больше нуля (см. лемму 7 п. 18.2). Пусть η — какое-либо число, такое, что $\rho(\gamma, R^2_{xy}\setminus G)>\eta>0$. Обозначим через γ_η совокупность всех точек плоскости, находящихся от γ на расстоянии, не большем, чем η. Множество γ_η ограничено, замкнуто (см. в п. 18.3 лемму 11) и $\gamma_\eta\subset G$.

В силу равномерной непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a, b]$ существует такое число $\delta_0>0$, что для любых двух точек $t'\in[a, b]$ и $t''\in[a, b]$, удовлетворяющих условию $|t'-t''|<\delta_0$, выполняется неравенство

$$\rho(M', M'')=\sqrt{[x(t'')-x(t')]^2+[y(t'')-y(t')]^2}<\eta,$$

где $M'=(x(t'), y(t'))$, $M''=(x(t''), y(t''))$ (сравнить с леммой 4 в п. 41.4). Все точки отрезка с концами в точках M' и M'', очевидно, также находятся от точки M' на расстоянии, не большем чем η и поэтому лежат во множестве γ_η и, следовательно, в G. Это означает, что если мелкость δ_τ разбиения τ отрезка $[a, b]$ такова, что $\delta_\tau<\delta_0$, то все точки ломаной λ_τ лежат в G и для таких разбиений τ имеет смысл интеграл $\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx+Q\,dy$.

Рассмотрим интегралы $\int\limits_{\gamma} P\,dx$ и $\int\limits_{\lambda_\tau} P\,dx$. Положим

$$x_i=x(t_i),\ y_i=y(t_i),\ P_i=P(x_i, y_i),\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1, 2, \ldots, i_0,$$

$$\sigma_\tau=\sum_{i=1}^{i_0} P_i\,\Delta x_i.$$

Как известно (см. п. 47.2, свойство 4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.34}$$

Пусть, далее, $M_i = (x_i,\ y_i)$ — вершины ломаной λ_τ; тогда

$$\int_{\lambda_\tau} P\,dx = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{M_{i-1}M_i} P\,dx. \tag{47.35}$$

С другой стороны, заметим, что (употребляя обозначения из п. 47.2)

$$\int_{M_{i-1}M_i} dx = \int_{M_{i-1}M_i} \cos\alpha\,ds = |M_{i-1}M_i|\cos\alpha = \Delta x_i,$$

поэтому

$$\sigma_\tau = \sum_i P_i\,\Delta x_i = \sum_i \int_{M_{i-1}M_i} P_i\,dx. \tag{47.36}$$

Обозначив через L_τ длину ломаной λ_τ, через S — длину кривой γ, а через $\omega(\delta;\ P)$ — модуль непрерывности функции $P(x,\ y)$ на компакте γ_η и заметив, что в силу определения кривой: $L_\tau \leqslant S$, из (47.35) и (47.36) получим

$$\left|\int_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right| \leqslant \sum \left|\int_{M_{i-1}M_i} |P - P_i|\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\delta_\tau;\ P) \sum_i |\Delta x_i| \leqslant \omega(\delta_\tau;\ P)\,L_\tau \leqslant \omega(\delta_\tau;\ P)\,S.$$

Отсюда в силу равномерной непрерывности функции $P(x,\ y)$ на множестве γ_η имеем $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0}\left(\int_{\lambda_\tau} P\,dx - \sigma_\tau\right) = 0$, и, значит, в силу (47.34)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P\,dx = \int_\gamma P\,dx. \tag{47.37}$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} Q\,dy = \int_\gamma Q\,dy. \tag{47.38}$$

Из (47.37) и (47.38) непосредственно и следует утверждение леммы, т. е. формула (47.33). □

Замечание. Утверждение, аналогичное лемме, справедливо и для криволинейных интегралов в пространстве, причем доказательство пространственного случая проводится по той же схеме, что и для плоского.

Теорема 4. *Пусть функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской*

области G. Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx+Q\,dy$ при произвольно фиксированных точках $A\in G$ и $B\in G$ не зависел от пути интегрирования $\widehat{AB}\subset G$, необходимо, а если область G односвязна, — то и достаточно, чтобы во всех точках области G выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство необходимости. Пусть рассматриваемый интеграл не зависит от пути интегрирования, лежащего в области G, а только от его начальной и конечной точек. Тогда согласно теореме 3 существует функция $u=u(x, y)$ такая, что $du=P\,dx+Q\,dy$, т. е. такая, что $\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и по условиям теоремы производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а следовательно, и смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ непрерывны, то (см. п. 21.1) они и равны, т. е. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство достаточности. Пусть теперь область G односвязна и во всех ее точках $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Если γ — кусочно-гладкий простой замкнутый контур, лежащий в G, и D — ограниченная область, границей которой является γ, то, применив формулу Грина (здесь используется односвязность области G), получим

$$\int\limits_{\gamma^+} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

Если кривая γ, лежащая в G, имеет конечное число точек самопересечения, то последовательно для каждой ее «петли» γ_k, $k=1, 2, \ldots, k_0$, являющейся уже простым замкнутым контуром, в силу доказанного имеем $\int\limits_{\gamma_k} P\,dx+Q\,dy=0$, откуда следует, что и для всей кривой γ

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=0. \tag{47.39}$$

Переходя к рассмотрению общего случая, обратим прежде всего внимание на то, что рассмотренным приемом равенство (47.39) доказывается и для случая, когда γ является замкнутой конечнозвенной ломаной. С геометрической точки зрения отличие состоит лишь в том, что самопересечение конечнозвенной ломаной может состоять не только из конечного числа точек, но и конечного числа отрезков, что лишь незначительно усложняет рассуждение. Возможность применения формулы Грина к конечной области, ограниченной конечнозвенной ломаной, следует из того, что

такую область можно разбить на треугольники, которые, очевидно, являются элементарными относительно обеих координатных осей областями. Следовательно, в этом случае выполняются предпосылки теоремы 1 п. 47.3.

Любая же замкнутая кусочно-гладкая кривая γ, лежащая в G, может быть сколь угодно точно аппроксимирована замкнутыми конечнозвенными ломаными, поэтому предельным переходом равенство (47.39) может быть получено и для любой замкнутой кривой из G. Проделаем это.

Пусть γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в области G, заданная некоторым представлением $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, и являющаяся объединением гладких кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Впишем в каждую кривую γ_j, $j=1, 2, \ldots, k$, ломаную λ_j. Объединение всех ломаных λ_j, $j=1, 2, \ldots, k$, образует замкнутую ломаную λ, соответствующую некоторому разбиению τ отрезка $[a, b]$. В силу доказанного

$$\int_{\lambda} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Но, согласно лемме,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_j} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_j} P\,dx + Q\,dy, \quad j=1, \ldots, k,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy,$$

поэтому

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0. \quad \square$$

Иногда условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ называют *критерием полного дифференциала в односвязной области*, поскольку согласно теоремам 3 и 4 это условие необходимо и достаточно для того, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ в области G являлось дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, $(x, y) \in G$.

В заключение этого пункта отметим, что требование односвязности рассматриваемой области при доказательстве достаточности условий теоремы 4 для независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования является существенным и его нельзя отбросить. Подтвердим это примером.

Пример. Пусть $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Легко проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{47.40}$$

для всех точек плоскости, исключая начало координат (0, 0). Это следует, например, из того, что

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2>0. \tag{47.41}$$

Таким образом, в этом случае за область G можно взять всю плоскость с «выколотым» началом координат: $G=R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$. Область G, очевидно, не односвязна. В качестве замкнутого контура возьмем единичную окружность $\gamma_0=\{x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, тогда

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\gamma_0}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

Следовательно, в этом случае условия (47.40) выполнены, и существует замкнутый контур γ_0, по которому интеграл не равен нулю. Нетрудно убедиться, что вообще по любой окружности γ_r радиуса r с центром в начале координат

$$\int\limits_{\gamma_r} P\,dx+Q\,dy=2\pi. \tag{47.42}$$

Далее, каков бы ни был простой кусочно-гладкий контур γ, являющийся границей ограниченной области Γ, содержащей начало координат (в этом случае говорят, что контур γ содержит внутри себя начало координат), для него также

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy=2\pi. \tag{47.43}$$

Для доказательства этого возьмем окружность γ_r такого радиуса r, что $\gamma_r\subset\Gamma$; тогда γ и γ_r не пересекаются. Соединив контуры γ и γ_r отрезками λ_1 и λ_2, как показано на рис. 197, — получим два замкнутых контура γ_1 и γ_2, не содержащих внутри себя начала координат и состоящих из дуг γ_r' и γ_r'' окружности γ_r, частей γ' и γ'' контура γ и отрезков λ_1 и λ_2.

В силу условия (47.40) для этих контуров справедливы равенства

$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy=0,\quad \int\limits_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy=0.$$

Сложив эти равенства и опустив для краткости подынтегральные выражения, получим (рис. 197):

$$0=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}=\int\limits_{\gamma'+}+\int\limits_{\lambda_1^+}+\int\limits_{\gamma_r'-}+\int\limits_{\lambda_2^+}+\int\limits_{\gamma''+}+\int\limits_{\lambda_2^-}+\int\limits_{\gamma_r''-}+\int\limits_{\lambda_1^-}=$$
$$=\int\limits_{\gamma'+}+\int\limits_{\gamma''+}-\int\limits_{\gamma_r'+}-\int\limits_{\gamma_r''+}=\int\limits_{\gamma+}-\int\limits_{\gamma_r+}.$$

Отсюда в силу (47.42) и следует (47.43). Более того, это равенство выполняется и в случае, если контур γ, обходя «один раз» вокруг начала координат, образует конечное число «петель», не охватывающих начало координат (рис. 198), ибо интеграл по этим петлям равен нулю.

