

Остальные свойства норм для $\|x\|_r$, $1 \leq r \leq +\infty$, проверяются еще проще.

Упражнение 7. Доказать, что $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 14. Две нормы $\|x\|$ и $\|x\|^*$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|^* \leq c_2 \|x\|. \quad (58.11)$$

Теорема 1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Доказательство. Пусть X — конечномерное действительное линейное пространство (случай комплексного пространства рассматривается аналогично). Следовательно, в нем существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, состоящий из некоторого числа $n \in N$ его элементов, и для любого $x \in X$ имеется и притом единственное разложение

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X . Покажем, что она эквивалентна квадратичной норме

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Поскольку две нормы, каждая из которых эквивалентна третьей, также эквивалентны между собой, то из этого и будет следовать, что все нормы любого конечномерного пространства эквивалентны.

Прежде всего заметим, что $c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \|e_1\| + \dots + \|e_n\| > 0$, ибо для всех $k = 1, 2, \dots, n$ имеет место неравенство $e_k \neq 0$, и, следовательно, $\|e_k\| > 0$. Далее, из очевидного неравенства

$$|x_k| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

получим, используя свойство нормы, неравенство

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq \\ &\leq (\|e_1\| + \dots + \|e_n\|) \|x\|_2 = c_1 \|x\|_2. \end{aligned}$$

Итак, существует такое $c_1 > 0$, что для любого $x \in X$

$$\|x\| \leq c_1 \|x\|_2.$$

Докажем теперь, что существует такое $c_2 > 0$, что

$$\|x\| \geq c_2 \|x\|_2.$$

Поскольку в случае $x=0$ это неравенство очевидно выполняется при любом $c_2 > 0$, то его достаточно доказать лишь для $x \neq 0$. Выберем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве X так, чтобы он состоял из единичных в смысле квадратичной нормы векторов

$$\|e_1\|_2 = \dots = \|e_n\|_2 = 1.$$

Это всегда возможно, так как если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — какой-то базис линейного пространства, а $\|\cdot\|$ -какая-либо норма в этом пространстве, то

$$\left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$$

также будет его базисом, причем норма всех его элементов будет равна 1:

$$\left\| \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\| = \frac{1}{\|e_k\|} \|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пространство X с выбранным базисом можно рассматривать как арифметическое n -мерное пространство (см. п. 18.4). Для этого достаточно каждому его вектору $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ сопоставить упорядоченный набор n чисел (x_1, \dots, x_n) — его координат относительно указанного базиса. При этом квадратичная норма $\|x\|_2$ является длиной вектора x :

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |x|.$$

Единичная сфера $S^{n-1} = \{x : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ этого пространства является, как известно (см. п. 18.3 и п. 18.4), компактом. Рассмотрим на ней функцию

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|.$$

Из неравенства

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= ||x|| - ||y|| \leq \|x - y\| \leq \\ &\leq c_1 \|x - y\|_2 = c_1 |x - y|, \quad x \in X, \quad y \in Y, \end{aligned}$$

следует, что эта функция непрерывна на всем пространстве X и, следовательно, на сфере S^{n-1} .

Поскольку для любой точки $x \in S^{n-1}$ имеем $\|x\|_2 = 1$, то $x \neq 0$, поэтому, в силу свойства 4° нормы, функция f удовлетворяет на сфере S^{n-1} неравенству $f(x) = \|x\| > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на компакте функция достигает на нем своего минимального значения. Пусть функция f достигает свой минимум на сфере S^{n-1} в точке $x_0 \in S^{n-1}$. Положим

$$c_2 \stackrel{\text{def}}{=} \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Тогда для любого $x \in S^{n-1}$ будем иметь

$$\|x\| = f(x) \geq f(x_0) = c_2.$$

Теперь, заметив, что для каждого $x \in X$, $x \neq 0$, точка $\frac{x}{\|x\|_2}$ лежит на сфере S^{n-1} :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2} \|x\|_2 = 1$$

и, следовательно, для нее $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq c_2$ получим

$$\|x\| = \left\| \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \|x\|_2 \geq c_2 \|x\|_2,$$

т. е.

$$\|x\| \geq c_2 \|x\|_2, \quad x \in X, \quad x \neq 0.$$

Эквивалентность норм $\|x\|$ и $\|x\|_2$ доказана. \square

Примеры. 5. Пусть снова $1 \leq p < +\infty$. Рассмотрим линейное подпространство всех последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $x_n \in \mathbf{R}$ (или $x_n \in \mathbf{C}$), состоящее из таких последовательностей, для которых

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (58.12)$$

Функция $\|x\|_p$ является нормой, что проверяется аналогично конечному случаю (см. пример 4), так как, в частности, неравенство Минковского справедливо и для бесконечных сумм.

В том случае, когда все элементы рассматриваемых последовательностей — действительные числа, их пространство с нормой (58.12) обозначается через l_p .

