$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2+b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \tag{55.62}$$

называемое неравенством Бесселя *).

Доказательство. Пусть

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k\cos kx+B_k\sin kx,$$

тогда, открывая квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx \tag{55.63}$$

и используя лемму 1 из п. 55.1 (в частности, ортогональность тригонометрической системы), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k^2+B_k^2\right)-$$

$$-2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n} A_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx+\right.$$

$$\left.+B_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n} A_k^2+B_k^2\right)-$$

$$-2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_kA_k-b_kB_k\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+$$

$$+\pi\left[\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right]-\pi\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k^2+b_k^2\right]. \tag{55.64}$$

Из полученного выражения видно, что величина (55.63) принимает наименьшее значение, когда $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, $k=1, 2, \ldots$, т. е. тогда, когда $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ порядка n функции f. Первое утверждение теоремы доказано.

Если $T_n(x)=S_n(x)$ — сумма Фурье порядка n, то из (55.64) следует, что

*) Ф. Бессель (1784—1846) — немецкий астроном и математик.

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right],\quad(55.65)$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right]\geqslant 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном n. Переходя в нем к пределу при $n\to\infty$, получим неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2\right]\geqslant 0,$$

очевидно, равносильное неравенству (55.62). □

Из неравенства Бесселя следует, что для функции с интегрируемым квадратом ряд

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$$

сходится. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю, поэтому в рассматриваемом случае $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

Таким образом, мы еще раз установили стремление к нулю коэффициентов Фурье (см. п. 55.2), однако на этот раз для более узкого (как это отмечалось в начале этого пункта) класса функций, чем раньше, а именно для класса функций с интегрируемым квадратом.

В п. 60.6 будет показано, что на самом деле соотношение (55.62) справедливо со знаком равенства. Здесь мы докажем этот факт лишь для случая, когда функция f непрерывна и 2π-периодична.

Теорема 12. *Пусть f непрерывна на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и a_0, a_n, b_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$,— ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2,$$

называемое равенством Парсеваля *).

*) М. Парсеваль (1755—1836 г.)—французский математик.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon>0$, в силу полноты в смысле среднего квадратичного приближения системы, тригонометрических функций (55.2) в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, для функции f существует тригонометрический полином $T(x)$ некоторого порядка k такой, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\varepsilon. \tag{55.66}$$

Согласно же теореме 11 (см. (55.61)), для суммы Фурье $S_k(x)$ того же порядка k выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx.$$

Отсюда и из формул (55.65) и (55.66) получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}a_n^2+b_n^2\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_k(x)]^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2<\varepsilon.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon>0$, то его левая часть равна нулю. □

Следствие. *Если выполнены предположения теоремы, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0.$$

Действительно, в силу теоремы 12, при $n\to\infty$ правая часть равенства (55.65) стремится к нулю. □

55.10. ХАРАКТЕР СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ. ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

Изучим связь рядов Фурье функции и ее производной.

Теорема 13. *Пусть функция f непрерывна на отрезке* $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ *и пусть*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Если функция f кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (*см. определение* 1 *в п.* 30.2), *то*

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} -na_n\sin nx+nb_n\cos nx,$$

т. е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье самой функции формальным почленным дифференцированием *).

Доказательство. Пусть

$$f'(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx.$$

Тогда, замечая, что $f(\pi)=f(-\pi)$, и интегрируя по частям, получим:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}f(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt=nb_n,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin nt\,dt=f(t)\sin nt\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt=-na_n,$$

$$n=1,\ 2,\ \dots\ . \ \square$$

Перейдем к изучению скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функций. Предварительно докажем лемму.

---

*) При этом без каких-либо предположений о сходимости ряда Фурье производной.

Лемма 7. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $k(k\geqslant 1)$ *), причем*

$$f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi),\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

тогда коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют неравенствам

$$|a_n|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^k},\ |b_n|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^k},\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\varepsilon_n>0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2$ сходится.

Доказательство. Применяя последовательно теорему 13 k раз, получим

$$f^{(k)}(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx,$$

где либо

$$\alpha_n=\pm n^k a_n,\ \beta_n=\pm n^k b_n, \tag{55.67}$$

либо

$$\alpha_n=\pm n^k b_n,\ \beta_n=\pm n^k a_n, \tag{55.68}$$

причем, по неравенству Бесселя,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2+\beta_n^2\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^{(k)}(x)]^2\,dx. \tag{55.69}$$

Положим $\varepsilon_n=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$. В силу неравенства (55.69), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2$ сходится.

Если справедливо (55.67), то

$$|a_n|=\frac{|\alpha_n|}{n^k}\leqslant\frac{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}{n^k}=\frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Аналогично,

$$|b_n|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^k},\ k=1,\ 2,\ \ldots.$$

---

*) Мы говорим, что некоторая функция имеет кусочно-непрерывную производную на данном отрезке, если эта функция является кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией на указанном отрезке (см. определение 1 в п. 30.2). Тем самым если функция имеет кусочно-непрерывную производную на каком-то отрезке, то может случиться, что в конечном числе точек этого отрезка она вовсе не имеет производной. Например, функция $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет кусочно-непрерывную производную, а в точке $x=0$ не имеет производной.

Подобным же образом эта оценка получается и в случае (55.68). □

Теорема 14. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка k $(k \geqslant 1)$, причем $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j=0, 1, \ldots, k-1$. Тогда ряд Фурье функции f равномерно и абсолютно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции f и*

$$|f(x)-S_n(x;\ f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n=0$ ($\{\eta_n\}$ — *числовая последовательность*), *а* $S_n(x; f)$ — *сумма Фурье порядка n функции f.*

Таким образом, можно сказать, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно выполняется оценка

$$f(x)-S_n(x;\ f)=o\left(n^{-k+\frac{1}{2}}\right).$$

Предварительно заметим, что если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности неотрицательных чисел таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2<+\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2<+\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.70}$$

Действительно, это неравенство сразу получается предельным переходом из неравенства Коши — Шварца

$$\sum_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N} v_n^2} \quad \text{при } N\to\infty \quad \text{(см. п. 18.1 и 35.8*)}$$

Отметим, что неравенство (55.70) является частным случаем неравенства (35.33) из п. 35.8* при $p=q=2$.

Доказательство теоремы 14. Пусть

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos mx+b_m\sin mx, \tag{55.71}$$

$$S_n(x;\ f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n} a_m\cos mx+b_m\sin mx.$$

По лемме,

$$|a_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \quad |b_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \tag{55.72}$$

где ε_m таковы, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \tag{55.73}$$

сходится.

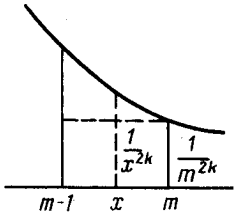

Рис. 252

Применяя неравенства (55.70) и (55.72), оценим остаток $r_n(x)$ ряда (55.71):

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant 2 \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}}. \tag{55.74}$$

Положим

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2.$$

В силу сходимости ряда (55.60), имеем

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0. \tag{55.75}$$

Далее заметим, что на отрезке $[m-1, m]$ выполняется неравенство $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \frac{1}{x^{2k}}$ (рис. 252) и, следовательно, $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}$.

Поэтому

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k-1)n^{2k-1}}.$$

Таким образом, из (55.74) вытекает оценка

$$|r_n(x)| \leqslant 2 \sqrt{\frac{\varkappa_n}{2k-1}} \frac{1}{\sqrt{n^{2k-1}}}. \tag{55.76}$$

Положим, наконец, $\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\varkappa_n}$; в силу (55.75), $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$. Поэтому из неравенства (55.76) получаем

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

при этом бесконечно малая η_n не зависит от точки x.

Согласно следствию 4 из теоремы 4 п. 55.4, ряд (55.71) сходится к функции $f(x)$; следовательно, $r_n(x)=f(x)-S_n(x, f)$ и, таким образом, равномерная сходимость ряда Фурье с указанной оценкой доказана.

Его абсолютная сходимость также доказана, так как мы получили оценку (см. (55.74))

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m|+|b_m| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

из которой следует, что ряд Фурье функции f не только абсолютно сходится, но и что ряд, составленный из абсолютных величин его членов, и даже, более того, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|+|b_m|$$

сходится с той же «скоростью» $\frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$. □

Теорема 14 показывает, что чем глаже функция f, т. е. чем больше она имеет производных, тем быстрее сходится к ней ее ряд Фурье. При этом неравенство (53.76) дает возможность оценивать погрешность, получающуюся при замене ряда Фурье его n-частичной суммой.

