то

$$0 \leqslant \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где ε — фиксированное выше число.

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если} \quad x_{i-1} \leqslant x < x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ 0, & \text{если} \quad x < \xi \text{ или } x \geqslant \eta. \end{cases} \tag{55.9}$$

Очевидно $\varphi(x)$ — финитная ступенчатая функция,

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b) \text{ и } \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Следовательно,

$$\int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx - \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{55.10}$$

при этом поскольку $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $\xi \leqslant x < \eta$, то

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0.$$

Из неравенств (55.8) и (55.10) имеем:

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx = \int_a^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Полагая, например, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и обозначая соответствующие финитные ступенчатые функции φ через φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность финитных ступенчатых функций φ_n, для которой выполняется утверждение леммы. □

Доказательство теоремы. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $[\xi, \eta)$. Тогда для любого интервала $(a, b) \supset [\xi, \eta)$ будем иметь

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b \chi(x) \sin \nu x\,dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_{\xi}^{\eta} \sin \nu x\,dx = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0,$$

ибо

$$\left| \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} \right| \leqslant \frac{|\cos \nu\xi| + |\cos \nu\eta|}{\nu} \leqslant \frac{2}{\nu} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Так как любая финитная ступенчатая функция является линейной комбинацией конечного числа характеристических функций полуинтервалов рассмотренного вида, то утверждение теоремы справедливо и для любой финитной ступенчатой функции.

Если теперь функция f является абсолютно интегрируемой на промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$, согласно лемме существует финитная ступенчатая функция φ, такая, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этой ступенчатой функции (поскольку для ступенчатых функций теорема уже доказана) существует такое ν_ε, что при $|\nu| \geqslant \nu_\varepsilon$

$$\left| \int_a \varphi(x) \sin \nu x\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, используя тождество $f(x) = [f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$, при $|\nu| \geqslant \nu_\varepsilon$ получим

$$\left| \int_a^b f(x) \sin \nu x\, dx \right| \leqslant \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \sin \nu x\, dx \right| +$$
$$+ \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx +$$
$$+ \left| \int_a^b \varphi(x) \sin \nu x\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x\, dx = 0$.

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x\, dx = 0. \ \square$$

55.3. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ. ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найдем удобное для исследований выражение частичной суммы $S_n(x; f)$ ряда Фурье функции f, называемой также просто *суммой Фурье n-го порядка* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *этой функции*. Подставив в $S_n(x; f)$ выражения для коэффициентов Фурье (55.6),

получим:

$$S_n(x;\ f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt. \qquad (55.11)$$

Положим

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt, \qquad (55.12)$$

тогда формула (55.11) перепишется в виде

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt. \qquad (55.13)$$

Функция $D_n(t)$ называется *ядром Дирихле*, а интеграл, стоящий в правой части равенства (55.13), — *интегралом Дирихле*.

Лемма 3. *Ядро Дирихле*:

1) *четная непрерывная* 2π-периодическая функция, причем

$$D_n(0)=n+\frac{1}{2};$$

2) *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt=1; \qquad (55.14)$$

3) *при* $t\neq 2\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$:

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \qquad (55.15)$$

Доказательство. Непрерывность, четность и существование периода, равного 2π, для ядра Дирихле $D_n(t)$ непосредственно следует из его определения, т. е. из формулы (55.12). Из этой же формулы следует и равенство (55.14): чтобы его получить, достаточно проинтегрировать по отрезку $[-\pi,\ \pi]$ обе части ра-

венства (55.12):

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = \pi$$

ибо при $k=1, 2, \ldots$: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = 0$.

Докажем теперь формулу (55.15). Имеем:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}t - \sin\frac{2k-1}{2}t\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\quad t \neq 2\pi k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$$

Отметим, что в силу четности ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt,$$

поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt.$$

Отсюда и из свойства 2° ядра Дирихле следует, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1. \tag{55.16}$$

Заметим еще, что правая часть равенства (55.15) имеет смысл лишь при $t \neq 2\pi k$, k — целое. Но поскольку

$$\lim_{t\to 2k\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 2k\pi} D_n(t) = n+\frac{1}{2},$$

то функцию $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ можно доопределить при $t=2\pi k$, $k=0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$, считая ее значение в каждой из этих точек по

определению равным $n+\frac{1}{2}$. Доопределенная указанным способом функция непрерывна при $t=2\pi k$ для всех целых k.

Вернемся к рассмотрению функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Нас будет интересовать, в частности, предел последовательности частичных сумм $S_n(x; f)$ ее ряда Фурье. Заметим, что непосредственно перейти к пределу при $n\to\infty$ в правой части равенства (55.13), т. е. перейти к пределу под знаком интеграла, нельзя, так как предел ядра Дирихле при $n\to\infty$ не существует. Продолжим функцию f с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ в 2π-периодическую функцию и обозначим ее также через f (подробнее о периодическом продолжении см. в п. 55.1).

Докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Для частичной суммы Фурье $S_n(x; f)$ абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции f справедливы формулы*

$$S_n(x; f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt \tag{55.17}$$

и

$$S_n(x; f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt. \tag{55.18}$$

Следствие. *Для любых $\delta\in(0, \pi)$, $x\in[-\pi, \pi]$ частичная сумма $S_n(x; f)$ ряда Фурье абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции f обладает следующим асимптотическим интегральным представлением:*

$$S_n(x; f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt+o(1),\quad n\to\infty. \tag{55.19}$$

Доказательство леммы. Выполним в интеграле Дирихле (55.13) замену переменной интегрирования $u=t-x$:

$$S_n(x; f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du. \tag{55.20}$$

Мы снова воспользовались здесь тем обстоятельством, что интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна ее периоду, не зависит от положения этого отрезка на действительной оси (см. п. 55.1), и применили это свойство к 2π-периодической по u функции $D_n(u) f(x+u)$. Итак формула (55.17) доказана.

Для доказательства формулы (55.18) представим правую часть равенства (55.20) в виде суммы двух интегралов с промежутками интегрирования $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$; в первом интеграле выполним замену переменной $u=-t$ и воспользуемся четностью ядра Дирихле:

$$D_n(-u)=D_n(u)$$

(см. лемму 3). В результате будем иметь:

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,f(x+u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)\,f(x+u)\,du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)\,f(x+u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,f(x-t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)\,f(x+u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt.$$

Формула (55.18) также доказана. □

Доказательство следствия. Зафиксируем число δ, $0<\delta<\pi$, и представим правую часть (55.18) в виде суммы двух интегралов следующим образом:

$$S_n(x;\ f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \tag{55.21}$$

Поскольку функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна, а следовательно, и ограничена на отрезке $[\delta, \pi]$ $\left(\text{именно для всех } t\in[\delta, \pi]\colon 0<\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\leqslant \dfrac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\right)$, а функция $f(x+t)+f(x-t)$ при любом фиксированном $x\in[-\pi, \pi]$ 2π-периодична по t и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то на $[\delta, \pi]$ абсолютно интегрируемо и их произведение $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$. Поэтому, согласно теореме Римана (см. теорему 2 в п. 55.2) второй интеграл в правой части равенства (55.21) стремится к нулю при $n\to\infty$, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=o(1),\quad n\to\infty.$$

Подставляя это выражение в (55.21) получим формулу (55.19). □

Из формулы (55.19) следует одно важное свойство рядов Фурье, называемое принципом локализации. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 3 (принцип локализации). *Если f — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая функция, то существование и значение предела последовательности ее частичных сумм Фурье $S_n(x; f)$ в любой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ зависит только от существования и значения предела при $n \to \infty$ интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)\,[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt,$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Подчеркнем, что в подынтегральное выражение указанного интеграла входят лишь значения функции f на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, и, тем самым, существование и значение предела частичных сумм ряда Фурье функции f зависит только от ее свойств в окрестности точки x_0, или, как говорят, от ее локальных свойств вблизи точки x_0.

Из принципа локализации следует, что если в любой, сколь угодно малой, окрестности точки x_0 функции f и g совпадают, то пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_0; f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_0; g)$ одновременно существуют или нет, причем если эти пределы существуют, то они равны. Это тем более интересно, что ряды Фурье таких функций вообще говоря, различны, ибо в формулы для коэффициентов Фурье входят значения функции по всему отрезку $[-\pi, \pi]$.