Соответствующее метрическое пространство в случае $p=2$ было рассмотрено в примере 6 п. 57.1.

6. Линейное пространство всех ограниченных действительных функций, определенных на произвольном множестве E , являющееся подпространством пространства $F(E)$ всех действительных функций $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ (см. п. 57.1), превращается в нормированное, если в нем ввести норму по формуле

$$\|f\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in E} |f(t)|. \quad (58.13)$$

Обозначим это пространство через $B(E)^{*}$. В том случае, когда E является метрическим пространством, подпространство пространства $B(E)$, состоящее из непрерывных на E функций f ,

*¹) B — первая буква английского слова bounded — ограниченный.

обозначим через $C(E)$, а норму (58.13) в этом пространстве будем обозначать также и через $\|f\|_C$.

Если E является компактом в \mathbf{R}^n , то (см. теорему 3 в п. 19.5)

$$\|f\|_C = \sup_{t \in E} |f(t)| = \max_{t \in E} |f(t)|.$$

В частности, это верно для пространства $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ числовой прямой.

7. Пусть фиксировано число p , $1 \leq p < +\infty$. Рассмотрим множество функций f , заданных на некотором конечном или бесконечном интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, для каждой из которых существует правильное разбиение этого интервала (см. п. 55.1) и интеграл

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

сходится. Это множество образует, как легко проверить, линейное пространство и обозначается $RL_p(a, b)^*$.

Положим

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (58.14)$$

Покажем, что (58.14) является полунормой в $RL_p[a, b]$. Из формулы (58.14), очевидно, сразу следует, что $\|f\|_p \geq 0$. При этом из условия $\|f_p\|=0$ не следует, что $f=0$. В самом деле, пусть $-\infty < a < b < +\infty$; рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x=a, \\ 0 & \text{при } x \in (a, b]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|f_p\|=0$, но функция f не равна тождественно нулю на отрезке $[a, b]$ и поэтому не является нулем линейного пространства $RL_p[a, b]$.

Проверим однородность выражения (58.14): для всех $f \in RL_p(a, b)$ и любого $\lambda \in \mathbf{R}$ (или $\lambda \in \mathbf{C}$) имеем

$$\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p.$$

Докажем для (58.14) неравенство треугольника. Для любых $f \in RL_p(a, b)$ и $g \in RL_p(a, b)$, согласно неравенству Минковского

*¹) R — первая буква фамилии Б. Римана (B. Riemann), а L — первая буква фамилии А. Лебега (H. Lebesgue).

для интегралов (см. п. 28.3*), получим

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &= \left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ &\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p + \|g\|_p.\end{aligned}$$

Итак, действительно, $\|f\|_p$ является полуформой (не являющейся нормой) в линейном пространстве $RL_p(a, b)$.

8. Рассмотрим множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Оно является линейным пространством. Мы уже знаем, что в нем можно ввести норму $\|f\|_C$, определенную в примере 6 этого пункта. Можно в нем рассмотреть и полуформу (58.14), причем в этом пространстве полуформа (58.14) является уже нормой.

Действительно, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\|f\|_p = 0$, $0 < p < +\infty$, то, следовательно,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0,$$

то из неотрицательности и непрерывности функции $|f(x)|^p$, $x \in [a, b]$ следует (см. свойство 9⁰ интеграла в п. 28.1), что $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (58.14) обозначается через $CL_p[a, b]$.

Подобным же образом строятся аналогичные пространства для функций, заданных на промежутках других типов, в том числе и на бесконечных промежутках, например, пространства

$$CL_p(a, b), \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

которые состоят из непрерывных функций, заданных на интервале (a, b) , и для которых конечен интеграл (58.14).

Если одно и то же множество функций принадлежит различным линейным нормированным или полуформированным пространствам (например, пространства $C[a, b]$ и $CL_p[a, b]$ состоят из одних и тех же функций), то часто бывает полезным оценить одну норму (полуформу) этих функций через другую. Теоремы, выражающие подобные оценки, называются обычно *теоремами вложения*.

Поясним сказанное на примере, сформулированном в виде леммы.

