

при переходе от вершины P_i к соседним вершинам радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем h , получит приращения, равные по абсолютной величине соответственно числам $|\mathbf{r}_u h|$ и $|\mathbf{r}_v h|$ ибо

$$\mathbf{r}(u+h, v) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_u h + o(h),$$

$$\mathbf{r}(u, v+h) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_v h + o(h).$$

При определении площади поверхности будем образы квадратов $E_i \in \tau(\partial D)$ заменять прямолинейными параллелограммами, построеными на векторах $\mathbf{r}_u h$ и $\mathbf{r}_v h$ (рис. 203). Найдем площадь такого параллелограмма. Обозначив ее через $\Delta\sigma_i$, получим

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_i &= |\mathbf{r}_u h \times \mathbf{r}_v h|_{P_i} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{P_i} h^2 = \\ &= |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{P_i} \mu E_i.\end{aligned}$$

Функции \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v непрерывны на замкнутой квадрируемой области D ; поэтому

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv,$$

(50.20)

где δ_τ , как всегда, обозначает мелкость разбиения τ . Очевидно, условие, что мелкость разбиения δ_τ стремится к нулю, равносильно тому, что ранги k квадрильяжей плоскости, из которых мы исходили, стремятся к бесконечности.

Для доказательства справедливости равенства (50.20) достаточно заметить, что при произвольном выборе точек $P_i \in E_i \in \tau$, $i = 1, 2, \dots$, справедливо равенство

$$\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{l_0} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|_{P_i} \mu E_i = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Действительно, во-первых, предел интегральных сумм интегрируемой функции не зависит от выбора в данном случае точек $P_i \in E_i \in \tau$, а, во-вторых, выбрасывание из интегральных сумм слагаемых, соответствующих множествам $E_i \in \tau$, не входящих в $\tau(\partial D)$, не влияет, как известно (см. п. 44.3), на величину предела интегральных сумм, в нашем случае — на величину предела (50.20).

Определение 19. Предел (50.20) называется *площадью или мерой* μS *поверхности* S :

$$\mu S = \lim_{\sigma_\tau \rightarrow 0} \sum_{E_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i.$$

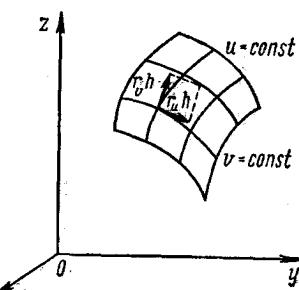


Рис. 203

Для вычисления площади поверхности из (50.20) непосредственно получается формула

$$\mu S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \quad (50.21)$$

Запишем ее в другом виде, выразив подынтегральное выражение через коэффициенты первой квадратичной формы. Прежде всего заметим, что для любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} справедливы формулы

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \hat{\mathbf{ab}},$$

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \hat{\mathbf{ab}},$$

где $\hat{\mathbf{ab}}$ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Возведем в квадрат и сложим эти формулы:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{ab}|^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2.$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2, \quad (50.22)$$

поэтому формула (50.21) может быть записана также в виде

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (50.23)$$

Иногда для краткости записи выражение $\sqrt{EG - F^2} du dv$ обозначается символом dS :

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv; \quad (50.24)$$

и называется элементом площади. Применяя это обозначение, формулу (50.23) можно переписать в виде

$$\mu S = \iint_D dS.$$

Покажем, что величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления (при этом рассматриваются только представления, заданные на замкнутых квадрируемых областях). Перейдем к другому представлению $\rho = \rho(u_1, v_1)$ данной непрерывно дифференцируемой поверхности, которое задано на замыкании D_1 квадрируемой области D_1 и, следовательно, для которого преобразование (50.14) параметров u, v в параметры u_1, v_1 является регулярным отображением D на D_1 .

В новой системе координат рассмотрим интеграл

$$\mu S = \iint_{D_1} \sqrt{F_1 G_1 - F_1^2} du_1 dv_1.$$

Для сравнения его с интегралом (50.23) выполним замену переменных (50.14), что возможно, так как все предпосылки теоремы 2' п. 46.2 в данном случае выполнены. Используя (50.19), получим

$$\begin{aligned}\mu S_1 &= \iint_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} du_1 dv_1 = \\ &= \iint_D \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \mu S.\end{aligned}$$

Таким образом, действительно, величина площади поверхности не зависит от выбора ее представления.

Найдем выражение для площади поверхности, имеющей явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. В этом случае $u = x$, $v = y$, $r = (x, y, f(x, y))$ и, следовательно (см. формулы (50.11)),

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, f_y), \\ E = \mathbf{r}_u^2 &= 1 + f_x^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = f_x f_y, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1 + f_y^2, \\ EG - F^2 &= (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2; \quad (50.25) \\ \mu S &= \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.\end{aligned}$$

Упражнение 12. Доказать, что площадь поверхности вращения, определенная в п. 32.4, совпадает с площадью этой поверхности, определенной в настоящем пункте.

13. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника, лежащего на поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ и ограниченного дугами кривых $u = \frac{1}{2}av^2$, $u = -\frac{1}{2}av^2$, $v = 1$ ($a = \text{const} > 0$).

14. Найти площадь криволинейного четырехугольника, лежащего на геликоиде $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = au$ ($a = \text{const}$) и ограниченного дугами кривых $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

15. На поверхности с первой квадратичной формой $du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ расположена криволинейный треугольник, ограниченный дугами кривых $u = av$, $u = -av$, $v = 1$. Найти его площадь.

50.8. ОРИЕНТАЦИЯ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В этом параграфе будем предполагать, что в пространстве выбирается всегда правая система координат. Это означает следующее. Пусть \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} — единичные орты координатных осей. Если смотреть из конца вектора \mathbf{k} на плоскость xOy , то вектор \mathbf{i} надо повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, чтобы он совпал с вектором \mathbf{j} . В этом случае говорят также, что упорядоченная тройка векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} согласована по «правилу штопора». Аналитически это означает, что в пространстве точек (x, y, z) рассматриваются только такие упорядоченные базисы \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 ,

которые получаются из упорядоченного базиса $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$, $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ с помощью матриц, имеющих положительный определитель (точнее, равный +1). Таким образом, если

$$\mathbf{e}_m = c_{m1}\mathbf{i} + c_{m2}\mathbf{j} + c_{m3}\mathbf{k}, \quad m = 1, 2, 3,$$

является базисом, задающим правую систему координат, то

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

Все определения и понятия, связанные с координатами, вводимые ниже в этом параграфе, даются применительно к правым системам координат.

Пусть S — гладкая поверхность (см. определение 16). Тогда всякое ее векторное представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, непрерывно дифференцируемо и $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ на замкнутой области \bar{D} .

Следовательно, в каждой точке поверхности S определен нормальный единичный вектор

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}, \quad (50.26)$$

являющийся непрерывной функцией на \bar{D} . Кратко это обстоятельство выражают, говоря, что на поверхности S существует непрерывная единичная нормаль.

Определение 20. Всякая непрерывная единичная нормаль $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, гладкой поверхности $S = \{\mathbf{r}(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$ называется ориентацией поверхности S .

Очевидно, что если вектор \mathbf{v} является ориентацией поверхности S , то и вектор $-\mathbf{v}$ также является ориентацией той же поверхности, и легко показать, что других ориентаций нет.

Упражнение 16. Доказать, что поверхность может иметь только две ориентации.

Одна из двух ориентаций \mathbf{v} или $-\mathbf{v}$ (произвольно выбранная) называется *положительной*, а другая — *отрицательной*.

Таким образом, понятие положительности и отрицательности ориентации в этом смысле не определяется однозначно самой поверхностью, а зависит от выбора ее представления. Положительная и отрицательная ориентации поверхности называются *противоположными* ориентациями этой поверхности.

Для определенности в дальнейшем для гладкой поверхности, заданной фиксированным векторным представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ за положительную ориентацию будем принимать всегда вектор (50.26).

Подчеркнем, что непрерывность нормали \mathbf{v} рассматривается относительно переменных u, v , а не относительно пространственных координат x, y, z .

ных переменных x, y и z . Если поверхность имеет кратные точки, то может случиться, что в точке пространства, являющейся носителем разных точек поверхности может оказаться несколько различных нормалей.

Чтобы при регулярном преобразовании параметров u, v у поверхности сохранялась ориентация, необходимо дополнительно потребовать, чтобы якобиан этого преобразования был положительным. Действительно, для преобразования параметров

$$u_1 = \varphi(u, v),$$

$$v_1 = \psi(u, v)$$

из формул (50.16), как мы видели (см. замечание в конце п. 50.4) следует, что

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}),$$

и, следовательно, если якобиан $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ положителен, то векторы $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ и $\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}$ направлены в одну и ту же сторону, а если он отрицателен, то в противоположные.

Таким образом, для поверхностей, у которых выбрана ориентация, допустимыми преобразованиями будем считать такие непрерывно дифференцируемые преобразования, у которых якобиан положителен.

Поверхность S с положительной ориентацией будем обозначать через S^+ , а с отрицательной — через S^- .

Подчеркнем, что всякая гладкая параметрическая заданная поверхность всегда ориентируема, т. е. у нее всегда существует ориентация.

Определение 21. Поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется ориентированной.

Данное выше определение ориентации, разумеется, не переносится на негладкие поверхности. Примером поверхности, не дифференцируемой в одной точке, на которой уже нельзя выбрать непрерывную нормаль, является конус:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2. \quad (50.27)$$

В этом случае векторное представление имеет вид:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),$$

следовательно,

$$\mathbf{r}_x = \left(1; 0; \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \mathbf{r}_y = \left(0; 1; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right);$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1\right); \quad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{2}.$$

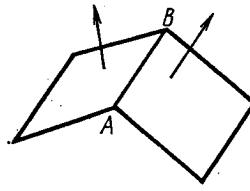
Поскольку пределы $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ не существуют (почему?), то и единичная нормаль

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, -\frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

не имеет предела при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Поэтому на конусе (50.27) нельзя выбрать нормаль, непрерывную на $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Простым примером негладкой поверхности S , на которой существует целая линия, вдоль которой нормали при любом их выборе терпят разрыв, является часть двугранного угла, изображенная на рис. 204. Указанной линией на этой поверхности является отрезок AB .

Рис. 204



Данное выше определение параметрически заданной непрерывной поверхности не охватывает все то, что интуитивно входит в понятие поверхности. Так, можно показать, что поверхность шара не является носителем какой-либо непрерывной параметрически заданной поверхности без кратных точек. Считать же, что поверхность шара имеет кратные точки, представляется неоправданным усложнением. Существуют различные пути для преодоления этого неудобства. Мы выберем путь, основанный на склеивании конечного числа поверхностей. Склейивание поверхностей естественным образом возникает при рассмотрении самых простых задач. Например, боковую поверхность цилиндра естественно рассматривать как результат склеивания противоположных сторон прямоугольника, полную поверхность цилиндра как результат склеивания его боковой поверхности и двух оснований, поверхность конуса как результат склеивания его боковой поверхности с основанием и т. д.

Перейдем к точным определениям. Будем говорить, что у поверхности $S = \{r = r(u, v); (u, v) \in D\}$ ее край (см. п. 50.1) является кривой, если граница ∂D области D является кривой (точнее, носителем кривой):

$$\partial D = \{u(t), v(t); a \leq t \leq b\}.$$

В этом случае край ∂S поверхности S можно также рассматривать как кривую:

$$\partial S = \{r(u(t), v(t)); a \leq t \leq b\}.$$

Мы определим операцию склеивания поверхностей для поверхностей, края которых являются кривыми.

Пусть заданы поверхности $S_i = \{r_i(u_i, v_i); (u_i, v_i) \in D_i\}$, края ∂S_i которых суть кривые, т. е. границы ∂D_i областей D_i являются кривыми:

$$u_i = u_i(t_i), \quad v_i = v_i(t_i), \quad a_i \leq t_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда края поверхностей ∂S_i будут представлять собой кривые

$$\gamma_i = \{r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)); a_i \leq t_i \leq b_i\}.$$

Пусть для некоторых пар (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j$, задано конечное число отрезков $[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \subset [a_i, b_i]$, $a_{ij}^k \leq b_{ij}^k$, и отрезков $[a_{ji}^k, b_{ji}^k] \subset [a_j, b_j]$, $a_{ji}^k \leq b_{ji}^k$, $k = 1, 2, \dots, n_{ij} = n_{ji}$, причем как отрезки $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$, так и отрезки $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$ попарно не имеют общих внутренних точек, а также гомеоморфизмы $\phi_{ij}^k : [a_{ij}^k, b_{ij}^k] \rightarrow [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$, называемые склеивающими гомеоморфизмами. При этом для любого $t_i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ имеет место «склейивание»:

$$r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)) = r_j(u_j(\phi_{ij}^k(t_i)), v_j(\phi_{ij}^k(t_i))). \quad (50.28)$$

Обозначим через γ_{ij}^k кривую с представлением

$$r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)), \quad t \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k].$$

Кривые γ_{ij}^k называются *кривыми склейки* или *кривыми, по которым производится склейивание*.