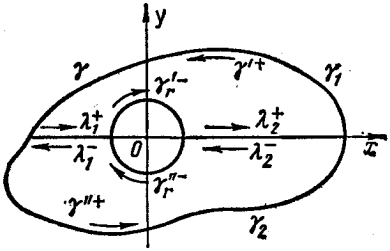


Рис. 197

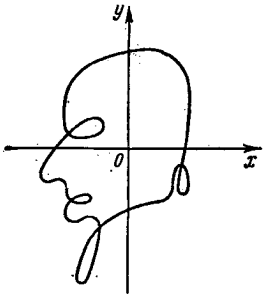


Рис. 198

Если M_0 — фиксированная точка рассматриваемой области G, $M_0 \in G$, $M \in G$, $\widehat{M_0M}$ — какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M, то $u(M) = \int\limits_{\widehat{M_0M}} P\,dx + Q\,dy$ будет уже многозначной функцией, значения которой определяются выбором различных путей, соединяющих точки M_0 и M. Если γ_0 — какая-либо фиксированная кривая, соединяющая M_0 и M, то все значения функции u в точке M задаются формулой

$$u(M) = \int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

— каждый обход вокруг начала координат изменяет значение функции $u(M)$ на величину $\pm 2\pi$ в зависимости от направления обхода.

В данном случае в этом легко убедиться и непосредственно: из формулы (47.41) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_0} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_0} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0,$$

где $\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0$ — некоторое фиксированное значение $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$; поэтому

$$u(M) = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Вдумчивый читатель заметил, что многие рассуждения, проведенные в этом примере, не зависят от конкретного вида функций P и Q и являются справедливыми всегда, когда мы имеем

дело с одной изолированной «особой точкой», т. е. точкой, в которой нарушается условие (47.40). Конечно, при однократном «обходе» такой особой точки будет получаться не 2π, а, вообще говоря, какое-то другое число.

Результат, аналогичный теореме 4, имеет место и когда γ — пространственная кривая (см. п. 52.6).

Упражнения 10. Доказать формулу

$$\iint\limits_G v\,\Delta u\,dx\,dy = -\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy + \int\limits_{\gamma^+} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

где G — плоская область, для которой справедлива формула Грина, γ — ограничивающий ее контур, ν — единичная внешняя нормаль к контуру γ, а Δ — оператор Лапласа (см. п. 41.10).

11. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma 2(x+y^2)\,dx + (4xy+\cos y)\,dy$, где Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки $(1, 0)$ и (ξ, η).

12. Пусть Γ — произвольный простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий область, содержащую начало координат. Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Gamma \frac{e^x}{x^2+y^2}\,[(x\sin y - y\cos y)\,dx + (x\cos y + y\sin y)\,dy]$$

при положительном направлении обхода контура Γ.

§ 48. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

48.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как и ранее для однократных интегралов, введем понятие несобственного кратного интеграла, т. е. кратного интеграла от функций, которые либо неограничены, либо определены на неограниченной области. Определение кратного несобственного интеграла сформулируем в таком виде, что оно будет охватывать оба указанных случая (ср. с п. 33.1).

Определение 1. *Пусть G — открытое множество (ограниченное или неограниченное) в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Последовательность открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, будем называть последовательностью, монотонно исчерпывающей открытое множество G, если:*

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Здесь $\overline{G}$, как всегда, означает замыкание (см. п. 18.2) множества G.

Определение 2. *Пусть на открытом множестве G задана функция f (ограниченная или неограниченная), интегрируемая по Риману на любом измеримом по Жордану открытом множестве D,*

таком, что $\bar{D} \subset G$. Функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на открытом множестве G, если для любой последовательности открытых измеримых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int f\, dG_k$, не зависящий от выбора указанной последовательности G_k, $k=1, 2, \ldots$.

Этот предел называется несобственным интегралом от функции f по открытому множеству G и обозначается через $\int f\, dG$, или более подробно,

$$\iint\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Таким образом,

$$\int f\, dG = \lim_{k\to\infty} \int f\, dG_k. \tag{48.1}$$

Если интеграл $\int f\, dG$ существует, то говорят также, что он сходится, а в противном случае — что он расходится.

Следует заметить, что в случае $n=1$ данное определение несобственного интеграла не эквивалентно определению несобственного интеграла от функции одного переменного, данного в § 33. Это связано с тем, что в указанном параграфе мы в качестве множеств G_k брали лишь интервалы, т. е. одномерные открытые измеримые множества весьма специального вида. Поэтому введенное в настоящем параграфе понятие несобственного интеграла (48.1) будем применять только в случае $n \geqslant 2$, сохранив для случая $n=1$ прежнее понятие несобственного интеграла.

Если открытое множество G измеримо по Жордану и функция f интегрируема на G, то несобственный интеграл от функции f совпадает с обычным интегралом Римана, — это следует из полной аддитивности интеграла Римана (см. п. 44.6).

Определение (48.1) позволяет перенести на несобственные интегралы ряд свойств собственных интегралов: аддитивность интеграла по множествам, линейность интеграла, интегрирование неравенств, сведение кратного интеграла к повторному, формулу замены переменного и др.

Например, если $x = F(u)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение открытого множества $D \subset R_u^n$ на открытое множество $G \subset R_x^n$ и якобиан $J(u)$ этого отображения нигде не обращается в ноль на D, то для любой непрерывной на G функции f справедлива формула замены переменного в интеграле:

$$\int f(x)\, dG = \int f[F(u)]\, |J(u)|\, dD.$$

Доказать это можно точно так же, как доказана теорема 2′ в п. 46.2; следует только вместо полной аддитивности интеграла использовать определение (48.1).

Используя аддитивность несобственного кратного интеграла, определение (48.1) можно переписать в другом эквивалентном виде. Замечая, что для измеримого открытого множества $\Gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\int f\,dG - \int f\,d\Gamma = \int f\,d(G \setminus \bar{\Gamma}), \tag{48.2}$$

можно сказать, что интеграл $\int f\,dG$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности измеримых открытых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей множество G, существуют интегралы $\int f\,d(G \setminus \bar{G}_k)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \int f\,d(G \setminus \bar{G}_k) = 0.$$

Упражнение 1. Доказать формулу (48.2); в частности, показать, что интегралы $\int f\,dG$ и $\int f\,d(G \setminus \bar{\Gamma})$ одновременно сходятся или расходятся.

48.2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. *Пусть функция f неотрицательна на открытом множестве $G \subset R^n$. Тогда, какова бы ни была последовательность $\{G_k\}$ открытых измеримых по Жордану множеств G_k, монотонно исчерпывающих множество G, предел*

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)\,dG, \tag{48.3}$$

конечный или равный $+\infty$, всегда существует.

Если он конечен, то интеграл $\int f(x)\,dG$ существует, и, следовательно, предел (48.3) равен этому интегралу, если же предел (48.3) бесконечен, то интеграл $\int f(x)\,dG$ не существует.

В последнем случае пишут $\int f(x)\,dG = +\infty$. Это оправдывается тем, что в силу сформулированной теоремы для любой другой последовательности $\{D_k\}$ открытых измеримых множеств D_k, монотонно исчерпывающих множеств G, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \int f(x)\,dD_k = +\infty$.

Доказательство. Очевидно, что теорема будет доказана, если показать, что в предположении неотрицательности функции f на открытом множестве G для любой монотонно исчерпывающей область G последовательности измеримых множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$ существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\,dG_k$$

и этот предел не зависит от выбора указанной последовательности.

Пусть G_k, $k=1, 2, \ldots,$ — последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. Тогда, согласно определению такой последовательности, $G_k \subset G_{k+1}$, а так как $f \geqslant 0$, то $\int f\, dG_k \leqslant \int f\, dG_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots$ и, следовательно, всегда существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dG_k = I_1.$$

Пусть теперь D_k, $k=1, 2, \ldots,$ — какая-либо другая последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающая открытое множество G. В силу доказанного выше существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dD_k = I_2.$$

Покажем, что

$$I_1 = I_2. \tag{48.4}$$

Для любого фиксированного элемента G_k первой последовательности существует номер $k_0 = k_0(k)$ такой, что

$$\bar{G}_k \subset D_{k_0}. \tag{48.5}$$

В самом деле, если бы указанного номера k_0 не нашлось, то для любого натурального $m=1, 2, \ldots,$ существовала бы точка $x^{(m)} \in \bar{G}_k \setminus D_m$. Открытое множество G_k, будучи измеримым по Жордану, является ограниченным, поэтому его замыкание $\bar{G}_k$ представляет собой замкнутое ограниченное множество, т. е. компакт. В силу его ограниченности последовательность $\{x^{(m)}\}$ также ограничена и, следовательно, согласно теореме Больцано — Вейерштрасса (см. п. 18.1, теорему 2), из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_\nu)}\}$. Если $x^{(0)} = \lim\limits_{\nu\to+\infty} x^{(m_\nu)}$, то из замкнутости множества $\bar{G}_k$ вытекает, что $x^{(0)} \in \bar{G}_k$ и потому $x_0 \in G$. Но тогда в силу свойства 2 монотонно исчерпывающих последовательностей (см. определение 1) найдется номер m_0 такой, что $D_{m_0} \ni x^{(0)}$. Поскольку D_{m_0} — открытое множество, то оно является окрестностью точки $x^{(0)}$ и, следовательно, содержит почти все точки сходящейся к $x^{(0)}$ последовательности $\{x^{(m_\nu)}\}$. Обозначим через ν_0 какой-либо такой номер, что $m_{\nu_0} \geqslant m_0$ и $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_0}$. Тогда в силу свойства 1 монотонно исчерпывающих последовательностей $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_{\nu_0}}$, но поскольку $x^{(m_{\nu_0})} \in \bar{G}_k$, то это противоречит выбору последовательности $\{x^{(m)}\}$. Тем самым существование указанного выше (см. (48.5)) номера k_0 доказано (впрочем, его существование следует также непосредственно из леммы Гейне — Бореля, см. п. 18.3, так как система $\{D_k\}$ образует открытое покрытие компакта $\bar{G}_k$).

Теперь заметим, что в силу условия $f \geqslant 0$ из включения (48.5) вытекает, что $\int f\, dG_k \leqslant \int f\, dD_{k_0}$. Но, очевидно, $\int f\, dD_{k_0} \leqslant I_2$, поэтому при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\int f\, dG_k \leqslant I_2$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $I_1 \leqslant I_2$.