Лемма 3. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $1 < p < +\infty$. Если $f \in RL_p[a, b]$, то

$$\|f\|_1 \leqslant (b-a)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (58.15)$$

а если $f \in RL_p[a, b] \cap B[a, b]$, то

$$\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}. \quad (58.16)$$

Доказательство. Принимая во внимание, что полуформа $\|f\|_p$ определяется по формуле (58.14), получим, используя неравенство Гельдера (см. п. 28.3*),

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| \cdot 1 dt \leq \\ &\leq \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b dx \right]^{\frac{1}{q}} = (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

тем самым (58.15) доказано. Неравенство (58.16) также сразу вытекает из определений (58.13) и (58.14) соответствующих норм:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b \left[\sup_{[a,b]} |f(t)| \right]^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f\|_{\infty} \left(\int_a^b dt \right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\infty}. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что неравенство (58.15) справедливо очевидным образом и без предположения, что $f \in RL_p[a, b]$, так как если $f \notin RL_p[a, b]$, то $\|f\|_p = +\infty$ (см. (58.14)) и поэтому неравенство (58.15) выполняется очевидным образом. Аналогично, неравенство (58.16) тривиально в случае, когда $f \notin B[a, b]$, так как тогда $\|f\|_{\infty} = +\infty$; конечно, как обычно, здесь предполагается, что для рассматриваемых функций существует правильное разбиение отрезка $[a, b]$ (см. п. 55.1).

Упражнение 8. Обозначим через $C^1 L_2[a, b]$ подмножество пространства $CL_2[a, b]$, состоящее из непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Доказать, что множество $C^1 L_2[a, b]$ является линейным нормированным пространством, если под нормой функции $f \in C^1 L_2[a, b]$ понимать ее норму в пространстве $CL_2[a, b]$.

58.4. СВОЙСТВА ПОЛУНОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В полуформированных пространствах можно ввести понятие сходящейся последовательности и ее предела.

Определение 15. Если последовательность $\{x_n\}$ элементов полуформированного (в частности, нормированного) линейного пространства X такова, что существует элемент $x \in X$ такой,

что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называют

сходящейся по полуформе (соответственно по норме) к элементу x и пишут $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Вводя в каком-либо линейном пространстве функций различные полуформы (в частности, нормы), будем получать различные понятия сходимости последовательностей функций. Например, сходимость в смысле нормы (57.13) означает равномерную сходимость; сходимость в смысле полуформы (57.14) является уже сходимостью другого рода: она называется *сходимостью в среднем*, или, подробнее, в смысле p -среднего (иногда говорят и просто о сходимости в смысле пространства L_p). Мы уже встречались с частным случаем сходимости такого рода при $p=1$ (см. лемму 2 в п. 55.2, следствие теоремы 2 в п. 56.7 и метрику (57.2)) и при $p=2$ (в следствии из теоремы 12 п. 55.9). При $p=2$ сходимость в среднем называется также *сходимостью в смысле среднего квадратичного*.

Неравенства (58.15) и (58.16) между различными полуформами функций позволяют установить связь между различными видами сходимостей функций.

Например, пусть последовательность функций f_n , $n=1, 2, \dots$, и функция f таковы, что:

1^0 . Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции f .

2^0 . При всех $n=1, 2, \dots$ $f_n - f \in RL_p[a, b]$.

Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f на отрезке $[a, b]$ и в смысле p -среднего, $1 \leq p < +\infty$.

В самом деле, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$, последовательность $\{f_n - f\}$ ограничена и, следовательно, $f_n - f \in B[a, b] \cap RL_p[a, b]$. Поэтому, согласно (58.16), справедливо неравенство

$$\|f_n - f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_\infty.$$

Равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на отрезке $[a, b]$ означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Упражнение 9*. Построить пример последовательности непрерывных неотрицательных на отрезке функций, сходящейся в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.

Следует обратить внимание на то, что в полуформированном пространстве у сходящейся последовательности предел,

вообще говоря, не единствен. При этом если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то полуформа разности двух пределов равна нулю: $\|a - b\| = 0$. Это сразу следует из неравенства

$$\|a - b\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - b\|.$$

Верно и обратное: если $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\|a - b\| = 0$, то и $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. В самом деле, из неравенства

$$\|x_n - b\| = \|(x_n - a) + (a - b)\| \leq \|x_n - a\| + \|a - b\| = \|x_n - a\|$$

вытекает, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_n - a)\| = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - b\| = 0$.

Определение 16. Пусть X — линейное полуформированное (в частности, нормированное) пространство. Множество $E \subset X$ называется ограниченным или, подробнее, ограниченным по полуформе (соответственно по норме), если существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $\|x\| \leq M$.

Лемма 4. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится по полуформе в X , то она ограничена.

Доказательство. Пусть $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; в силу сходимости последовательности, существует такое n_0 , что если $n > n_0$, то $\|x_n - x\| \leq 1$ и, следовательно,

$$\|x\| = \|(x_n - x) + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq \|x\| + 1.$$

Положим $M = \max \{\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_{n_0}\|, \|x\| + 1\}$; тогда, очевидно, для всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $\|x_n\| \leq M$. \square

Для линейного пространства с полуформой можно определить понятие непрерывности его отображения в другое полуформированное пространство.

Определение 17. Отображение $f: X \rightarrow Y$ полуформированного (в частности, нормированного) пространства X в полуформированное (нормированное) пространство Y называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 по полуформе (норме) пространства X :

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ по

полуформе (норме) пространства Y : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

В случае нормированных пространств непрерывность отображения в смысле норм равносильна его непрерывности в смысле метрик, порожденных этими нормами.