Очевидно, что в силу (50.28) отображение

$$r = r_j(u_j(t_j), v_j(t_j)), \quad t_j \in [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$$

также является представлением кривой γ_{ij}^k , ибо гомеоморфизмы ϕ_{ij}^k представляют собой допустимое преобразование параметра для кривой γ_{ij}^k .

Будем предполагать кроме того, что при $j' \neq j$ отрезки

$$[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \text{ и } [a_{ij'}^l, b_{ij'}^l], \quad k = 1, 2, \dots, n_{ij}, \quad l = 1, 2, \dots, n_{ij'}$$

не имеют общих внутренних точек, а следовательно, каждый конец отрезка $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ может принадлежать еще не более чем одному отрезку $[a_{ij'}^l, b_{ij'}^l]$. Это условие означает, что каждая кривая склейки γ_{ij}^k является частью только двух кривых γ_i и γ_j , образующих края поверхностей S_i и S_j .

Поверхности S_i и S_j называются *соседними*, если они склеиваются по крайней мере по одной кривой γ_{ij}^k . Система склеивающих гомеоморфизмов ϕ_{ij}^k называется *связной*, если для любых поверхностей S_p и S_q из рассматриваемой системы в ней существуют такие поверхности $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$, что $S_{i_1} = S_p$, $S_{i_r} = S_q$, и каждая поверхность S_{i_v} является соседней с $S_{i_{v+1}}$, т. е. склеена

с ней по одной или нескольким кривым с помощью соответствующих склеивающих гомеоморфизмов $\varphi_{i,v}, v = 1, 2, \dots, r - 1$.

Определение 22. Система поверхностей S_1, S_2, \dots, S_m со связной системой склеивающих гомеоморфизмов φ_{ij}^k называется поверхностью, склеенной из поверхностей S_1, \dots, S_m по кривым γ_{ij}^k и обозначается через $S = \{S_i\}$.

Это определение, несмотря на свою формальную громоздкость, имеет, очевидно, простой геометрический смысл. Образно говоря, склеенная поверхность $S = \{S_i\}$ представляет собой поверхности S_1, \dots, S_m , у некоторых пар которых S_i, S_j отождествлены (склеены) точки, лежащие на кривых γ_{ij}^k и отображающиеся друг в друга при гомеоморфизмах φ_{ij}^k — в этом и состоит условие склеивания (50.28). Безусловно, как отмечалось, кроме того предполагается, что от каждой поверхности S_i можно через конечное число шагов перейти к любой другой поверхности S_j , переходя каждый раз с некоторой поверхности на одну из соседних с ней.

Если $S = \{S_i\}$ — склеенная поверхность, то совокупность всех дуг, являющихся такими частями кривых ∂S_i , что никакие точки этих частей, кроме, быть может, концевых, не склеиваются ни с какими точками других кривых ∂S_i , называется краем ∂S склеенной поверхности S .

Можно показать, что объединяя соответствующим образом указанные части кривых ∂S_i , принадлежащие краю ∂S поверхности $S = \{S_i\}$, можно получить конечное число замкнутых кривых (контуров). Иначе говоря, край склеенной поверхности состоит из конечного числа замкнутых контуров.

Примером склеивания поверхностей может служить склеивание в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ двух полусфер $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, по их краю, т. е. по окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Задавая уравнение этой окружности в параметрическом виде

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0, 0 \leq t \leq 2\pi$$

в качестве склеивающего гомеоморфизма $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ можно взять тождественное отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на себя.

С помощью склеивания гладких поверхностей можно определить понятие кусочно-гладкой поверхности.

Определение 23. Поверхность $S = \{S_i\}$, склеенная из гладких поверхностей S_1, \dots, S_m , называется кусочно-гладкой поверхностью.

Поверхность кругового цилиндра, поверхность параллелепипеда, дают примеры кусочно-гладких поверхностей. Прямой же круговой конус (50.27) нельзя разбить на конечное число склеенных гладких частей, поэтому он не является кусочно-гладкой поверхностью в смысле определения 23. Можно обобщить операцию склеивания поверхностей таким образом, что при формальном сохранении определения кусочно-гладких поверхностей для такой

обобщенной операции склеивания в класс кусочно-гладких поверхностей попадут уже и конические поверхности. Мы не будем на этом останавливаться и предоставим проделать это в случае необходимости самому читателю.

50.10. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ И НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Очередной нашей задачей является определение понятия ориентации для поверхностей, склеенных из параметрически заданных поверхностей.

Определение ориентации с помощью выбора непрерывной единичной нормали на поверхности оказывается в этом случае неудобным даже при отсутствии кратных точек и понимании непрерывности нормали, как ее непрерывной зависимости от точек пространства (а не параметров склеиваемых поверхностей). Это связано с возможным нарушением гладкости поверхности на кривых, по которым происходит склеивание.

Например, часть поверхности двугранного угла, изображенную на рис. 204, можно рассматривать как результат склеивания двух равных прямоугольников. Если стремиться по разным граням к одной и той же точке на ребре этого угла, то пределы соответствующих единичных нормалей получатся разные. Ниже будет дано такое определение ориентируемой поверхности, при котором указанная поверхность будет ориентируемой.

Отметим, что при склеивании поверхностей даже «гладким образом» (т. е. когда для любой кривой, по которой произведено склеивание, в каждой ее точке можно так выбрать единичную нормаль, что она будет пределом соответствующим образом выбранных в окрестности этой точки единичных нормалей двух склеивающихся поверхностей) у склеенных поверхностей могут возникнуть качественно новые особенности: в отличие от параметрически заданных поверхностей в этом случае не всегда на всей поверхности можно выбрать непрерывную единичную нормаль. Примером такой поверхности является так называемый лист Мёбиуса*. Его можно получить, взяв прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, один раз перекрутив ее вокруг оси симметрии MN , параллельной сторонам BC и AD и склеив ребро AB с CD (рис. 205). Правда, при таком способе образования листа Мёбиуса получается в результате склеивания поверхности самой с собой. Однако нетрудно получить его и склеиванием, описанным в определении 22, двух прямоугольников $ABEF$ и $FECD$ (см. рис. 205).

Одной из характерных особенностей листа Мёбиуса является то, что у него имеется лишь одна «сторона»: его невозможно, как например боковую поверхность цилиндра, покрасить, скажем, с одной стороны красной, а с другой синей краской. Кроме того,

* А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

на листе Мёбиуса нельзя выбрать единичную нормаль, которая являлась бы непрерывной функцией точки пространства.

Все приведенные соображения делают естественным попытаться дать такое определение ориентации поверхности, для которого поверхности, например, типа поверхности параллелепипеда оказались бы ориентированными, а поверхности типа листа Мёбиуса — неориентированными.

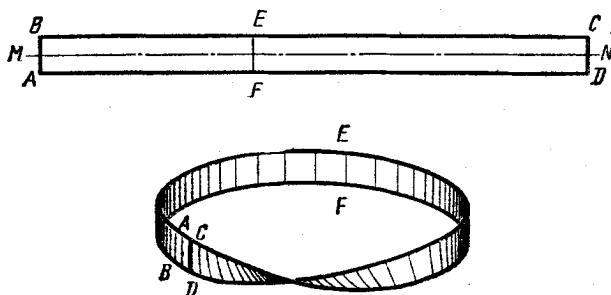


Рис. 205

Обратим внимание на то, что лист Мёбиуса может являться носителем параметрически заданной гладкой поверхности с кратными точками, и эта поверхность, как всякая гладкая параметрически заданная поверхность, будет ориентированной. Это, конечно, не имеет никакого отношения к неориентируемости самого листа Мёбиуса.

50.11. ВТОРОЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ОРИЕНТАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

Перейдем к описанию другого подхода к понятию ориентации, основанного на склеивании поверхностей, края которых суть кривые. Пусть $S = \{r = r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$ — гладкая поверхность, краем которой является кривая. Положительная ориентация кривой $\partial S = \{u(t), v(t); a \leq t \leq b\}$ (т. е. ориентация против часовой стрелки на плоскости u, v с правой системой координат) в силу отображения $r(u(t), v(t)), a \leq t \leq b$, порождает вполне определенную ориентацию края ∂S поверхности S . Эта ориентация края ∂S поверхности S называется согласованной с ориентацией

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

(см. определение 20) поверхности S .

Естественность этого определения можно пояснить следующим образом. Рассмотрим явно заданную поверхность $S: z = f(x, y)$,

$(x, y) \in \bar{D}$. Для нее (см. (50.10), (50.11) и (50.26))

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right).$$

Следовательно, $\cos \hat{\mathbf{v}} \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0$, т. е. вектор нормали \mathbf{v} образует с осью Oz острый угол и поэтому согласован с положительной ориентацией края ∂S поверхности S по правилу штопора: ориентация контура ∂S соответствует направлению вращения ручки штопора, а направление нормали \mathbf{v} — движению самого штопора (рис. 206).

Очевидно, что если ориентация \mathbf{v} рассматриваемой гладкой поверхности S согласована с ориентацией ее края ∂S , то ориентация — \mathbf{v} согласована с противоположной ориентацией кривой ∂S . Таким образом, задание ориентации \mathbf{v} гладкой поверхности равносильно заданию ориентации кривой ∂S , являющейся ее краем. Поэтому ориентированный край ∂S гладкой поверхности S будем так же как и непрерывную единичную нормаль \mathbf{v} называть *ориентацией поверхности* S .

Для негладкой параметрически заданной поверхности, краем которой является контур, его ориентацию можно принять за исходное определение ориентации самой поверхности. Пусть S_1 и S_2 — две гладкие поверхности, у которых края суть кривые, и пусть эти две поверхности склеены (в смысле определения 22) по кривым $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, являющимся частями краев поверхностей S_1 и S_2 . Ориентации ∂S_1 и ∂S_2 поверхностей S_1 и S_2 называются *согласованными*, если каждая из них порождает на склеивающихся кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ противоположные ориентации.

Определение 24. Поверхность S , склеенная из поверхностей S_1, \dots, S_m называется *ориентируемой*, если существуют такие ориентации $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ краев поверхностей S_1, \dots, S_m , что для любых двух соседних поверхностей S_i и S_j их ориентации ∂S_i и ∂S_j согласованы.

Совокупность таких ориентаций, если она существует, называется *ориентацией поверхности* S .

Если указанной совокупности ориентаций ∂S_i не существует, то поверхность S называется *неориентируемой*.

Если $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ является ориентацией поверхности $S = \{S_i\}$, то совокупность противоположных ориентаций также является ориентацией поверхности S , называемой *противоположной данной*.

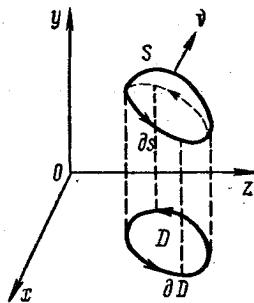


Рис. 206

Можно показать, что если поверхность S ориентируема, то никаких других ориентаций, кроме двух указанных, у нее нет. Одна из этих двух ориентаций (произвольно какая) обычно называется положительной, а другая — отрицательной.

Аналогично ранее рассмотренному в п. 50.8 случаю ориентируемая поверхность, у которой фиксирована одна из ее ориентаций, называется *ориентированной*. При этом та из ориентированных поверхностей, ориентация которой названа положительной, обозначается через S^+ , а противоположно ориентированная — через S^- .

Край ориентированной склеенной поверхности $S = \{S_i\}$, как край всякой склеенной поверхности, состоит, согласно сказанному выше, из конечного числа замкнутых контуров. Каждый из этих контуров в свою очередь представляет собой объединение конечного числа кривых, каждая из которых является частью одного из контуров ∂S_i , а именно такой частью, что все ее точки, кроме быть может концевых, не склеиваются с точками других краев ∂S_j . Поэтому заданная согласованная ориентация склеенной ориентируемой поверхности $S = \{S_i\}$ порождает определенные ориентации (т. е. порядки точек) на указанных кривых. Можно показать, что эти ориентации, вместе взятые, составляют ориентации всех контуров, входящих в край ∂S склеенной поверхности S . Совокупность этих ориентаций контуров, составляющих край ∂S поверхности S , называется *ориентацией этого края*, порожденной заданной ориентацией поверхности S , или, что то же, согласованной с ней.

Обратим внимание на то, что в определении 24 ориентации поверхности не предполагалось даже дифференцируемости склеиваемых поверхностей S_1, \dots, S_m .

Если поверхность S склеена из гладких поверхностей S_1, \dots, S_m , то для задания ее ориентации можно задать на каждой поверхности S_1, \dots, S_m непрерывные единичные нормали таким образом, чтобы согласованные с ними ориентации ∂S_i краев поверхностей S_i были согласованы между собой в смысле определения 24, т. е. являлись ориентацией поверхности S (см. рис. 207).