Из этой теоремы следует, в частности при $k=1$, что ряд Фурье всякой периодической периода 2π непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции (см. п. 30.2) равномерно на всем периоде сходится к самой функции.

Упражнения. **8.** Будет ли ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, сходиться равномерно? Будет ли равномерно сходиться ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье этой функции?

9. Показать, что ряд Фурье непрерывной периодической кусочно-линейной функции (определение кусочно-линейной функции см. в упражнении 6 в п. 19.6) сходится к ней равномерно.

10. Используя результат предыдущего упражнения и результат упражнения 6 из п. 19.5, доказать теорему 7 из п. 55.7 о равномерной аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.

55.11. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

В этом пункте покажем, что ряды Фурье можно почленно интегрировать.

Теорема 15. *Пусть f — непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция и*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+b_n \sin nx \tag{55.77}$$

— *ее ряд Фурье. Тогда*

$$\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t \frac{a_0 dx}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{a_0 t}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt+\frac{b_n}{n}(1-\cos nt) \qquad (55.78)$$

и ряд, стоящий справа, сходится равномерно.

Отметим, что утверждение о сходимости (и даже равномерной) ряда (55.78) имеет место без каких-либо предположений о сходимости исходного ряда (55.77).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t)=\int_0^t\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx. \qquad (55.79)$$

Она непрерывна на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, имеет на этом отрезке непрерывную производную $F'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}$ и

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx-\pi a_0=0.$$

Поэтому, в силу теоремы 14, ее ряд Фурье сходится к ней, и притом равномерно. Обозначим ее коэффициенты Фурье через A_n, B_n, $n=1,\ 2,\ \dots$. Тогда, в силу сказанного,

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nt+B_n\sin nt. \qquad (55.80)$$

Найдем коэффициенты этого ряда. Интегрируя по частям, получим

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}F(t)\frac{\sin nt}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\sin nt\,dt=-\frac{b_n}{2},\quad n=1,\ 2,\ \dots .$$

Аналогично, $B_n=\frac{a_n}{n}$, $n=1,\ 2,\ \dots$.

Чтобы найти A_0, положим в (55.80) $t=0$. Тогда, заметив, что $F(0)=0$, получим

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n=0, \text{ откуда } \frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Итак,

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin nt+\frac{b_n}{n}(1-\cos nt).$$

Отсюда и из (55.79) и следует формула (55.78); равномерная же сходимость ряда (55.65) следует из равномерной сходимости ряда (55.80). □

Задача 37. Доказать, что сходящийся тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

Отметим, что если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$ и, следовательно, $a_0=0$, то в результате почленного интегрирования ряда Фурье функции f снова получается ряд Фурье некоторой первообразной F функции f, а именно, как следует из доказанного, первообразной

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

Для любой первообразной Φ непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\Phi(\pi)-\Phi(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

поэтому условие $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$ равносильно тому, что все первообразные функции f принимают на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ одинаковые значения.

Рассмотрим более подробно вопрос о первообразных функции f в этом случае. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$; следовательно,

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{55.81}$$

Если Φ — какая-либо первообразная функции f, то так как она отличается от функции $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ лишь на постоянную,

то ее ряд Фурье отличается от ряда Фурье функции только на постоянную. Согласно доказанному,

$$F(t) \underset{(55.78)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt;$$

следовательно, ряд Фурье функции Ф имеет вид

$$c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt,$$

т. е. получается формальным интегрированием (в смысле неопределенного интеграла) из ряда (55.81), причем так как $\Phi(-\pi) = \Phi(\pi)$ и производная $\Phi'(x) = f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$\Phi(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{55.82}$$

Для определения постоянной c в этом равенстве выбирают какое-либо значение x, при котором удается найти сумму стоящего в правой части равенства (55.82) ряда.

Теоремы о почленном дифференцировании и почленном интегрировании рядов Фурье помогают находить разложение в ряд Фурье функции, если известно разложение в ряд Фурье ее первообразной или производной.

Пример. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \ln(1 + 2r\cos x + r^2), \quad |r| < 1.$$

Так как при $|r| < 1$ справедливо неравенство (см. (55.37)) $1 + 2r\cos x + r^2 > 0$, то функция f непрерывна на всей действительной оси и, следовательно, у нее существует ряд Фурье. Производная функции f

$$(\ln(1 + 2r\cos x + r^2))'_x = -\frac{2r\sin x}{1 + 2r\cos x + r^2}$$

также является непрерывной на всей действительной оси функцией и для нее нам уже известно ее разложение в ряд Фурье (см. (55.41)):

$$(\ln(1 + 2r\cos x + r^2))'_x = -2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} r^n \sin nx.$$

Отсюда, согласно теореме 15, следует, что

$$\ln(1 + 2r\cos x + r^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{r^n}{n} \cos nx + C.$$

Положив $x=0$, получим

$$\ln(1+r)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}+C,$$

откуда, согласно разложению логарифма в ряд Тейлора при $|r|<1$, имеем $C=0$.

Таким образом, мы получили разложение

$$\ln(1+2r\cos x+r^2)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\cos nx,\quad |r|<1. \quad (55.83)$$

Заметим, что эта формула справедлива и при $r=1$, если только $x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n=0$, ±1, ±2, ..., ибо

$$\ln(1+2r\cos x+r^2)\Big|_{r=1}=\ln 2(1+\cos x)=2\ln 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|,$$

а для этой функции было получено раньше разложение (см. (55.35)), совпадающее с (55.83) при $r=1$.

В случае $r=-1$ ряд, стоящий в правой части формулы (55.83), расходится при $x=0$.

55.12. РЯДЫ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА

Теория тригонометрических рядов Фурье 2π-периодических функций легко переносится и на случай периодических функций с любым периодом $2l$. Для этого достаточно отрезок $[-l,\ l]$ отобразить на $[-\pi,\ \pi]$ с помощью линейного отображения:

$$y=\frac{\pi}{l}x,\quad -l\leqslant x\leqslant l,\quad -\pi\leqslant y\leqslant\pi,$$

тогда вопрос сведется к уже рассмотренному случаю. *Рядом Фурье* функции f с периодом $2l$ по исходной переменной x называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \quad n=1,\ 2,\ \dots .$$

В частности, если функция f четная, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

а если f — нечетная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt, \quad n=1,\ 2,\ \dots .$$

55.13. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ РЯДОВ ФУРЬЕ

В заключение отметим еще так называемую *комплексную запись* рядов Фурье, часто используемую в математике и ее приложениях. Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{55.84}$$

Как известно (см. п. 37.6),

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{nxi} + e^{-nxi}\right), \tag{55.85}$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{nxi} - e^{-nxi}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{-nxi} - e^{nxi}\right). \tag{55.86}$$

Подставив (55.85) и (55.86) в (55.84), получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i)e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)e^{-nxi}.$$

Полагая

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{1}{2}(a_n-b_n i),\quad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+b_n i),$$

имеем

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.87}$$

где, очевидно, $c_{-n}=\bar{c}_n$, $n=1,\ 2,\ \dots$. Вспомнив, что $\cos\alpha\pm$ $\pm i\sin\alpha=e^{\pm i\alpha}$ (см. п. 37.6), будем иметь

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-b_n i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,dx,\ ^{*)}$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+b_n i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx,\quad n=1,\ 2,\ \dots\ .$$

или, объединив обе формулы и добавив случай $n=0$,

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots\ . \tag{55.88}$$

Подставив (55.88) в (55.87), получим

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt. \tag{55.89}$$

Итак, мы записали ряд Фурье в комплексной форме и нашли соответствующие выражения для его коэффициентов.

Требует разъяснения лишь понятие сходимости ряда вида (55.87).

Частичной суммой порядка n ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.90}$$

---

*) Определение интеграла от комплекснозначной функции действительного аргумента см. в п. 54. 6.

называется сумма $S_n = \sum_{k=-n}^{n} z_k$.

Ряд (55.89) называется сходящимся, если существует $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, при этом S называют суммой ряда и пишут

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

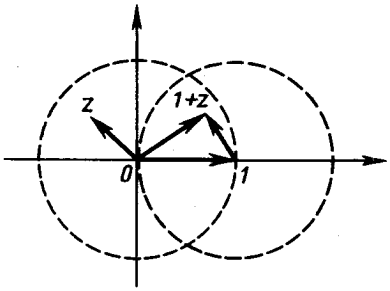

Рис. 253

55.14. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛОГАРИФМА В СТЕПЕННОЙ РЯД В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

С помощью разложений в ряды Фурье функций $\ln(1+2r\cos x+r^2)$ и $\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}$ (см. (55.83) и (55.42)) можно получить разложение функции $\ln(1+z)$, $|z|\leqslant 1$, $z\neq -1$, в степенной ряд в комплексной области, которое было приведено в п. 37.6 без доказательства:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|\leqslant 1, \quad z\neq -1. \tag{55.91}$$

Действительно, в п. 37.6 было показано, что из определения логарифма как функции, обратной показательной функции e^z, следует, что при условии $|z|\leqslant 1$, $z\neq -1$, имеет место равенство

$$\ln(1+z) = \ln|1+z| + i\arg(1+z), \tag{55.92}$$

где $-\pi < \arg(1+z) \leqslant \pi$.