В терминах неравенств непрерывность в точке x_0 отображения f полунормированного пространства X в полунормированное пространство Y формулируется следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, для которых $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Эквивалентность двух сформулированных выше определений непрерывности доказывается по той же схеме, что и в случае, когда X и Y — множества действительных чисел (см. п. 4.5).

Лемма 5. Полунорма $\|x\|$ является непрерывной функцией на полунормированном пространстве X .

Доказательство. Пусть заданы элемент $x_0 \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда для всех таких x , что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, в силу неравенства (58.10), имеем $\|\|x\| - \|x_0\|\| < \|x - x_0\| < \varepsilon$, т. е. условие непрерывности функции на X выполняется при выборе $\delta = \varepsilon$. \square

Определение 18. Пусть X и Y — линейные полунормированные (в частности, нормированные) пространства. Отображение f , изоморфно отображающее пространство X как линейное пространство на пространство Y (см. определение 9) и такое, что для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$\|x\|_X = \|f(x)\|_Y,$$

называется изоморфным отображением или изоморфизмом линейных полунормированных (нормированных) пространств.

Если для линейных полунормированных (нормированных) пространств X и Y существует изоморфное отображение X на Y , то они называются изоморфными.

Например, если (a, b) — конечный интервал, то соответствие, при котором каждой функции полунормированного пространства $RL_p[a, b]$ ставится в соответствие ее сужение на интервал (a, b) , является линейным отображением пространства $RL_p[a, b]$ на пространство $RL_p(a, b)$ (сюръекцией), сохраняющим полунорму. Последнее следует из того, что значение интеграла от a до b от функции не зависит от значений этой функции или от их отсутствия в точках $x=a$ и $x=b$. Ядро отображения состоит не только из нуля, а из всевозможных функций, равных тождественно нулю на интервале (a, b) и принимающих на его концах произвольные значения (отсюда следует, что эта сюръекция не является биекцией).

Сужение на интервал (a, b) непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций отображает нормированное пространство $CL_p[a, b]$ не на пространство, а только в пространство $CL_p(a, b)$ (не каждую непрерывную на интервале (a, b) функцию можно продолжить с сохранением непрерывности на отрезок $[a, b]$), но зато в этом случае указанное сужение является взаимно однозначным

отображением (инъекцией), поскольку оно сохраняет значение нормы). Оно является изоморфным отображением пространства $CL_p[a, b]$ на его образ в пространстве $CL_p(a, b)$ (всякая инъекция является биекцией при отображении множества на образ).

Два изоморфных полуформированных (нормированных) пространства могут отличаться друг от друга только природой своих элементов, а не свойствами пространства. Поэтому в дальнейшем мы часто не будем различать изоморфные полуформированные (нормированные) пространства, состоящие из различных элементов: такие пространства можно «отождествлять».

Поясним это подробнее. Пусть X и Y — линейные полуформированные пространства, $Y \subset Y^*$, а $f: X \rightarrow Y$ — изоморфное отображение. Рассмотрим множество $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, получающееся из пространства X присоединением к нему множества $Y^* \setminus Y$. Таким образом, $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Определим для элементов множества X^* операции сложения и умножения на число, а также норму — они будут снабжаться индексом X^* . Для удобства введем отображение $F: X^* \rightarrow Y^*$, задаваемое формулой

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X, \\ x, & \text{если } x \in X^* \setminus X. \end{cases} \quad (58.17)$$

Ясно, что F является взаимно однозначным отображением (биекцией) множества X^* на Y^* .

Теперь для любых $x \in X^*$, $y \in X^*$ и любых чисел λ , μ положим

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu y)_{X^*} &\stackrel{\text{def}}{=} F^{-1} [\lambda F(x) + \mu F(y)], \\ \|x\|_{X^*} &\stackrel{\text{def}}{=} \|F(x)\|. \end{aligned}$$

Так, определенное пространство X^* является линейным полуформированным (нормированным), изоморфным пространству Y^* и содержащим X в качестве своего подмножества. Подтверждением «отождествим в пространстве Y^* множество Y с изоморфным ему пространством X » и понимается рассмотрение указанного выше пространства X^* (сравните с отождествлением изометрических метрических пространств п. 57.1).

Упражнение 10. Пусть X — линейное полуформированное пространство. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются эквивалентными, если $\|x - y\| = 0$. Обозначим через \tilde{X} множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства X . Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ — число. Определим $\tilde{x} + \tilde{y}$ как элемент множества \tilde{X} , содержащий $x + y$, а $\lambda \tilde{x}$ — как элемент из \tilde{X} , содержащий λx . Положим $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$. Доказать, что данные определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что \tilde{X} является линейным нормированным пространством с нормой $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

11. Доказать, что функции $x+y$ и λx непрерывны на всяком линейном полуформированном пространстве X (x и y — элементы этого пространства, а λ — число), иначе говоря, что операции сложения и умножения на число непрерывны в указанном пространстве.