Для того, чтобы при таком задании ориентации узнать, совпадают или нет две ориентации, достаточно проверить это лишь в одной произвольной точке: если в ней нормали совпадают, то они совпадают и всюду, а если они в этой точке не совпадают, т. е. противоположны, то они и всюду противоположны, поскольку, как выше отмечалось, существуют только две ориентации заданной поверхности.

Однако в случае кусочно-гладкой поверхности уже нельзя ввести понятие положительной ориентации, используя заданные представления склеиваемых гладких поверхностей и бера на них единичные нормали по формуле (50.26), так как эти ориентации могут оказаться несогласованными. Поэтому в случае кусочно-гладких поверхностей следует всегда конкретно оговаривать, что

именно подразумевается в данном случае под ориентированными поверхностями S^+ и S^- заданной поверхности S .

Можно показать, что всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей некоторой области трехмерного пространства, ориентируема. При этом одна из ориентаций состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности в область — так называемые *внутренние нормали*, а другая состоит из единичных нормалей, направленных от поверхности наружу от области — так называемые *внешние нормали*. Примером такой поверхности является сфера. В качестве ее ориентации можно взять, например, единичные нормали, направленные по радиусу от точки сферы к центру (рис. 208).

Примером неориентируемой поверхности (в смысле определения 24) является лист Мёбиуса.

Иногда ориентируемые кусочно-гладкие поверхности называют также *двусторонними поверхностями*: они имеют две «стороны», соответствующие двум выборам единичных нормалей, задающим две ее ориентации. Соответственно неориентируемые поверхности называются *односторонними*. Оправдание этого термина было пояснено в п. 50.10 на примере листа Мёбиуса.

Мы не будем останавливаться на математизации всех описанных наглядных изображений и доказательстве высказанных утверждений. Это потребовало бы методов, изучение которых выходит за рамки настоящего курса. Упомянутые выше без доказательства общие утверждения по существу не используются в дальнейшем изложении. В каждом же конкретном случае, о котором будет идти речь, можно будет всегда непосредственно указать, какая именно ориентация рассматривается в данном случае.

Упражнение 17. Доказать, что прямой круговой цилиндр является кусочно-гладкой поверхностью без края.

18. Пусть заданы вектор τ и кривая $\gamma = \{\rho(u), a \leq u \leq b\}$. Цилиндрической поверхностью S с образующей γ и направляющей, параллельной вектору τ , называется поверхность, заданная представлением вида

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(u) + v\tau, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d.$$

Доказать, что если кривая γ — кусочно-гладкая, то и поверхность S кусочно-гладкая.

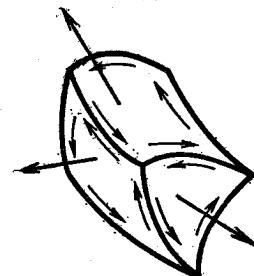


Рис. 207

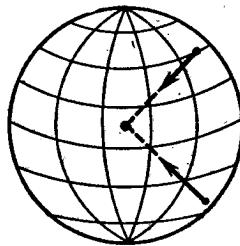


Рис. 208.

§ 51. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этом и следующих параграфах будут рассматриваться только поверхности, задаваемые параметрическими представлениями, и притом только гладкие (см. определение 16 в § 50) и кусочно-гладкие (см. определение 23 в § 50).

51.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть задана гладкая поверхность S , причем

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \\ = \{x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v); (u, v) \in \bar{D}\} \quad (51.1) \end{aligned}$$

— ее представление, точнее, непрерывно дифференцируемое представление без особых точек, D — квадрируемая плоская область и, как обычно, E , G и F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S . Пусть, далее, на множестве точек $r(u, v)$ поверхности S задана функция Φ , т. е. функция $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Иногда функцию Φ будем обозначать также через $\Phi(x, y, z)$ (ср. п. 47.1).

Определение 1. Интеграл $\iint_S \Phi(x, y, z) dS$ определяется равенством (см. (50.24))

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi(x, y, z) dS = \\ = \iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (51.2) \end{aligned}$$

Он называется *поверхностным интегралом первого рода*.

При определенных ограничениях, налагаемых на функцию Φ , интеграл (51.2) существует. Так, например, он существует для всякой непрерывной на гладкой поверхности $S = \{r(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ функции Φ , т. е. для непрерывной на замкнутой квадрируемой области \bar{D} функции $\Phi(r(u, v))$. В самом деле, в этом случае согласно определению 1 интеграл

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dS$$

сводится к интегралу от непрерывной на \bar{D} функции, который, как известно (см. п. 44.4), существует. Более общие условия существования поверхностного интеграла первого рода могут быть получены из соответствующих условий существования кратных интегралов (см. п. 44.4), примененных к интегралу, стоящему в правой части равенства (51.2).

Пусть для простоты функция Φ непрерывна на гладкой поверхности S и пусть $\rho = \rho(u_1, v_1) = (\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))$ — другое представление этой поверхности, которое задано на замы-

кании D_1 квадрируемой области \bar{D}_1 и для которого преобразование (50.14) параметров u, v в u_1, v_1 взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо на \bar{D} и имеет на \bar{D} не равный нулю якобиан. Если E_1, F_1 и G_1 суть коэффициенты первой квадратичной формы, соответствующие этому представлению, то

$$\begin{aligned} & \iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ & = \iint_{D_1} \Phi(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} du_1 dv_1. \quad (51.3) \end{aligned}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, выполнить замену переменных (50.14) и воспользоваться формулой (50.19). Таким образом, поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора представления поверхности. Поверхностные интегралы первого рода встречаются в различных вопросах математики и ее приложений. Например, площадь поверхности (см. п. 50.7) выражается с помощью поверхностного интеграла первого рода: если функция $\Phi(x, y, z)$ тождественно равна единице на поверхности S , то формула (51.2) превращается в формулу для площади μS поверхности S (см. (50.23)):

$$\mu S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_S dS.$$

Если $\Phi(x, y, z)$ — плотность некоторой массы, распределенной по поверхности S , то интеграл (51.2) дает величину массы всей поверхности.

Пусть теперь i, j и k — как обычно, единичные координатные векторы,

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} i + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} j + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} k \quad (51.4)$$

и

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} / |\mathbf{n}|, \quad (51.5)$$

причем, согласно нашим предположениям, нормаль \mathbf{v} непрерывно продолжаема на границу области D .

Поверхность S , на которой выбрана единичная нормаль \mathbf{v} , обозначим через S^+ , а ту же поверхность, на которой выбрана нормаль $-\mathbf{v}$, — через S^- (очевидно, \mathbf{v} и $-\mathbf{v}$ суть две ориентации поверхности S). Подчеркнем, что S^+ и S^- определяются самой поверхностью «с точностью до ориентации» и зависят от выбора представления поверхности.

Определение 2. Поверхностные интегралы

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy \quad \text{и} \quad \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy, \quad (51.6)$$

называемые *поверхностными интегралами второго рода* (при заданном представлении поверхности), определяются согласно формулам

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\hat{v}, \hat{k}) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(-\hat{v}, \hat{k}) dS,\end{aligned}\quad (51.7)$$

где (\hat{v}, \hat{k}) и $(-\hat{v}, \hat{k})$ — углы между векторами \mathbf{v} , \mathbf{k} и, соответственно, между $-\mathbf{v}$, \mathbf{k} .

За основу этого определения взято интуитивное соображение о том, что элемент площади dS данной поверхности (см. (50.24)), помноженный на косинус угла, который он «составляет» с плоскостью xOy , приближенно равен элементу площади $dx dy$ этой плоскости (рис. 209), как было бы, если бы речь шла о площадях плоской фигуры и ее проекции.

Интегралы (51.6) будем обозначать общим символом

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dx dy. \quad (51.8)$$

Так как $(\hat{v}, \hat{k}) + (-\hat{v}, \hat{k}) = \pi$ и, следовательно, $\cos(-\hat{v}, \hat{k}) = -\cos(\hat{v}, \hat{k})$, то из (51.7) получим

$$\begin{aligned}\iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy &= \\ &= - \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy.\end{aligned}\quad (51.9)$$

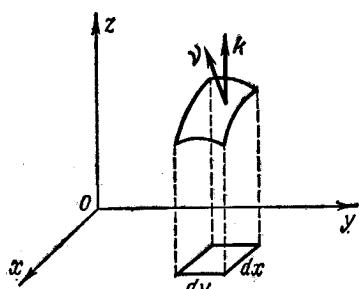


Рис. 209

Аналогично поверхностным интегралам первого рода, поверхностные интегралы второго рода заведомо существуют, если функция Φ непрерывна на поверхности S . Поскольку поверхностные интегралы первого рода не зависят от выбора представления поверхности, то поверхностные интегралы второго рода (51.6) не зависят от выбора представления ориентированной поверхности (иначе говоря, не зависят от выбора представления поверхности, сохраняющего ее заданную ориентацию), но, конечно (51.8), при данной поверхности S и данной функции Φ зависят, вообще говоря, от выбора непрерывной нормали \mathbf{v} на поверхности, т. е. от выбора ориентации поверхности (см. 51.9)).

Выведем формулы, удобные для вычисления поверхностных интегралов второго рода. Предварительно заметим, что из (51.4),

(51.5) и (50.22) следует, что

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}}, \mathbf{k}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}|} = \frac{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi(x, y, z) dx dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{k}) dS = \\ &= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \cos(\widehat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{k}) \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}} du dv. \end{aligned}$$

Таким образом, опуская у функций обозначения аргументов, имеем

$$\iint_{S^+} \Phi dx dy = \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \quad (51.10)$$

и, согласно (51.9),

$$\iint_{S^-} \Phi dx dy = - \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_D \Phi \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (51.11)$$

Иногда интеграл $\iint_{S^+} \Phi dx dy$ обозначается через $\iint_S \Phi dx dy$; в этом случае интеграл $\iint_{S^-} \Phi dx dy$ записывается в виде $\iint_S \Phi dy dx$.

Таким образом,

$$\iint_S \Phi dx dy = \iint_D \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

$$\iint_S \Phi dy dx = \iint_D \Phi \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Если поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, то формула (51.2) принимает вид (см. (50.25))

$$\iint_S \Phi(x, y, z) dS = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

а формулы (51.10) и (51.11) — вид:

$$\iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dx dy = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) dx dy,$$

$$\iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dx dy = - \iint_D \Phi(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

Здесь S^+ называется «верхней стороной поверхности S » (она соответствует положительной ориентации \mathbf{v} поверхности S при заданном ее представлении $z=f(x, y)$, а S^- — «нижней стороной поверхности S » (она соответствует отрицательной ориентации $-\mathbf{v}$). Эти названия объясняются тем обстоятельством, что в случае явного задания поверхности

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right),$$

поэтому

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0.$$

Отсюда видно, что угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{k} — острый, т. е. вектор \mathbf{v} направлен «вверх» от рассматриваемой поверхности (см. рис. 209).

Подобно определению (51.7) определяются и другие поверхностные интегралы второго рода:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dy dz &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\mathbf{v}, \mathbf{i}) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dy dz &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(-\mathbf{v}, \mathbf{i}) dS, \\ \iint_{S^+} \Phi(x, y, z) dz dx &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\mathbf{v}, \mathbf{j}) dS, \\ \iint_{S^-} \Phi(x, y, z) dz dx &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(-\mathbf{v}, \mathbf{j}) dS. \end{aligned} \quad (51.12)$$

Для этих интегралов аналогично проделанному выше получаем

$$\begin{aligned} \iint_{S^-} \Phi dy dz &= - \iint_{S^+} \Phi dy dz, \\ \iint_{S^-} \Phi dz dx &= - \iint_{S^+} \Phi dz dx, \\ \iint_{S^+} \Phi dy dz &= \iint_D \Phi \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv, \\ \iint_{S^+} \Phi dz dx &= \iint_D \Phi \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned} \quad (51.13)$$

Различные задачи, приводящие к понятию поверхностного интеграла второго рода, будут рассмотрены в § 52.