Ясно, что все точки $1+z$ лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости и $z+1\neq 0$, поэтому значение $\arg(1+z)$ находится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 253), т. е.

$$\arg(1+z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{55.93}$$

если $1+z = x+iy$.

Положим

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); \tag{55.94}$$

тогда из условий $|z|\leqslant 1$, $z\neq -1$ следует, что $0\leqslant r\leqslant 1$, причем если $r=1$, то $\varphi\neq(2m+1)\pi$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Заметив, что

$$|1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)|=\sqrt{1+2r\cos\varphi+r^2} \tag{55.95}$$

и что

$$\arg(1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi))\underset{(55.93)}{=}\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}, \tag{55.96}$$

из (55.92) получим

$$\ln(1+z)\underset{(55.92)}{=}\ln|1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi)|+$$

$$+i\arg(1+r(\cos\varphi+i\sin\varphi))\underset{\substack{(55.95)\\(55.96)}}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+2r\cos\varphi+r^2)+i\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1+2\cos\varphi}\underset{\substack{(55.42)\\(55.83)}}{=}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\cos n\varphi+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\sin n\varphi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(re^{i\varphi})^n}{n}\underset{(55.94)}{=}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

Формула (55.91) доказана.

55.15. СУММИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

До сих пор мы для заданной функции находили ее разложение в тригонометрический ряд — ряд Фурье. Рассмотрим теперь обратную задачу: найти сумму заданного тригонометрического ряда. Иногда это удается сделать, сведя заданный тригонометрический ряд к степенно́му, сумма которого уже известна. Идея этого метода состоит в следующем: если ряды

$$p_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}p_n\sin nx \tag{55.97}$$

сходятся на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, кроме, быть может, конечного множества точек, то тем же свойством обладает и степенной ряд

$$p_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cos nx+i\sum_{n=1}^{\infty}p_n\sin nx=p_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n, \tag{55.98}$$

$$z=\cos x+i\sin x=e^{ix}.$$

Из того, что этот ряд сходится в некоторых точках единичной окружности $|z|=1$, следует, в силу первой теоремы

Абеля, что он сходится в открытом круге $|z|<1$ (см. п. 37.1), а поэтому его сумма

$$f(z)=f(re^{ix})=p_0+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n, \quad z=re^{ix}, \tag{55.99}$$

при $|z|=r<1$ является аналитической функцией.

Для тех точек $x\in[-\pi, \pi]$, в которых ряды (55.97) сходятся, положим

$$u(x)\overset{\text{def}}{=}p_0+\sum_{n=1}^{\infty} p_n\cos nx, \quad v(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty} p_n\sin nx. \tag{55.100}$$

Согласно второй теореме Абеля, для указанных x ряд (55.99) равномерно сходится при $0\leqslant r<1$, и, следовательно, функция $f(re^{ix})$, $0\leqslant r<1$, как функция переменного r непрерывно продолжаема на весь отрезок $[0, 1]$, т. е. для нее существует предел $\lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{ix})$; обозначив этот предел $f(e^{ix})$, получим

$$u(x)+iv(x)=p_0+\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}=\lim_{r\to 1-0} f(re^{ix})=f(e^{ix}). \tag{55.101}$$

Когда удается найти функцию f в явном виде, т. е. выразить ее через элементарные функции, и вычислить ее значение, стоящее в правой части равенства (55.101), то тем самым удается найти и суммы рядов (55.100). Действительно, суммой первого ряда является действительная часть правой части равенства (55.101), а суммой второго ряда — его мнимая часть.

Пример. Найдем сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}. \tag{55.102}$$

Этот ряд сходится для всех $x\neq 2\pi m$ и расходится при $x=2\pi m$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (см. (34.88) в п. 34.13). Все его члены, а следовательно, и его сумма — периодические периода 2π функции, поэтому достаточно сумму ряда (55.102) найти только для $x\in(0, 2\pi)$.

Наряду с рядом (55.102) рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{55.103}$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси (см. (34.87) в п. 34.13).

В данном случае для функции (55.99) имеем

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\underset{(55.91)}{=}-\ln(1-z)=\ln\frac{1}{1-z}, \quad |z|<1.$$

Следовательно, обозначая сумму ряда (55.102) через $u(x)$, а сумму ряда (55.103) через $v(x)$, получим при $z=e^{ix}$:

$$u(x)+iv(x)=\ln\frac{1}{1-e^{ix}},\quad 0<x<2\pi. \tag{55.104}$$

Заметив, что $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма, следующим образом:

$$\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{1}{(1-\cos x)-i\sin x}=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}-2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{55.105}$$

Из неравенства $0<x<2\pi$ следует, во-первых, что $0<\frac{x}{2}<\pi$, а поэтому $\sin\frac{x}{2}>0$, и, во-вторых, что $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$; следовательно,

$$\left|\frac{1}{1-e^{ix}}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}},\quad \arg\frac{1}{1-e^{ix}}=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi. \tag{55.106}$$

Таким образом,

$$\ln\frac{1}{1-e^{ix}}=\ln\left|\frac{1}{1-e^{ix}}\right|+i\arg\frac{1}{1-e^{ix}}\underset{(55.106)}{=}-\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\frac{\pi-x}{2}.$$

Из (55.105) и (55.106) имеем

$$u(x)+iv(x)\underset{(55.104)}{=}-\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\frac{\pi-x}{2}.$$

Отсюда сразу находится сумма ряда (55.102):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=u(x)=-\ln 2\sin\frac{x}{2},\quad x\neq 2\pi m,\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots\ .$$

Заметим, что заодно мы доказали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=v(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi.$$

Это разложение было получено нами раньше другим способом (см. (55.30)).

§ 56. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

56.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy, \tag{56.1}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{56.3}$$

Формулы (56.2) и (56.3) напоминают формулы для коэффициентов Фурье.

Определение 1. *Интеграл* (56.1) *называется интегралом Фурье функции* f.

Подставляя (56.2) и (56.3) в интеграл (56.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty\cos xy + \sin ty\sin xy)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{56.4}$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет исходную функцию.

Прежде чем это доказывать, докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Для любой функции f, абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая финитная непрерывная функция g, что*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon, \quad \operatorname{supp} g(x) \subset (a,\ b). \tag{56.5}$$

Доказательство. Нам уже известно (см. лемму 2 в п. 55.2), что для любой функции f, указанной в формулировке леммы, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция φ, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon, \quad \operatorname{supp} \varphi \subset (a,\ b). \tag{56.6}$$

Как всякая ступенчатая функция, она является конечной линейной комбинацией характеристических функций χ_i полуинтервалов $[\xi_i,\ \eta_i) \subset (a,\ b)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(x), \tag{56.7}$$

где λ_i — числа.

Поэтому если мы докажем, что для каждой функции χ_i существуют такие непрерывные финитные функции g_i, что

$$\operatorname{supp} g_i \subset (\xi_i,\ \eta_i) \subset (a,\ b) \tag{56.8}$$

и

$$\int_{\xi_i}^{\eta_i} |\chi_i(x) - g_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{56.9}$$

то, положив

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x), \tag{56.10}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|, \tag{56.11}$$

будем иметь

$$\int_a^b |\varphi(x) - g(x)|\, dx \underset{\substack{(56.7)\\(56.10)}}{=} \int_a^b \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_i(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \int_{\xi_i}^{\eta_i} |\chi_i(x) - g_i(x)|\, dx \underset{(56.9)}{<} \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \underset{(56.11)}{=} \lambda\varepsilon. \tag{56.12}$$

Из неравенств (56.6) и (56.12) следует, что

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=\int_a^b |[f(x)-\varphi(x)]+[\varphi(x)-g(x)]|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx+\int_a^b |\varphi(x)-g(x)|\,dx \underset{\substack{(56.6)\\(56.12)}}{<} (\lambda+1)\varepsilon. \qquad (56.13)$$

Кроме того, из соотношений (56.8) и (56.10) вытекает, что

$$\operatorname{supp} g\subset(a,\ b). \qquad (56.14)$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon>0$ условия (56.13) и (56.14) равносильны условиям (56.5).