Подобным же образом доказывается и неравенство $I_1 \geqslant I_2$. □

Пример. Рассмотрим интеграл $I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. Положим $G_k = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 < k^2\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность является последовательностью открытых квадрируемых множеств (в данном случае просто кругов), монотонно исчерпывающей всю плоскость R^2.

Пусть $I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$. Перейдем к полярным координатам:

$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^k e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \frac{e^{-r^2}}{2}\Big|_0^k = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

Отсюда, согласно определению (48.1),

$$I = \lim_{k\to\infty} I_k = \pi. \tag{48.6}$$

Формула (48.6) позволяет найти величину интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

называемого *интегралом Пуассона* *) и часто встречающегося в приложениях. Действительно, обозначая через D_k квадрат $|x| \leqslant k$, $|y| \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, и применив к интегралу по D_k от функции $e^{-x^2-y^2}$ формулу сведения кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1), получим

$$I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2} dx\right) e^{-y^2}\, dy =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

*) С. Пуассон (1781—1840) — французский физик и математик.

Поэтому из (48.6) сразу следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть на открытом множестве G выполняются неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in G$. Тогда из сходимости интеграла $\int g(x)\,dG$ следует сходимость интеграла $\int f(x)\,dG$, а из расходимости интеграла $\int f(x)\,dG$ следует расходимость интеграла $\int g(x)\,dG$.*

Эта теорема доказывается аналогично подобной теореме в одномерном случае (см. п. 33.3).

В качестве примеров и эталонов для сравнения с другими интегралами рассмотрим интегралы

$$\int\cdots\int\limits_{x_1^2+\ldots x_n^2\geqslant 1} \frac{dx_1\ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^{\alpha}}, \tag{48.7}$$

$$\int\cdots\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n\leqslant 1} \frac{dx_1\ldots dx_n}{\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)^{\alpha}}. \tag{48.8}$$

Первый интеграл берется по внешности единичного шара; второй — по его внутренности.

Для исследования этих интегралов удобно ввести *сферические координаты* ρ, φ_1, ..., φ_{n-1} в n-мерном пространстве. Они вводятся по формулам

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_2\cos\varphi_1,\\
x_2 &= \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_2\sin\varphi_1\\
x_3 &= \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_3\sin\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i &= \rho\cos\varphi_{n-1}\ldots\cos\varphi_i\sin\varphi_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= \rho\sin\varphi_{n-1},
\end{aligned}\right\} \tag{48.9}$$

где

$$0 \leqslant \rho < +\infty \qquad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2},\ i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

С помощью этих формул декартовым координатам x_1, ..., x_n точки пространства сопоставляются сферические координаты ρ, φ_1, ..., φ_{n-1}, и обратно. При этом следует иметь в виду, что, подобно полярным координатам на плоскости, здесь не существует полного взаимно однозначного соответствия между множествами n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Отметим, что $\rho = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Элементарными, но несколько громоздкими вычислениями, которые не будем здесь приводить, можно показать, что якобиан этого преобразования имеет вид

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \ldots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Положим для краткости

$$\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \ldots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Легко убедиться, что $\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant 0$ и что

$$c = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ldots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\varphi_2 \ldots \varphi_{n-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} > 0.$$

Это сразу следует из свойства 9 кратных интегралов в п. 44.6.

Исследуем теперь сходимость интеграла (48.7). В качестве последовательности открытых измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей внешность единичного шара Q, возьмем последовательность множеств

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\int \ldots \int_{G_k} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})^\alpha} =$$

$$= \int_{1+\frac{1}{k}}^{k} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ldots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^{n-1-\alpha} \Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\rho\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c \int_{1+\frac{1}{k}}^{k} \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.7) свелся к сходимости интеграла $\int_1^\infty \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho$, который, как известно (см. п. 33.3), сходится при $n - 1 - \alpha < -1$, т. е. при $\alpha > n$, и расходится при $\alpha \leqslant n$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Интеграл* (48.7) *сходится, если* α *больше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Рассмотрим теперь интеграл (48.8). Положив

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : \frac{1}{k} < \rho < 1 - \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 3, 4, \ldots,$$

получим

$$\int\limits_{G_k}\!\!\cdots\!\int \frac{dx_1, \ldots, dx_n}{(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})^\alpha} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\rho\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1} =$$

$$= c \int\limits_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}} \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho.$$

Таким образом, вопрос о сходимости интеграла (48.8) свелся к сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \rho^{n-1-\alpha}\, d\rho$. Этот интеграл, как известно, сходится, если $n-1-\alpha>-1$, т. е. если $\alpha<n$, и расходится в противном случае. Полученный результат сформулируем снова в виде леммы.

Лемма 2. *Интеграл* (48.8) *сходится, если* α *меньше размерности пространства, и расходится в противном случае.*

Подобно одномерному случаю (см. п. 33.3) с помощью интегралов (48.7) и (48.8) можно сформулировать критерии сходимости несобственных кратных интегралов, однако мы не будем на этом подробно останавливаться.

48.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ, МЕНЯЮЩИХ ЗНАК

Определение 3. *Несобственный интеграл* $\int f\, dG$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int |f|\, dG$.

Для изучения абсолютной сходимости интеграла от функции $f(x)$ нам будут полезны функции

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{если } f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$f_+ = \frac{|f|+f}{2}, \quad f_- = \frac{|f|-f}{2}, \tag{48.10}$$

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \tag{48.11}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{48.12}$$

Из формул (48.10) следует, что если функция f интегрируема, по Риману, на некоторой измеримой по Жордану области, то и функции f_+ и f_- интегрируемы по Риману на этой области; из

первой формулы (48.12) следует обратное утверждение. Поэтому из (48.10) — (48.12) следует, что *интеграл* $\int f\,dG$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы* $\int f_+\,dG$ *и* $\int f_-\,dG$.

Как и в случае несобственных интегралов от функции одного переменного, из абсолютной сходимости кратного интеграла следует его сходимость (при этом, конечно, рассматриваются только такие функции, которые интегрируемы на каждом открытом измеримом множестве, содержащемся вместе со своим замыканием в открытом множестве, по которому производится интегрирование). Это сразу получается на основании формул (48.11), первой формулы (48.12) и из теоремы 2 настоящего параграфа (см. п. 48.2). Однако для кратных несобственных интегралов справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. *Если кратный интеграл* $\int f\,dG$ $(n \geqslant 2)$ *сходится, то он и абсолютно сходится.*

Эта неожиданная на первый взгляд теорема связана с отличием определения несобственных интегралов от функции одного и n переменных $(n > 1)$, указанных в начале этого параграфа *).

Доказательство теоремы. Пусть интеграл $\int f\,dG$ абсолютно расходится, т. е. для некоторой (а значит и для всякой, см. теорему 1 в п. 48.2) последовательности открытых измеримых по Жордану множеств G_k, $k=1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей открытое множество G, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \int |f|\,dG_k = +\infty$. Без ограничения общности (переходя, если надо, к подпоследовательности) можно предполагать, что

$$\int |f|\,dG_{k+1} > 3\int |f|\,dG_k + 2k, \quad k=1, 2, \ldots. \tag{48.13}$$

Пусть $A_k = G_{k+1} \setminus \bar{G}_k$; тогда A_k — открытое измеримое множество, и так как $\bar{G}_k \subset G_{k+1}$, то (рис. 199) $G_{k+1} = A_k \cup \bar{G}_k$, и, следовательно,

$$\int |f|\,dG_{k+1} = \int |f|\,dA_k + \int |f|\,dG_k.$$

---

*) Отметим, однако, что можно было бы и в n-мерном случае получить ту же связь между сходимостью и абсолютной сходимостью интеграла, что и в одномерном случае, если соответствующим образом ввести определение несобственного n-кратного интеграла. Например, в случае интегралов по всему пространству для этого достаточно в определении интеграла в качестве элементов монотонно исчерпывающей последовательности брать только n-мерные шары с центром в начале координат. Впрочем, если применить к одномерному интегралу определение несобственного интеграла, данное в п. 48.1, и понимать одномерный интеграл Римана в смысле § 44, то теорема 3 вместе с ее доказательством будет справедливой и при $n=1$.

Отсюда в силу неравенства (48.13) $\int |f|\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k$. Используя вторую формулу (48.12), получим

$$\int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k.$$

Пусть для определенности $\int f_+\, dA_k \geqslant \int f_-\, dA_k$; тогда

$$2\int f_+\, dA_k \geqslant \int f_+\, dA_k + \int f_-\, dA_k > 2\int |f|\, dG_k + 2k,$$

и, следовательно,

$$\int f_+\, dA_k > \int |f|\, dG_k + k. \tag{48.14}$$

Нашей целью является получение неравенства подобного типа не для функции f_+, а для функции f. Для этого, казалось бы, можно просто отбросить точки, в которых функция f_+ обращается в ноль; тогда на оставшемся множестве мы имели бы $f = f_+$. Однако получившееся множество может, вообще говоря, оказаться неизмеримым, а поэтому мы будем действовать несколько обходным путем.