58.5. СВОЙСТВА НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В линейном нормированном пространстве X можно естественным образом ввести расстояние между элементами этого пространства. Именно: справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. Линейное нормированное пространство X является метрическим пространством с метрикой

$$p(x, y) = \|x - y\|, \quad (58.18)$$

при этом сходимость последовательностей в пространстве X по этой метрике совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Функция $p(x, y)$, определенная формулой (58.18), действительно является расстоянием: свойства расстояния (см. п. 57.1) вытекают из свойств нормы 1—4 (проверьте это). Второе утверждение леммы очевидно: \square .

Будем говорить, что метрика (58.18) порождается заданной нормой пространства X . Например, метрика, порожденная нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ в арифметическом линейном пространстве n -мерных вещественных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, является метрикой евклидова пространства \mathbf{R}^n , определенной формулой (18.1).

Не всякое метрическое пространство является нормированным, например пространство, состоящее из двух точек x и y (двоеточие) с метрикой $p(x, y) = 1$, не есть линейное, а поэтому и нормированное пространство.

Последовательность точек пространства X , фундаментальная относительно метрики (58.18) (см. п. 57.2), называется также фундаментальной относительно нормы, заданной в пространстве X .

Упражнение 12. Доказать, что множество в линейном нормированном пространстве ограничено по норме (см. определение 16 в п. 58.4) тогда и только тогда, когда оно ограничено как множество метрического пространства в смысле метрики (58.18).

Пример. Рассмотрим пространство l_p последовательностей действительных чисел с нормой (58.12). Обозначим через e_n последовательность, у которой n -й член равен единице, а все остальные — нули. Очевидно, что при $n \neq m$.

$$\|e_n - e_m\| = (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому последовательность элементов $c_n = 1, 2, \dots$, пространства l_p не может содержать фундаментальной, а следовательно, и сходящейся подпоследовательности.

Последовательность $\{e_n\}$ ограничена, ибо для всех n имеем $\|e_n\| = 1$. Она образует замкнутое множество в l_p , так как множество $\{e_n\}$ не имеет предельных точек в l_p (в противном случае в ней нашлась бы сходящаяся подпоследовательность).

Таким образом, в бесконечномерном линейном нормированном пространстве существуют ограниченные последовательности, из которых нельзя выделить сходящуюся, а также ограниченные замкнутые множества, у которых не из всякой последовательности их точек можно выделить сходящуюся.

Замечание 1. Если в линейном пространстве X введены две нормы элементов $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, причем они эквивалентны (см. определение 14 в п. 58.3), то последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к элементу $x \in X$ в смысле нормы $\|\cdot\|^{(1)}$ тогда и только тогда, когда она сходится к x в смысле нормы $\|\cdot\|^{(2)}$.

Действительно, в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что выполняются неравенства

$$c_1 \|x_n - x\|^{(2)} \leq \|x_n - x\|^{(1)} \leq c_2 \|x_n - x\|^{(2)}.$$

Из этих неравенств сразу и следует эквивалентность сходимостей последовательности $\{x_n\}$ к x в смысле норм $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$.

Из доказанной в теореме 1 п. 58.3 эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве следует, что сходимости последовательностей его точек по всем нормам эквивалентны. Сходимость по квадратичной норме $\|x\|_2$ равносильна покоординатной сходимости (см. п. 18.1 и 18.4), поэтому сходимость последовательности точек в конечномерном пространстве по любой норме равносильна сходимости числовых последовательностей координат рассматриваемых точек относительно произвольного базиса.

Замечание 2. Отметим, что в случае, когда полуформа не является нормой, даже такая простая функция, как линейная на конечномерном линейном полуформированном пространстве, может оказаться не непрерывной. Рассмотрим, например, двумерное арифметическое пространство X векторов $x = (x_1, x_2)$ с полуформой $\|x\| = |x_1|$. Это действительно полуформа, так как $\|x\| = |x_1| \geq 0$. Кроме того, для любого числа λ имеем $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ и поэтому $\|\lambda x\| = |\lambda| x_1 = |\lambda| \|x\|$. Наконец, если $y = (y_1, y_2)$ также является элементом из X , то $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$; следовательно, $\|x+y\| = |x_1+y_1| \leq |x_1| + |y_1| = \|x\| + \|y\|$. Таким образом, все свойства полуформы выполнены.