Итак, достаточно доказать утверждение леммы для характеристических функций конечных полуинтервалов.

Пусть $\varepsilon>0$, χ — характеристическая функция полуинтервала $[\xi,\ \eta)$, $-\infty\leqslant a<\xi<\eta<b\leqslant+\infty$. Рассмотрим непрерывную на всей числовой оси функцию $g(x)$, график которой изображен на рис. 254:

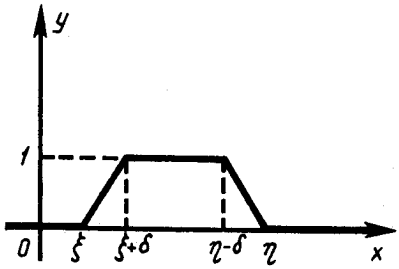

Рис. 254

$$g(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant\xi \text{ или } x\geqslant\eta,\\ \dfrac{x-\xi}{\delta}, & \text{если } \xi<x<\xi+\delta,\\ 1, & \text{если } \xi+\delta\leqslant x\leqslant\eta-\delta,\\ \dfrac{\eta-x}{\delta}, & \text{если } \eta-\delta<x<\eta.\end{cases}$$

Для этой функции

$$\operatorname{supp} g\subset(\xi,\ \eta), \qquad (56.15)$$

т. е. функция g — финитная с носителем в интервале $(\xi,\ \eta)$ и для всех $x\in\boldsymbol{R}$ выполняется неравенство

$$0\leqslant\chi(x)-g(x)\leqslant 1. \qquad (56.16)$$

Выберем $\delta>0$ так, чтобы

$$\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{\eta-\xi}{2}\right\}; \qquad (56.17)$$

тогда получим

$$\int_a^b |\chi(x)-g(x)|\,dx \underset{(56.15)}{=} \int_\xi^\eta |\chi(x)-g(x)|\,dx=\int_\xi^{\xi+\delta} (\chi(x)-g(x))\,dx+$$

$$+\int_{\eta-\delta}^{\eta}(\chi(x)-g(x))\,dx \underset{(56.16)}{\leqslant} \int_{\xi}^{\xi+\delta} dx+\int_{\eta-\delta}^{\eta} dx=2\delta \underset{56.17}{<} \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, а функция $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена в полосе*

$$\Pi=\{(x,\ y):\ -\infty<x<+\infty,\ c\leqslant y\leqslant d\}, \tag{56.18}$$

то:

1) *интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,\ y)\,dx$ *является непрерывной на отрезке* $[c,\ d]$ *функцией параметра* y;

2)

$$\int_{c}^{d} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,\ y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\int_{c}^{d}\varphi(x,\ y)\,dy. \tag{56.19}$$

Доказательство. Покажем непрерывность интеграла

$$\Phi(y)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,\ y)\,dx, \tag{56.20}$$

зависящего от параметра $y\in[c,\ d]$. Зададим произвольно $\varepsilon>0$. В силу ограниченности функции $\varphi(x, y)$, в полосе Π существует такая постоянная $M>0$, что для всех $(x,\ y)\in\Pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x,\ y)|\leqslant M \tag{56.21}$$

и, следовательно,

$$|f(x)\varphi(x,\ y)|\leqslant M|f(x)|.$$

Согласно условию леммы, функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, поэтому, по признаку Вейерштрасса, интеграл (56.20) равномерно сходится на отрезке $[c,\ d]$. Отсюда вытекает существование такого числа η_ε, что для всех точек $y\in[c,\ d]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{|x|\geqslant\eta_\varepsilon}|f(x)\varphi(x,\ y)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{56.22}$$

Функция $\varphi(x, y)$, будучи непрерывной функцией на конечном прямоугольнике

$$\Pi_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}\{(x,\ y):\ -\eta_\varepsilon\leqslant x\leqslant\eta_\varepsilon,\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

равномерно непрерывна на нем. Поэтому существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех δ, удовлетворяющих неравенству $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, будет выполняться неравенство

$$\omega(\delta;\ \varphi) < \frac{\varepsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx}, \tag{56.23}$$

где $\omega(\delta;\ \varphi)$ — модуль непрерывности функции φ на прямоугольнике Π_ε. Зафиксируем какое-либо $\delta > 0$, удовлетворяющее условию (56.23).

Теперь при произвольно выбранных $y \in [c,\ d]$ и $y + \Delta y \in [c,\ d]$, лишь бы выполнялось условие

$$|\Delta y| < \delta, \tag{56.24}$$

будем иметь

$$|\Phi(y+\Delta y) - \Phi(y)| \underset{(56.20)}{\leqslant} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)[\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,\ y)]|\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,|\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,\ y)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)|\,|\varphi(x,\ y+\Delta y) - \varphi(x,\ y)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta;\ \varphi) \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,dx + \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)|\,[|\varphi(x,\ y+\Delta y)| +$$

$$+ |\varphi(x,\ y)|]\,dx = \omega(\delta;\ \varphi) \int\limits_{-\eta_\varepsilon}^{\eta_\varepsilon} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)\,\varphi(x,\ y+\Delta y)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x| \geqslant \eta_\varepsilon} |f(x)\,\varphi(x,\ y)|\,dx \underset{\substack{(56.24)\\(56.23)\\(56.22)}}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это и означает, что функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c,\ d]$.

Докажем теперь формулу (56.19). Прежде всего заметим, что, в силу доказанной непрерывности функции (56.20), интеграл в левой части равенства (56.19) существует (как интеграл от непрерывной функции по отрезку). Существование интеграла в правой части равенства (56.19) следует из того, что функция

$$\Psi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) \int\limits_c^d \varphi(x,\ y)\,dy$$

является произведением абсолютно интегрируемой на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ функции $f(x)$ на непрерывную ограниченную на $\boldsymbol{R}$ функцию

$$\int_c^d \varphi(x, y)\,dy$$

параметра x (см. п. 33.5).

Далее, в силу леммы 1, для произвольного $\varepsilon>0$ существует такая непрерывная финитная функция f_ε, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon. \tag{56.25}$$

Для этой функции f_ε, согласно теореме 3 п. 53.1, справедлива формула

$$\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x, y)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx\int_c^d \varphi(x, y)\,dy \tag{56.26}$$

(здесь, в силу финитности функции f_ε, можно бесконечные пределы заменить конечными, поэтому здесь и применима теорема 3 из п. 53.1).

Покажем, что предел левой части равенства (56.26) при $\varepsilon\to 0$ равен $\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x, y)\,dx$, а правой $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\int_c^d \varphi(x, y)\,dy$. Для этого оценим отклонения левой и правой частей равенства (56.26) от их предполагаемых предельных значений. Имеем

$$\left|\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x, y)\,dx-\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x, y)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,|\varphi(x, y)|\,dx \underset{(56.21)}{\leqslant}$$

$$\leqslant M\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx=$$

$$=M(d-c)\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx \underset{(56.25)}{<}$$

$$<M(d-c)\varepsilon. \tag{56.27}$$

Соответственно для правой части имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx\int_c^d \varphi(x, y)\,dy-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\int_c^d \varphi(x, y)\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx \int_c^d |\varphi(x,\ y)|\,dy \underset{(56.21)}{\leqslant}$$

$$\leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx \int_c^d dy =$$

$$= M(d-c) \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx \underset{(56.25)}{<} M(d-c)\varepsilon. \qquad (56.28)$$

Полагая в (56.26) $\varepsilon \to 0$, получим, в силу (56.27) и (56.28), равенство (56.19). □

Теорема 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$, то в каждой точке $x \in \boldsymbol{R}$, в которой существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\,dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (56.29)$$

Эта формула называется *формулой Фурье*.

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку $x \in \boldsymbol{R}$, в которой существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, и рассмотрим интеграл

$$S(\eta) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.30)$$

Функция $S(\eta)$ является для интеграла Фурье аналогом частичной суммы ряда Фурье периодической функции.

Так как функция $\cos y(x-t)$ непрерывна и ограничена на всей плоскости переменных y и t, то, согласно формуле (56.19), в интеграле (56.30) можно поменять порядок интегрирования. Проделав это, получим

$$S(\eta) \underset{\substack{(56.30)\\(56.19)}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \eta(x-t)}{x-t}\,dt \underset{u=x-t}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u) \frac{\sin \eta u}{u}\,du. \qquad (56.31)$$

Получившаяся формула является аналогом формулы, выражающей частичную сумму ряда Фурье с помощью интеграла Дирихле (см. (55.17)). Поэтому естественно попробовать про-

вести дальнейшие рассуждения по той же схеме, которая применялась в рядах Фурье при доказательстве теоремы 4 в п. 55.4.