55.4. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ В ТОЧКЕ

В этом пункте будут рассматриваться 2π-периодические абсолютно интегрируемые на отрезке длины 2π функции, которые имеют только точки разрыва первого рода, вследствие чего в каждой точке x_0 числовой оси существуют односторонние пределы:

$$\lim_{h\to+0} f(x_0+h)=f(x_0+0),\quad \lim_{h\to+0} f(x_0-h)=f(x_0-0).$$

Определение 8 (Лебег *). *Точка x_0 называется регулярной точкой функции f, если*

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Очевидно, каждая точка непрерывности функции является ее регулярной точкой.

---

*) А. Л. Лебег (1875—1941)—французский математик.

Если x_0 — точка разрыва первого рода функции f, то под ее односторонними производными $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ будем здесь понимать пределы

$$f'_+(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h},$$

$$f'_-(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h}.$$

В случае, когда функция непрерывна в точке x, и, следовательно, $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$, сформулированное определение односторонних производных совпадает с данным раньше (см. п. 9.1).

Для удобства формулировки теоремы о сходимости ряда Фурье введем обозначение

$$f_x^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \qquad (55.22)$$

Очевидно, что в регулярной точке x функция $f_x^*(t)$ имеет вид

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 5. *Для 2π-периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины 2π функции f интегралы*

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt, \quad 0 < \delta \leqslant \pi, \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (55.23)$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Действительно, для любого δ, $0 < \delta < \pi$ функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна, а поэтому и интегрируема по Риману на отрезке $[\delta, \pi]$. Функция же $f_x^*(t)$ (x фиксировано) абсолютно интегрируема на этом отрезке, следовательно и их произведение $\dfrac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируемо на отрезке $[\delta, \pi]$, т. е. при любом δ, $0 < \delta < \pi$, интеграл

$$\int_\delta^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (55.24)$$

сходится (см. лемму 2 в п. 33.5).

Выберем теперь $\delta > 0$ так, чтобы на отрезке $[0, \delta]$ функция $f_x^*(t)$ не имела особых точек (см. п. 55.1) кроме, быть может, точки $t = 0$, т. е. чтобы она при любом ε, $0 < \varepsilon < \delta$, была интегрируемой по Риману на отрезке $[\varepsilon, \delta]$; это всегда возможно, так как из предположения абсолютной интегрируемости функции f следует,

что у нее, а следовательно, и у функции f_x^* имеется лишь конечное число особых точек (см. снова п. 55.1).

Теперь заметим, что функции $\frac{f_x^*(t)}{t}$ и $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ эквивалентны при $t \to 0$, ибо

$$\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}=1;$$

поэтому по признаку сходимости интегралов, называемому признаком сравнения (см. следствие из теоремы 1 в п. 33.3), примененному к абсолютным величинам рассматриваемых функций, интегралы

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt,\quad \int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

одновременно сходятся или расходятся. В силу сходимости интеграла (55.24), отсюда сразу следует, что интегралы (55.23) также будут одновременно сходиться или расходиться. □

Теорема 4 (признак Дини). *Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π.*

Тогда, если x является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода и при некотором δ, $0<\delta<\pi$, интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt \tag{55.25}$$

сходится, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{55.26}$$

Следствие 1. *Если условия теоремы выполнены, то в любой регулярной точке функции f (в частности — во всех ее точках непрерывности) ряд Фурье этой функции сходится к ее значению в рассматриваемой точке.*

Следствие 2. *Если f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π и в точке x существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то ряд Фурье функции сходится в этой точке к значению* (55.26).

Следствие 3. *Ряд Фурье кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению* (55.26), *а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ к значению*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \tag{55.27}$$

Следствие 4. *Ряд Фурье непрерывной кусочно дифференцируемой на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции сходится в любой точке интервала* $(-\pi, \pi)$ *к значению функции в этой точке, а в точках* $x=-\pi$ *и* $x=\pi$ *к значению* (55.27).

Доказательство теоремы. Используя формулы (55.18) и (55.16) будем иметь

$$S_n(x;\ f)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \quad (55.28)$$

Пусть интеграл (55.25) сходится. Тогда, согласно лемме 5, сходится и интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

иначе говоря, функция $\dfrac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$. Поэтому, согласно теореме Римана (см. п. 55.2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0,$$

следовательно, в силу (55.28):

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;\ f)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \quad \square$$

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы в силу определения регулярной точки функции.

Докажем следствие 2. Согласно теореме 4 достаточно показать, что если существуют пределы $f(x+0)$, $f(x-0)$ и односторонние производные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, то интеграл (55.25) сходится при некотором $\delta>0$. Прежде всего, в силу существования конечного предела

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_x^*(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right]=f'_+(x)-f'_-(x),$$

функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена в некоторой окрестности точки $t=0$. Поэтому существует такое δ, $0<\delta<\pi$, что на отрезке $[0, \delta]$ функция $\frac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена и, следовательно, не имеет особых точек, вследствие чего она интегрируема по Риману на этом отрезке (см. п. 33.1, а также замечание 4 в п. 44.7). Функция, интегрируемая по Риману, абсолютно интегрируема, а поэтому интеграл (55.25) конечен. □

Для доказательства следствия 3 функцию f, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, продолжим периодически с периодом 2π с полуинтервала $[-\pi, \pi)$ на всю числовую ось и обозначим полученную функцию через $\bar{f}$. В силу определения кусочной дифференцируемости (см. определение 1 в п. 30.2) функция $\bar{f}$ удовлетворяет условиям следствия 2. Согласно этому следствию ряд Фурье функции $\bar{f}$, очевидно совпадающий с рядом Фурье для f, сходится в каждой точке x к

$$\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}.$$

Если $x \in (-\pi, \pi)$, то $\bar{f}(x \pm 0)=f(x \pm 0)$ и, следовательно, $\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. При $x=-\pi$ указанный ряд сходится к $\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}$, а при $x=\pi$ — к значению $\frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}$. В силу периодичности функции $\bar{f}$

$$\bar{f}(-\pi-0)=\bar{f}(\pi-0)=f(\pi-0),\ \bar{f}(\pi+0)=\bar{f}(-\pi+0)=f(-\pi+0).$$

Поэтому

$$\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}=\frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \ \square$$

Следствие 4 непосредственно вытекает из следствий 1 и 3. □

Заметим, что в формулах (55.26) и (55.27) сумма ряда Фурье функции f выражена через саму функцию f, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, а не через ее периодическое продолжение $\bar{f}$ на всю числовую ось.

Если функция f удовлетворяет условиям следствия 4, т. е. непрерывна и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и кроме того $f(-\pi)=f(\pi)$ (т. е. ее периодическое продолжение на всю числовую ось совпадает с ней всюду на $[-\pi, \pi]$, включая концы), то на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f равна сумме своего ряда Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Поэтому такая функция в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ может быть представлена с любой степенью точности частичной суммой ее ряда Фурье, т. е. линейной комбинацией синусов и косинусов кратных дуг (говорят также, что указанная функция аппроксимируется суммой простых гармоник *)). То, что в рассматриваемом случае период равен именно 2π не существенно: случай произвольного периода $T>0$ легко сводится к рассмотренному простой заменой переменного (см. п. 55.12).

Примеры 1. Найдем ряд Фурье функции $\operatorname{ch} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \, dx = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi (1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Из четности функции $\operatorname{ch} x$ следует, что для нее $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Функция $\operatorname{ch} x$ непрерывно дифференцируема и, следовательно, удовлетворяет условиям следствия 4 из теоремы 4; кроме того она принимает одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, поэтому ее ряд Фурье во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2} \cos nx \right).$$

Этот ряд сходится равномерно, что следует из его сравнения со сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Графики функции $\operatorname{ch} x$ и суммы $S(x)$ его ряда Фурье изображены на рис. 220.

2. Найдем ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В силу ее нечетности имеем

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

далее,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx \, dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh} \pi}{\pi (1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Функция $\operatorname{sh} x$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям следствия 4 из теоремы 4, но $\operatorname{sh}(-\pi) \neq \operatorname{sh} \pi$; поэтому во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$ ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$ схо-

*) Простой гармоникой называют (преимущественно в физике) выражение вида $A \cos nx + B \sin nx$, где A и B — постоянные.

дится к самой функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi,$$

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ — к значению $\frac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh} \pi}{2} = 0$.

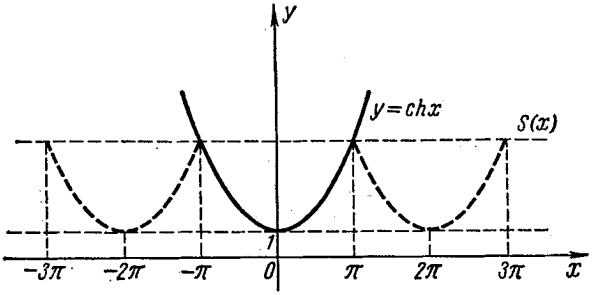

Рис. 220

Ряд Фурье функции $\operatorname{sh} x$ уже не сходится равномерно к ней на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (действительно, в противном случае его сумма должна была бы быть непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а она имеет разрывы на его концах). Графики функций $\operatorname{sh} x$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье для сравнения изображены на рис. 221.