Покажем, что линейная функция $f(x) = x_2$ не непрерывна на X . Действительно, для последовательности $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ любая точка вида $x = (0, x_2)$ (x_2 произвольно) является ее пределом в смысле рассматриваемой полунормы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В частности точка $O = (0, 0)$ является пределом последовательности $\{x^{(n)}\}$. Однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = 1 \neq 0 = f(O).$$

Это и означает, что функция $f(x) = x_2$ не является непрерывной по полунорме $\|x\| = |x_1|$.

Подчеркнем, однако, что если в конечномерном пространстве полунорма является нормой, то всякая линейная функция будет непрерывна относительно этой нормы. Действительно, пусть X — n -мерное линейное нормированное пространство и f — линейный функционал на X . Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в X и, следовательно, любой элемент $x \in X$ представим и притом единственным образом в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Поскольку f — линейный функционал, то

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

где $a_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ — фиксированные для f числа. Вспоминая, что сходимость последовательности точек по любой норме в конечномерном пространстве эквивалента ее покоординатной сходимости, сразу убеждаемся, что из полученной формулы $f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ действительно следует непрерывность функции f .

Лемма 7. Норма является непрерывной функцией на линейном нормированном пространстве в смысле метрики (58.18).

В силу равенства (58.18) это следует из того, что полунорма непрерывна по полунорме (см. лемму 5 в п. 58.4).

Определение 19. Линейное нормированное пространство называется полным, если оно является полным метрическим пространством в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства.

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Линейное нормированное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (58.13) является

банаховым пространством. Мы в этом убедились в п. 57.1, когда рассматривали метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием (57.1), которое как раз порождается нормой (58.13). Мы видели, что полнота пространства $C[a, b]$ следует из того, что сходимость последовательности в этом пространстве означает ее равномерную сходимость на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. *Всякое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Доказательство. Согласно теореме 4 п. 57.5, достаточно показать, что на пополнение X^* линейного нормированного пространства X , рассматриваемого как метрическое с метрикой (58.18), можно продолжить с X алгебраические операции и норму. Это можно сделать с помощью предельного перехода. Как и при доказательстве теоремы 4, будем считать, что $X \subset X^*$, иначе говоря, отождествим пространство X с изометричным ему подпространством построенного там пополнения X^* .

Пусть, например, $x \in X^*$ и $y \in X^*$. В силу плотности X в X^* , существуют последовательности $x_n \in X$ и $y_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Покажем, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(x_n + y_n, x_m + y_m) &= \| (x_n + y_n) - (x_m + y_m) \| \leqslant \\ &\leqslant \| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \| = \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \end{aligned}$$

Из сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ следует, что они фундаментальные, поэтому последовательность $\{x_n + y_n\}$ также фундаментальная и, следовательно, в силу полноты X^* , сходящаяся.

Положим, по определению,

$$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

Аналогично с помощью предельного перехода определяется и λx , $x \in X^*$.

Легко проверить, что определенные так алгебраические операции $x + y$, λx для элементов пополнения X^* не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Также легко убедиться, что в случае, когда элементы принадлежат исходному пространству X , определенные нами алгебраические операции совпадают с заданными.

Определим теперь норму для $x \in X^*$. Пусть $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Покажем что последовательность $\{\|x_n\|\}$

фундаментальная. В самом деле, из неравенства (58.10) для всех натуральных n и m имеем

$$\|x_n\| - \|x_m\| \leq \|x_n - x_m\| = \rho(x_n, x_m). \quad (58.19)$$

Последовательность $\{x_n\}$, будучи сходящейся, является и фундаментальной, поэтому из неравенства (58.19) следует, что и числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ фундаментальна, а значит, сходится.

Положим, по определению,

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Так определенная норма $\|x\|$, $x \in X^*$, не зависит от выбора последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, такой, что $x_n \rightarrow x$. Легко проверить также, используя предельный переход, что для функции $\|x\|$, $x \in X^*$, выполняются свойства 1°—4° и что в случае $x \in X$ мы получаем прежнюю норму. \square

В качестве примера отметим линейное нормированное пространство $CL_p[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой (58.13). Эта норма при $p=1$ порождает метрику (57.2). Можно показать, что метрическое пространство непрерывных функций с метрикой (57.2) не является полным. Согласно доказанной теореме, рассматриваемое линейное нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций можно дополнить до полного пространства. Это банахово пространство обозначается $L[a, b]$.

Определение 20. Система элементов x_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$ (\mathfrak{A} — некоторое множество индексов) линейного полуформированного пространства X называется полной в этом пространстве, если для каждого элемента $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$ данной системы и такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что выполняется неравенство

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon. \quad (58.20)$$

Сформулируем это определение несколько иначе, введя предварительно еще одно понятие.

Определение 21. Множество $A \subset X$ называется плотным в полуформированном пространстве X , если для любого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in A$, что

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

Если X — нормированное и, следовательно, метрическое пространство, то определение 21, в силу (58.18), приводит к тому же понятию плотности множества, что и определение 8 из п. 57.5. Теперь можно сказать:

система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ — полна в пространстве X , если множество конечных линейных комбинаций ее элементов, т. е. ее

линейная оболочка (см. определение 5 в п. 58.1) образует плотное в X множество.