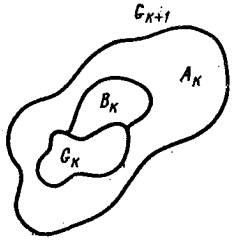


Рис. 199

Из неравенства (48.14) следует, что при любом достаточно мелком разбиении $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ множества A_k (см. п. 44.3) для любой интегральной суммы Римана имеем

$$\sum_{i=1}^{i_0} f_+(\xi_i)\, \mu E_i > \int |f|\, dG_k + k,$$
$$\xi_i \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0.$$

Выберем указанное разбиение τ открытого измеримого множества A_k таким, чтобы все элементы E_i этого разбиения также были открытыми измеримыми по Жордану множествами — это всегда возможно (см. п. 44.4). Обозначим через E_i^* те множества $E_i \in \tau$, для которых $f_+(\xi) > 0$ во всех точках $\xi \in \bar{E}_i$; тогда, выбирая $\xi_i \in \bar{E}_i \neq \bar{E}_i^*$ так, что $f(\xi_i) = 0$, получим

$$\sum_i{}' f_+(\xi_i)\, \mu E_i^* > \int |f|\, dG_k + k, \tag{48.15}$$

где (а также и в дальнейшем) знак «штрих» у суммы означает, что суммирование распространяется только на те индексы i, для которых $E_i = E_i^*$. Положим $B_k = \bigcup_i{}' E_i^*$ (см. рис. 199). Очевидно, что B_k — открытое измеримое множество, лежащее во множестве A_k, а $\tau^* = \{E_i^*\}$ является его разбиением. На замыкании этого множества $f_+ > 0$ и, следовательно, $f_+ = f$. Из неравенства (48.15) следует, что для нижней суммы Дарбу s_{τ^*} функции f на

множестве B_k справедливо неравенство $s_{\tau^*} \geqslant \int f\, dG_k + k$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$\int f\, dB_k \geqslant \int |f|\, dG_k + k. \tag{48.16}$$

Заметим, что $f \geqslant -|f|$ и, следовательно,

$$\int f\, dG_k \geqslant -\int |f|\, dG_k. \tag{48.17}$$

Сложив неравенства (48.16) и (48.17) получим:

$$\int f\, dB_k + \int f\, dG_k \geqslant k. \tag{48.18}$$

Пусть $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно D_k — открытое измеримое множество и

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{48.19}$$

В силу того, что множества B_k и G_k не пересекаются (так как не пересекаются множества A_k и G_k) из (48.18) имеем $\int f\, dD_k \geqslant k$, откуда

$$\lim_{k \to \infty} \int f\, dD_k = +\infty. \tag{48.20}$$

Из включения (48.19) следует, что множества D_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют последовательность измеримых открытых множеств, монотонно исчерпывающую открытое множество G, ибо таковой являлась заданная последовательность G_k, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому равенство (48.20) означает, что интеграл $\int f\, dG$ расходится. □

Итак, для кратных интегралов сходимость несобственного интеграла $\int f\, dG$ эквивалентна его абсолютной сходимости.

Упражнение 2. Заменив в определении кратного несобственного интеграла всюду открытые множества областями (в частности, рассматривая только монотонно исчерпывающие данную область последовательности, состоящие только из измеримых областей), показать, что и при таком «более узком» определении кратного несобственного интеграла сохраняется теорема 3.

§ 49. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

49.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Пусть E — измеримое множество в R^n. Как известно (см. п. 44.6).

$$\mu E = \int dE. \tag{49.1}$$

Таким образом, с помощью n-кратного интеграла можно вычислять меру измеримых множеств в n-мерном пространстве (площадь —

в двумерном, объем — в трехмерном). Если n-кратный интеграл (49.1) можно свести к повторному (см. § 45), то вычисление меры измеримого множества E n-мерного пространства сведется к вычислению $(n-1)$-кратного интеграла.

Пусть, например, D — открытое измеримое множество в $(n-1)$-мерном пространстве $R^{n-1}_{x_1, \ldots, x_{n-1}}$, $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — неотрицательная функция, определенная и непрерывная на замыкании $\bar{D}$ множества D, а

$$G = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D, \quad 0 < x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

(таким образом, G является n-мерным аналогом криволинейной плоской трапеции, рассмотренной нами в п. 32.1). Тогда

$$\mu G = \int dG = \int dD \int\limits_0^{f(x_1, \ldots, x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dD,$$

т. е.

$$\mu G = \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1 \text{ раз}}_{D} f(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Меру произвольных (необязательно измеримых по Жордану) в частности неограниченных, открытых множеств пространства R^n, $n \geqslant 2$, если ее понимать в смысле определения п. 31.1 и 31.2, т. е. как нижнюю меру Жордана, можно вычислить с помощью несобственных интегралов. Действительно пусть G — произвольное открытое множество в R^n и G_k, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность открытых измеримых множеств, монотонно исчерпывающих множество G (см. п. 48.1). Тогда, как известно (см. п. 31.2), $\lim\limits_{k \to \infty} \mu G_k = \mu G$. Но в силу (49.1) $\mu G_k = \int dG_k$, а поэтому $\mu G = \lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k$.

По определению же кратного несобственного интеграла, $\lim\limits_{k \to \infty} \int dG_k = \int dG$. Таким образом $\mu G = \int f\, dG$, где интеграл в правой части понимается, вообще говоря (а именно, если G не является измеримой областью), как несобственный.

Остается лишь показать, что для любого открытого множества G всегда существует последовательность измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающая заданное множество G. Докажем это.

Рассмотрим последовательность T_k, $k = 1, \ldots$, разбиений пространства R^n на кубы (см. п. 44.1) и обозначим через Q_k n-мерный открытый куб, определяемый следующим образом:

$$Q_k = \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i| < k, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Число кубов данного ранга k (см. п. 44.1), содержащихся в Q_k, а следовательно, и подавно в пересечении $G \cap Q_k$, конечно. Обозначим эти замкнутые кубы $P_1, \ldots, P_{j_k}$:

$$P_j \in T_k; \quad P_j \subset G \cap Q_k, \quad j = 1, 2, \ldots, j_k.$$

Через G_k обозначим множество внутренних точек множества $\bigcup_{j=1}^{j_k} P_j$. Например, в случае, изображенном на рис. 200, множество G_k состоит из внутренних точек двух квадратов P_1 и P_2 и интервала, получающегося отбрасыванием вершин этих квадратов из их общего ребра.

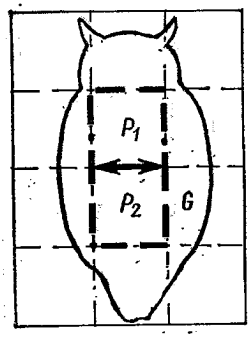


Рис. 200

Множества G_k, $k = 1, 2, \ldots$, и являются открытыми измеримыми множествами, образующими последовательность, монотонно исчерпывающую данное открытое множество G.

Напомним, что для вычисления объемов тел часто оказывается удобным метод сечений: см. формулу (45.23).

Упражнение 1. Доказать, что построенная последовательность множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, действительно образует последовательность измеримых множеств, монотонно исчерпывающих данное множество G.

49.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью кратных интегралов можно вычислить различные физические величины: массу и заряд тела, центр тяжести, момент инерции, поток жидкости, потенциал тела и т. п.

Найдем в качестве примера центр тяжести плоской фигуры. Пусть в некоторой квадрируемой области G распределена некоторая масса, вообще говоря, с переменной поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, т. е. на замыкании $\bar{G}$ области G задана некоторая неотрицательная и непрерывная функция $\rho(x, y)$. Область G с распределенной в ней массой будем называть *фигурой* S, а величину

$$M = \iint_G \rho(x, y)\, dx\, dy \tag{49.2}$$

— ее *массой*. Если $\rho(x, y)$ — не тождественный ноль, то $M > 0$.

Определим и найдем центр тяжести фигуры S. Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{G_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, области G (см. п. 44.3). Множество G_i с распределенной в нем массой плотности $\rho(x, y)$, $(x, y) \in G_i$, назовем фигурой S_i. Выберем по некоторой точке $(\xi_i, \eta_i) \in \bar{G}_i$. Величину $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\, \mu G_i$ назовем приближенным значением массы фигуры S_i (естественность такого названия сле-

дует из формулы (49.2)). Величины же $m_i\xi_i$ и $m_i\eta_i$ назовем приближенными значениями статических моментов фигуры S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, соответственно относительно координатных осей Oy и Ox (естественность этого названия следует из того, что статическими моментами материальной точки массы m с координатами (x, y) относительно осей Ox и Oy называются величины my и mx, см. п. 32.6). Наконец, величины

$$S_x(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i)\,\mu G_i,$$
$$S_y(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i)\,\mu G_i \tag{49.3}$$

назовем приближенными τ-моментами фигуры S относительно осей Ox и Oy, а их пределы при $\delta_\tau \to 0$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_x(\tau) = S_x, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} S_y(\tau) = S_y$$

— *статическими моментами фигуры* S относительно осей Ox и Oy. Эти пределы при сделанных предположениях существуют. Действительно, из формул (49.3) видно, что $S_x(\tau)$ и $S_y(\tau)$ являются интегральными суммами Римана для функций $y\rho(x, y)$ и $x\rho(x, y)$, а потому

$$S_x = \iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy, \quad S_y = \iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy. \tag{49.4}$$

Определение 1. *Точка (x_0, y_0) называется центром тяжести (центром масс, центром инерции) фигуры S, если статические моменты относительно координатных осей материальной точки массы M, равной массе всей фигуры S и находящейся в точке (x_0, y_0) равны соответствующим статическим моментам фигуры S, т. е. если*

$$Mx_0 = S_y, \quad My_0 = S_x.$$

Из формул (49.2) и (49.3) получаем

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy}.$$

Упражнение 2. Доказать, что центр тяжести фигуры не зависит от выбора системы координат.

В качестве примера рассмотрим «криволинейную трапецию» G, порожденную графиками непрерывных неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \quad g(x) < y < f(x)\}.$$

Пусть $\rho(x, y) \equiv 1$. Поскольку $\iint\limits_G dx\,dy = \mu G$, то

$$x_0 = \frac{1}{\mu G}\iint\limits_G x\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G}\int\limits_a^b x\,dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G}\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,x\,dx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G}\iint\limits_G y\,dx\,dy = \frac{1}{\mu G}\int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2\mu G}\int\limits_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx;$$

отсюда

$$2\pi y_0 \mu G = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \pi\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$$

Здесь в правой части равенства стоит объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции G вокруг оси x-в; — мы пришли ко второй теореме Гульдина.