51.2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КАК ПРЕДЕЛЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Поверхностные интегралы могут быть получены также и как пределы соответствующих интегральных сумм. Пусть S — гладкая поверхность и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, — ее представление, D — квадрируемая область. Будем для простоты предполагать, что у области D существуют сколь угодно мелкие разбиения, элементы которых — квадрируемые области. Только такие разбиения и будут рассматриваться в настоящем пункте. Возьмем какое-либо из указанных разбиений $\tau = \{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{i_0}$ области D . Обозначим через S_i , $i = 1, \dots, i_0$, поверхность, задаваемую представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}_i$. Очевидно, что все S_i также гладкие поверхности (система $\tau_S = \{S_i\}_{i=1}^{i_0}$ называется *разбиением поверхности* S). Пусть функция $\Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ непрерывна на \bar{D} и $(u_i, v_i) \in \mathcal{D}_i$, $\Phi_i = \Phi(r(u_i, v_i))$. Обозначим через $\cos_i(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{k}})$ косинус угла между нормалью \mathbf{v} и ортом \mathbf{k} в точке $r(u_i, v_i)$ данной поверхности и положим

$$\sigma_{\tau}^{(1)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \mu S_i,$$

$$\sigma_{\tau}^{(2)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \cos_i(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{k}}) \mu S_i;$$

тогда

$$\lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau}^{(1)} = \iint_S \Phi(x, y, z) dS, \quad (51.14)$$

$$\lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} \sigma_{\tau}^{(2)} = \iint_S \Phi(x, y, z) dx dy, \quad (51.15)$$

где, как всегда, δ_{τ} — мелкость разбиения τ . Действительно,

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi(x, y, z) dS &= \iint_D \Phi(r(u, v)) \sqrt{FG - F^2} du dv = \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{\mathcal{D}_i} \Phi(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv; \end{aligned}$$

поскольку $\mu S_i = \iint_{\mathcal{D}_i} \sqrt{EG - F^2} du dv$, то

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau}^{(1)} &= \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \iint_{\mathcal{D}_i} \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} \iint_{\mathcal{D}_i} \Phi(r(u_i, v_i)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned}$$

Обозначив теперь через $\omega(\delta; \Phi)$ модуль непрерывности функции Φ на замкнутой области \bar{D} , будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \iint_S \Phi(x, y, z) dS - \sigma_{\tau}^{(1)} \right| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{t_0} \iint_{D_i} |\Phi(r(u, v)) - \Phi(r(u_i, v_i))| \sqrt{EG - F^2} du dv \leq \\ &\leq \omega(\delta_{\tau}, \Phi) \sum_{i=1}^{t_0} \mu S_i = \omega(\delta_{\tau}; \Phi) \mu S. \end{aligned}$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\delta_{\tau} \rightarrow 0$ и заметив, что $\lim_{\delta_{\tau} \rightarrow 0} \omega(\delta_{\tau}; \Phi) = 0$, получим формулу (51.14).

Аналогично доказывается формула (5.15) (произведение $\Phi \cos(\hat{v}, \hat{k})$ непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно на \bar{D}). Подобные утверждения справедливы и для интегралов второго рода других типов (15.12).

Упражнение 1. Доказать формулу (51.15).

51.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КУСОЧНО-ГЛАДКИМ ПОВЕРХНОСТИЯМ

Определим поверхностные интегралы по кусочно-гладким поверхностям.

Определение 3. Пусть $S = \{S_i\}_{i=1}^{t=k}$ кусочно-гладкая поверхность (см. определение 23 в п. 50.9) и $\Phi(x, y, z)$ — функция, определенная на множестве точек поверхности S . Тогда, по определению,

$$\iint_S \Phi dS = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \Phi dS_i. \quad (51.16)$$

Определение 4. Если кусочно-гладкая поверхность $S = \{S_i\}_{i=1}^{t=k}$ ориентируема и $S^+ = \{S_i^+\}_{i=1}^{t=k}$ — одна из соответствующих ей ориентированных поверхностей (обозначения см. в п. 50.11), то, по определению,

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \Phi dx dy &= \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} \Phi dx dy, \quad \iint_{S^+} \Phi dy dz = \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} \Phi dy dz, \\ \iint_{S^+} \Phi dz dx &= \sum_{i=1}^k \iint_{S_i^+} \Phi dz dx. \end{aligned} \quad (51.17)$$

Конечно, это определение содержательно только в том случае, когда интегралы, стоящие в правых частях равенств, существуют. Для этого, прежде всего, представления поверхностей S_i должны быть заданы на квадрируемых областях.

Аналогично в рассматриваемом случае определяются и интегралы по поверхности $S^- = \{S_i^-\}_{i=1}^{l=k}$.

Мы остановились только на тех свойствах поверхностных интегралов, которые связаны со спецификой их определения, с поверхностью, по которой, как говорят, производится интегрирование. Естественно, что, поскольку они сводятся к обычным кратным интегралам, на них переносятся и различные их свойства (линейность, интегральная теорема о среднем и т. п.).

З а м е ч а н и е. Условия, налагаемые на отображения, осуществляющие допустимые преобразования параметров для гладких поверхностей, сформулированные нами выше (см. определения 10 в п. 50.2 и 16 в п. 50.4), часто оказываются слишком жесткими (ср. с подобным обстоятельством для кривых в п. 47.3). Например, при таком подходе представления части шара единичного радиуса с центром в начале координат, лежащей в первом октанте:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{где } x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

и

$$x = r \cos \psi \cos \varphi, \quad y = r \cos \psi \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi,$$

где $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ не эквивалентны. Более того, первое представление не определяет в указанном смысле непрерывно дифференцируемую поверхность, поскольку частные производные функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ не ограничены в области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ и не могут быть непрерывно продолжены на ее замыкание \bar{D} . Поэтому естественно расширить определение непрерывно дифференцируемой поверхности. Сделаем это следующим образом.

Рассмотрим совокупность представлений $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, непрерывных на \bar{D} и непрерывно дифференцируемых на D . Допустимыми преобразованиями параметров $u = \varphi(u_1, v_1)$, $v = \psi(u_1, v_1)$ $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, будем называть всякое взаимно однозначное непрерывное отображение замыкания \bar{D}_1 плоской области D_1 на \bar{D} , переводящее внутренние точки во внутренние, граничные в граничные, непрерывно дифференцируемое и имеющее не равный нулю якобиан в D . Как всегда, два представления называются эквивалентными, если можно перейти от одного к другому с помощью допустимого преобразования параметров.

Мы скажем, что класс эквивалентных представлений указанного типа задает непрерывно дифференцируемую поверхность, если в этом классе существует по крайней мере одно представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области D .

Непрерывно дифференцируемая поверхность называется гладкой, если $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ в \bar{D} при некотором ее представлении $\mathbf{r} =$

$= \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. Площадь непрерывно дифференцируемой поверхности с представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, определяется как значение интеграла

$$\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv,$$

который, быть может, является и несобственным. Чтобы убедиться в его существовании, достаточно выполнить замену переменного с помощью допустимого преобразования, переводящего данное представление в представление, непрерывно дифференцируемое вплоть до границы области.

Аналогичным образом ослабляются требования, налагаемые на допустимые преобразования параметра и в случае ориентированных поверхностей.

При таких определениях остаются в силе все данные выше определения поверхностных интегралов и их свойства, естественно с учетом того, что в этом случае при некоторых представлениях поверхностей мы можем получить несобственные интегралы. Остаются справедливыми и все относящиеся к поверхностным интегралам теоремы, доказываемые в следующем параграфе; мы не будем однако специально останавливаться на этом.

Упражнение. 2. Пусть S — гладкая поверхность в новом расширенном смысле и Φ — функция, непрерывная на S . Доказать, что существуют интегралы

$$\int_S \Phi(x, y, z) dx dy, \quad \int_S \Phi(x, y, z) dz dx, \quad \int_S \Phi(x, y, z) dy dz.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

$$3. \iint_S x^2 y^2 dS; \quad S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}.$$

$$4. \iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq H\}.$$

$$5. \iint_S \frac{dS}{r}; \quad S — часть поверхности параболонда z = xy, отсекаемая ци-$$

линдром $x^2 + y^2 = R^2$, а r — расстояние текущей точки поверхности S от оси Oz .

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

$$6. \iint_S z dx dy, \text{ где } S — внешняя сторона эллипсоида \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$7. \iint_S yz dx dy + zx dy dz + xy dz dx, \text{ где } S — внешняя сторона поверхности, состоящей из части боковой поверхности цилиндра } x^2 + y^2 = R^2 \text{ и частей плоскостей}$$

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=H, \quad \text{причем } x, y, z \geq 0.$$

§ 52. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

52.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вместо терминов «числовая функция точки», «вектор-функция точки» употребляются и равнозначные им: *скалярное поле*, *векторное поле*. Эта терминология подчеркивает, что значения рассматриваемых функций зависят именно от точек пространства (в которых эти функции определены), а не от их координат, при выборе той или иной системы координат.

Употребляя эту терминологию, можно сказать, например, что всякое скалярное поле $u = u(M)$, определенное и дифференцируемое в некоторой области G , порождает векторное поле его градиентов (см. п. 20.6 и п. 50.5, стр. 245): $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u$.

Определение 1. Пусть в области G^*) задано векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ и существует определенная в G функция $u = u(M)$, такая, что $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$. Тогда функция $u(M)$ называется *потенциальной функцией*, или *потенциалом* данного векторного поля **).

Вводя символ набла, $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ (см. п. 20.7), можно написать:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

где справа стоит «произведение» символического вектора набла на числовую функцию u .

Пусть, например, $\mathbf{E}(M)$ — напряженность электрического поля, созданного единичным отрицательным зарядом, помещенным в начале координат. Тогда в точке $M(y, x, z)$ вектор $\mathbf{E}(M)$ имеет, как это известно из физики, длину $1/r^2$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и направлен от точки M к началу координат. Отсюда получается, что

$$\mathbf{E}(M) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right).$$

Электрический потенциал рассматриваемого поля, т. е. функция $u(M) = 1/r$, является и потенциалом в указанном выше смысле, ибо $\operatorname{grad} u(M) = \mathbf{E}(M)$.

Рассмотрим снова векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$, определенное в некоторой области G . Зафиксируем систему координат, тогда вектор-функцию $\mathbf{a}(M)$ можно рассматривать как функцию трех переменных — координат x, y, z точки M : $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$.

*) В этом параграфе для простоты рассматриваются только плоские или трехмерные области G .

**) Иногда в приложениях потенциал u определяется формулой $a = -\operatorname{grad} u$.

Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ и задан единичный вектор $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Проведем через точку M_0 прямую в направлении e :

$$x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cos \gamma, \\ -\infty < t < +\infty.$$

Определение 2. Производная вектор-функции

$$\mathbf{a}(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma)$$

по t при $t=0$ (если она существует) называется производной вектор-функции $\mathbf{a}(M)$ по направлению e в точке M_0 и обозначается через $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial e}$:

$$\frac{\partial \mathbf{a}(M_0)}{\partial e} = \frac{d}{dt} \mathbf{a}(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) |_{t=0}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции, опуская для простоты обозначения аргумента, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial e} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \cos \gamma. \quad (52.1)$$

Полагая $e\nabla = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ («скалярное произведение» вектора e и символического вектора ∇), перепишем формулу (52.1) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial e} = (e\nabla) \mathbf{a}.$$

Определение 3. Если $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный (не обязательно единичный) фиксированный вектор, то вектор

$$(b\nabla) \mathbf{a} = b_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

называется градиентом вектора \mathbf{a} по вектору \mathbf{b} .

Если $\mathbf{b} = b\mathbf{b}_0$, где $|\mathbf{b}_0| = 1$, то «формальными преобразованиями» получим

$$(b\nabla) \mathbf{a} = (b\mathbf{b}_0\nabla) \mathbf{a} = b(\mathbf{b}_0\nabla) \mathbf{a} = b \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}_0}.$$

Переходя к координатной записи, легко непосредственно убедиться в справедливости полученной формулы и показать, что с символом ∇ можно обращаться при вычислениях, как с настоящим вектором, не забывая, конечно, при этом, что, кроме этого, ∇ означает также и определенную операцию дифференцирования. Мы не будем здесь останавливаться на обосновании законности таких «формальных» преобразований с символом ∇ . Любая формула, полученная подобным образом, может быть, конечно, получена и без применения символа ∇ обычными об-

снованными рассуждениями в координатах. Следует иметь в виду, однако, что применение символа ∇ часто весьма существенно сокращает выкладки.

Вернемся снова к исходному векторному полю $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в области G .

Определение 4. Пусть поле $\mathbf{a} (a_x, a_y, a_z)$ дифференцируемо в некоторой точке. Число $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ называется дивергенцией поля в этой точке и обозначается через $\operatorname{div} \mathbf{a}$, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (52.2)$$

Символически $\operatorname{div} \mathbf{a}$ может быть записана как скалярное произведение символа ∇ и вектора \mathbf{a} :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$$

Определение 5. Вектор с координатами

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad (52.3)$$

называется вихрем, или ротором, векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ и обозначается $\operatorname{rot} \mathbf{a}$.

С помощью символа ∇ ротор можно записать в виде следующего векторного произведения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (52.4)$$

Геометрический и физический смысл $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ будет выяснен в дальнейшем.

Приведем пример формальных преобразований с символом ∇ . Если за символом ∇ следует несколько членов, на один из которых он действует как оператор дифференцирования, а на другие нет, то для ясности будем обозначать этот член вертикальной стрелкой. Поясним это на примере.

Пусть f — скалярное, \mathbf{a} — векторное поле, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f \mathbf{a} &= \nabla \times f \mathbf{a} = \nabla \times \overset{\downarrow}{f \mathbf{a}} + \nabla \times \overset{\uparrow}{f \mathbf{a}} = \\ &= f (\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f \times \mathbf{a}) = f \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Введем еще некоторые определения, связанные с векторным полем $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ в области G .