Если X является нормированным пространством, то в нем, как во всяком метрическом пространстве, имеет смысл понятие замыкания множества, а поскольку плотность некоторого множества в метрическом пространстве означает, что замыкание этого множества совпадает с самим пространством (см. определение 8 в п. 57.5), то в этом случае определение 21 можно перефразировать и таким образом:

система элементов x_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$ (\mathfrak{A} — некоторое множество индексов), линейного нормированного пространства X называется полной, если замыкание ее линейной оболочки (см. п. 58.1) совпадает со всем пространством X .

С частным случаем понятия полноты для системы функций мы уже встречались в п. 55.8.

Определение 22. Если в линейном нормированном пространстве X существует счетное множество элементов, образующее полную систему пространства X , то пространство X называется сепарабельным.

Заметим, что если пространство X сепарабельно как линейное нормированное пространство, то оно сепарабельно и как метрическое пространство с метрикой (58.18). В самом деле, если в линейном нормированном пространстве X существует счетная полная система, то это означает, что замыкание множества конечных линейных комбинаций элементов этой системы совпадает со всем пространством, а тогда, как в этом нетрудно убедиться, со всем пространством совпадает и множество конечных линейных комбинаций элементов рассматриваемой системы только с рациональными коэффициентами, а таких линейных комбинаций лишь счетное множество (см. следствие теоремы 10 в п. 4.11*). Таким образом, в пространстве X имеется счетное плотное в нем множество.

В заключение этого пункта введем понятие базиса, а предварительно — понятие ряда в пространстве X .

Определение 23. Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, — последовательность элементов линейного нормированного пространства X . Положим $s_n = x_1 + \dots + x_n$, $n = 1, 2, \dots$; пара последовательностей $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ называется рядом (с общим членом x_n) и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n; \quad (58.21)$$

элементы s_n называются n -ми частичными суммами ряда (57.21).

Если последовательность s_n , $n = 1, 2, \dots$, сходится в пространстве X , то ряд (58.21) называется сходящимся. В этом

случае предел $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ последовательности s_n , $n = 1, 2, \dots$, называют *суммой ряда* (58.21) и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Таким образом, как и в случае числовых рядов, мы будем одним и тем же символом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ обозначать как сам ряд, так и его сумму, если он сходится.

Как и для числовых рядов, для рядов в линейных нормированных пространствах справедливы следующие утверждения.

Если ряд (58.21) сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, причем если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda s$.

Если в пространстве X сходятся два ряда, то сходится и ряд, общий член которого равен сумме их членов с одинаковыми номерами, и его сумма равна сумме сумм данных рядов.

Определение 24. Последовательность элементов e_n , $n = 1, 2, \dots$, линейного нормированного пространства X называется *его базисом*, если, каков бы ни был элемент $x \in X$, существует, и притом единственная, последовательность чисел λ_n , $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \quad (58.22)$$

Таким образом, если последовательность $\{e_n\}$ является базисом пространства X , то для каждого элемента $x \in X$ существует, и притом единственная, последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что при всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \quad (58.23)$$

Формула (58.22) называется *разложением элемента x по базису $\{e_n\}$* .

Нетрудно убедиться, что если система элементов $\{e_n\}$ образует базис, то она линейно независима. Это сразу следует из единственности разложения элементов пространства по базису. В самом деле, если бы элементы e_n , $n = 1, 2, \dots$, оказались линейно зависимыми, то среди них нашлось бы конечное множество таких e_{n_1}, \dots, e_{n_k} , что для некоторых чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, которые не все равны нулю, имело бы место

равенство $\lambda_1 e_{n_1} + \dots + \lambda_k e_{n_k} = 0$, т. е. получилось бы разложение нуля по элементам базиса с коэффициентами, которые не все равны нулю. Для нуля же имеется тривиальное разложение $0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 e_n$, поэтому было бы нарушено условие единственности разложения элементов по базису.

Если линейное нормированное пространство имеет базис, состоящий из конечного или счетного множества элементов, то это пространство сепарабельно. Действительно, нетрудно проверить, что множество всех конечных линейных комбинаций элементов указанных базисов с рациональными коэффициентами счетно и плотно во всем пространстве.

Замечание. Подчеркнем отличие между последовательностью элементов, образующих полную систему, и последовательностью элементов, образующих базис. В первом случае коэффициенты λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, в неравенстве (58.20) зависят, вообще говоря, не только от выбора элемента $x \in X$, но и от выбора числа ε . Во втором же случае коэффициенты λ_k , $k = 1, 2, \dots$, в неравенстве (58.23) определяются только самим элементом (они называются *коэффициентами разложения элемента x по данному базису* или *координатами элемента x при данном базисе*) и лишь их количество, т. е. число n_ε , зависит от выбора ε .