Теорема (Гульдин). *Объем тела вращения плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести этой фигуры.*

Пример. Вычислим с помощью второй теоремы Гульдина объем μQ тора Q, полученного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 < r \leqslant a$ вокруг оси Oy:

$$\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 a r^2.$$

Упражнения. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями:

3. $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $y \geqslant 1$; $\rho(x, y) = x + y$.
4. $y = 2x$, $y = -2$, $y = 4x - 2$; $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

Найти статические моменты относительно осей координат однородной плоской фигуры ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), ограниченной заданными линиями:

5. $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $x = 0$.
6. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Найти координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$; $\rho = \rho_0 = \text{const}$.
8. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$; $\rho(x, y) = x$.
9. $r = \sqrt{2}$, $r = 2\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ r \geqslant \sqrt{2})$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ (r, φ — полярные координаты).
10. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

§ 50. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

50.1. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть в пространстве R^3 фиксирована декартова система координат x, y, z. Декартовы координаты в плоскостях, в которых лежат отображаемые области, будем обозначать буквами u, v, сами эти области — буквой D, рассматриваемые их отображения — буквами f, r, ρ (быть может, с теми или иными индексами).

Как обычно, через $\bar{D}$ будем обозначать замыкание области D (напомним, что $\bar{D}$ называется замкнутой областью), а через ∂D — ее границу (см. п. 18.2). Для образов точек $M=(u, v)\in\bar{D}$ при указанных отображениях будет употребляться как запись вида $f(M)$, так и вида $f(u, v)$.

Непрерывной поверхностью S называется всякое множество точек трехмерного пространства R^3, заданное как непрерывный образ некоторой замкнутой плоской области $\bar{D}$. Само рассматриваемое непрерывное отображение $r(u, v)$ замкнутой области $\bar{D}$ на множество S называется *представлением поверхности* (или, подробнее, *параметрическим представлением*) и пишется

$$S=\{r(u, v):(u, v)\in\bar{D}\}.$$

Переменные u, v называются *координатами*, или *параметрами*, непрерывной поверхности S.

Для непрерывной поверхности $S=\{r=r(u, v):(u, v)\in\bar{D}\}$ множество точек пространства R^3, заданное как образ границы ∂D области D при отображении $r(u, v)$, называется *краем поверхности* S и обозначается через ∂S:

$$\partial S=\{r(u, v):(u, v)\in\partial D\}.$$

По аналогии с определением кривой можно ввести понятие эквивалентных отображений, но на этот раз не отрезков, а отображений замкнутых плоских областей в трехмерное пространство R^3, и считать по определению, что два эквивалентных непрерывных отображения задают одну и ту же непрерывную поверхность (см. п. 50.2*). Отображения, осуществляющие эквивалентность двух представлений одной и той же поверхности, называются *допустимыми преобразованиями параметров*.

При заданном представлении $r(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, некоторой непрерывной поверхности и при фиксированных значениях параметров u, v через $r(u, v)$, естественно, обозначается точка этой поверхности, в которую при рассматриваемом представлении отображается точка $(u, v)\in\bar{D}$.

Подчеркнем, что представление непрерывной поверхности не является обязательно взаимно однозначным отображением. Точка непрерывной поверхности $S=\{r(u, v);\ (u, v)\in\bar{D}\}$, в которую при данном отображении $r(u, v)$ отображаются по крайней мере две различные точки замкнутой области $\bar{D}$, называется *кратной точкой*, или *точкой самопересечения* этой поверхности.

Таким образом, если точка M непрерывной поверхности является кратной точкой последней, то при заданном представлении $r(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, этой поверхности существуют по крайней мере две такие точки $(u_1, v_1)\in\bar{D}$ и $(u_2, v_2)\in\bar{D}$, что $r(u_1, v_1)=r(u_2, v_2)=M$.

Отображение $r(u, v)$ можно задавать в координатном виде:

$$r(u, v)=(x(u, v),\quad y(u, v),\quad z(u, v))$$

и в векторном:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),$$

где $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(u,\ v)\in R^3$.

В дальнейшем будут изучаться прежде всего дифференциальные свойства поверхностей определенных классов, состоящих из «достаточно гладких», т. е. достаточное число раз (непрерывно) дифференцируемых поверхностей. Определим, например, понятие непрерывно дифференцируемой поверхности.

Непрерывно дифференцируемой поверхностью называется множество S пространства R^3, заданное как непрерывно дифференцируемый образ некоторой замкнутой плоской области.

Само рассматриваемое непрерывно дифференцируемое отображение замкнутой области $\bar{D}$ на множество S называется, как и выше, представлением этой поверхности, причем, по определению, считается, что два непрерывно дифференцируемых отображения замкнутых плоских областей задают одну и ту же непрерывно дифференцируемую поверхность, если они эквивалентны относительно непрерывно дифференцируемых преобразований (см. п. 50.2*).

Аналогичным образом определяются и другие специальные классы непрерывных поверхностей: дважды непрерывно дифференцируемые поверхности и вообще n раз непрерывно дифференцируемые поверхности.

Если за параметры в одном из представлений непрерывной поверхности можно взять какие-либо две координаты пространства R^3 (например, если существует замкнутая область $\bar{D}$ на плоскости xy и функция $z=f(x,\ y)$, $(x,\ y)\in\bar{D}$, являющаяся представлением рассматриваемой непрерывной поверхности), то такое представление называется явным.

Очевидно, что если непрерывная поверхность допускает явное представление, то она не имеет кратных точек.

В дальнейшем непрерывную поверхность там, где это не сможет привести к недоразумениям, будем называть просто поверхностью.

Пример. Поверхность, задаваемая представлением

$$x=r\cos\psi\cos\varphi,\quad y=r\cos\psi\sin\varphi,\quad z=r\sin\varphi,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

является сферой с центром в начале координат и радиусом r, у которой весь меридиан $\varphi=0$ состоит из кратных точек.

В следующем пункте будет дано другое, в некотором смысле более детализированное, определение поверхности. Целесообразно, видимо, при первом чтении пропустить следующий пункт и вернуться к нему лишь тогда, когда в этом почувствуется внутренняя необходимость.

50.2*. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Для строгого определения поверхности необходимо прежде всего ввести понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей.

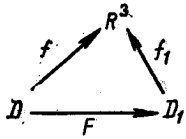
Определение 1. *Непрерывное отображение f замыкания $\bar{D}$ некоторой плоской области D в трехмерное пространство R^3 называется эквивалентным непрерывному отображению f_1 замыкания $\bar{D}_1$ плоской области D_1 в то же пространство R^3, если существует такое гомеоморфное (см. определение 5 в п. 41.4) отображение F замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, при котором внутренние точки переходят во внутренние, а граничные — в граничные (т. е. D отображается на D_1, а ∂D на ∂D_1), и для каждой точки $M \in D$ выполняется равенство*

$$f(M) = f_1[F(M)], \tag{50.1}$$

т. е. $f = f_1 \cdot F$.

В этом случае F называется *отображением, осуществляющим эквивалентность отображений* f и f_1. Если f эквивалентно отображению f_1, то пишется $f \sim f_1$.

Схематически определение эквивалентных отображений можно изобразить диаграммой, где стрелками изображены рассматриваемые отображения и результат отображений не зависит от выбора пути на диаграмме:



Очевидно, что: 1) всякое отображение эквивалентно самому себе: $f \sim f$ (здесь отображением, осуществляющим эквивалентность, является тождественное отображение). Легко убедиться, что

2) $f \sim f_1$, то $f_1 \sim f$,

3) а если $f \sim f_1$ и $f_1 \sim f_2$, то $f \sim f_2$.

Если f и f_1 — эквивалентные непрерывные отображения соответственно замкнутых областей $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$, то из (50.1) следует, что образы множеств $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$ при отображениях f и f_1 совпадают:

$$f(\bar{D}) = f_1(\bar{D}_1). \tag{50.2}$$

Заметим еще, что условия, наложенные на эквивалентные отображения в определении 1, независимы. Именно, из того, что F является гомеоморфным отображением замкнутой области D на замкнутую область $\bar{D}_1$, не следует, что оно переводит внутренние точки во внутренние. Например, если $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ — круг, а $D_1 = \{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$ — круг с «выколотым» цент-

ром, то тождественное отображение (очевидно, являющееся гомеоморфным) $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$ переводит внутреннюю точку (0, 0) области D в граничную точку (0, 0) области D_1.

Перейдем теперь к определению поверхности.

Определение 2. *Всякое множество всевозможных непрерывных эквивалентных между собой (см. определение 1) отображений $r(u, v)$ замкнутых плоских областей $\bar{D}$ в трехмерное пространство R^3 называется параметрически заданной поверхностью S и обозначается*

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}, \tag{50.3}$$

а каждое из указанных эквивалентных непрерывных отображений $r(u, v)$ называется представлением параметрически заданной поверхности S.

Если $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ — представление параметрически заданной поверхности S и если $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор с концом в точке $r(u, v)$, то $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, называется *векторным представлением* этой поверхности S и пишется

$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.4}$$

Если $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = (u, v)$$

называются *координатным представлением* параметрически заданной поверхности S и пишется

$$S = \{x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v); \quad (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.5}$$

Очевидно, что параметрически заданная поверхность однозначно определяется каждым из своих представлений. Это позволяет, что часто более удобно, правую часть каждого из равенств (50.3), (50.4) и (50.5) понимать не как совокупность всех представлений определенного типа рассматриваемой поверхности S, а как некоторое вполне определенное ее соответствующее представление.

Определение 3. *Пусть $r(M)$, $M \in \bar{D}$ и $\rho(M_1)$, $M_1 \in \bar{D}_1$ — два представления некоторой параметрически заданной поверности S и F — отображение $\bar{D}$ на $\bar{D}_1$, осуществляющее их эквивалентность (см. определение 1).*

Если $M_1 = F(M)$, $M \in \bar{D}$, $M_1 \in \bar{D}_1$ (точка M, а поэтому и точка M_1 фиксированы), и, следовательно, $r(M) = \rho(M_1) = P \in R^3$, то пары (P, M) и (P, M_1) называются эквивалентными и пишется

$$(P, M) \sim (P, M).$$

Легко проверить, что

1) $(P, M) \sim (P, M)$;

2) если $(P, M) \sim (P, M_1)$, то $(P, M_1) \sim (P, M)$;

3) если $(P, M) \sim (P, M_1)$, а $(P, M_1) \sim (P, M_2)$, то $(P, M) \sim \sim (P, M_2)$.