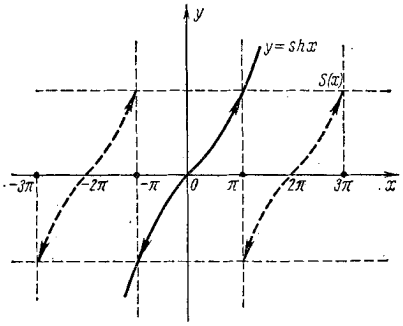

Рис. 221

3. Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Хотя функция f выглядит несколько искусственно, ее ряд Фурье имеет очень простой вид и позволяет получить ряд интересных формул.

Продолжим функцию f 2π-периодически с полуинтервала $[0, 2\pi)$ на всю числовую ось. В результате получится нечетная функция, в силу чего все ее коэффициенты Фурье a_n будут равными нулю: $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Вычислим коэффициенты b_n. Интегрируя по частям, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}.$$

Итак,

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{55.29}$$

В силу следствия 4 теоремы 4 для $0 < x < 2\pi$ имеет место равенство

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{55.30}$$

При $x = 0$ это равенство, очевидно, несправедливо, так как сумма получившегося ряда при $x = 0$ равна нулю, а $f(0) \neq 0$.

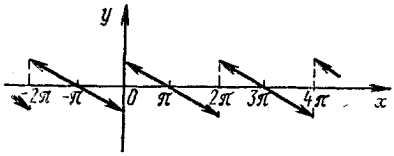

Рис. 222

График суммы ряда (55.29) изображен на рис. 222. Заметим, что этот ряд заведомо не сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, так как его сумма не является на нем непрерывной функцией (равномерная сходимость ряда (55.29) была исследована в п. 36.3).

Заменив в (55.30) x через $2x$ и деля обе части получившегося равенства на 2, получим

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{55.31}$$

Вычтем это равенство из (55.30):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1}, \qquad 0 < x < \pi. \tag{55.32}$$

Подставив получившееся выражение для $\frac{\pi}{4}$ в (55.31), получим

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Это равенство верно уже и при $x = 0$, а в силу нечетности обеих частей равенства и при $-\pi < x < 0$, т. е. на всем интервале $(-\pi, \pi)$, но, конечно, не на его концах, в которых сумма ряда равна нулю.

Отметим еще, что положив в (55.32) $x=\frac{\pi}{2}$, получим так называемый ряд Лейбница

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

который нам уже встречался раньше (см. п. 37.7, пример 2).

Упражнения. 5. Найти ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, и с помощью него вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

6. Найти ряд Фурье для функций

а) $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$;

б) $f(x)=x^2$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

в) $f(x)=x^2$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$, а на $[-\pi, 0)$ функция f продолжена нечетным образом.

С помощью полученных разложений вычислить суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

55.5*. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ГЁЛЬДЕРА

В этом пункте мы укажем более слабое достаточное условие, чем условие односторонней дифференцируемости (см. следствие 2 теоремы 4 в п. 55.4), также обеспечивающее сходимость интеграла (55.25) и, следовательно, сходимость ряда Фурье 2π-периодической абсолютно интегрируемой на отрезке длины, равной периоду, функции f к значению (55.26).

Определение 9. *Функция f, определенная на интервале (x_0, b) называется функцией, удовлетворяющей справа условию Гёльдера степени α в точке x_0, если существуют конечный правосторонний предел $f(x_0+0)$ и такие постоянные $M>0$ и $\delta>0$, что для любого h, удовлетворяющего условию $0<h<\delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x_0+h)-f(x_0+0)|<Mh^{\alpha}. \tag{55.33}$$

Функция f, определенная на интервале (a, x_0), называется функцией, удовлетворяющей слева условию Гёльдера степени α в точке x_0, если существуют конечный левосторонний предел $f(x_0-0)$ и такие постоянные $M>0$ и $\delta>0$, что для любого h, удовлетворяющего условию $0<h<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_0-h)-f(x_0-0)|<Mh^{\alpha}. \tag{55.34}$$

Функция f, удовлетворяющая в точке x_0 условию Гёльдера некоторой степени как справа, так и слева, называется функцией,

удовлетворяющей условию Гёльдера данной степени в рассматриваемой точке.

Функция, определенная на некотором отрезке, называется функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера данной степени на этом отрезке, если в каждой его точке она удовлетворяет условию Гёльдера указанной степени, причем в каждой внутренней точке отрезка как справа, так и слева: в левом конце отрезка — справа, а в правом — слева.

Отметим, что так называемое классическое условие Гёльдера данной степени состоит в следующем. Функция f называется *удовлетворяющей* в точке x классическому условию Гёльдера степени $\alpha > 0$, если существуют такие $\delta > 0$ и $M > 0$, что для всех h, $|h| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}.$$

Очевидно, что в этом случае, благодаря условию $\alpha > 0$, функция f всегда непрерывна в точке x: из $\lim\limits_{h \to 0} |h|^{\alpha} = 0$, $\alpha > 0$, следует, что $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

Аналогично определяются односторонние классические условия Гёльдера.

Таким образом, отличие рассматриваемого нами условия Гёльдера от классического состоит, в частности, в том, что согласно нашему определению функция, удовлетворяющая условию Гёльдера в некоторой точке, может быть разрывной в ней.

Условие Гёльдера степени единица обычно называется *условием Липшица* *).

Упражнения. 7. Доказать, что если функция удовлетворяет в некоторой точке условию Гёльдера степени α, то при $0 < \beta < \alpha$ она удовлетворяет в этой точке и условию Гёльдера степени β.

8. Доказать, что если функция имеет на отрезке ограниченную производную, то она удовлетворяет на нем условию Липшица с одной и той же постоянной M.

9. Доказать, что если функция удовлетворяет на некотором отрезке классическому условию Гёльдера степени $\alpha > 1$, то она постоянна на этом отрезке.

10. Доказать, что функция $f(x) = x^{\alpha}$, $x \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, удовлетворяет в точке $x = 0$ условию Гёльдера степени α и не удовлетворяет в ней никакому условию Гёльдера степени $\beta > \alpha$.

Теорема 5. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если она удовлетворяет в точке $x \in (-\pi, \pi)$ условию Гёльдера степени α, $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке и его сумма равна*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2};$$

*) Р. Липшиц (1832—1903) — немецкий математик.

в частности, если функция, кроме того, непрерывна в точке $x \in (-\pi, \pi)$, *то ее ряд Фурье сходится к значению функции в этой точке*:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;\ f) = f(x).$$

Если функция f *удовлетворяет условию Гёльдера справа в точке* $x = -\pi$ *и слева в точке* $x = \pi$, *то ее ряд Фурье сходится в этих точках и его сумма в них равна*

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Доказательство. Выберем δ, $0<\delta<\pi$, так, чтобы во-первых, на отрезке $[0, \delta]$ не было других особых точек функции $\frac{f_x^*(t)}{t^\alpha}$ кроме, быть может, точки $x=0$, а во-вторых, чтобы при всех h, $|h|<\delta$, функция f удовлетворяла условиям Гёльдера (55.33) и (55.34) в точке x. Тогда, в силу формулы (55.22) для функции $f_x^*(t)$, будем иметь

$$\left|\frac{f_x^*(t)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right| \leqslant \frac{2M}{t^{1-\alpha}}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$, $\alpha>0$, сходится, то в силу признака сравнения сходится в нашем случае и интеграл (55.25). Поэтому теорема 5 следует из теоремы 4. □

В заключение заметим, что если функция f в точке x имеет правостороннюю производную f'_+, то f удовлетворяет в этой точке справа условию Гёльдера степени 1. В самом деле, из существования конечного предела

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} = f'_+(x)$$

следует, что найдется такое $\delta>0$, что для всех h, $|h|<\delta$, будет справедливым неравенство

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} - f'_+(x)\right| < 1,$$

откуда, положив $M \overset{\text{def}}{=} |f'_+(x)|+1$, получим

$$-M < \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h} < M;$$

следовательно,

$$|f(x+h)-f(x+0)| \leqslant M|h|, \qquad |h|<\delta.$$

Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для левосторонних производных.