Определение 6. Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области G . Интеграл

$$\int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

называется циркуляцией векторного поля $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по кривой γ и обозначается $\int_{\gamma} \mathbf{a} dr$, где $dr = (dx, dy, dz)$.

Если γ — ориентированная гладкая кривая, $t = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — ее единичный касательный вектор, s — переменная длина дуги, а $\text{пр}_t \mathbf{a}$ — величина проекции вектора \mathbf{a} на касательную, то

$$\int_{\gamma} \mathbf{a} dr = \int_{\gamma} \text{пр}_t \mathbf{a} ds.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{a} dr &= \int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ &= \int_{\gamma} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) ds = \int_{\gamma} \mathbf{a} t ds = \int_{\gamma} \text{пр}_t \mathbf{a} ds. \end{aligned}$$

Определение 7. Поле, циркуляция которого по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в области G , равна нулю, называется потенциальным.

Напомним, что в п. 47.8 было показано (см. лемму 2), что условие равенства нулю интеграла $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ по любому замкнутому контуру $\gamma \subset G$ равносильно тому, что $\int_{AB} P dx + Q dy$

не зависит от пути интегрирования между точками A и B . При доказательстве этого утверждения нигде не использовалось, что кривая γ лежит в плоской области. Поэтому доказательство леммы 2, приведенное в п. 47.8, сохраняет свою силу и для криволинейных интегралов по пространственным кривым. Таким образом циркуляция $\int_{\gamma} \mathbf{a} dr = \int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ равна нулю по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру $\gamma \subset G$ тогда и только тогда, когда интеграл $\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ не зависит от пути интегрирования, т. е. от кривой с началом в точке A , концом в точке B и целиком лежащей в области G .

Рассмотрим в качестве примера плоское векторное поле, т. е. поле $\mathbf{a} = (P, Q)$, заданное на плоской области $G: P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. Вихрь этого поля имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & O \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Теорема 4 п. 47.8 во вновь введенных терминах может быть перефразирована следующим образом. Для односвязной плоской области G потенциальность поля, существование потенциальной

функции и условие, что вихрь поля во всех точках равен нулю, эквивалентны.

Определение 8. Пусть S — некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области G , ν — единичный вектор нормали к поверхности, задающей ее ориентацию, и S^+ — поверхность S с указанной ориентацией. Интеграл

$$\iint_{S^+} \mathbf{a} \mathbf{v} dS$$

называется потоком векторного поля через поверхность S и обозначается

$$\iint_S \mathbf{a} dS,$$

где

$$dS = \nu dS \quad (\text{или } \iint_S \mathbf{a} dS^+, \quad dS^+ = \nu dS).$$

Очевидно, что $\mathbf{a}\nu = \text{пр}_\nu \mathbf{a}$, поэтому $\iint_S \mathbf{a} dS = \iint_S \text{пр}_\nu \mathbf{a} dS$.

Обычно в потоке $\iint_{S^+} \mathbf{a} \mathbf{v} dS$ опускают индекс ориентации и пишут просто $\iint_S \mathbf{a} \mathbf{v} dS$, считая, что в качестве ориентации взята нормаль ν , стоящая в подынтегральном выражении.

В дальнейших пунктах этого параграфа мы изучим некоторые свойства векторных полей, в частности, установим в трехмерном случае необходимые и достаточные условия потенциальности поля. Предварительно мы докажем теоремы об интегралах, тесно связанные с понятиями, введенными в этом пункте.

Упражнения. 1. Доказать следующие формулы:

a) $\text{rot grad } u = 0$;

г) $\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$,

где $\Delta \mathbf{a} = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

б) $\text{div rot } \mathbf{a} = 0$;

д) $\text{div}(f\mathbf{a}) = f \text{div } \mathbf{a} + \text{grad } f \mathbf{a}$;

в) $\text{div grad } u = \Delta u$,

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

е) $\text{div } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}$.

2. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (x-2z)\mathbf{i} + (x+3y+z)\mathbf{j} + (5x+y)\mathbf{k}$ через треугольную площадку с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ и ориентацией, определяемой нормалью, направленной противоположно началу координат.

3. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ через поверхность $S : \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$, единичная нормаль к которой направлена в сторону, противоположную оси Oz .

4. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = xi + yi + \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \mathbf{k}$ через противоположную началу координат сторону гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{3}$.

5. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = (xy - y^2) \mathbf{i} + (-x^2 + xy + 2x) \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ через противоположную началу координат сторону части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$, отсекаемой конусом $z^2 = \frac{1}{2} x^2 + y^2$.

6. Найти $\operatorname{div} \mathbf{a}$, если

$$\mathbf{a} = (6x^2y^2 - z^2 + yz - 5) \mathbf{i} + (4x^3y + xz + 2) \mathbf{j} + (xy - 3xz^2 - 3) \mathbf{k}.$$

Пусть $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, $r = |\mathbf{r}|$, f — дифференцируемая всюду в R_+ числовая функция, c — постоянный вектор. Найти:

7. $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r})$. 10. $\operatorname{div}(r^2\mathbf{c})$.

8. $\operatorname{div}(rc)$. 11. $\operatorname{div}(f(r)c)$.

9. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$. 12. $\operatorname{div}(c \times r)$.

13. Найти $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, если

$$\mathbf{a} = xyz\mathbf{i} + (2x + 3y - z)\mathbf{j} + (x^2 + z^2)\mathbf{k}.$$

Найти:

14. $\operatorname{rot}(c \times r)$. 16. $\operatorname{rot}(f(r)r)$.

15. $\operatorname{rot}((cr)r)$. 17. $\operatorname{rot}(f(r)c)$.

18. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = -yi + xj + ck$ ($c = \text{const}$) по окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, лежащей в плоскости Oxy .

19. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = yi - xj$ по замкнутой линии, образуемой дугой астроиды $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) и отсекаемыми ею отрезками осей координат.

52.2. ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОНЯТИЙ ГРАДИЕНТА, ДИВЕРГЕНЦИИ И ВИХРЯ

Прежде всего заметим, что при ортогональном преобразовании декартовых координат символический вектор ∇ преобразуется по правилам преобразования обычных векторов. Действительно, пусть задано ортогональное преобразование координат

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{52.5}$$

Для таких преобразований матрица обратного преобразования совпадает с транспонированной матрицей, поэтому

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z', \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\ z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'. \end{aligned} \tag{52.6}$$

При этом, как хорошо известно, по формулам (52.5) и (52.6) преобразуются как координаты точек, так и координаты векторов.

Используя формулы (52.5) и правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = a_{11} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{31} \frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} = a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{32} \frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = a_{13} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{23} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z'}.\end{aligned}\quad (52.7)$$

Соответственно обратные формулы, выражающие производные по переменным x' , y' , z' через производные по x , y , z будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_{21} \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_{31} \frac{\partial}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\quad (52.8)$$

Формулы (52.5) – (52.8) показывают, что координаты обычных векторов и «координаты» символьического вектора ∇ при ортогональных преобразованных декартовых координатах преобразуются по одному и тому же правилу. В частности, из (52.8) следует, что градиент функции u в системе координат x , y , z , т. е. вектор с координатами $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ в системе x' , y' , z' будет иметь координаты $\frac{\partial u}{\partial x'}$, $\frac{\partial u}{\partial y'}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, т. е. являться градиентом и в этой системе координат. Тем самым еще раз доказано (см. п. 20.7), что градиент функции не зависит от выбора декартовой системы координат. Поскольку вектор ∇ преобразуется подобно обычным векторам, то естественно ожидать, что и скалярное произведение ∇a не зависит от выбора указанной системы координат.

Пусть вектор a в системе x , y , z имеет координаты a_x , a_y , a_z , а в системе x' , y' , z' – координаты $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$. В силу формул (52.7) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} &= a_{11} \frac{\partial a_x}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial a_x}{\partial y'} + a_{31} \frac{\partial a_x}{\partial z'} + \\ &+ a_{12} \frac{\partial a_y}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial a_y}{\partial y'} + a_{32} \frac{\partial a_y}{\partial z'} + a_{13} \frac{\partial a_z}{\partial x'} + a_{23} \frac{\partial a_z}{\partial y'} + a_{33} \frac{\partial a_z}{\partial z'} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'} (a_{11} a_x + a_{12} a_y + a_{13} a_z) + \frac{\partial}{\partial y'} (a_{21} a_x + a_{22} a_y + a_{23} a_z) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z'} (a_{31} a_x + a_{32} a_y + a_{33} a_z).\end{aligned}\quad (52.9)$$

Применяя формулы (52.5) к вектору $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, (т. е. заменяя в этих формулах x, y, z на a_x, a_y, a_z , а x', y', z' на $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$), получим, что выражения в круглых скобках в правой части равенства (52.9) равны последовательно $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

Это равенство и показывает, что дивергенция векторного поля в каждой точке однозначно определяется самим векторным полем, а не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться сначала из формулы (52.2).

Векторное произведение обычных векторов в силу своего геометрического смысла не зависит от выбора декартовых систем координат с одинаковой ориентацией (например, векторное произведение двух векторов не изменится, если от одной правой декартовой системы координат (см. п. 50.8) перейти к такой же другой). Поэтому естественно ожидать, что тем же свойством обладает и «символическое векторное произведение» $\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$.

В самом деле, если обозначить единичные координатные векторы системы координат x', y', z' соответственно через $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, то, как известно, единичные координатные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ системы координат x, y, z выражаются через $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ посредством матрицы, транспонированной к матрице преобразования (52.5), т. е. посредством матрицы преобразования (52.6):

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= a_{11}\mathbf{i}' + a_{21}\mathbf{j}' + a_{31}\mathbf{k}', \\ \mathbf{j} &= a_{12}\mathbf{i}' + a_{22}\mathbf{j}' + a_{32}\mathbf{k}', \\ \mathbf{k} &= a_{13}\mathbf{i}' + a_{23}\mathbf{j}' + a_{33}\mathbf{k}'.\end{aligned}\quad (52.10)$$

Используя формулы (52.6), (52.7) и (52.10), получим:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{a} &= \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} \mathbf{i}' + a_{21} \mathbf{j}' + a_{31} \mathbf{k}' & a_{12} \mathbf{i}' + a_{22} \mathbf{j}' + a_{32} \mathbf{k}' & a_{13} \mathbf{i}' + a_{23} \mathbf{j}' + a_{33} \mathbf{k}' \\ a_{11} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{31} \frac{\partial}{\partial z'} & a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{32} \frac{\partial}{\partial z'} & a_{13} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{23} \frac{\partial}{\partial y'} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{11} a_{x'} + a_{21} a_{y'} + a_{31} a_{z'} & a_{12} a_{x'} + a_{22} a_{y'} + a_{32} a_{z'} & a_{13} a_{x'} + a_{23} a_{y'} + a_{33} a_{z'} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}. \quad (52.11)\end{aligned}$$

Последнее равенство доказывается так же, как для обычных числовых матриц доказывается тот факт, что определитель произведения двух квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению их определителей. Для доказательства этого равенства достаточно убедиться, что в обеих его частях стоят одинаковые алгебраические суммы одних и тех же слагаемых.

Определитель ортогонального преобразования равен $+1$ или -1 , причем если это преобразование сохраняет ориентацию, то $+1$. Поэтому если в рассматриваемом случае выбрать системы координат x, y, z и x', y', z' , ориентированные одинаково, то будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

и, следовательно, из (52.11) получим

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}.$$

Это равенство и означает, что вихрь векторного поля не зависит от выбора декартовой системы координат, имеющей ту же ориентацию, что и заданная. Заметим, однако, что если от одной системы координат перейти к системе с другой ориентацией, например от правой системы координат — к левой, то каждый вихрь (как и обычное векторное произведение) заменится противоположным вектором. Это следует из формулы (52.11), поскольку определитель ортогонального преобразования, меняющего ориентацию, равен -1 .

Таким образом, вихрь векторного поля однозначно «с точностью до знака» определяется самим векторным полем, а если ограничиться только одними правыми декартовыми системами координат, то не зависит от их выбора.

52.3. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

Пусть G — область в пространстве R^3_{xyz} . Предположим, что на плоскости R^2_{xy} существует такая квадрируемая область Γ , что граница области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2 , задаваемых соответственно явными представлениями $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны на замкнутой области $\bar{\Gamma}$, $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Gamma}$, и, быть может,

из части S_0 цилиндра, основанием которого является граница $\partial\Gamma$ области Γ (см. п. 44.1). Предположим также, что S_0 , S_1 и S_2 являются кусочно-гладкими поверхностями (рис. 210). В этом случае и вся граница S области G также будет кусочно-гладкой поверхностью и притом ориентируемой, как всякая кусочно-гладкая поверхность, являющаяся границей области. Внешние нормали v поверхности S на ее гладких частях являются их ориентациями. В силу этих ориентаций гладкие части поверхности S ориентированы согласованно (см. п. 50.11) и, следовательно, порождают ориентацию всей поверхности S . Эта ориентация получается, если для каждой гладкой части поверхности выбрать ориентацию ее края, согласованную с внешней нормалью v на этой части по правилу штопора.