Если $(P, M) \sim (P, M_1)$ и M — внутренняя (граничная) точка замкнутой области $\bar{D}$, то, согласно определению 1, M_1 также является внутренней (граничной) точкой замкнутой области $\bar{D}_1$.

Определение 4. *Пусть S — параметрически заданная поверхность. Всякая совокупность $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, всех эквивалентных между собою пар (P, M) (точка $P \in R^3$ фиксирована) называется точкой данной поверхности S, а точка P — ее носителем.*

Точка $\{(P, M)\}$, $M \in D$, поверхности S называется внутренней (краевой) если каждая точка M является внутренней (граничной) точкой соответствующей замкнутой области $\bar{D}$.

Каждая точка $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, параметрически заданной поверхности $S = \{r(M), M \in \bar{D}\}$ однозначно определяется каждой парой $(P, M) \in \{(P, M)\}$, и поскольку в этой паре $P = r(M)$, то каждая точка параметрически заданной поверхности S при некотором заданном ее представлении $r(M)$, $M \in \bar{D}$, однозначно определяется точкой M, причем точка $P = r(M)$ является носителем рассматриваемой точки поверхности. Поэтому для краткости точки параметрически заданной поверхности будут, как правило, обозначаться не символом $\{(P, M)\}$, а просто $r(M)$, или, что равносильно, $r(u, v)$, где $M = (u, v)$. В силу сказанного это обозначение имеет однозначный смысл.

Определение 5. *Совокупность всех носителей всех точек параметрически заданной поверхности S называется носителем этой поверхности.*

В силу условия (50.2) носитель параметрически заданной поверхности (являющийся, очевидно, некоторым множеством точек в пространстве R^3) однозначно определяется каждым ее представлением.

Определение 6. *Точка $P \in R^3$, являющаяся носителем двух разных точек параметрически заданной поверхности S, называется кратной точкой или, что то же, точкой самопересечения носителя параметрически заданной поверхности.*

Возвращаясь к определению поверхности, данному в п. 50.1, видим, что то, что там было названо «*непрерывной поверхностью*», в нашей новой терминологии называется «*носителем параметрически заданной поверхности*». Попытка ввести понятие «точки поверхности» для поверхностей с кратными точками приводит в том или ином виде к определениям 4 и 6. Отметим, что понятие параметрически заданной поверхности с кратными точками очень удобно при рассмотрении ряда вопросов, изучаемых в последующих параграфах.

В дальнейшем, там, где это не сможет привести к недоразумениям, «непрерывная поверхность» (см. п. 50.1), или, что то же, «носитель параметрически заданной поверхности» (см. определение 5), а также «параметрически заданная поверхность» (см. определение 2), будут называться просто поверхностью.

Определим теперь понятие части поверхности.

Определение 7. *Пусть S — параметрически заданная поверхность $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, — некоторое ее представление, D' — область, содержащаяся в $D: D' \subset D$. Параметрически заданная поверхность S', определяемая представлением $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}'$, называется частью поверхности S.*

Как уже отмечалось (см. п. 50.1), понятие эквивалентных отображений замкнутых плоских областей можно вводить не только для непрерывных отображений, но и для других классов отображений, например для непрерывно дифференцируемых. В применении к параметрически заданным поверхностям это приводит к непрерывно дифференцируемым поверхностям. Их определение базируется на понятии отображений, эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований.

Определим это понятие. Как и раньше (см. п. 39.3), под функцией, непрерывно дифференцируемой в замыкании некоторой области, будем понимать такую функцию, которая имеет непрерывные в самой области производные, непрерывно продолжаемые на ее границу.

Отображение некоторой замкнутой области называется *непрерывно дифференцируемым*, если каждая координатная функция, задающая это отображение (см. п. 41.4), является непрерывно дифференцируемой функцией на рассматриваемой замкнутой области. При этом продолженные функции в этих случаях обозначаются теми же символами, что и исходные продолжаемые функции.

Если некоторое отображение $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\bar{D}$ области D, то, согласно сделанному соглашению, это означает, в частности, что якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ этого отображения непрерывно продолжаем с области D на ее замыкание $\bar{D}$ и его продолжение, обозначаемое тем же символом, $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, также будет называться якобианом.

Прежде всего надо сформулировать, что будет пониматься под эквивалентными непрерывно дифференцируемыми отображениями. Для этого введем понятие регулярных отображений.

Определение 8. *Гомеоморфное отображение F замыкания $\bar{D}$ плоской области D на замыкание $\bar{D}_1$ плоской области D_1, переводящее внутренние точки во внутренние, а граничные — в граничные, называется регулярным отображением замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, если как само это отображение F, так и обратное ему F^{-1} непрерывно дифференцируемы соответственно на замкнутых областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$.*

Заметим, что всякое регулярное отображение F замкнутой области $\bar{D}$ имеет во всех точках области D не равный нулю якобиан. Действительно, согласно определению 8, при отображении F образ каждой внутренней точки является внутренней

точкой. Поскольку в этих точках прямое и соответственно обратное отображения непрерывно дифференцируемы, то их якобианы не могут обратиться в ноль, ибо их произведение равно единице (см. п. 41.7).

Отсюда следует, что якобиан регулярного отображения F не равен нулю и на замкнутой области $\bar{D}$. Действительно, в силу непрерывной продолжаемости якобианов как прямого, так и обратного отображений соответственно на замыкания $\bar{D}$ и $\overline{F(D)}$ областей D и $F(D)$ произведение этих якобианов равно единице и для всех точек замкнутой области $\bar{D}$.

Мы уже встречались с регулярными отображениями замкнутых плоских областей специального вида, например, в п. 46.1.

Определение 9. *Пусть f и f_1 суть непрерывные отображения замыканий $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$ плоских областей D и D_1 в пространство R^3 и пусть эти отображения непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\bar{D}$ и $\bar{D}_1$. Отображения f и f_1 называются эквивалентными относительно непрерывно дифференцируемых преобразований, если существует такое регулярное отображение F замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, что для каждой точки $M \in \bar{D}$ выполняется условие* (50.1).

Теперь можно определить непрерывно дифференцируемую поверхность.

Определение 10. *Всякое множество отображений $r(u, v)$ замкнутых плоских областей $\bar{D}$ в трехмерное пространство R^3 непрерывно дифференцируемых и эквивалентных относительно непрерывно дифференцируемых преобразований называется параметрически заданной непрерывно дифференцируемой поверхностью S, а каждое из указанных отображений $r(u, v)$ называется представлением этой поверхности и пишется, как и раньше,*

$$S = \{r(u, v); \quad (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Подчеркнем, что если поверхность $S = \{r(u, v); \ (u, v) \in D\}$ непрерывно дифференцируема, то это, в частности, означает, что каждое ее векторное представление $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, имеет частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ *), непрерывные в области D и непрерывно продолжаемые на ее границу. Поскольку, согласно принятому соглашению, продолженные функции обозначаются

*) Такие понятия, как, например, непрерывность, предел, дифференцируемость естественным образом переносятся и на вектор-функции нескольких переменных. Так, функция $\boldsymbol{r}(u, v)$, определенная на области G, называется *непрерывной в точке* $(u_0, v_0) \in G$, если $\lim\limits_{(u, v) \to (u_0, v_0)} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$. Производная $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ определяется равенством

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(u_0, v_0)}{\partial u} = \left.\frac{d\boldsymbol{r}(u, v_0)}{du}\right|_{u = u_0}.$$

теми же символами, что и продолжаемые*), то можно считать, что функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны на замкнутой области $\bar{D}$.

Подобным образом можно определить и другие классы параметрически заданных поверхностей, например дважды непрерывно дифференцируемые или вообще n раз непрерывно дифференцируемые параметрически заданные поверхности, а также понятие их точки, носителя и их части.

Резюмируя, окончательно можно сказать, что *параметрически заданной поверхностью какого-то класса является некоторая совокупность эквивалентных между собой в определенном смысле отображений* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *называемых ее представлениями.*

Понятие эквивалентности определяется в зависимости от выбора класса.

Определение 11. *Преобразования параметров, осуществляющие переход от одного представления поверхности к другому, ему эквивалентному, называются допустимыми.*

Таким образом, если $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ и $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$ — два представления одной и той же параметрически заданной поверхности некоторого класса, а отображение

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$ является допустимым преобразованием параметров, то для всех точек $(u, v) \in \bar{D}$ выполняется соотношение (см. (50.1))

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \quad \psi(u, v)].$$

Параметрически заданная поверхность при заданном классе допустимых преобразований параметров однозначно определяется каждым своим представлением, поэтому, чтобы задать такую поверхность, достаточно задать лишь одно ее представление.

50.3. ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Отметим еще один подход к понятию поверхности. Если $F(x, y, z)$ — непрерывная в некоторой трехмерной области функция, то совокупность точек (x, y, z) таких, что

$$F(x, y, z) = 0, \tag{50.6}$$

называется *поверхностью, заданной неявно.* Не останавливаясь подробно на анализе такого подхода к понятию поверхности, отметим лишь, что в случае если функция F удовлетворяет в неко-

*) Точнее, это соглашение было принято (см. п. 39.3) для скалярных функций и, следовательно, для координат векторных функций, поэтому его естественно принять и для самих векторных функций.

торой точке (x_0, y_0, z_0) условиям теоремы о неявных функциях (см. п. 41.1), то часть поверхности (50.6) в некоторой окрестности указанной точки (т. е. пересечение этой окрестности с данной поверхностью) допускает явное представление, и можно сказать, что в этой ситуации поверхность, заданная неявно, локально сводится к поверхности, заданной явным представлением (см. п. 50.1). Только такой случай поверхностей, заданных неявно, встретится в дальнейшем, поэтому не будем специально останавливаться на разъяснении тех или иных понятий для поверхностей, заданных неявно.

В качестве простейшего примера поверхности, заданной неявно, отметим уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

В дальнейшем будут изучаться в основном лишь непрерывные поверхности, заданные параметрическим представлением и, вообще говоря, с кратными точками. Они будут называться, как это уже отмечалось, просто «поверхностями»; в случаях, когда понятие поверхности будет пониматься в каком-либо другом смысле, это будет специально оговариваться.