Задача 35. Функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *функцией класса Гёльдера* $H^{\alpha}(M)$ на этом отрезке, если для каждой пары точек x и $x+h$ этого отрезка, $x \in [a, b]$, $x+h \in [a, b]$, выполняется неравенство

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha},$$

иначе говоря, если функция f удовлетворяет классическому условию Гёльдера одной и той же степени α и с одной и той же постоянной M во всех точках отрезка $[a, b]$.

Доказать, что если 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на отрезке длины 2π функция принадлежит на некотором отрезке $[a, b]$ классу Гёльдера $H^{\alpha}(M)$, $0<\alpha \leqslant 1$, $M>0$, то на всяком отрезке $[a', b']$, содержащемся в интервале (a, b): $0<a<a'<b'<b<2\pi$ ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно.

55.6. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

Пусть функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, а следовательно, 2π-периодически продолжаема на всю вещественную ось. Пусть $S_n(x)$ — ее суммы Фурье, а $D_n(x)$ — ядра Дирихле, $n=0, 1, 2, \ldots$ (см. (55.11) и (55.12)).

Рассмотрим средние арифметические:

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1},$$

$$\Phi_n(x)=\frac{D_0(x)+D_1(x)+\ldots+D_n(x)}{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \ldots. \tag{55.35}$$

Сумма $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера**) n-го порядка функции f, а $\Phi_n(x)$ — *ядром Фейера* n-го порядка.

Из формулы

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\, du$$

(см. (55.17)) получаем

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x+u)\, du. \tag{55.36}$$

Будем исследовать поведение сумм $\sigma_n(x)$ при $n \to \infty$, т. е. рассмотрим суммирование ряда Фурье методом средних арифметических (см. п. 35.15).

Изучим прежде всего свойства ядра Фейера.

Лемма 6. *Ядро Фейера обладает следующими свойствами.*

1°. *Функция* $\Phi_n(x)$ *является четной непрерывной* 2π-*периодической, причем*

$$\Phi_n(0)=\frac{n+1}{2}; \tag{55.37}$$

*) Л. Фейер (1880—1959) — венгерский математик.

2°. *Для всех t ядро Фейера $\Phi_n(t)$ неотрицательно*: $\Phi_n(t) \geqslant 0$;

3°. $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1$;

4°. При $t \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Следствие. *При любом фиксированном δ, $0 < \delta < \pi$, имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi}\Phi_n(t) = 0. \tag{55.38}$$

Доказательство. Сначала докажем свойство 1°. Четность, непрерывность и периодичность ядра Фейера следуют сразу в силу формулы (55.35) из тех же свойств ядра Дирихле (см. лемму 3 в п. 55.3). Далее, поскольку $D_k(0) = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}.$$

Докажем свойство 3°:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_k(t)\,dt = 1.$$

В силу четности ядра $\Phi_n(t)$ отсюда следует, что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = 1.$$

Докажем теперь свойство 4°, из которого, очевидно, следует свойство 2°. Для $t \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеем

$$(n+1)\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}[\cos kt - \cos(k+1)t] =$$
$$= \frac{1 - \cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}. \quad \square$$

Отметим, что формулу (55.37) можно получить, в силу непрерывности ядра Фейера, и предельным переходом из свойства 4°, устремляя t к нулю.

Доказательство следствия. Используя свойство 4° ядра Фейера, получим

$$0 \leqslant \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Поскольку правая часть получившегося неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то из полученной оценки сразу следует (55.38). □

Примерный вид графика ядра Фейера изображен на рис. 223.

В этом пункте будем рассматривать только непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f, принимающие на его концах равные значения: $f(-\pi) = f(\pi)$. Очевидно, каждую такую функцию можно продолжить 2π-периодически с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю числовую ось $\boldsymbol{R}$. Полученная функция, которую обозначим через $\bar{f}$, будет непрерывна на всей оси $\boldsymbol{R}$.

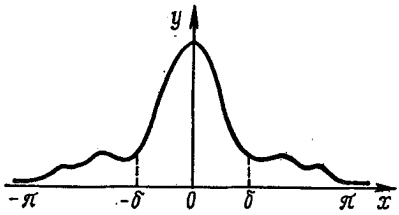

Рис. 223

Исходная функция f, как всякая непрерывная на отрезке функция, ограничена, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [-\pi, \pi]$. Ясно, что тогда

$$|\bar{f}(x)| \leqslant M, \qquad x \in \boldsymbol{R},$$

т. е. функция $\bar{f}$ ограничена на всей оси $\boldsymbol{R}$.

Кроме того, функция $\bar{f}$ равномерно непрерывна на всей оси $\boldsymbol{R}$. В самом деле, будучи непрерывной на любом конечном отрезке, например, на $[0, 4\pi]$, она равномерно непрерывна на нем (см. теорему 5 в п. 19.6). Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, $0 < \delta < 2\pi$, что для всех $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, $|x_2 - x_1| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Но для произвольных x_1' и x_2' таких, что $|x_2' - x_1'| < \delta$ найдутся целые числа n и m, для которых $x_1 \overset{\text{def}}{=} x_1' - 2\pi n \in [0, 4\pi]$, $x_2 \overset{\text{def}}{=} x_2' - 2\pi m \in [0, 4\pi]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, а поскольку в силу 2π-периодичности $\bar{f}(x_1) = \bar{f}(x_1')$, $\bar{f}(x_2) = \bar{f}(x_2')$, то

$$|\bar{f}(x_2') - \bar{f}(x_1')| = |\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции $\tilde{f}$ на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$.

В дальнейшем будем периодически продолженную функцию обозначать тем же символом f, что и продолжаемую.

Теорема 6 (Фейер). *Если функция непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *и принимает на его концах равные значения, то последовательность ее сумм Фейера сходится равномерно на этом отрезке к самой функции.*

Следствие. *Если ряд Фурье непрерывной на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции, принимающей на его концах равные значения, сходится в некоторой точке, то он сходится к значению функции в этой точке.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Продолжим ее 2π-периодически на всю числовую ось $\boldsymbol{R}$. Оценим разность $f(x)-\sigma_n(x)$ между функцией f и ее суммой Фейера σ_n, используя представление суммы Фейера в виде (55.36) и свойства ядра Фейера, доказанные в лемме 6 и ее следствии. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Имеем

$$|f(x)-\sigma_n(x)| = \left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)[f(x)-f(x+t)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x)-f(x+t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}, \qquad (55.39)$$

где $\delta>0$ выбрано так, что значение модуля непрерывности $\omega(\delta; f)$ функции f удовлетворяет неравенству

$$\omega(\delta; f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это возможно, ибо функция f равномерно непрерывна на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$. Поэтому для любого $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x)-f(x+t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega(\delta; f)}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (55.40)$$

Оставшиеся два интеграла оцениваются одинаковым способом: функция f ограничена на всей числовой прямой, т. е. сущест-

вует такая постоянная $M>0$, что для всех $x\in \boldsymbol{R}$ имеет место неравенство

$$|f(x)|\leqslant M.$$

Следовательно, для любого $x\in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,[|f(x)|+|f(x+t)|]\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt\leqslant\frac{2M}{\pi}\max_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi}dt=$$

$$=\frac{2M(\pi-\delta)}{\pi}\max_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi_n(t)<2M\max_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}\Phi_n(t).$$

Согласно следствию из леммы 6 правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому существует такое n_0, что при всех $n\geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{55.41}$$

Аналогично, для любого $x\in \boldsymbol{R}$ и всех $n\geqslant n_0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)\,|f(x)-f(x+t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{55.42}$$

Из (55.39), (55.40), (55.41) и (55.42) для произвольного $x\in \boldsymbol{R}$ и всех $n\geqslant n_0$ имеем

$$|f(x)-\sigma_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится равномерно на всей числовой оси R к функции f. □

Доказательство следствия. Всякий сходящийся ряд суммируется методом средних арифметических к своей сумме (см. п. 35.15). Поэтому, если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции, принимающей на его концах одинаковые значения, сходится в некоторой точке к какому-то числу A, то предел последовательности средних арифметических частичных сумм, т. е. сумм Фейера, также равен A: если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0;f)=A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=A$. Но согласно доказанной теореме $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=f(x_0)$, следовательно и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0;f)=f(x_0)$. □

Подчеркнем, что ряд Фурье функции, непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$ и принимающей на его концах одинаковые значения,

может расходиться в ряде точек. Однако, согласно доказанному, если он сходится в некоторой точке, то обязательно к значению самой функции в этой точке.