Обозначим поверхность S , соответственно поверхности S_0 , S_1 и S_2 с выбранной ориентацией (которую будем называть положительной) через S^+ , соответственно через S_0^+ , S_1^+ и S_2^+ . Отметим, что здесь для поверхности S_1 положительной ориентацией является ее «нижняя сторона», а для поверхности S_2 — ее «верхняя сторона» (см. 51.1).

В рассматриваемом случае выбор нормали v легко

описывается и непосредственно, т. е. без привлечения понятия «внешней» нормали: в точках поверхности S_1 , в которых нормаль существует, надо выбрать нормаль, образующую тупой угол с осью Oz , а в точках поверхности S_2 — острый. В точках же поверхности S_0 выбор нормали для наших целей, как это будет видно из дальнейшего, безразличен — мы будем брать по поверхности S интегралы вида (51.7), которые по поверхности S_0 равны нулю при любом выборе нормалей, так как эти нормали всегда перпендикулярны оси Oz .

Будем предполагать, что область G обладает свойствами, аналогичными перечисленным, относительно всех осей координат. Такие области будем называть *элементарными областями* (ср. п. 47.5). Пример элементарной области изображен на рис. 210).

Через $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — обозначим направляющие косинусы единичной внешней нормали v поверхности S :

$$v = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

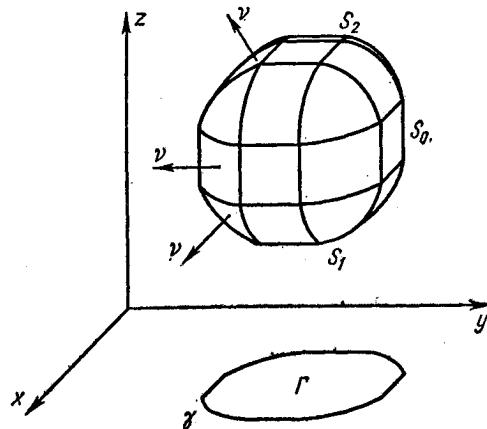


Рис. 210

Теорема 1 (Остроградский — Гаусс*). Пусть в замыкании \bar{G} области G указанного выше вида заданы функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ непрерывные на \bar{G} , вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ **). Тогда

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S^+} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (52.12)$$

Эту формулу, полагая $\alpha = (P, Q, R)$, можно переписать в виде

$$\iiint_G \operatorname{div} \alpha dx dy dz = \iint_{S^+} \alpha dS^+, \quad (52.13)$$

т. е. интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Использовав обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Gamma} \left[\int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Gamma} \{R[x, y, \Psi(x, y)] - R[x, y, \Phi(x, y)]\} dx dy = \\ &= \iint_{S_0^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (52.14)$$

Заметив, далее, что на поверхности S_0 имеет место равенство $\cos \gamma = 0$, будем иметь (см. (51.7))

$$\iint_{S_0^+} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_0^+} P(x, y, z) \cos \gamma dS = 0.$$

Поэтому формулу (52.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{S_2^+} R dx dy + \iint_{S_1^+} R dx dy + \iint_{S_0^+} R dx dy = \iint_{S^+} R dx dy. \end{aligned} \quad (52.15)$$

*.) М. В. Остроградский (1801 — 1861) — русский математик; К. Ф. Гаусс (1777 — 1855) — немецкий математик.

**) Непрерывность частных производных на границе понимается как их непрерывная продолжаемость на границу области,

Совершенно аналогично доказываются формулы

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{S^+} P dy dz, \quad \iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S^+} Q dz dx, \quad (52.16)$$

Складывая (52.15) и (52.16) в силу определений (51.7) и (51.12) мы и получим формулу (52.12), называемую *формулой Остроградского — Гаусса*. \square

Иногда формулу (52.12) бывает удобно использовать в виде

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Справедливость такой записи непосредственно вытекает из определения поверхностного интеграла второго рода: см. (51.7) и (51.12).

Формула Остроградского — Гаусса (52.12) может быть доказана и в случае областей G более общего вида, чем было указано, а именно для таких, для которых существует конечное разбиение на области G_i , $i=1, 2, \dots, i_0$, рассмотренного выше вида. Для этого достаточно написать формулу Остроградского для каждой области G_i и полученные результаты сложить; в результате получается искомая формула для области G . Действительно, в левой части равенства в силу аддитивности интеграла получится соответствующий интеграл по области G ; а в правой части в силу того, что внешние нормали в точках границ областей G_i , принадлежащих границам двух таких областей, направлены в разные стороны, поверхностные интегралы по соответствующим частям границ областей G_i , в сумме дадут ноль, и останутся только интегралы по частям границ G_i , составляющим в совокупности границу области G (ср. п. 47.5). Указанные разбиения области G часто бывает удобно производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Заметим, что среди областей такого типа есть и области, граница которых состоит из нескольких «кусков», т. е. может быть представлена как сумма конечного числа кусочно-гладких непересекающихся поверхностей (ср. с соответствующими обобщениями формулы Грина в п. 47.5).

Можно показать, что формула Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако это довольно громоздко, и мы не будем на этом останавливаться, а ограничимся лишь формулировкой теоремы.

Теорема 1' (Остроградский — Гаусс). Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких

поверхностей, а вектор $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ и частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на G , тогда

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \iint_S \mathbf{a} dS.$$

В качестве ориентации на гладких частях границы ∂G здесь выбрана внешняя нормаль.

Например, если $G = \{(x, y, z) : 0 < a < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < b\}$ — шаровое кольцо и, следовательно, его граница состоит из двух сфер $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2\}$,

то на внутренней сфере S_1 надо взять нормаль, направленную к центру шара G , и на внешней сфере S_2 — от центра шара.

Формула Остроградского — Гаусса позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. В самом деле, полагая в (52.12) $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$ и заметив, что $\iiint_G dx dy dz = \mu G$, получим

$$\mu G = \frac{1}{3} \iint_{S^+} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

или

$$\mu G = \frac{1}{3} \iint_{S^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

Формула Остроградского — Гаусса дает также возможность установить геометрический подход к понятию дивергенции.

Теорема 2. Пусть в трехмерной области G^*) определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$. Пусть $M_0 \in G$ и D — область с кусочно-гладкой границей S такая, что $M_0 \in D$, $\bar{D} \subset G$ и для области D справедлива формула Остроградского — Гаусса **).

Обозначим через S^+ поверхность S , ориентированную с помощью выбора внешней нормали, а через $d(D)$ — диаметр области D . Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = \lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{a} dS^+}{\mu D}. \quad (52.17)$$

Доказательство. По формуле (52.13) имеем

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \iint_S \mathbf{a} dS^+. \quad (52.18)$$

*.) Здесь на структуру области G не накладывается никаких ограничений.

**) Такие области D всегда существуют, например к ним относятся все шары достаточно малого радиуса с центром в точке M_0 или кубы достаточно малого размера с центром в точке M_0 .

Но по интегральной теореме о среднем (п. 44.6),

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{a}(M) \mu D, \quad M \in D. \quad (52.19)$$

Подставив (59.19) в (52.18), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \frac{\iint_S \mathbf{a} dS^+}{\mu D}. \quad (52.20)$$

Переходя к пределу в формуле (52.20) при $d(D) \rightarrow 0$, в силу непрерывности в точке M_0 функции $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ получим формулу (52.17).

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.17), не зависят от выбора системы координат (в правую часть входит двойной интеграл от скалярного произведения векторов и объем области), поэтому отсюда еще раз следует, что дивергенция векторного поля не зависит от выбора системы координат.

Из равенства (52.17) следует, что правая часть этого равенства может быть принята за определение дивергенции данного поля.

Точки векторного поля \mathbf{a} , в которых $\operatorname{div} \mathbf{a} \neq 0$, называются «источниками» векторного поля. Интуитивно естественность этого термина объясняется тем обстоятельством, что если точка является «источником», то, как видно из формулы (52.17), для всех достаточно малых по диаметру областей D , содержащих точку M_0 , будем иметь $\iint_S \mathbf{a} dS \neq 0$, т. е. поток через любую достаточно малую поверхность, окружающую источник, не равен нулю.

52.4. ФОРМУЛА СТОКСА. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИХРЯ

Пусть S — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность без особых точек в пространстве R_{xyz}^3 и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, — ее представление, D — плоская ограниченная область, для которой справедлива формула Грина. Допустим, что граница области D состоит из одного простого кусочно-гладкого контура. Обозначим через γ_0 положительно ориентированный контур, ограничивающий область D , и через $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$ — его представление. Пусть

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

— ориентация на поверхности S (см. определение 20 в п. 50.8), $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. При сделанных предположениях нормаль \mathbf{v} непрерывна на D .

Обозначим через S^+ поверхность S с выбранной на ней нормалью \mathbf{v} . Пусть γ — контур с представлением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$,

$a \leq t \leq b$. Будем говорить, что контур γ ограничивает поверхность S , а также что поверхность S натянута на контур γ .

Пусть, наконец, G — область в пространстве R_{xyz}^3 и $S \subset G$. При выполнении этих предположений справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (Стокс *). Пусть функции P, Q и R непрерывны вместе со своими первыми частными производными в области G и пусть $\alpha = (P, Q, R)$. Тогда

$$\int_{\gamma} \alpha \, d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \alpha \, dS^+, \quad (52.21)$$

т. е. циркуляция векторного поля по контуру γ равна потоку вихря этого поля через поверхность S , ограниченную контуром γ . В координатной форме эта формула имеет вид

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

или

$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS. \quad (52.22)$$

Доказательство. Рассмотрим, например, интеграл $\int_{\gamma} P \, dx$. Заметив, что вдоль кривых γ_0 и γ переменные u и v являются функциями от t , и употребив обозначения, введенные в начале этого пункта, получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x, y, z) \, dx &= \\ &= \int_a^b P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))] x'_t(u(t), v(t)) \, dt = \\ &= \int_{\gamma_0} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \left[\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \, du + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \, dv \right]. \end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались формулой

$$x'_t(u(t), v(t)) = \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

* Дж. Стокс (1819—1903) — английский механик и математик.

Применим формулу Грина к получившемуся интегралу

$$\int_{\gamma_0} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv, \text{ будем иметь:}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du dv = \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right] du dv = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right] du dv = \\ &= \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS. \end{aligned} \quad (52.23)$$

Здесь приняты во внимание формулы (51.10) и (51.13). Аналогично доказывается, что

$$\int_{\gamma} Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS, \quad (52.24)$$

$$\int_{\gamma} R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS. \quad (52.25)$$

Складывая формулы (52.23), (52.24) и (52.25), мы и получим формулу (52.22), которая называется *формулой Стокса*. \square

Чтобы наглядней представить себе связь выбора нормали v на поверхности S с ориентацией ограничивающего ее контура γ , рассмотрим поверхность S , имеющую явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Gamma}$.

Пусть γ_0 — положительно ориентированный на плоскости xOy контур, являющийся границей Γ , и $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, — его представление. Как и выше, ориентацию кривой γ зададим представлением

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = f[x(t), y(t)], \quad a \leq t \leq b. \quad (52.26)$$

В рассматриваемом случае контур γ_0 является проекцией кривой γ . Нормаль же v , как это было показано, при явном представлении поверхности образует острый угол с осью Oz (см. п. 51.1); поэтому если смотреть на поверхность S с положительного направления оси Oz , то контур γ будет ориентирован против часовой стрелки, т. е. ориентация кривой γ согласована с нормалью v «по правилу штопора» (рис. 211). Это равносильно тому, что наблюдатель, обходящий поверхность S по ориентированному

контуру γ и смотрящий на нее из конца нормали v , видит поверхность S слева. Такая наглядная интерпретация согласованности ориентации нормали v и контура γ имеет то преимущество, что она не связана с выбором системы координат и остается справедливой для любой поверхности S , рассматриваемой в теореме Стокса, а не только для явно заданной поверхности. Конечно, все подобные рассуждения не являются математическими доказательствами, а служат лишь для наглядного пояснения формулы Стокса.

Следует заметить, что формула Стокса остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура и противоположные нормали — $-v$; в этом случае обе части равенства (52.21) изменят знак на противоположный (при этом ориентации контура и поверхности остаются согласованными по «правилу штопора»).

Формула Стокса может быть доказана и для ориентируемых кусочно-гладких поверхностей $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, а именно таких, для которых поверхности S_i , $i = 1, 2, \dots, i_0$, удовлетворяют условиям доказанной теоремы 3. При этом край поверхности ∂S (см. п. 50.11) может состоять из конечного числа замкнутых контуров γ_j , $j = 1, 2, \dots, j_0$.