Представив интеграл

$$S(\eta) \underset{(56.31)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+x) \frac{\sin \eta u}{u} du$$

в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$$

— и выполнив в первом из них замену $u=-t$, получим

$$S(\eta)=\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} [f(x+t)+f(x-t)] \frac{\sin \eta t}{t} dt.$$

Вспоминая (см. п. 54.4), что при $\eta>0$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \eta t}{t} dt=\frac{\pi}{2},$$

получим

$$S(\eta)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} [f(x+t)+f(x-t)] \frac{\sin \eta t}{t} dt-$$

$$-[f(x+0)+f(x-0)] \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \eta t}{t} dt=$$

$$=\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \sin \eta t\, dt+\frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} \sin \eta t\, dt. \quad (56.32)$$

Рассмотрим, например, первый интеграл, стоящий в правой части этого равенства. Разобьем его на два интеграла:

$$\int_{0}^{+\infty} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=f'_+(x),$$

то $\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ является кусочно-непрерывной функцией переменной t на отрезке $[0,\ 1]$, поэтому в силу теоремы 2 из п. 55.2,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^1\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt=0. \tag{56.33}$$

Функция $\frac{f(x+t)}{t}$ также кусочно-непрерывна на любом отрезке полуоси $t\geqslant 1$ и так как

$$\left|\frac{f(x+t)}{t}\right|\leqslant|f(x+t)|,$$

то

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x+t)}{t}\right|dt\leqslant\int_1^{+\infty}|f(x+t)|\,dt=\int_{x+1}^{+\infty}|f(s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|\,ds<+\infty,$$

т. е. $\frac{f(x+t)}{t}$ абсолютно интегрируема на этой полуоси и, следовательно, в силу той же теоремы,

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\eta t\,dt=0. \tag{56.34}$$

Наконец, из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dt$ (см. п. 33.6), выполняя замену переменного $u=\eta t$, получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt=f(x+0)\lim_{\eta\to+\infty}\int_\eta^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=0. \qquad (56.35)$$

Из (56.33), (56.34) и (56.35) следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\sin\eta t\,dt=0.$$

Отсюда, в силу (56.32), получаем

$$\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Предел, стоящий в левой части равенства, равен интегралу Фурье (56.4), поэтому равенство (56.29) доказано. □

Требования, накладываемые на функцию в этой теореме, можно ослабить, потребовав, например, чтобы функция была абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и удовлетворяла в каждой точке обобщенному условию Гельдера. Мы не стали этого делать ради некоторого упрощения доказательства (ср. с доказательством теоремы 4 и ее следствий в п. 55.4).

Упражнение 1. Доказать, что если функция f в дополнение к наложенным на нее в теореме 1 ограничениям является четной или нечетной, то справедливы формулы: для четной функции

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt,$$

для нечетной

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\sin yt\,dt.$$

56.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ЗАПИСИ ФОРМУЛЫ ФУРЬЕ

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ и во всех ее точках непрерывна и имеет односторонние производные.

В этом случае для всех $x \in \boldsymbol{R}$, согласно теореме 1, справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y, то

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.36)$$

В силу очевидного неравенства

$$|f(t)\sin y(x-t)|\leqslant|f(t)|,$$

при ограничениях, наложенных на функцию f, существует также интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt,$$

причем, в силу признака Вейерштрасса (см. п. 54.1), он равномерно сходится на всей числовой оси переменного y и, следовательно, является непрерывной функцией от y. Поэтому для любого числа η существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt, \qquad (56.37)$$

причем в силу нечетности подынтегральной функции относительно переменной y этот интеграл равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать существование несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt. \qquad (56.38)$$

Чтобы получить нужные формулы, нам придется ввести еще одно обобщение понятия интеграла.

56.3. ГЛАВНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛА

Введем следующее определение.

Определение 2. *Пусть функция* φ *интегрируема на любом конечном отрезке. Если существует конечный предел*

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)\,dx,\quad \eta>0,$$

то он называется главным значением интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ *и обозначается буквами* $v.\ p.$*)

$$v.\ p.\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)\,dx. \tag{56.39}$$

Подчеркнем, что отличие этого определения от определения несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$, п. 33.1, состоит в том, что там для функции φ, интегрируемой на любом конечном отрезке, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ определялся как предел интегралов $\int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)\,dx$ при независимом стремлении ξ к $-\infty$ и η к $+\infty$. Здесь же требуется существование лишь предела указанных интегралов $\int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)\,dx$ для частного случая, когда $\xi=-\eta$ и $\eta\to+\infty$.

Подобным же образом определяется и главное значение несобственного интеграла в точке: пусть $a<c<b$ и функция φ при любом $\varepsilon>0$ интегрируема, по Риману, на отрезках $[a,\ c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon,\ b]$ (естественно, предполагается также, что $a<c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon<b$); тогда главное значение интеграла $\int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx$ в точке c определяется формулой

$$v.\ p.\int_{a}^{b}\varphi(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}\varphi(x)\,dx\right].$$

Иногда, там, где это не может привести к недоразумениям, интеграл в смысле главного значения обозначается просто символом интеграла без букв $v.\ p.$

Если для некоторой функции существует несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла и оно совпадает с ее несобственным интегралом. Обратное неверно: у функции может существовать (и, следовательно, быть конечным) главное значение интеграла, а несобственный интеграл быть расходящимся.

---

*) Главное значение — от франц. valeur principale.

Например, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ и $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не существуют как несобственные, однако существуют в смысле главного значения, которое в обоих случаях равно нулю.

56.4. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАПИСЬ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Вернемся к формуле Фурье (56.29) и запишем ее, используя понятие главного значения интеграла, в другом виде. В силу нечетности по y подынтегральной функции в интеграле (56.38) имеем, согласно сформулированному определению главного значения интеграла

$$v.\,p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt=0. \qquad (56.40)$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{i}{2\pi}$ и сложив с интегралом (56.36), получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iy(x-t)}\,dt, \qquad (56.41)$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (56.19) и называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

56.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Если положить

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iyt}\,dt,$$

то формула (56.19) примет вид

$$f(x)=v.\,p.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\,e^{ixy}\,dy. \qquad (56.42)$$

Определение 3. *Функция* Φ, *которая ставится в соответствие функции* f *формулой*

$$\Phi(y)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iyt}\,dt, \tag{56.43}$$

называется преобразованием Фурье функции f и обозначается $F[f]$ или $\hat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция действительного аргумента. Отметим, что функция $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция f принимает только действительные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций. Употребив, например, для преобразования Фурье функции f обозначение $\hat{f}$, формулу (56.42) можно записать в виде

$$f(x)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\,e^{ixy}\,dy. \tag{56.44}$$

Эта формула позволяет восстановить саму функцию f, если известно ее преобразование Фурье $\hat{f}$. Она называется *формулой обращения.*

Определение 4. *Функция Ψ, которая ставится в соответствие функции f формулой*

$$\Psi(y)=v.\ p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iyt}\,dt, \tag{56.45}$$

называется обратным преобразованием Фурье функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье определены на множестве функций, для которых интегралы (56.43) и (56.45) существуют в смысле главного значения. Это множество содержит в себе, в частности, множество всех абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, для которых интегралы в формулах (56.43) и (56.45) можно понимать как обычные несобственные интегралы, а не только как интегралы в смысле главного значения. Термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование F^{-1} обращает преобразование Фурье F. Более точно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Если непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция f имеет в каждой точке конечные односторонние производные, то*

$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f.$$

Доказательство. Первая формула обращения, т. е. формула $F^{-1}[F[f]]=f$, является просто другой записью уже доказанной формулы (56.41).

Покажем справедливость второй формулы обращения. Поскольку косинус — четная функция, то в (56.36) можно переставить местами t и x:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt,$$

в силу же нечетности синуса (ср. (56.40))

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)\,dt=0.$$

Поэтому наряду с формулой (56.41) имеем также

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iy(t-x)}\,dt,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ity}\,dt\right]e^{-ixy}\,dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула может быть переписана в виде

$$F[F^{-1}[f]]=f. \quad \square$$

Отметим, что справедливость формул обращения может быть доказана и при более слабых ограничениях на функцию, чем существование у нее в каждой точке односторонних производных.