В заключение заметим, что для непрерывной на отрезке функции, принимающей на его концах одинаковые значения, ряд Фурье, независимо от его сходимости или расходимости в отдельных точках, позволяет однозначно восстановить указанную функцию: достаточно образовать из его частичных сумм суммы Фейера — их последовательность уже сходится, и притом равномерно, к самой функции. Таким образом, даже изучение расходящегося ряда может оказаться полезным.

55.7. ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Определение 10. *Функции вида*

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx+B_k\sin kx \quad A_n^2+B_n^2>0$$

называются тригонометрическими многочленами (полиномами) порядка n, $n=0, 1, 2, \ldots$ *).

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Действительно, в силу теоремы 6 (см. п. 55.6) в качестве такого тригонометрического полинома можно взять, например, соответствующую сумму Фейера $\sigma_n(x)$, являющуюся, очевидно, тригонометрическим полиномом порядка не выше n.

Теорема 8 (Вейерштрасс). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждого $\varepsilon>0$ существует алгебраический многочлен $P(x)$ такой что*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Доказательство. Отобразим отрезок $[0, \pi]$ линейно на отрезок $[a, b]$:

$$x=a+\frac{b-a}{\pi}t, \quad 0\leqslant t\leqslant\pi, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

и пусть $f^*(t)=f\left(a+\frac{b-a}{\pi}t\right)$. Функция f^* определена этой формулой на $[0, \pi]$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$, т. е. положим

$$f^*(t)=f^*(-t), \quad \text{если} \quad t\in[-\pi, 0].$$

*) Здесь считается, что $B_0=0$.

Полученная таким образом функция f^* непрерывна на $[-\pi, \pi]$ (почему?) и $f^*(-\pi) = f^*(-\pi)$. Поэтому, согласно теореме 7, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином $T(t)$ такой, что

$$|f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Как мы знаем, $\cos kt$ и $\sin kt$, $k = 1, 2, \ldots$, а следовательно, и тригонометрический полином $T(t)$ являются аналитическими функциями и поэтому разлагаются в степенные ряды, сходящиеся на всей действительной прямой и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом конечном отрезке (см. § 37):

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Если $P_n(t)$ суть частичные суммы этого ряда, то в силу его равномерной сходимости на отрезке $[-\pi, \pi]$ существует такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$

$$|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Беря для определенности $n = n_\varepsilon$ и полагая $P(t) = P_{n_\varepsilon}(t)$, имеем

$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Возвращаясь к переменной x, т. е. полагая $t = \pi \frac{x-a}{b-a}$, получим

$$\left| f(x) - P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \ a \leqslant x \leqslant b,$$

где $P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ — очевидно, многочлен. □

Замечание. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Возьмем какую-либо последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к нулю $\left(\text{например, } \varepsilon_n = \frac{1}{n}\right)$; тогда, согласно теореме 8, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует многочлен $P_n(x)$ (здесь n порядковый номер, а не степень многочлена) такой, что

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n, \ a \leqslant x \leqslant b. \tag{55.43}$$

Очевидно, при $n \to \infty$ имеем $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Итак, всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся на этом отрезке последовательности многочленов. Обратное, т. е. что всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся на некотором отрезке последовательности многочленов (и, более того, последовательности любых непрерывных функций), непрерывна на этом отрезке, уже доказано (см. теорему 8′ в п. 36.4).

Таким образом, теорема Вейерштрасса устанавливает характеристическое свойство непрерывных и только непрерывных функций.

Весьма любопытно отметить, что первоначально понятие непрерывности функции было введено нами в абстрактной общей форме, оно никак не было связано с конкретными классами элементарных функций, в частности — с многочленами, и тем самым ни с какими аналитическими представлениями функций через многочлены.

Теорема Вейерштрасса показывает, что введенный таким образом класс непрерывных функций в известном смысле не очень далек от класса многочленов! Именно, какова бы ни была непрерывная на отрезке функция f и как мало бы ни было заранее заданное число $\varepsilon > 0$, всегда существует многочлен, отличающийся на всем отрезке от функции f не более чем на ε, т. е. аппроксимирующий (приближающий) ее с любой, наперед заданной степенью точности! Нетрудно получить и аналитическое представление в виде ряда многочленов для непрерывной на отрезке функции. Из (55.43) имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{55.44}$$

или

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \tag{55.45}$$

($P_n(x)$ — многочлены), причем стремление к пределу в (55.44) и сходимость ряда (55.45) происходят равномерно на отрезке $[a, b]$. При этом, как существование предела (55.44), так и существование разложения (55.45) являются необходимым и достаточным условием непрерывности функции f на рассматриваемом отрезке. Это оправдывает интуитивное представление о функции как об аналитическом выражении, составленном из независимой переменной и постоянных посредством алгебраических и аналитических операций.

Аналогичные замечания можно сделать и по поводу первой теоремы Вейерштрасса (теорема 7).

55.8. ПОЛНОТА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ СТЕПЕНЕЙ x В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом пункте мы перефразируем доказанные выше теоремы и выведем из них некоторые простые следствия.

Определение 11. *Пусть X — некоторое множество функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Система функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{55.46}$$

называется полной для множества X в смысле равномерного приближения, если, какова бы ни была функция $f \in X$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное число функций $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}$ из системы (55.46) *и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что*

$$|f(x) - [\lambda_1 \varphi_{n_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{n_2}(x) + \ldots + \lambda_k \varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$.

Иначе говоря, система функций (55.46) образует полную систему для множества X, если любую функцию из X можно сколь угодно точно приблизить конечными линейными комбинациями функций системы (55.46).

Используя понятие полноты системы, теоремы 7 и 8 предыдущего параграфа можно перефразировать соответственно следующим образом.

Теорема 7′. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна, в смысле равномерного приближения, для множества непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих на его концах равные значения.*

Теорема 8′. *Система целых неотрицательных степеней x, т. е. система*

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots, \tag{55.47}$$

полна в смысле равномерного приближения для множества всех непрерывных на любом заданном отрезке функций.

Определение 12. *Пусть функции f и g определены на отрезке $[a, b]$. Число*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx}$$

*называется средним квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$ функции f от функции g**).

Определение 13. *Система функций* (55.46) *называется полной в смысле среднего квадратичного приближения для некоторого множества X функций, определенных на отрезке $[a, b]$, если, какова бы ни была функция $f \in X$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная линейная комбинация функций системы* (55.46), *что ее среднее квадратичное отклонение на отрезке $[a, b]$ от функции f меньше ε.*

Теорема 9. *Система тригонометрических функций* (55.2) *полна в смысле среднего квадратичного приближения во множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, принимающих в точках π и $-\pi$ одно и то же значение.*

---

*) Можно сказать и «отклонение функции g от функции f», поскольку рассматриваемое выражение не меняет своего значения, если f и g поменять местами.

Доказательство. Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, причем $f(\pi)=f(-\pi)$. Согласно теореме 7′, для любого $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Отсюда для среднего квадратичного отклонения этого полинома от функции f имеем

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}dx}=\varepsilon. \quad \square$$

В дальнейшем мы увидим (см. п. 58.6), что ограничение $f(\pi)=f(-\pi)$, использованное нами при доказательстве теоремы 9 (только в этом случае можно было сослаться на теорему 7′), не является существенным. Именно, тригонометрическая система (55.2) полна в смысле среднего квадратичного во всем множестве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций и, более того, можно показать, что она полна в смысле среднего квадратичного и во множестве всех функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом.

Заметим, что тригонометрическая система (55.2) заведомо не полна во множестве всех непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций в смысле равномерного приближения, т. е. в смысле определения 11. Действительно, если функция f такова, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином T_ε, что

$$|f(x)-T_\varepsilon(x)|<\varepsilon, \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,$$

то из условия $T_\varepsilon(\pi)=T_\varepsilon(-\pi)$ при $\varepsilon\to 0$ следует, что $f(\pi)=f(-\pi)$.

При приближении функций в смысле среднего квадратичного тригонометрическими полиномами особую роль играют частичные суммы ряда Фурье приближаемой функции. В следующем пункте будет показано, что частичная сумма n-го порядка имеет наименьшее среднее квадратичное отклонение от данной функции по сравнению с любым тригонометрическим полиномом степени n.

Наконец, можно показать, что если функция f обладает интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, то отклонение от нее в смысле среднего квадратичного ее частичных сумм Фурье $S_n(x)$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$, или, как говорят, функция f с интегрируемым квадратом является пределом в смысле среднего квадратичного своих частичных сумм Фурье (см. об этом в п. 58.6). Все эти обстоятельства говорят в пользу изучения приближения функций в смысле среднего квадратичного отклонения.