Для доказательства этого достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности S_i , $i = 1, 2, \dots, i_0$, и сложить их (ср. с обобщениями формулы Грина в п. 47.5 и теоремы Остроградского — Гаусса в п. 52.3).

Отметим также, что в теореме 3 условие дважды непрерывной дифференцируемости поверхности S было наложено только для простоты доказательства (оно в этом случае существенно упрощается). Формула Стокса (52.21) справедлива и при предположении лишь гладкости поверхности S (при сохранении прочих условий теоремы 3). Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Из всего сказанного следует, что формула Стокса остается справедливой и для просто ориентированных кусочно-гладких поверхностей $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ (т. е. без предположения о дважды непрерывной дифференцируемости поверхностей S_i).

Сформулируем теорему для этого случая.

Теорема 3' (Стокс). Пусть вектор-функция a непрерывно дифференцируема в области G и пусть $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ — ориентированная кусочно-гладкая поверхность и ∂S — ее край с ориентацией, порожденной заданной ориентацией поверхности S (см. п. 50.11). Тогда

$$\int_{\partial S} a dr = \iint_S \operatorname{rot} a dS.$$

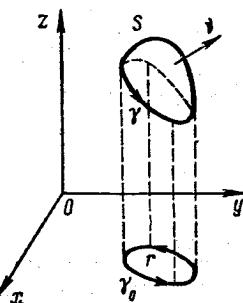


Рис. 211

Наглядно согласование ориентаций контуров γ_j , из которых состоит край ∂S поверхности S , с ориентацией этой поверхности и, следовательно, с ориентацией v поверхностей S_i означает, что наблюдатель, двигающийся по контуру γ_j , $j = 1, 2, \dots, j_0$, и смотрящий на поверхность S из конца нормали v , видит поверхность S слева.

Теорема Стокса дает возможность установить геометрический подход к понятию вихря векторного поля.

Теорема 4. Пусть в трехмерной области G определено непрерывно дифференцируемое векторное поле $a = a(M)$; M_0 — фиксированная точка, $M_0 \in G$, v — произвольный постоянный единичный вектор, Π — плоскость, перпендикулярная вектору v и проходящая через точку M_0 , S — ограниченная область в плоскости Π , границей которой является кусочно-гладкий контур γ , $d(S)$ — диаметр области S ; пусть контур γ согласовано ориентирован с нормалью v ^{*)}, $M_0 \in S$ и $S \subset G$ ^{**) (рис. 212).}

Тогда ***)

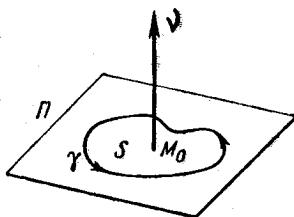


Рис. 212

$$\text{rot}_v a(M_0) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \left(\frac{\int \int \int_S \text{rot}_v a dS}{\frac{1}{d(S)}} \right). \quad (52.27)$$

Доказательство. По формуле Стокса

$$\int \int \int_S \text{rot}_v a dS = \int \int \int_S \text{rot}_v a dS,$$

но по интегральной теореме о среднем

$$\int \int \int_S \text{rot}_v a dS = \text{rot}_v a(M) \mu S, \quad M \in S.$$

Следовательно,

$$\text{rot}_v a(M) = \frac{\int \int \int_S \text{rot}_v a dS}{\mu S}. \quad (52.28)$$

Заметим, что при $d(S) \rightarrow 0$ и $M \rightarrow M_0$. В силу непрерывности в точке M_0 функции $\text{rot}_v a(M)$, переходя к пределу в (52.28) при $d(S) \rightarrow 0$, получим формулу (52.27). \square

Из (52.27) следует, что правая часть его может быть принята за определение проекции вихря данного поля на произвольный, но фиксированный единичный вектор v . Это приводит и к новому

^{*)} Как и в теореме 3 (по «правилу штопора»).

^{**) Указанные области S , очевидно, всегда существуют (почему?).}

^{***)} Через $\text{rot}_v a$ обозначена проекция вектора $\text{rot } a$ на вектор v , т. е. $\text{rot}_v a = \text{пр}_{\nu} \text{rot } a$.

определению самого вихря, так как достаточно, например, взять три произвольных ортогональных единичных вектора v_1, v_2, v_3 , проекциями на которые, как это хорошо известно, однозначно определяется всякий вектор.

Можно показать, что величины, входящие в правую часть равенства (52.27), не зависят от выбора системы координат, однако согласованность ориентаций вектора v и контура γ зависит от ориентации системы координат: при переходе от правой системы координат к левой согласованность ориентаций v и γ по правилу штопора заменяется согласованностью по правилу «антиштопора», т. е. при фиксированной ориентации вектора v ориентация контура γ изменяется на противоположную. Тем самым интеграл $\int_{\gamma} a dr$ при изменении ориентации системы координат изменяет знак, а потому в силу формулы (52.27) меняет знак и $\operatorname{rot} a$.

Из сказанного следует, что формула Стокса (52.22) справедлива не только в правой, но и в левой системе координат, так как при изменении ориентации системы координат и левая и правая части равенства (52.22) меняют знак: при фиксированной ориентации v поверхности S в случае изменения ориентации системы координат изменяют знак как $\operatorname{rot} a$, так и контур γ .

52.5. СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом пункте ограниченную область, для которой справедлива теорема Остроградского — Гаусса (см. п. 52.3), будем называть *допустимой*. Совокупность поверхностей будем называть *допустимой*, если она является границей допустимой области.

Выше отмечалось (см. п. 52.3), что теорема Остроградского — Гаусса справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Поэтому всякая такая область допустима. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: всякая допустимая область имеет границу, состоящую из конечного числа кусочно-гладких поверхностей — иначе нельзя было бы даже говорить о поверхностных интегралах по границе.

Читатель, предлагающий пользоваться только доказанными фактами, может под допустимыми областями и поверхностями понимать именно те, для которых в настоящем курсе была доказана теорема Остроградского — Гаусса.

Определение 9. *Непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $a = a(x, y, z)$ называется соленоидальным в этой области, если его поток через ориентированную границу любой допустимой области D , замыкание \bar{D} которой лежит в G : $\bar{D} \subset G$, равен нулю:*

$$\iint_{\partial D} a dS = 0. \quad (52.29)$$

Граница ∂D допустимой области D имеет две ориентации, порожденные соответственно внутренней и внешней нормалью. Очевидно, если условие (52.29) выполняется при одной ориентации, то оно выполняется и при другой, так как соответствующие интегралы могут отличаться только знаком.

Поясним определение соленоидальности поля на примере. Пусть G — шаровое кольцо: часть пространства, заключенная между двумя сферами S_1 и S_R с общим центром O и радиусами r и R , $r < R$, и пусть векторное поле a соленоидально в G . Тогда его поток будет равен нулю, например,

через любую сферу S_1 , лежащую в G и ограничивающую шар, также лежащий в G (рис. 213).

Однако поток векторного поля a через сферу S_ρ с центром в точке O и радиусом ρ , $r < \rho < R$, не обязан быть равным нулю, так как шар, ограниченный этой сферой, не содержится в области G .

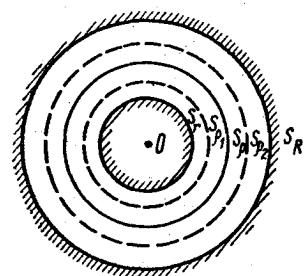


Рис. 213

Вместе с тем сумма потоков векторного поля a будет равна нулю через две сферы S_{ρ_1} и S_{ρ_2} с тем же центром и радиусами ρ_1 и ρ_2 , $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, если одну из них ориентировать, выбрав нормаль, идущую к центру O , а другую — от центра. Действительно, указанные сферы ограничивают шаровое кольцо, целиком лежащее в области G , а выбранная их ориентация является ориентацией границы, соответствующей внешней или внутренней нормали. Поэтому по определению соленоидальности поля его поток через рассматриваемую ориентированную границу будет равен нулю.

Теорема 5. Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле было соленоидальным в ней, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю во всех точках области G :

$$\operatorname{div} a(M) = 0, \quad M \in G.$$

Доказательство необходимости. Пусть a — соленоидальное в области G векторное поле и $M_0 \in G$. Обозначим через Q , открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке M_0 , а через S_{r_0} — ограничивающую его сферу. Поскольку все точки $M \in G$, в том числе и точка M_0 , являются внутренними для G , то существует такое $r_0 > 0$, что при $r < r_0$ все шары радиуса r вместе с ограничивающими их сферами S_r будут содержаться в G .

Заметим, теперь, что предел (52.17), равный значению дивергенции векторного поля a в точке M_0 , существует для произвольных допустимых областей D , $D \subset \bar{D} \subset G$, диаметры которых

стремятся к нулю. Поэтому он существует и при специальном выборе $D = Q_r$, $r < r_0$:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_r} \mathbf{a} d\mathbf{S}}{\mu Q_r}.$$

В силу определения соленоидальности поля, для всех $r < r_0$ имеет место равенство

$$\iint_{S_r} \mathbf{a} d\mathbf{S} = 0,$$

поэтому $\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть \mathbf{a} — непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле с дивергенцией, равной нулю во всех точках области G . Если D — произвольная допустимая область, такая, что $D \subset \bar{D} \subset G$, то в силу теоремы Остроградского — Гаусса

$$\iint_{\partial D} \mathbf{a} d\mathbf{S} = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = 0,$$

т. е. поле \mathbf{a} соленоидально. \square

Типичным примером соленоидального поля является векторное поле, представляющее собой в некоторой области поле роторов дважды непрерывно дифференцируемого в этой области векторного поля.

Действительно, если \mathbf{a} — дважды непрерывно дифференцируемое в области G поле, то $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ является соленоидальным в G полем, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.

Нетрудно провести правдоподобное рассуждение, убеждающее в справедливости этого соотношения. Для этого достаточно перейти к символическому вектору ∇ ; тогда рассматриваемое равенство примет вид $\nabla(\nabla \times \mathbf{a}) = 0$.

Смешанное произведение обычных векторов в случае, когда два сомножителя совпадают, равно нулю, ибо в этом случае параллелепипед, натянутый на эти векторы, вырождается в параллелограмм, и, следовательно, его объем равен нулю. Поэтому естественно ожидать, что указанное равенство справедливо и для вектора ∇ . Это правдоподобное рассуждение можно превратить в математически обоснованное и, тем самым, имеющее доказательную силу, если доказать, что символический вектор ∇ на самом деле обладает использованными нами свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных векторов. Это можно сделать простой проверкой, переходя, например, к координатной записи (см. (52.2) и (52.4)).

52.6. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В этом пункте поверхность S , для которой справедлива теорема Стокса, будем называть допустимой.

Определение 10. Трехмерная область G называется односвязной, если какое бы ни была замкнутая ломаная γ , лежащая в G , существует допустимая поверхность S , также лежащая в G и натянутая на ломаную γ (см. п. 52.4).

Иногда односвязные области называются также *поверхностно односвязными*.

Если рассматриваемая область G выпуклая, то существует очень простой способ натягивания поверхностей на контур. Искусственную поверхность всегда можно взять в этом случае в виде конуса с вершиной в произвольно фиксированной точке $M_0 \in G$, направляющей которого служит заданная кривая γ . Если

$$\rho = \rho(u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,$$

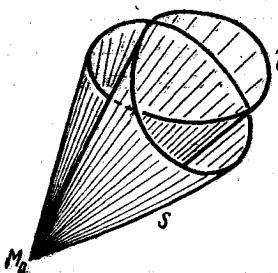


Рис. 214

— представление этой кривой и r_0 — радиус-вектор точки M_0 , то искомый конус S , натянутый на данный контур, задается представлением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + v[\rho(u) - \mathbf{r}_0], \quad (52.30)$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Рассматривая u и v как полярные координаты, видим, что «представление» конуса задано на единичном круге, причем единственная окружность $\gamma_0 = \{(u, v) : v = 1\}$ переходит в заданный контур γ , ее центр — в вершину конуса (рис. 214).