50.4. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Пусть

$$S=\{\boldsymbol{r}(u, v);\quad (u, v)\in \bar{D}\} \tag{50.7}$$

— непрерывно дифференцируемая поверхность. Рассмотрим некоторое ее векторное представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in \bar{D}$. Как и всякое ее векторное представление, оно является непрерывно дифференцируемой вектор-функцией на замкнутой плоской области $\bar{D}$.

Будем для простоты считать, что пересечение каждой прямой $u=u_0$ или $v=v_0$ с замкнутой областью $\bar{D}$ состоит из одного отрезка (быть может, вырождающегося в точку) или пусто. Пусть, например, пересечение $\bar{D}$ с прямой $v=v_0$ не пусто, тогда

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v_0),\quad (u, v_0)\in \bar{D}$$

(v_0 фиксировано) является представлением некоторой непрерывно дифференцируемой кривой, которая называется *координатной линией* (*u-линией*). Вектор

$$\boldsymbol{r}_u=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=(x_u, y_u, z_u)$$

является ее касательным вектором. Аналогично определяются другие координатные линии (*v-линии*) с помощью представления

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0, v),\ (u_0, v)\in \bar{D}$$

(u_0 фиксировано) и касательные к ним векторы

$$\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (x_v,\ y_v,\ z_v).$$

Определение 12. *Точка $r(u, v)$ поверхности* (50.7), *для которой векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны (линейно независимы), называется неособой при данном представлении этой поверхности. В противном случае, т. е. когда векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллинеарны в данной точке, она называется особой точкой поверхности при данном ее представлении.*

Если точка поверхности неособая, то в ней, в частности $\boldsymbol{r}_u \neq 0$, $\boldsymbol{r}_v \neq 0$. Очевидно, что точка поверхности является неособой при данном представлении поверхности в том и только в том случае, когда в этой точке $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$.

Упражнение 1. Доказать, что если $r(u_0, v_0)$ является внутренней неособой при данном представлении $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, точкой поверхности S, т. е. для этой точки $(u_0, v_0) \in D$ и $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, то некоторая часть поверхности S, для которой точка $r(u_0, v_0)$ также является внутренней, обладает явным представлением относительной одной из осей координат.

Рассмотрим кривую на поверхности (50.7). Пусть эта кривая задана непрерывно дифференцируемыми функциями

$$u = u(t),\ v = v(t),\ (u(t),\ v(t)) \in D,\ a \leqslant t \leqslant b,$$

т. е. представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(t),\ v(t)],\quad (u(t),\ v(t)) \in D,\quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{50.8}$$

причем $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$ на $[a, b]$.

Продифференцировав равенство (50.8), получим

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv, \tag{50.9}$$

здесь $du = u'(t)\, dt$, $dv = v'(t)\, dt$. Если точка поверхности, в которой рассматривается равенство (50.9), не особая, то вектор $d\boldsymbol{r}$ является касательным к кривой (50.8). Равенство (50.9) показывает, что в данной точке $r(u_0, v_0)$ поверхности (50.7) касательная к любой кривой (50.8) на этой поверхности, проходящей через точку $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$.

Определение 13. *Плоскость, проходящая через точку $r(u_0, v_0)$ поверхности* (50.7), *в которой лежат все касательные к кривым* (50.8), *проходящим через эту точку, называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке (называемой точкой касания).*

Упражнение 2. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{v}$, лежащего в касательной плоскости к поверхности S в неособой точке, существует проходящая через эту точку кривая на поверхности S, для которой вектор $\boldsymbol{v}$ является касательным.

Если данная точка поверхности (50.7) неособая, то в ней всегда существует, и притом единственная, касательная плоскость: именно в силу (50.9) ею является плоскость, проходящая через $r(u_0, v_0)$ параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$. Отсюда легко написать ее уравнение в векторном виде. Обозначив через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки касания, а через $\boldsymbol{r}$ — текущий радиус-вектор точек на касательной плоскости, получим (рис. 201):

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0$$

(в левой части равенства стоит смешанное произведение указанных векторов).

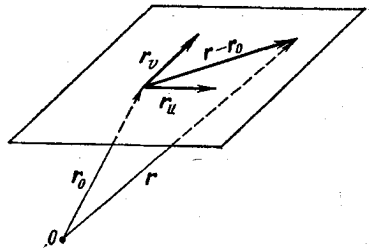


Рис. 201

Если $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_u=(x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{r}_v=(x_v, y_v, z_v)$, то уравнение касательной плоскости в координатном виде перепишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=0.$$

В случае явного задания поверхности

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in\overline{D}, \tag{50.10}$$

будем иметь $u=x$, $v=y$ и поэтому

$$\begin{aligned} &x_u=1, \quad y_u=0, \quad z_u=f_x, \\ &x_v=0, \quad y_v=1, \quad z_v=f_y; \end{aligned} \tag{50.11}$$

следовательно, уравнение касательной плоскости в этом случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$z-z_0=(x-x_0)\,f_x+(y-y_0)\,f_y, \tag{50.12}$$

где через f_x и f_y для краткости обозначены частные производные $f_x(x, y)$ и $f_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Из этой формулы следует, что два определения касательной плоскости для поверхности с явным представлением (50.10), данные в настоящем пункте и ранее в п. 20.5, эквивалентны. В самом

деле, оба определения приводят к одному и тому же уравнению (50.12).

Определение 14. *Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется нормальной прямой к поверхности в указанной точке.*

Ее уравнение в общем случае в неособой точке поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

В случае явного представления (50.10) эти уравнения принимают вид

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = -(z-z_0). \qquad (50.13)$$

Определение 15. *Всякий ненулевой вектор, коллинеарный нормальной прямой, проходящей через данную точку поверхности, называется нормалью к этой поверхности в указанной точке.*

Примером нормали в неособой точке поверхности является векторное произведение

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v,$$

вычисленное в рассматриваемой точке.

Согласно данному определению, в каждой неособой (при заданном представлении) точке $r(u, v)$ рассматриваемой поверхности при фиксированных значениях параметров u и v существует, и притом единственная, нормальная прямая. Следует иметь в виду, что если точка P пространства является кратной точкой поверхности, т. е. существует по крайней мере две пары параметров (при заданном представлении) (u_1, v_1) и (u_2, v_2) таких, что $P = r(u_1, v_2) = r(u_2, v_2)$, то может, конечно, случиться, что этим парам параметров будут соответствовать различные нормальные прямые, тем самым в указанной точке P нормальная прямая будет не единственна.

Для поверхности, заданной неявно уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, и в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y + (z-z_0)F_z = 0,$$

где F_x, F_y и F_z обозначают значения соответствующих частных производных, взятых в точке (x_0, y_0, z_0).

Вспомнив, что вектор с координатами F_x, F_y, F_z, т. е. вектор $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ называется *градиентом функции* F (см. п. 20.6), видим, что градиент функции в данной точке поверхности $F(x, y, z)=0$ перпендикулярен касательной плоскости в этой точке, т. е. коллинеарен нормальной прямой.

Поэтому уравнение нормальной прямой к поверхности имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}.$$

Все эти формулы сразу следуют из (50.12) и (50.13). Действительно, если, например, $F_z\neq 0$ и $z=f(x, y)$ — функция, определяемая уравнением $F=0$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то достаточно заметить, что $f_x=-\frac{F_x}{F_z}$, $f_y=-\frac{F_y}{F_z}$ (см. п. 41.1).

Если функция $F(x, y, z)$ задана и непрерывно дифференцируема в области G, то для любой точки поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z)=c$ (c — постоянная), получим уравнение касательной плоскости и нормальной прямой того же вида, что и в случае $F=0$, если только в этой точке $F_x^2+F_y^2+F_z^2>0$. Множество точек $(x, y, z)\in G$, для которых $F=c$, называется, как мы знаем, поверхностью уровня функции F (см. п. 19.1).

Таким образом, градиент $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности уровня $F(x, y, z)=c$ направлен по нормальной прямой к этой поверхности в точке (x_0, y_0, z_0). Иначе говоря, градиент функции ортогонален к поверхности уровня (т. е. перпендикулярен касательной плоскости к поверхности уровня в рассматриваемой точке).

Мы доказали существование касательной плоскости в неособой точке у непрерывно дифференцируемой поверхности при фиксированном ее представлении. Возникает вопрос: что будет, если перейти к другому представлению этой поверхности? Прежде всего, останется ли неособая точка неособой, а особая — особой? Оказывается, что да.

Докажем это. Пусть $\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, и $\boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1)\in\bar{D}_1$, суть два представления одной и той же непрерывно дифференцируемой поверхности. Поскольку переход от любого представления непрерывно дифференцируемой поверхности к другому ее представлению осуществляется посредством регулярного отображения, то существует такое регулярное отображение

$$\begin{aligned} u_1&=\varphi(u, v),\\ v_1&=\psi(u, v)\end{aligned}\qquad(50.14)$$

замкнутой области $\bar{D}$ на замкнутую область $\bar{D}_1$, что для всех точек $(u, v)\in\bar{D}$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}(u, v)=\boldsymbol{\rho}[\varphi(u, v), \psi(u, v)].\qquad(50.15)$$

При этом, как было доказано, якобиан отображения (50.14) не равен нулю нигде в замкнутой области $\bar{D}$:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \bar{D}.$$

Продифференцировав тождество (50.15), получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}. \end{aligned} \tag{50.16}$$

Следовательно, пара векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ преобразуется в пару векторов $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ с помощью невырожденной матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_v \\ \varphi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Поэтому для данной точки (u, v) векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ будут линейно независимыми тогда и только тогда, когда будут линейно независимыми векторы $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$, $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в точке (u_1, v_1), получающейся из точки (u, v) с помощью преобразования (50.14), причем в случае их линейной независимости плоскость векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ и плоскость векторов $\boldsymbol{\rho}_{u_1}$ и $\boldsymbol{\rho}_{v_1}$ совпадают.