Лемма 4. *Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно обратное преобразование Фурье). Тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2, для функции $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ также существует преобразование Фурье (соответственно обратное ему), причем*

$$F[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F[f_1]+\lambda_2 F[f_2]$$

(*соответственно* $F^{-1}[\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2]=\lambda_1 F^{-1}[f_1]+\lambda_2 F^{-1}[f_2]$).

Это свойство называется *линейностью преобразования Фурье* (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из линейности интеграла и из формул (56.43) и (56.45).

Следствие. $F[0]=F^{-1}[0]=0$.
Действительно, например

$$F[0]=F[0\cdot 0]=0\cdot F[0]=0.$$

Впрочем, это свойство следует, конечно сразу и из формул (56.43) и (56.45).

Лемма 5. *Преобразование Фурье F, так же как и обратное преобразование Фурье F^{-1}, являются линейными взаимно однозначными отображениями множества непрерывных абсолютно интегрируемых на всей вещественной оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные, во множество функций, для которых интегралы* (56.43) *и* (56.45) *существуют в смысле главного значения.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь взаимную однозначность отображений F и F^{-1} — остальное уже доказано выше. Докажем, например, взаимную однозначность отображения F. Пусть $F[f_1]=F[f_2]$; тогда

$$F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]].$$

Отсюда согласно лемме 1, следует, что

$$f_1=f_2. \ \square$$

Преобразование Фурье во всяком случае определено для абсолютно интегрируемых функций. В следующих пунктах будут изучаться свойства этого преобразования. В дальнейшем же будет показано, как преобразование Фурье обобщается на более широкие классы функций, а именно на функции с интегрируемым квадратом (п. 60.9*) и на так называемые обобщенные функции (п. 61.7).

56.6. ИНТЕГРАЛЫ ЛАПЛАСА

Найдем преобразование Фурье $\hat{f}$ четного продолжения функции e^{-ax}, $a>0$, с полупрямой $x\geqslant 0$ на всю числовую прямую, т. е. попросту говоря, преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-a|x|}, -\infty<x<+\infty$:

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-ixy}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(a-iy)x}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(a+iy)x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}.$$

Применение обратного преобразования Фурье к полученной функции дает исходную функцию

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}e^{ixy}\,dy,\qquad x\geqslant 0.$$

Вспоминая, что $e^{ixy}=\cos xy+i\sin xy$ и замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xy}{a^2+y^2}\,dy=0$, получим

$$e^{-ax}=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy,\qquad x\geqslant 0.$$

Найдем теперь преобразование Фурье $\hat{f}$ нечетного продолжения функции e^{-ax}, $a>0$, с положительной полуоси $x>0$, т. е. преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & x>0,\\ -e^{ax} & x<0.\end{cases}$$

Имеем

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left(-e^{ax}\right)e^{-ixy}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-ax}e^{ixy}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{a-iy}+\frac{1}{a+iy}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{a^2+y^2}\,i.$$

Применив снова формулу обращения преобразования Фурье, получим

$$e^{-ax}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{a^2+y^2}\,i\right)e^{ixy}\,dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy,\quad x>0.$$

Итак, нам не только удалось найти преобразование Фурье рассматриваемых функций, но и получить сразу из формулы обращения (56.44) значения двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x \geqslant 0,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{a^2+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Эти интегралы называются *интегралами Лапласа.*

56.7. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В этом и следующих пунктах будут рассмотрены некоторые свойства преобразования Фурье функции f, которое, как и выше, будет обозначаться через $\hat{f}$ или $F[f]$. При этом будет предполагаться, что функция f принимает, вообще говоря, комплексные значения, а ее аргумент, как всегда, действителен.

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$, то ее преобразование Фурье Ff ограничено и непрерывно на $\boldsymbol{R}$, причем*

$$|\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx, \quad \forall y \in \boldsymbol{R}, \tag{56.46}$$

$$\lim_{y \to \infty} \hat{f}(y) = 0. \tag{56.47}$$

Следствие. *Если последовательность $\{f_n\}$ абсолютно интегрируемых на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ функций и абсолютно интегрируемая функция f таковы, что*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0, \tag{56.48}$$

то последовательность образов Фурье $\{\hat{f}_n\}$ сходится равномерно на всей числовой оси к $\hat{f}$ — образу Фурье функции f:

$$\hat{f}_n \underset{\boldsymbol{R}}{\rightrightarrows} \hat{f}.$$

Доказательство теоремы. Заметим, что рассматриваемые в теореме функции принимают, вообще говоря, комплексные значения.

Для доказательства неравенства (56.46) заметим, что $|e^{-ixy}|=1$, и потому

$$|\hat{f}(y)|=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)\,e^{-ixy}|\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx.$$

Неравенство (56.46) доказано.

Для доказательства свойства (56.47) обозначим через u и v соответственно действительную и мнимые части функции f: $f(x)=u(x)+iv(x)$. Имеем

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iyt}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u(t)+iv(t))(\cos yt-i\sin yt)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u(t)\cos yt+v(t)\sin yt)\,dt-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(u(t)\sin yt-v(t)\cos yt)\,dt.$$

Каждый из интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(u(t)\cos yt+v(t)\sin yt)\,dt,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}(u(t)\sin yt-v(t)\cos yt)\,dt,$$

в силу леммы 2 (см. п. 56.1), является непрерывной функцией (так как функции $u(t)$ и $v(t)$ абсолютно интегрируемы, а функции $\cos yt$ и $\sin yt$ ограничены и непрерывны) и стремится к нулю в силу теоремы Римана (см. теорему 2 в п. 55.2) при $y\to\infty$.

Таким образом, мнимая и действительная части функции f непрерывны и стремятся к нулю при $y \to \infty$; следовательно, эти свойства присущи и самой функции f. Теорема доказана. □

Следствие вытекает из неравенства (56.46):

$$|(F[f_n])(y) - (F[f])(y)| = |(F[f_n - f])(y)| \underset{(56.46)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx. \tag{56.49}$$

Правая часть этого неравенства по условию стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. (56.48)), поэтому и левая его часть стремится к нулю. При этом, поскольку правая часть неравенства (56.49) не зависит от y, стремление к нулю разности $(F[f_n])(y) - (F[f])(y)$ происходит равномерно на $\boldsymbol{R}$, а это и означает равномерную сходимость на $\boldsymbol{R}$ последовательности $\{F[f_n]\}$ к функции $F[f]$. □

56.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 3. *Пусть абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на всей оси производных. Тогда*

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{56.50}$$

и существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|F[f]| \leqslant \frac{M}{|y^n|}. \tag{56.51}$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Если f абсолютно интегрируема на всей оси вместе со своей производной f' и эта производная непрерывна, то

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt.$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ по условию теоремы сходится, значит, сходится и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, dt$; поэтому, в силу определения сходимости интеграла, существуют пределы $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \int_0^x f'(t)\, dt$ и,

следовательно, пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. При этом из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ следует, что указанные пределы равны нулю: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. Применив интегрирование по частям к формуле преобразования Фурье, получим

$$F[f']=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,e^{-ixy}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\,e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+$$

$$+\frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ixy}\,dx=iyF[f].$$

Таким образом, дифференцирование функции приводит к умножению ее преобразования Фурье на множитель iy.

Если теперь $f=u+iv$, где u и v — вещественные функции, и снова f абсолютно интегрируема вместе со своей производной $f'=u'+iv'$ и эта производная непрерывна, то

$$F[f']=F[u'+iv']=F[u']+iF[v']=iyF[u]-yF[v]=$$
$$=iyF[u+iv]=iyF[f].$$

Формула (56.50) при $n=1$ доказана.

Для произвольного n она получается отсюда по индукции.

Функция $F[f^{(n)}]$ ограничена (см. теорему 2), поэтому верхняя грань $M=\sup\limits_{-\infty<y<+\infty} F[f^{(n)}]$ конечна и, следовательно, оценка (56.51) следует из формулы (56.50) при $k=n$. □

Итак, чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция f, тем быстрее стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

Заметим, что теорема 2 вместе с ее доказательством остается справедливой и в случае, когда производная n-го порядка рассматриваемой функции является не непрерывной, а имеет конечное число разрывов первого рода (см. п. 5.13) при сохранении остальных предположений. Действительно, в этом случае указанная производная на любом конечном отрезке является кусочно-непрерывной функцией (см. п. 27.10*) и

поэтому проводимое в доказательстве интегрирование по частям законно (см. п. 30.2 и 33.2).

Упражнение 2. Доказать, что преобразование Фурье $F(y)$ функции $f(x)=\frac{1}{1+|x|^3}$ равно $O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ при $y\to\infty$.