Слово «представление» взято в кавычки, так как понятие представления поверхности было введено выше лишь для случая, когда параметры u и v являлись декартовыми координатами. Конус (52.30) в общем случае будет иметь кратные точки и не будет кусочно-гладкой поверхностью даже в случае, когда γ — достаточно гладкая кривая, т. е. если γ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек. При этом на конусе (52.30) будут иметься, вообще говоря, особые точки, отличные от вершины. Чтобы устранить это затруднение наиболее простым образом, мы и ограничились при определении односвязной области рассмотрением лишь контуров, являющихся замкнутыми ломаными. В этом случае вершину конуса M_0 всегда можно выбрать таким образом, что указанный конус будет кусочно-гладкой поверхностью. Действительно, при любом выборе вершины конуса в случае, когда его направляющей является некоторая ломаная γ , конус распадается на конечное число треугольников S_i , $i = 1, 2, \dots, k$, правда, быть может, вырожден-

ных, т. е. превратившихся в отрезок или точку. Одной из вершин этих треугольников будет вершина конуса M_0 , а противоположной стороной — одно из звеньев ломаной γ . Каждый такой треугольник можно рассматривать как непрерывно дифференцируемую любое число раз поверхность и задавать его представлением, осуществляемым линейными функциями (см. п. 16.5 и (52.30)). Если треугольник вырожденный, то все его точки будут особыми. Однако сколь угодно малым смещением вершины конуса можно добиться того, что она окажется в общем положении со всеми звеньями ломаной γ , т. е. не будет лежать ни на одной прямой, проходящей через какое-либо звено ломаной γ . В результате все треугольники S_i , $i = 1, 2, \dots, k$, станут невырожденными и, следовательно, могут рассматриваться как гладкие поверхности без особых точек. Сам же конус S окажется, таким образом, кусочно-гладкой поверхностью $S = \{S_i\}_{i=1}^k$. При этом, поскольку при всех достаточно малых смещениях каждой точки области она остается внутри области, вершину M_0 конуса S всегда можно выбрать в области и поэтому в силу ее выпуклости весь конус S будет лежать в этой области. К получившемуся кусочно-гладкому конусу S можно применить теорему Стокса, иначе говоря, этот конус является допустимой в этом пункте поверхностью. Итак, мы доказали, что всякая выпуклая область односвязна.

Примером неодносвязной области является тор, т. е. область, образуемая вращением круга вокруг не пересекающей его оси (рис. 215).

Напомним, что поле называется потенциальным, когда его циркуляция $\int \mathbf{a} dr$ равна нулю по любому замкнутому контуру

$\gamma \subset G$, или, что то же, когда интеграл $\int \mathbf{a} dr$ не зависит от пути

интегрирования, соединяющего в области G точки A и B . Подробнее об этом см. п. 52.1. Оказывается, что в односвязной области векторное поле потенциально тогда и только тогда, когда оно безвихревое. Это утверждение содержится в нижеформулируемой и доказываемой теореме 6.

Теорема 6. Пусть в односвязной области G задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства:

1. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ является в области G потенциальным.

2. Существует потенциальная в G функция $u = u(M)$, т. е. такая функция $u(M)$, что $\mathbf{a} = \text{grad } u$, или, что то же, $du =$

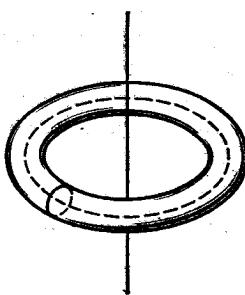


Рис. 215

$= P dx + Q dy + R dz$. В этом случае для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ и любой кусочно-гладкой кривой \widehat{AB} , соединяющей в G эти точки,

$$\int_{\widehat{AB}} \alpha dr = u(B) - u(A).$$

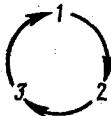
3. Векторное поле $\alpha = \alpha(M)$ является безвихревым: $\operatorname{rot} \alpha = 0$ в области G , т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Подчеркнем, что из теоремы 6 в частности вытекает, что непрерывно дифференцируемое в односвязной области векторное поле α потенциально тогда и только тогда, когда оно является полем градиентов некоторой скалярной функции u :

$$\alpha = \nabla u.$$

Доказательство. Применим схему



Первый шаг: $1 \rightarrow 2$. Это утверждение, т. е. существование потенциальной функции, доказывается совершенно аналогично рассмотренному раньше случаю плоской области (см. теорему 3 в п. 47.8) и поэтому не будем приводить его доказательство.

Второй шаг: $2 \rightarrow 3$. Утверждение $2 \rightarrow 3$ также доказывается аналогично плоскому случаю: оно означает просто-напросто равенство соответствующих вторых смешанных производных потенциальной функции.

Утверждения $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ справедливы и без предположения односвязности области G .

Третий шаг: $3 \rightarrow 1$. Пусть $\operatorname{rot} \alpha = 0$ в G . Допустим сначала, что γ — кусочно дважды непрерывно дифференцируемая замкнутая кривая, лежащая в G . Если существует допустимая поверхность S , содержащаяся в G и ограниченная контуром γ , то из теоремы Стокса сразу получаем

$$\int_{\gamma} \alpha dr = \iint_S \operatorname{rot} \alpha dS = 0.$$

В силу односвязности области G (см. определение 10) это верно, в частности, для любой конечнозвенной ломаной. Поэтому, если γ — любая кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в G , то, выбирая последовательность ломаных λ_n , вписанных в γ со

звеньями, стремящимися к нулю при $n \rightarrow \infty$, по лемме 3 п. 47.8, получим

$$\int_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \mathbf{a} d\mathbf{r} = 0. \quad \square$$

В заключение заметим, что хотя потенциальные и соленоидальные векторные поля не исчерпывают совокупности всех возможных векторных полей, однако, они позволяют описать широкий класс векторных полей. Именно, при достаточно общих предположениях любое векторное поле \mathbf{a} представляет собой сумму потенциального и соленоидального векторного поля. Более точно, существуют такие скалярная функция u и векторное поле \mathbf{b} , что $\mathbf{a} = \nabla u + \operatorname{rot} \mathbf{b}$. Поскольку $\operatorname{rot} \nabla u = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b} = 0$, то первое слагаемое является потенциальным полем, а второе — соленоидальным.

Это предложение называется теоремой Гельмгольца *) (ее доказательство можно найти в книге: Ф. М. Морс, Г. Фешбах «Методы теоретической физики», т. I, М., 1960).

Упражнения. 20. Доказать, что поток ротора непрерывно дифференцируемого в некоторой области векторного поля через любую сферу, лежащую в указанной области, равен нулю.

21. Доказать, что

$$\iiint_G \operatorname{grad} \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} dx dy dz = \iint_S (\mathbf{a} \times \operatorname{grad} \varphi) dS.$$

Здесь предполагается что для области G , ограниченной поверхностью S , применима теорема Остроградского — Гаусса.

22. Для векторных полей $\mathbf{a} = r/|r|^3$ и $\mathbf{b} = r/|r|$ найти дивергенцию и ротор. Являются ли эти поля потенциальными, соленоидальными? Вычислить поток векторных полей \mathbf{a} и \mathbf{b} через сферу $S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

23. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{|r|^3}$ через сферу $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$.

24. Пусть \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} — дифференцируемые векторные поля, u — дважды дифференцируемая скалярная функция в области $G \subset R^3$ $\mathbf{b} = \operatorname{grad} u$ и $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Доказать, что для того чтобы $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция u удовлетворяла в G уравнению $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$ (тем самым доказательство теоремы Гельмгольца сводится к решению в области G уравнения вида $\Delta u = f(x, y, z)$).

С помощью теоремы Остроградского — Гаусса вычислить поток векторного поля \mathbf{a} через замкнутую поверхность S , если:

25. $\mathbf{a} = (1+2x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 4\}$.

26. $\mathbf{a} = 2xi - yj + zk$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 3z = x^2 + y^2\}$.

Установить, какие из следующих векторных полей соленоидальны:

27. $\mathbf{a} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 + x^2)\mathbf{k}$.

28. $\mathbf{a} = (1+2xy)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + (z^2y - 2yz + 1)\mathbf{k}$.

С помощью теоремы Стокса найти циркуляцию вектора \mathbf{a} по контуру γ , если

29. $\mathbf{a} = yi - xj + zk$; $\gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$.

30. $\mathbf{a} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$; $\gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9, 3y + 4z = 5\}$.

*) Г. Гельмгольц (1821 — 1894) — немецкий физик и физиолог.

§ 53. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

53.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА; ИХ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ

Пусть Y — некоторое множество действительных чисел, $\Phi(y)$ и $\Psi(y)$ — две функции, определенные на Y , $\Phi(y) \leq \Psi(y)$ и функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y) : y \in Y, x \in [\Phi(y), \Psi(y)]\}. \quad (53.1)$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) dx \quad (53.2)$$

называются *интегралами, зависящими от параметра*, а переменная y называется *обычно параметром*.

Часто встречается тот частный случай такого типа интегралов, когда функции Φ и Ψ постоянны, т. е. интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (53.3)$$

Если Y является множеством всех натуральных чисел $Y = N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, то, полагая $f(x, n) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, интеграл (53.3) можно переписать в виде

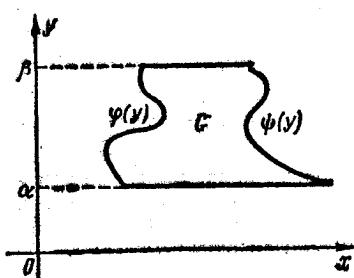


Рис. 216

$$\int_a^b f_n(x) dx, n = 1, 2, \dots$$

Тем самым получилась числовая последовательность, образованная интегралами от функций некоторой функциональной последовательности.

Мы рассмотрим случай, когда множество Y представляет собой отрезок $[\alpha, \beta]$, функции $\Phi(y)$ и $\Psi(y)$ непрерывны на этом отрезке и $\Phi(y) \leq \Psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Пусть графики функций $\Phi(y)$ и $\Psi(y)$ и, быть может, отрезки прямых $y = \alpha$ и $y = \beta$ образуют границу ограниченной области G (рис. 216). Она, очевидно, квадрируема (см. п. 44.1). В этом случае множество (53.1), на котором определена функция $f(x, y)$, является замыканием \bar{G} указанной области G :

$$\bar{G} = \{(x, y) ; \alpha \leq y \leq \beta, \Phi(y) \leq x \leq \Psi(y)\}. \quad (53.4)$$

В дальнейшем мы изучим свойства функции $\Phi(y)$ (ее непрерывность, правила ее дифференцирования и интегрирования)

в зависимости от свойств функций $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Некоторые из этих свойств были получены раньше при изучении кратного интеграла. Так, например, лемма, доказанная в п. 45.1, дает условия, при которых интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией этого параметра. Сформулируем эту лемму в обозначениях настоящего параграфа в виде теоремы.

Теорема 1. *Если функция $\bar{f}(x, y)$ непрерывна на замыкании \bar{G} области G (см. (53.4)), то функция $\Phi(y)$, задаваемая формулой (53.2) непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

Утверждению этой теоремы можно придать следующий вид:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (53.5)$$

Действительно, из теоремы 1 следует, что предел, стоящий в левой части равенства (53.5), равен $\Phi(y_0)$, а в силу непрерывности функций φ , ψ и \bar{f} , правая часть равенства также равна

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} \bar{f}(x, y_0) dx = \Phi(y_0).$$

В частности, для интеграла (53.3) имеем

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx,$$

т. е. в этом случае возможен предельный переход под знаком интеграла.

В теореме о предельном переходе под знаком интеграла можно ослабить требования, накладываемые на функцию $f(x, y)$, потребовав вместо ее непрерывности по совокупности переменных, лишь непрерывность по одной переменной и равномерное стремление к пределу по другой.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена для всех $x \in [a, b]$ $y \in Y$ и непрерывна по x на $[a, b]$ при любом фиксированном $y \in Y$. Тогда если при $y \rightarrow y_0$ ^{*)} функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ стремится к $\varphi(x)$ (см. п. 39.4), то*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим какую-либо последовательность $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \dots$, такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Тогда (см.

упражнение 5 в п. 39.4) последовательность $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ будет равномерно на отрезке $[a, b]$ стремиться к функции $\varphi(x)$.

^{*)} Здесь y_0 — число или одна из бесконечностей ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Отсюда следует (см. п. 36.4), во-первых, что $\varphi(x)$ непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, b]$, а во-вторых, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx,$$

и так как это верно для любой указанной последовательности $\{y_n\}$, то теорема доказана.

Перейдем к вопросу об интегрировании интегралов (53.2), зависящих от параметра.

Теорема 3. Пусть область G элементарна относительно обеих осей координат, т. е.

$$\begin{aligned} G = \{(x, y) : \alpha < y < \beta, \quad \varphi(y) < x < \psi(y)\} = \\ = \{(x, y) : a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\}, \end{aligned}$$

где функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функции φ_1 и ψ_1 — на отрезке $[a, b]$. Тогда, если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании \bar{G} области G , то

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi(y) dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y) dy \right] dx = \\ = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (53.6) \end{aligned}$$

Очевидно, теорема 3 является перефразировкой соответствующей теоремы о сведении кратного интеграла к повторному (см. п. 45.1).

53.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При изучении дифференциальных свойств интегралов, зависящих от параметра, рассмотрим сначала интегралы вида (53.3).

Теорема 4 (правило Лейбница). Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в замкнутом прямоугольнике $\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad \alpha \leq y \leq \beta\}$, то функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Таким образом, чтобы при сделанных предположениях про-дифференцировать интеграл, зависящий от параметра, достаточно продифференцировать подынтегральное выражение, оставляя пределы интегрирования неизменными.