Аналогично теореме 9 доказывается следующая теорема.

Теорема 10. *Система неотрицательных целых степеней x, т. е. система* (55.47), *полна в смысле среднего квадратичного приближения во множестве непрерывных на любом заданном отрезке функций.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$, согласно теореме 8′, существует такой полином P, что

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

откуда

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2\, dx} < \varepsilon. \quad \square$$

55.9. МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ. НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ И РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ

В этом пункте мы рассмотрим ряды Фурье для интегрируемых функций, квадрат которых также интегрируем (здесь интегрируемость понимается, вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Существенно заметить, что если функция f такова, что она имеет конечное число особых точек (см. п. 55.1) на отрезке $[-\pi, \pi]$, интегрируема по Риману по любому отрезку, не содержащему ни одной особой точки и ее квадрат f^2 интегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, то из неравенства

$$|f| \leqslant \frac{1 + |f|^2}{2}$$

следует, что функция $|f|$ интегрируема на этом отрезке. Обратное, вообще говоря, неверно. Существуют положительные функции $\left(\text{например, функция } \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$, интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$, квадрат которых, однако, уже не интегрируем на нем.

Таким образом, указанное множество функций с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом составляет собственное подмножество множества всех абсолютно интегрируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций.

Заметим, что аналогично вводится понятие функции с интегрируемым квадратом и для любого конечного промежутка.

Теорема 11. *Пусть f — функция с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом. Тогда если $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, dx, \qquad (55.48)$$

где минимум в правой части равенства берется по всем тригонометрическим многочленам T_n степени не выше n.

Если a_0, a_n, b_n, $n=1, 2, \ldots$, суть коэффициенты Фурье функции f, то справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{55.49}$$

называемое неравенством Бесселя *).

Доказательство. Пусть

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx+B_k\sin kx,$$

тогда, открывая квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx \tag{55.50}$$

и используя лемму 1 из п. 55.1 (в частности, ортогональность тригонометрической системы), получим

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k^2+B_k^2\right)-\\ &-2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n} A_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx+\right.\\ &\left.+B_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k^2+B_k^2\right)-\\ &-2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_kA_k-b_kB_k\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\\ &+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right]-\\ &-\pi\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k^2+b_k^2\right].\end{aligned} \tag{55.51}$$

Из полученного выражения видно, что величина (55.50) принимает наименьшее значение, когда $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, $k=1, 2, \ldots$, т. е. тогда, когда $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ порядка n функции f. Первое утверждение теоремы доказано.

*) Ф. Бессель (1784—1846) — немецкий астроном и математик.

Если $T_n(x) = S_n(x)$ — сумма Фурье порядка n, то из (55.51) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right], \quad (55.52)$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном n. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0,$$

очевидно, равносильное неравенству (55.49). □

Из неравенства Бесселя следует, что для функции с интегрируемым квадратом ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

сходится. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, поэтому в рассматриваемом случае $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Таким образом, мы еще раз установили стремление к нулю коэффициентов Фурье (см. п. 55.2), однако на этот раз для более узкого (как это отмечалось в начале этого пункта) класса функций, чем раньше, а именно для класса функций с интегрируемым квадратом.

В п. 58.6 будет показано, что на самом деле формула (55.49) справедлива со знаком равенства. Здесь мы докажем этот факт лишь для случая, когда функция f непрерывна и 2π-периодична.

Теорема 12. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$, — ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

называемое равенством Парсеваля *).

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ в силу полноты в смысле среднего квадратичного приближения системы тригоно-

*) М. Парсеваль (1755—1836 г.) — французский математик.

метрических функций (55.2) в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, для функции f существует тригонометрический полином $T(x)$ некоторого порядка k такой, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\varepsilon. \tag{55.53}$$

Согласно же теореме 11 (см. (55.48)), для суммы Фурье $S_k(x)$ того же порядка k выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx.$$

Отсюда и из формул (55.52) и (55.53) получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}a_n^2+b_n^2\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2<\varepsilon.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon>0$, то его левая часть равна нулю. □

Следствие. *Если выполнены предположения теоремы, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0.$$

Действительно, в силу теоремы 12 при $n\to\infty$ правая часть равенства (55.52) стремится к нулю. □

55.10. ХАРАКТЕР СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ. ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

Изучим связь рядов Фурье функции и ее производной.

Теорема 13. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и пусть*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Если функция f кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. определение 1 в п. 30.2), то

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье самой функции формальным почленным дифференцированием *).

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда, замечая, что $f(\pi) = f(-\pi)$, и интегрируя по частям, получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, dt = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt\, dt = f(t) \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = -na_n,$$

$$n = 1, 2, \ldots. \quad \square$$

Перейдем к изучению скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функций. Предварительно докажем лемму.

Лемма 7. *Пусть функция f имеет на отрезке непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка k $(k \geqslant 1)$* **), *причем*

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

---

*) При этом без каких-либо предположений о сходимости ряда Фурье производной.

**) Мы говорим, что некоторая функция имеет кусочно непрерывную производную на данном отрезке, если эта функция является кусочно непрерывно дифференцируемой функцией на указанном отрезке (см. определение I в п. 30.2). Тем самым, если функция имеет кусочно непрерывную производную на каком-то отрезке, то может случиться, что в конечном числе точек этого отрезка она вовсе не имеет производной. Например, функция $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет кусочно непрерывную производную, а в точке $x = 0$ не имеет производной.

Тогда

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon_n > 0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ *сходится.*

Доказательство. Применяя последовательно теорему 13 k раз, получим

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx,$$

где либо

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{55.54}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \tag{55.55}$$

причем по неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2 \, dx. \tag{55.56}$$

Положим $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. В силу неравенства (55.56) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ сходится.

Если справедливо (55.54), то

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Аналогично,

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Подобным же образом эта оценка получается и в случае (55.55). □

Теорема 14. *Пусть функция* f *имеет на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *непрерывные производные до порядка* $k-1$ *включительно и кусочно непрерывную производную порядка* k $(k \geqslant 1)$, *причем* $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. *Тогда ряд Фурье функции* f *равномерно и абсолютно на всем отрезке* $[-\pi, \pi]$ *сходится к самой функции* f *и*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$ ($\{\eta_n\}$ — *числовая последовательность*), *а* $S_n(x; f)$ — *сумма Фурье порядка* n *функции* f.

Таким образом, можно сказать, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно выполняется оценка

$$f(x) - S_n(x;\ f) = o\left(n^{-k+\frac{1}{2}}\right).$$

Предварительно заметим, что если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности неотрицательных чисел, таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.57}$$

Действительно, это неравенство сразу получается предельным переходом из неравенства Коши — Шварца

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2} \text{ при } N \to \infty \text{ (см. п. 18.1 и 35.8*)}$$

(отметим, что неравенство (55.57) является частным случаем неравенства (35.33) из п. 35.8* при $p = q = 2$).

Доказательство теоремы 14. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx, \tag{55.58}$$

$$S_n(x;\ f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

По лемме,

$$|a_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \quad |b_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \tag{55.59}$$

где ε_m таковы, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \tag{55.60}$$

сходится.

Применяя неравенства (55.57) и (55.59), оценим остаток $r_n(x)$ ряда (55.58):

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}}. \tag{55.61}$$

Положим

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2.$$

В силу сходимости ряда (55.60) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa_n = 0. \tag{55.62}$$

Далее, заметим, что на отрезке $[m-1, m]$ выполняется неравенство $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \frac{1}{x^{2k}}$ (рис. 224) и, следовательно, $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}$. Поэтому

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)\, n^{2k-1}}.$$

Таким образом, из (55.61) вытекает оценка

$$|r_n(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{\varkappa_n}{2k-1}}\,\frac{1}{\sqrt{n^{2k-1}}}. \tag{55.63}$$

Положим, наконец, $\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{\varkappa_n}$; в силу (55.62) $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Поэтому из неравенства (55.63) получаем

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

при этом бесконечно малая η_n не зависит от точки x.

Согласно следствию 4 из теоремы 4 п. 55.4 ряд (55.58) сходится к функции $f(x)$, следовательно, $r_n(x) = f(x) - S_n(x, f)$ и, таким образом, равномерная сходимость ряда Фурье с указанной оценкой доказана.