56.9. СВЕРТКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Пусть функции φ и ψ определены на всей действительной оси. В различных вопросах математики часто используется так называемая *свертка функций* φ и ψ, которая обозначается $\varphi*\psi$, или, если x — аргумент свертки, через $(\varphi*\psi)(x)$, и определяется равенством

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt. \tag{56.52}$$

Для простоты в этом пункте будем предполагать, что рассматриваемые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ принимают только действительные значения. Интеграл (56.52) заведомо существует, если обе функции ограничены и абсолютно интегрируемы*). При этом интеграл (56.52) и, более того, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\,\psi(x-t)|\,dt$$

равномерно сходятся на всей действительной оси. В самом деле, в силу ограниченности функции ψ, имеем $|\psi|\leqslant M$, где M — постоянная, поэтому для всех x и t

$$|\varphi(t)\,\psi(x-t)|\leqslant M\,|\varphi(t)|$$

и сделанное утверждение в силу абсолютной интегрируемости функции φ вытекает из признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов (см. п. 54.1). Из приведенных рассуждений следует также, что если функции φ и ψ ограничены, абсолютно интегрируемы и непрерывны, то и их свертка f также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема. Действительно, непрерывность функции f следует из равномерной

---

*) Существование интеграла (56.52) можно гарантировать и при более общих условиях, однако мы на этом не будем здесь останавливаться.

сходимости интеграла (56.52), а ограниченность — из оценки

$$|(\varphi*\psi)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Пусть $f=\varphi*\psi$; имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|\,ds. \qquad (56.53)$$

Перестановка порядка интегрирования здесь возможна в силу того (см. теорему 7 п. 54.3), что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$ равномерно сходится на всей оси, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x-t)|\,dx$ равномерно сходится на любом конечном отрезке, а повторный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt$, как это следует из последнего равенства формулы (56.53), существует.

Таким образом, при сделанных предположениях к функции $f=\varphi*\psi$ можно в свою очередь применять операцию свертки с некоторой непрерывной ограниченной и абсолютно интегрируемой функцией (причем снова получится функция того же класса) или преобразование Фурье.

Операция свертки функций *коммутативна и ассоциативна* в рассматриваемом классе функций. Действительно, выполнив в интеграле (56.52) замену переменного $x-t=s$, получим

$$\varphi*\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-s)\psi(s)\,ds = \psi*\varphi.$$

Далее, производя в ниже написанном интеграле замену переменного $t=y-\xi$, меняя порядок интегрирования и делая

замену $x-y+\xi=\eta$, получим

$$(\varphi*\psi)*\chi=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(y-x)\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\eta)\,\chi(\xi-\eta)\,d\eta=(\psi*\chi)*\varphi=\varphi*(\psi*\chi).$$

Возможность перестановки порядка интегрирования и в этом случае следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, исследуем на равномерную сходимость интегралы

$$\chi(y-x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,d\xi, \tag{56.54}$$

$$\varphi(y-\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)\,dx. \tag{56.55}$$

В силу ограниченности функций ψ и χ, имеем $|\psi|\leqslant M$, $|\chi|\leqslant M$, где M — постоянная, и поэтому

$$|\chi(y-x)\,\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)|\leqslant M^2\,|\varphi(y-\xi)|,$$
$$|\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)\,\chi(y-x)|\leqslant M^2\,|\chi(y-x)|.$$

Из этих неравенств и абсолютной интегрируемости функций φ и χ следует, согласно признаку Вейерштрасса, что интегралы (56.54) и (56.55) равномерно сходятся соответственно относительно переменных x и ξ (переменная y фиксирована) на любом конечном отрезке (почему?). Наконец, существует повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi(y-x)\,\varphi(y-\xi)\,\psi(x-y+\xi)|\,d\xi=(|\varphi|*|\psi|)*|\chi|.$$

Таким образом, все условия указанной теоремы 7 из п. 54.3 выполнены.

Следует заметить, что при рассмотрении сверток функций можно существенно ослабить ограничения, накладываемые на свертываемые функции. Однако доказательство свойств сверток в этом случае потребовало бы прежде всего более тонких теорем о перемене порядка интегрирования. Для простоты изложения мы не стали этого делать.

Займемся теперь изучением преобразования Фурье сверток двух функций. Для удобства видоизменим определение свертки

$\varphi * \psi$, добавив дополнительный множитель $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt.$$

Теорема 4. *Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой оси. Тогда*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]\,F[\psi].$$

Доказательство. Функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы, поэтому функция $\varphi * \psi$ обладает теми же свойствами, в частности, она абсолютно интегрируема, и для нее можно рассматривать преобразование Фурье

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\psi(x-t)\,dt.$$

Меняя здесь порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы 7 п. 54.3) и производя замену переменного $x = t + s$, получим

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-t)\,e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,e^{-ity}\,dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)\,e^{-isy}\,ds = F[\varphi]\,F[\psi],$$

т. е. преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций. □

Теорема 4 также может быть доказана при более слабых ограничениях на рассматриваемые функции, но мы не будем на этом останавливаться.

56.10. ПРОИЗВОДНАЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x)$, $xf(x)$, ... , $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции f является n раз дифференци-*

руемой на всей числовой прямой функцией и

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть сначала функция f принимает только действительные значения. Формально дифференцируя по параметру y интеграл

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

и замечая, что $|xf(x) e^{-ixy}| = |xf(x)|$, получим абсолютно и равномерно сходящийся интеграл

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-ixy} dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Следовательно (см. п. 54.3, теорема 8), в этом случае преобразование Фурье $F[f]$ функции f является дифференцируемой функцией и

$$iF'[f] = F[xf].$$

Если теперь $f = u + iv$, где u и v — действительные функции, то

$$F'[f] = F'[u+iv] = \{F[u] + iF[v]\}' = F'[u] + iF'[v] = -iF[xu] + \\ + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[xf].$$

Далее по индукции получаем, что преобразование Фурье $F[f]$ функции f имеет производные до порядка n включительно и $i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$. □

Следствие. *Если предположения теоремы выполнены, то все производные $F^{(k)}[f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, непрерывны и стремятся к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности.*

В силу теорем 2 и 5, следствие непосредственно вытекает из того, что производные $F^{(k)}[f]$ являются преобразованиями Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Можно показать, что если произведения вида $e^{a|x|^\alpha} f(x)$ абсолютно интегрируемы при определенных ограничениях, налагаемых на $a > 0$ и $\alpha > 0$, то это приводит к еще большей гладкости преобразования Фурье, а именно оказывается, что оно принадлежит к тем или иным классам аналитических функций.

Формула, задающая обратное преобразование Фурье, отличается от формулы, задающей прямое преобразование Фурье (см. (56.43) и (56.45)), лишь тем, что в показателе степени у числа e под интегралом i заменено на $-i$, поэтому для обратного преобразования Фурье справедливы свойства, аналогичные доказанным нами для прямого преобразования Фурье.

Упражнения. **3.** Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$ дважды дифференцируемо на всей числовой прямой.

4. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=xe^{-|x|}$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой.

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 57. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

57.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Определение 1. *Множество* $X=\{x, y, z, \ldots\}$ *называется метрическим пространством* X, *если на совокупности упорядоченных пар* (x, y) *элементов этого множества определена неотрицательная функция* $\rho(x, y)$, *называемая расстоянием (или метрикой) такая, что:*

1°. $\rho(x, y)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=y$;

2°. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$, $x\in X$, $y\in X$;

3°. $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$, $x\in X$, $y\in X$, $z\in X$.

Условия 1, 2 и 3 называются *аксиомами расстояния*.

Элементы метрического пространства называются *точками*.

Примеры. 1. Совокупность всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, если расстояние между действительными числами определить как абсолютную величину их разности: $\rho(x, y)=|x-y|$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in\boldsymbol{R}$, образует метрическое пространство.

2. Множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, расстояние между элементами которого задается по формуле $\rho(z, z')=|z-z'|$, $z\in\boldsymbol{C}$, $z'\in\boldsymbol{C}$ также образует метрическое пространство.

3. Евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$ размерности n (см. п. 18.1) является метрическим пространством, если расстояние между его точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определить по формуле (см. (18.1))

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

4. Пусть E — некоторое множество. Рассмотрим множество всех ограниченных на E функций, принимающих действительные (или комплексные) значения. Для двух таких функций φ и ψ положим

$$\rho(\varphi, \psi)=\sup_{t\in E}|\varphi(t)-\psi(t)|. \tag{57.1}$$

Легко проверяется, что функция $\rho(\varphi, \psi)$ является метрикой. Справедливость свойств расстояния 1° и 2° ясна непосредствен-

но. Проверим справедливость свойства 3°. Пусть φ, ψ и χ — ограниченные функции, определенные на множестве E. Для любого элемента $t \in E$ имеем

$$|\varphi(t) - \chi(t)| = |[\varphi(t) - \psi(t)] + [\psi(t) - \chi(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \chi(t)|,$$

поэтому

$$|\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_E |\psi(t) - \chi(t)|,$$

откуда

$$\sup_E |\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_E |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_E |\psi(t) - \chi(t)|,$$

т. е.

$$\rho(\varphi, \chi) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

5. Пусть G — измеримое по Жордану открытое множество n-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$. Множество X непрерывных на замыкании $\bar{G}$ множества G функций образует метрическое пространство, если расстояние между функциями $\varphi \in X$ и $\psi \in X$ определить по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\psi(x) - \varphi(x)|\, dG.$$

Действительно, если $\rho(\varphi, \psi) = 0$, т. е. $\int |\psi(x) - \varphi(x)|\, dG = 0$, то в силу следствия из свойства 9° кратных интегралов (см. п. 44.6) $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех $x \in G$ и, следовательно, для всех $x \in \bar{G}$. Свойство 2° расстояния в этом случае очевидно, а свойство 3° легко проверяется: если φ, ψ и χ непрерывны на $\bar{G}$, то

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\varphi(x) - \chi(x)|\, dG = \int |[\varphi(x) - \psi(x)] + [\psi(x) - \chi(x)]|\, dG \leqslant$$
$$\leqslant \int |\varphi(x) - \psi(x)|\, dG + \int |\psi(x) - \chi(x)|\, dG = \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

В случае $n = 1$, $\bar{G} = [a, b]$ введенная метрика для непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций имеет вид

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx. \tag{57.2}$$

Естественным образом аналогичное пространство вводится и для функций, определенных на бесконечном промежутке. Например, в случае $a = -\infty$, $b = +\infty$ для двух непрерывных абсолютно интегрируемых на всей числовой оси функций φ и ψ расстояние определяется по формуле

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx. \tag{57.3}$$

6. Рассмотрим множество всевозможных последовательностей $x = \{x_n\}$ действительных чисел, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty. \tag{57.4}$$

Каждая такая последовательность будет называться точкой пространства, а числа x_n, $n=1, 2, \ldots,$ — ее координатами. Расстояние между двумя такими точками $x=\{x_n\}$ и $y=\{y_n\}$ определим по формуле

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n-y_n)^2}. \tag{57.5}$$

Это определение имеет смысл, так как из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ следует сходимость ряда, стоящего в правой части формулы (57.5).

В самом деле, при любом натуральном m в пространстве $\boldsymbol{R}^m$ для точек $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_m)$, $(z_1, \ldots, z_m)$, справедливо неравенство треугольника

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m} (x_n-y_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{m} (x_n-z_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{m} (z_n-y_n)^2}. \tag{57.6}$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $m\to\infty$ и положив $z_m=0$, $m=1, 2, \ldots,$ получим, что ряд (57.5) сходится и, более того, что

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n-y_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2}.$$

Свойства расстояния для функции $\rho(x, y)$, определенной формулой (57.5), легко проверяются. Например, неравенство треугольника для нее следует из неравенства (57.6): достаточно в нем перейти к пределу при $m\to\infty$.

Метрическое пространство всех действительных последовательностей, удовлетворяющих условию (57.4), с метрикой (57.5) называется *гильбертовым**) *пространством последовательностей и обозначается* l_2.

Упражнения. **1.** Проверить аксиомы расстояния для функции $\rho(\varphi, \psi)$, определенной формулой (57.3) для пространства абсолютно интегрируемых непрерывных на всей числовой оси функций.

2. Привести пример последовательности непрерывных функций, сходящейся на некотором отрезке в смысле расстояния (57.2), но не сходящейся на этом отрезке в смысле точечной сходимости (т. е. в смысле определения 3 п. 36.1).

3. Привести пример последовательности, сходящейся на некотором отрезке в смысле точечной сходимости, но не сходящейся на этом отрезке в смысле метрики (57.2).

*) Д. Гильберт (1862—1943) — немецкий математик.

4. Пусть X — метрическое пространство. Определим отклонение между его двумя подмножествами Y и Z согласно формуле

$$\rho(Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in Y,\, z \in Z} \rho(y, z).$$

Будет ли метрикой функция $\rho(Y, Z)$ на множестве всех подмножеств метрического пространства X?

Всякое подмножество метрического пространства X, в свою очередь, является метрическим пространством относительно той же метрики и называется *подпространством пространства* X.

Определение 2. *Два метрических пространства X и X' называются изометричными, если между их точками существует взаимно однозначное соответствие f, сохраняющее расстояние, т. е. такое, что если*

$$x' = f(x),\ y' = f(y),\ x \in X,\ y \in X,\ x' \in X',\ y' \in X',$$

то

$$\rho(x, y) = \rho(x', y')$$

(*такие соответствия также называются изометричными*).

Иногда бывает удобно «отождествить» элементы пространств X и X', соответствующие друг другу при изометричном соответствии пространств X и X'. Поясним более подробно операцию отождествления элементов двух изометрических пространств: X и Y. Пусть X и Y^* — метрические пространства, $Y \subset Y^*$, $f: X \to Y$ — изометричное отображение. Рассмотрим множество $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для точек $x \in X^*$ и $y \in X^*$ понятие расстояния $\rho_{X^*}(x, y)$. Для удобства введем отображение F: $X^* \to Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x)', & \text{если } x \in X, \\ x, & \text{если } x \in X^* \setminus X. \end{cases}$$

Ясно, что F является взаимно однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^*

Теперь для любых $x \in X^*$ и $y \in Y^*$ положим

$$\rho_{X^*}(x, y) = \rho(F(x), F(y)).$$

Легко проверить, что определенная таким образом функция $\rho_{X^*}(x, y)$ удовлетворяет трем аксиомам расстояния и, следовательно, X^* является метрическим пространством, а отображение F изометрично отображает пространство X^* на Y^*, причем при этом отображении множество X переходит в Y.

Под утверждением «отождествим в пространстве Y^* множество X с изометричным ему пространством Y» и понимается рассмотрение пространства X^* вместо Y^*.

Определение 3. *Пусть X — метрическое пространство; последовательность его точек $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n)=0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x, x_n)<\varepsilon$. В этом случае пишется $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to x$ при $n\to\infty$ и говорится, что точка x является пределом данной последовательности.*

Например, в случае примеров 1 и 2 сходимость в рассматриваемых там метрических пространствах означает обычную сходимость числовых (соответственно действительных или комплексных) последовательностей. В примере 3 сходимостью последовательности является сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве, встречавшаяся нам раньше (см. п. 18.1). В метрическом пространстве функций, определенных и ограниченных на некотором множестве, расстояние между которыми определяется формулой (57.1), последовательность функций $\{\varphi_n\}$ сходится к функции φ, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in E} |\varphi(t)-\varphi_n(t)|=0,$$

т. е. если последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно на множестве E сходится к функции φ (см. т. I, п. 36.2).

Наконец, пример 5 дает вид сходимости последовательности функций в смысле некоторой интегральной метрики. В случае $n=1$ подобная сходимость уже встречалась в п. 55.2 (лемма 2) и в п. 56.7 (следствие леммы 4).

Для всякого метрического пространства X естественным образом вводится понятие ε-окрестности $U(x, \varepsilon)$ точки $x\in X$, $\varepsilon>0$: $U(x, \varepsilon)=\{y : y\in X, \rho(y, x)<\varepsilon\}$, а затем дословно, так же как для n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ (см. п. 18.2), вводятся понятия точки прикосновения множества, предельной и изолированной точки, граничной и внутренней точки, замыкания $\bar{A}$ множества A, понятие замкнутого и открытого множества.

Справедливы для произвольных метрических пространств и леммы 3, 4, 5 и 6, доказанные в п. 18.2 для открытых и замкнутых множеств n-мерных евклидовых пространств, причем доказательства, приведенные в п. 18.2, сохраняют свою силу и в общем случае.

Нетрудно убедиться, что у последовательности метрического пространства может быть только один предел. Допустим противное: пусть у последовательности точек x_n, $n=1, 2, \ldots$, метрического пространства X точки $a\in X$ и $b\in X$ являются ее пределами и $a\neq b$. Тогда, выбрав ε так, что $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\rho(a, b)$,