Итак, *неособая (особая) при данном представлении точка непрерывно дифференцируемой поверхности будет неособой (особой) и при любом другом представлении этой поверхности, а плоскость, касательная к поверхности в неособой точке при одном представлении поверхности, будет касательной и при другом ее представлении.*

Определение 16. *Непрерывно дифференцируемая поверхность, у которой нет особых точек, называется гладкой поверхностью.*

В силу доказанного выше, чтобы проверить, что данная поверхность является гладкой, достаточно убедиться, что у нее имеется одно непрерывно дифференцируемое представление и при этом представлении нет особых точек.

Следует обратить внимание на то, что у гладкой поверхности $S = \{\boldsymbol{r}(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ векторные функции $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не только непрерывны на замыкании области D, но согласно определению и неколлинеарны на этом замыкании $\bar{D}$. Иначе говоря, у гладкой поверхности (50.7) всюду на замкнутой области $\bar{D}$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0.$$

Замечание. Из формул (50.16) следует, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (\varphi_u \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_u \boldsymbol{\rho}_{v_1}) \times (\varphi_v \boldsymbol{\rho}_{u_1} + \psi_v \boldsymbol{\rho}_{v_1}) = \varphi_u \psi_v (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}) + \\ + \psi_u \varphi_v (\boldsymbol{\rho}_{v_1} \times \boldsymbol{\rho}_{u_1}) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}). \end{aligned}$$

Поскольку при допустимых преобразованиях параметров (50.14) якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ нигде в $\bar{D}$ не обращается в ноль, то из полученной формулы следует, что векторные произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{\rho}_{u_1} \times \boldsymbol{\rho}_{v_1}$ в данной точке поверхности могут обращаться в ноль только одновременно. Но было показано, что необходимым и достаточным условием того, что данная точка поверхности при данном представлении поверхности $\boldsymbol{r}(u, v)$ — неособая, является неравенство нулю в этой точке векторного произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$. Тем самым еще раз доказано, что неособая (особая) точка поверхности при одном представлении поверхности будет такой же и при другом ее представлении.

Упражнения. 3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x=2u-v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3-v^3$ в точке $M(3; 5; 7)$.

4. К поверхности $xyz=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x+y+z-a=0$ ($a=\text{const}$).

5. Доказать, что все касательные плоскости поверхности $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ (f — произвольная дифференцируемая функция) проходят через начало координат.

6. Доказать, что все касательные плоскости, проведенные к поверхности $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=au+f(v)$ ($a=\text{const}$, f — произвольная дифференцируемая функция) в любой точке ее координатной линии $v=c$ ($c=\text{const}$), проходят через фиксированную прямую.

50.5 ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Зафиксируем какое-либо представление $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ данной гладкой поверхности и рассмотрим касательную к ней плоскость в некоторой ее точке. Как мы видели, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ образуют в этой плоскости базис. Векторы, лежащие в касательной плоскости, будем обозначать символом $d\boldsymbol{r}$, а их координаты относительно базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — через du и dv *). Таким образом

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\,du+\boldsymbol{r}_v\,dv.$$

Найдем квадрат длины вектора, лежащего в касательной плоскости, выраженный через координаты естественного базиса $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ (в линейной алгебре это выражение обычно называется *основной метрической формой* рассматриваемого пространства, в данном случае плоскости):

$$|d\boldsymbol{r}|^2=(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)^2=\boldsymbol{r}_u^2 du^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v du\,dv+\boldsymbol{r}_v^2 dv^2.$$

Введем обозначения

$$E=\boldsymbol{r}_u^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2; \tag{50.17}$$

*) Это обозначение естественно, ибо если вектор в касательной плоскости является касательным к некоторой кривой (50.8) на поверхности, то при соответствующем выборе параметра вектор $d\boldsymbol{r}$ будет являться дифференциалом вектора (50.8) и, следовательно, для него будет выполняться равенство (50.9).

тогда

$$|d\boldsymbol{r}^2| = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{50.18}$$

Определение 17. *Квадратичная форма* $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ *называется первой квадратичной формой поверхности* *).

Посмотрим, как она меняется при переходе к другому представлению поверхности (см. формулы (50.14)). Как известно (см. (50.16)), при этом базисы в рассматриваемой плоскости преобразуются с помощью матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, координаты векторов преобразуются с помощью транспонированной матрицы, т. е. матрицы Якоби

$$J = \begin{Vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Если матрицу первой квадратичной формы (50.18) при представлении поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ обозначить через A, а при представлении $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u_1, v_1)$ — через A_1, т. е.

$$A = \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}, \quad E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad G = \boldsymbol{r}_v^2,$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \rho_{u_1}^2, \quad F_1 = \rho_{u_1}\rho_{v_1}, \quad G_1 = \rho_{v_1}^2,$$

то, как известно из курса линейной алгебры, для первой квадратичной формы поверхности, как и вообще для всякой квадратичной формы,

$$A = J^* A_1 J,$$

где через J^* обозначена матрица, транспонированная с матрицей Якоби J.

Отсюда для соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

или

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \right|^2. \tag{50.19}$$

*) То, что рассматриваемая квадратичная форма называется первой, объясняется тем, что существуют другие квадратичные формы, связанные с поверхностью. Их изучение не входит в задачу настоящего курса.

Заметим, что по самому своему определению первая квадратичная форма положительно определенна (действительно, если $du^2+dv^2>0$, т. е. $d\boldsymbol{r}\not\equiv 0$, то $|d\boldsymbol{r}|^2>0$), а поэтому ее дискриминант положителен: $EG-F^2>0$. В силу же отсутствия особых точек выполняются неравенства $\boldsymbol{r}_u\neq 0$, $\boldsymbol{r}_v\neq 0$, а поэтому из определения коэффициентов E и G (50.17) непосредственно следует, что $E>0$ и $G>0$.

Если известна первая квадратичная форма поверхности, то можно, даже не располагая уравнением поверхности и не зная ее формы, решать целый ряд относящихся к ней задач, например находить длины лежащих на ней кривых и углы между ними, вычислять площадь частей поверхности. Совокупность всех свойств поверхности, которые можно установить, исходя из одной лишь первой квадратичной формы, называется внутренней геометрией поверхности. К рассмотрению подобных задач мы и перейдем.

Упражнения. 7. Какая из следующих квадратичных форм может служить первой квадратичной формой некоторой поверхности: а) $du^2+3du\,dv+dv^2$; б) $du^2+6du\,dv+9dv^2$; в) $du^2-6du\,dv+13dv^2$; г) $du^2+2du\,dv-dv^2$.

8. Найти первую квадратичную форму *геликоида* (винтовой поверхности) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av+f(u)$ ($a=\text{const}$, f — произвольная дифференцируемая функция).

9. Доказать, что первая квадратичная форма поверхности вращения приводима к виду $du^2+G(u)\,dv^2$.

50.6. КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИХ ДЛИН И УГЛОВ МЕЖДУ НИМИ

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую кривую (50.8), лежащую на данной поверхности (50.7). Предположим, что отсчет длины дуг $s=s(t)$ на ней производится в направлении возрастания параметра, т. е. что $\frac{ds}{dt}>0$. Как известно (см. п. 16.5), $\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$, откуда $ds=|d\boldsymbol{r}|$, следовательно, см. (50.18),

$$ds^2=|d\boldsymbol{r}|^2=d\boldsymbol{r}^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

поэтому

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Таким образом, для длины L кривой (50.8) получаем формулу

$$L=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Перейдем теперь к вычислению углов между кривыми на поверхности.

Определение 18. *Если две кривые пересекаются в некоторой точке, то углом между ними в этой точке называется угол,*

образованный их касательными в указанной точке (если, конечно, эти касательные существуют).

Пусть две гладкие кривые, лежащие на рассматриваемой поверхности, пересекаются в некоторой точке. Обозначим дифференциалы их представлений в этой точке соответственно через $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, а коэффициенты разложений по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — соответственно через du, dv и δu, δv; тогда

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv,$$
$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, \delta u + \boldsymbol{r}_v\, \delta v.$$

Поэтому если φ — искомый угол между кривыми, т. е. между векторами $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$, то

$$\cos\varphi = \frac{d\boldsymbol{r}\,\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|} = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Упражнения. 10. Доказать, что для того, чтобы координатные u- и v-линии на поверхности были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы всюду на поверхности выполнялось равенство $F = 0$.

11. На поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + dv^2$ найти угол между кривыми $v = 2u$, $v = -2u$.

50.7. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть непрерывно дифференцируемое представление $\boldsymbol{r}(u, v)$ рассматриваемой гладкой поверхности S определено на замыкании $\bar{D}$ квадрируемой области D. Рассмотрим разбиение T_k плоскости переменных u и v на квадраты некоторого ранга k. Поскольку из квадрируемости области следует ее ограниченность, то замкнутая область $\bar{D}$ окажется покрытой конечным числом квадратов ранга k. Пронумеруем каким-либо образом все непустые пересечения этих квадратов с замкнутой областью $\bar{D}$ и обозначим их через E_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Тогда

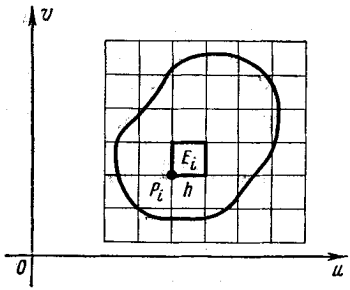


Рис. 202

$$\tau = \{E_i : E_i = Q \cap \bar{D} \neq \varnothing,\ Q \in T_k\}$$

образует разбиение замкнутой области $\bar{D}$ (определение разбиения см. в п. 44.3).

Рассмотрим множества E_i, которые представляют собой полные замкнутые квадраты, лежащие в области D (при достаточно малой мелкости разбиения τ такие непустые множества E_i всегда существуют; почему?). Совокупность всех указанных множеств E_i обозначим через $\tau(\partial D)$ (ср. с п. 44.4).

Возьмем какой-либо квадрат $E_i \in \tau(\partial D)$ (рис. 202). Пусть длина его стороны равна h, а P_i — одна из его вершин. Тогда