Его абсолютная сходимость также доказана, так как мы получили оценку (см. (55.61))

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

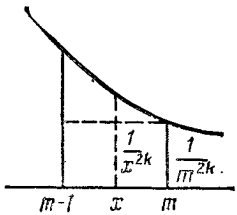

Рис. 224

из которой следует, что ряд Фурье функции f не только абсолютно сходится, но и что ряд, составленный из абсолютных величин его членов и даже, более того, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m|$$

сходится с той же «скоростью» $\frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$. □

Теорема 14 показывает, что чем глаже функция f, т. е. чем больше она имеет производных, тем быстрее сходится к ней ее ряд Фурье. При этом неравенство (53.63) дает возможность оценивать погрешность, получающуюся при замене ряда Фурье его n-й частичной суммой.

Из этой теоремы следует, в частности при $k=1$, что ряд Фурье всякой периодической периода 2π непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции (см. п. 30.2) равномерно на всем периоде сходится к самой функции.

Упражнения. 11. Будет ли ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, сходиться равномерно? Будет ли равномерно сходиться ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье этой функции?

12. Показать, что ряд Фурье непрерывной периодической кусочно-линейной функции (определение кусочно-линейной функции см. в упражнении 6 в п. 19.6) сходится к ней равномерно.

13. Используя результат предыдущего упражнения и результат упражнения 6 из п. 19.5, доказать теорему 7 из п. 55.7 о равномерной аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.

55.11. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

В этом пункте покажем, что ряды Фурье можно почленно интегрировать.

Теорема 15. *Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{55.64}$$

— ее ряд Фурье. Тогда

$$\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t\frac{a_0\,dx}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{a_0t}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt+\frac{b_n}{n}(1-\cos nt), \tag{55.65}$$

и ряд, стоящий справа, сходится равномерно.

Отметим, что утверждение о сходимости (и даже равномерной) ряда (55.65) имеет место без каких-либо предположений о сходимости исходного ряда (55.64).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t)=\int_0^t\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx. \tag{55.66}$$

Она непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеет на этом отрезке непрерывную производную $F'(t) = f(t) - \frac{a_0}{2}$ и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \pi a_0 = 0.$$

Поэтому в силу теоремы 14 ее ряд Фурье сходится к ней и притом равномерно. Обозначим ее коэффициенты Фурье через A_0, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда в силу сказанного

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt. \tag{55.67}$$

Найдем коэффициенты этого ряда. Интегрируя по частям, получим

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi} F(t) \frac{\sin nt}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] \sin nt\,dt = -\frac{b_n}{n}, \quad n = 1, 2 \ldots.$$

Аналогично, $B_n = \frac{a_n}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Чтобы найти A_0, положим в (55.67) $t = 0$. Тогда, заметив, что $F(0) = 0$, получим

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0, \text{ откуда } \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Итак,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt).$$

Отсюда и из (55.66) и следует формула (55.65), равномерная же сходимость ряда (55.65) следует из равномерной сходимости ряда (55.67). □

Задача 36. Доказать, что сходящийся тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

Отметим, что если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ и, следовательно, $a_0 = 0$, то в результате почленного интегрирования ряда Фурье функции f снова получается ряд Фурье некоторой функции $\tilde{f}$, а именно, как

следует из доказанного,

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

Поскольку для любой первообразной Φ для непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\Phi(\pi)-\Phi(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

то условие $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$ равносильно тому, что все первообразные функции f принимают на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения.

55.12. РЯДЫ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

Теория тригонометрических рядов Фурье 2π-периодических функций легко переносится и на случай периодических функций с любым периодом $2l$. Для этого достаточно отрезок $[-l, l]$ отобразить на $[-\pi, \pi]$ с помощью линейного отображения:

$$y=\frac{\pi}{l}x, \quad -l\leqslant x\leqslant l, \quad -\pi\leqslant y\leqslant \pi,$$

тогда вопрос сведется к уже рассмотренному случаю. *Рядом Фурье* функции f с периодом $2l$ по исходной переменной x называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n=1, 2, \ldots.$$

В частности, если функция f четная, то

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

а если f — нечетная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В заключение отметим еще так называемую *комплексную запись* рядов Фурье, часто используемую в математике и ее приложениях. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{55.68}$$

Как известно (см. п. 37.6),

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi} + e^{-nxi}), \tag{55.69}$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{nxi} - e^{-nxi}) = \frac{i}{2}(e^{-nxi} - e^{nxi}). \tag{55.70}$$

Подставив (55.69) и (55.70) в (55.68), получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i)\, e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)\, e^{-nxi}.$$

Полагая

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i),$$

имеем

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.71}$$

где, очевидно, $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Вспомнив, что $\cos\alpha \pm i \sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$ (см. п. 37.6), будем иметь

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx, \text{ *)}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

*) Определение интеграла от комплекснозначной функции действительного аргумента см. в п. 54.6.

или, объединив обе формулы и добавив случай $n=0$,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx, \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots. \tag{55.72}$$

Подставив (55.72) в (55.71), получим

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt. \tag{55.73}$$

Итак, мы записали ряд Фурье в комплексной форме и нашли соответствующие выражения для его коэффициентов.

Требует разъяснения лишь понятие сходимости ряда вида (55.73).

Частичной суммой порядка n ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.74}$$

называется сумма $S_n=\sum\limits_{k=-n}^{n} z_k$. Ряд (55.74) называется сходящимся, если существует $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, при этом S называется суммой ряда и пишется

$$S=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

§ 56. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

56.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy+b(y)\sin xy]\,dy, \tag{56.1}$$

где

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{56.3}$$

Формулы (56.2) и (56.3) напоминают формулы для коэффициентов Фурье.

Определение 1. *Интеграл* (56.1) *называется интегралом Фурье* функции f.

Подставляя (56.2) и (56.3) в интеграл (56.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty \cos xy + \sin ty \sin xy)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.4)$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет исходную функцию.

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция f кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей действительной прямой;*

2) *в точке x существуют производная справа $f'_+(x)$ и производная слева $f'_-(x)$. Тогда для указанной точки x справедлива формула*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.5)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (56.6)$$

где $\eta > 0$, а x — фиксированная точка, в которой существуют односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Очевидно, что интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt \qquad (56.7)$$

является пределом функции (56.6) при $\eta \to +\infty$, т. е. $S(\eta)$ является в этом смысле аналогом частичных сумм рядов Фурье.

Для каждого числа $\xi > 0$, согласно теореме об интегрировании интегралов, зависящих от параметра (см. п. 53.1), имеем

$$\int_0^{\eta} dy \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \cos y(x-t)\, dt = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\, dt \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\, dy =$$

$$= \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \frac{\sin \eta (x-t)}{x-t} dt. \qquad (56.8)$$

Действительно, в силу кусочной непрерывности функции $f(t)$ прямоугольник $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, можно разбить прямыми, параллельными оси Oy, на конечное число прямоугольников, на каждом из которых функция $f(t) \cos y(x-t)$ будет уже непрерывной, как функция двух переменных, вплоть до границы (если на границе указанных прямоугольников в нужном случае значениями функции f считать ее односторонние пределы, т. е. $f(t+0)$ или $f(t-0)$). Применяя теорему 3 из п. 53.1 к каждому прямоугольнику и суммируя полученные результаты, мы и получим формулу (56.8).

Из очевидного неравенства

$$|f(t) \cos y(x-t)| \leqslant |f(t)|$$

и сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ следует равномерная сходимость на отрезке $[0, \eta]$ относительно параметра y интеграла

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt, \qquad (56.9)$$

т. е. функция

$$F(y, \xi) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \cos y(x-t)\, dt$$

стремится к пределу (56.9) при $\xi \to +\infty$ равномерно на отрезке $[0, \eta]$.

Далее, функция $F(y, \xi)$ непрерывна по y. Действительно, функция f ограничена на отрезке $[-\xi, \xi]$: $|f(t)| \leqslant M$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Обозначим через $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $\cos y(x-t)$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Тогда $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, поэтому

$$|F(y+\Delta y, \xi) - F(y, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |f(t)|\, |\cos(y+\Delta y)(x-t) - \cos y(x-t)|\, dt \leqslant 2M\xi\omega(\Delta y) \to 0$$

при $\Delta y \to 0$.

В силу теоремы 2 п. 53.1 в левой части равенства (56.8) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\xi \to +\infty$.

В результате получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt.$$

Этот интеграл конечен, ибо (см. (56.6) и (56.9)) он равен $\int_0^{\eta} F(y)\,dy$, где функция $F(y)$ непрерывна как предел равномерно сходящегося при $\xi\to+\infty$ семейства непрерывных по y функций $F(y,\ \xi)$.

Интеграл $S(\eta)$ является аналогом интеграла Дирихле для рядов Фурье. Положив $u=t-x$ (ср. (55.17)), получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du.$$

Представив получившийся интеграл в виде суммы двух:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}$$

и выполнив в первом из них замену $u=-t$, получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt.$$

Вспоминая (см. п. 54.4), что при $\eta>0$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},$$

получим

$$S(\eta)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt-$$

$$-[f(x+0)+f(x-0)]\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt. \qquad (56.10)$$

Рассмотрим, например, первый интеграл, стоящий в правой части этого равенства. Разобьем его на два интеграла:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'_+(x),$$

то $\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ является кусочно-непрерывной функцией переменной t на отрезке $[0, 1]$, поэтому в силу теоремы 2 из п. 55.2

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0. \tag{56.11}$$

Функция $\frac{f(x+t)}{t}$ также кусочно-непрерывна на любом отрезке полуоси $t \geqslant 1$ и так как

$$\left| \frac{f(x+t)}{t} \right| \leqslant |f(x+t)|,$$

то

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{f(x+t)}{t} \right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} |f(x+t)| \, dt = \int_{x+1}^{+\infty} |f(s)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| \, ds < +\infty,$$

т. е. $\frac{f(x+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на этой полуоси и, следовательно, в силу той же теоремы

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin \eta t \, dt = 0. \tag{56.12}$$

Наконец, из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dt$ (см. п. 33.6), выполняя замену переменного $u = \eta t$, получаем

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = f(x+0) \lim_{\eta \to +\infty} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 0. \tag{56.13}$$

Из (56.11), (56.12) и (56.13) следует, что

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \sin \eta t \, dt = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Отсюда в силу (56.10) получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Поскольку предел, стоящий в левой части, равен интегралу Фурье (56.7), то равенство (56.5) доказано. □

Требования, накладываемые на функцию в этой теореме, можно ослабить, потребовав, например, чтобы функция была абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и удовлетворяла в каждой точке обобщенному условию Гёльдера. Мы не стали этого делать ради некоторого упрощения доказательства (ср. с доказательством теоремы 4 и ее следствий в п. 55.4).

Упражнение 1. Доказать, что если функция f в дополнение к наложенным на нее в теореме 1 ограничениям является четной или нечетной, то справедливы формулы: для четной функции

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt,$$

для нечетной

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt.$$

56.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЗАПИСИ ФОРМУЛЫ ФУРЬЕ

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ и во всех ее точках непрерывна и имеет односторонние производные. В этом случае для всех $x\in\boldsymbol{R}$ согласно теореме 1 справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.14)$$

В силу очевидного неравенства

$$|f(t)\sin y(x-t)|\leqslant|f(t)|$$

при ограничениях, наложенных на функцию f, существует также интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt,$$

причем в силу признака Вейерштрасса (см. п. 54.1) он равномерно сходится на всей числовой оси переменного y и, следовательно, является непрерывной функцией от y. Поэтому для любого числа η существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt, \tag{56.15}$$

причем в силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной y этот интеграл равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать существование несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt. \tag{56.16}$$

Чтобы получить нужные формулы, нам придется ввести еще одно обобщение понятия интеграла.

56.3. ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Введем следующее определение.

Определение 2. *Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке. Если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\, dx, \qquad \eta > 0,$$

то он называется главным значением интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ и обозначается буквами v. p. *)

$$v.\ p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x)\, dx. \tag{56.17}$$

Подчеркнем, что отличие этого определения от определения несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ в смысле определения п. 33.1 состоит в том, что там для функции φ, интегрируемой на любом

*) Главное значение — по-французски valeur principale.

конечном отрезке, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ определялся как предел интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx$ при независимом стремлении ξ к $-\infty$ и η к $+\infty$. Здесь же требуется существование лишь предела указанных интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)\,dx$ для частного случая, когда $\xi=-\eta$ и $\eta\to+\infty$.

Подобным же образом определяется и главное значение несобственного интеграла в точке: пусть $a<c<b$ и функция φ при любом $\varepsilon>0$ интегрируема, по Риману, на отрезках $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$ (естественно, предполагается также, что $a<c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon<b$); тогда главное значение интеграла $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,dx$ в точке c определяется формулой

$$v.\ p.\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} \varphi(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx\right].$$

Иногда, там, где это не может привести к недоразумениям, интеграл в смысле главного значения обозначается просто символом интеграла без букв $v.\ p.$

Если для некоторой функции существует несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла и оно совпадает с ее несобственным интегралом. Обратное неверно: у функции может существовать (и, следовательно, быть конечным) главное значение интеграла, а несобственный интеграл быть расходящимся.

Например, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существуют как несобственные, однако существуют в смысле главного значения, которое в обоих случаях равно нулю.

56.4. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Вернемся к формуле Фурье (56.14) и запишем ее, используя понятие главного значения интеграла, в другом виде. В силу нечетности по y подынтегральной функции в интеграле (56.16) имеем, согласно сформулированному определению главного значения интеграла

$$v.\ p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt=0. \qquad (56.18)$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с интегралом (56.14), получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(x-t)}\, dt, \tag{56.19}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (56.19) и называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

56.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если положить

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt,$$

то формула (56.19) примет вид

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\, e^{ixy}\, dy. \tag{56.20}$$

Определение 3. *Функция* Φ, *которая ставится в соответствие функции* f *формулой*

$$\Phi(y)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt, \tag{56.21}$$

называется преобразованием Фурье функции f *и обозначается* $F[f]$ *или* $\hat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция действительного аргумента. Отметим, что функция $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция f принимает только действительные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций. Употребив, например, для преобразования Фурье функции f обозначение $\hat{f}$, формулу (56.20) можно записать в виде

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy. \tag{56.20'}$$

Эта формула позволяет восстановить саму функцию f, если известно ее преобразование Фурье $\hat{f}$. Она называется *формулой обращения*.

Определение 4. *Функция Ψ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Psi(y) = v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iyt}\, dt, \tag{56.22}$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы (56.21) и (56.22) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит в себе, в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых интегралы в формулах (56.21) и (56.22) можно понимать как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения. Термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование F^{-1} обращает преобразование Фурье F. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция f имеет в каждой точке конечные односторонние производные, то*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Первая формула обращения, т. е. формула $F^{-1}[F[f]] = f$, является просто другой записью уже доказанной формулы (56.19).

Покажем справедливость второй формулы обращения. Поскольку косинус — четная функция, то в (56.14) можно переставить местами t и x:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(t-x)\, dt,$$

в силу же нечетности синуса (ср. (56.18))

$$v.\ p.\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(t-x)\, dt = 0.$$

Поэтому наряду с формулой (56.19) имеем также

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iy(t-x)}\, dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ity}\, dt \right] e^{-ixy}\, dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула может быть переписана в виде

$$F[F^{-1}[f]]=f. \square$$

Отметим, что справедливость формул обращения может быть доказана и при более слабых ограничениях на функцию, чем существование у нее в каждой точке односторонних производных.

Лемма 2. *Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно обратное преобразование Фурье). Тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2 для функции $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ также существует преобразование Фурье (соответственно обратное ему), причем*

$$F[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F[f_1]+\lambda_2 F[f_2]$$

(соответственно $F^{-1}[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F^{-1}[f_1]+\lambda_2 F^{-1}[f_2]$).

Это свойство называется *линейностью преобразования Фурье* (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из линейности интеграла и из формул (56.21) и (56.22).

Следствие. $F[0]=F^{-1}[0]=0$.

Действительно, например,

$$F[0]=F[0\cdot 0]=0\cdot F[0]=0.$$

Впрочем, это свойство следует, конечно сразу и из формул (56.21) и (56.22).

Лемма 3. *Преобразование Фурье F, так же как и обратное преобразование Фурье F^{-1}, являются взаимно однозначными отображениями множества непрерывных абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные, во множество функций, для которых интегралы* (56.21) *и* (56.22) *существуют в смысле главного значения.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь взаимную однозначность отображений F и F^{-1} — остальное уже доказано выше. Докажем, например, взаимную однозначность отображения F. Пусть $F[f_1]=F[f_2]$; тогда

$$F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]].$$

Отсюда согласно лемме 1, следует, что

$$f_1=f_2. \square$$

Преобразование Фурье во всяком случае определено для абсолютно интегрируемых функций. В следующих пунктах будут изучаться свойства этого преобразования. В дальнейшем же будет показано, как преобразование Фурье обобщается на более широкие классы функций, а именно на функции с интегрируемым квадратом (п. 58.7*) и на так называемые обобщенные функции (п. 59.7).