Существуют сепарабельные банаховы пространства, в которых нет базиса.

В следующем параграфе будет рассмотрен более узкий класс пространств, в которых базис всегда существует.

58.6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Изучим теперь некоторые свойства линейных отображений одного линейного нормированного пространства в другое. Такие отображения, как и в конечномерном случае, называют обычно линейными операторами. Мы будем обозначать их буквами A , B ... и для краткости часто вместо $A(x)$ будем писать просто Ax .

В п. 41.6 для линейного оператора $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ была введена норма по формуле (см. (41.41))

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |Ax|, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Это действительно норма, в смысле определения п. 58.2, в линейном пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, что будет следовать из дальнейшего рассмотрения.

Пусть X и Y — произвольные линейные нормированные пространства и $A : X \rightarrow Y$ —линейный оператор. Положим

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \quad (58.24)$$

где $\|x\| = \|x\|_X$ и $\|Ax\| = \|Ax\|_Y$.

В случае произвольно выбранных линейных пространств X и Y может оказаться, что верхняя грань $\|A\|$, определяемая равенством (58.24), не будет конечной для всякого линейного оператора $A: X \rightarrow Y$.

Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$, как всегда (см. п. 58.1), множество всех линейных операторов A , отображающих пространство X в пространство Y ; а $\mathcal{L}(X, Y)$ — множество тех из них, для которых $\|A\| < +\infty$. Покажем, что $\mathcal{L}(X, Y)$ также является линейным пространством, а $\|A\|$ — нормой в нем. Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, то

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A+B)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax+Bx\| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \\ &= \|A\| + \|B\| < +\infty \end{aligned}$$

и, следовательно, $A+B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\lambda \in \mathbb{C}$ в случае комплексных пространств)

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| < +\infty$$

и, следовательно, $\lambda A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Таким образом $\mathcal{L}(X, Y)$ действительно является линейным пространством.

Далее, очевидно, что из (58.24) непосредственно следует, что $\|A\| \geq 0$. При этом, если $\|A\| = 0$, т. е. $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = 0$, то для всех x таких, что $\|x\| \leq 1$, имеет место равенство $\|Ax\| = 0$, а следовательно, и $Ax = 0$. Но тогда и вообще для всех $x \in X$ также имеем $Ax = 0$. Действительно, если x такой элемент пространства X , что $\|x\| > 1$, то заведомо $x \neq 0$, а значит,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Поэтому, в силу уже доказанного, $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$. Отсюда $\frac{1}{\|x\|} Ax = 0$ и, следовательно, для любого $x \in X$: $Ax = 0$. Это означает, что $A = 0$. Итак, $\|A\|$ — действительно норма в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$.

Если значение $\|A\|$, определяемое формулой (58.24), бесконеч-

но: $\|A\| = +\infty$, то будем говорить, что «норма оператора A бесконечна».

Норму $\|A\|$ (как конечную, так и бесконечную) можно получить и несколько другим способом. Именно, оказывается, что

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in X. \quad (58.25)$$

Для доказательства этой формулы заметим, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|. \quad (58.26)$$

В самом деле, с одной стороны, очевидно, что

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|,$$

ибо при увеличении числового множества его верхняя грань может только увеличиваться. С другой стороны, для любого элемента $x \in X$ такого, что $0 < \|x\| \leq 1$, положим $y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}$; тогда

$$\|y\| = 1 \text{ и } \|Ay\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \geq \|Ax\|.$$

Отсюда

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|.$$

Из полученных неравенств и вытекает равенство (58.26).

Теперь имеем

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| = \|A\|,$$

т. е. формула (58.25) также доказана. Из нее, очевидно, следует, что для любого $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\|Ax\| / \|x\| \leq \|A\|,$$

и, следовательно, для любого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad (58.27)$$

где $\|x\|$ — норма в пространстве X , $\|Ax\|$ — норма в пространстве Y , а $\|A\|$ — норма в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Это неравенство, очевидно, является обобщением неравенства (41.42) в п. 41.6.

Существует еще один подход к понятию нормы оператора, связанный с понятием так называемых ограниченных операторов.

Определение 25. Оператор $A : X \rightarrow Y$ называется ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|Ax\| \leq c \|x\|.$$

Если A — линейный ограниченный оператор, то все постоянные $c > 0$, обладающие указанным свойством, ограничены снизу нулем, и поэтому их множество имеет конечную нижнюю грань. Обозначим ее через c_0 :

$$c_0 = \inf \{c : \|Ax\| \leq c \|x\|, x \in X\}. \quad (58.28)$$

Покажем, что

$$c_0 = \|A\|. \quad (58.29)$$

Прежде всего заметим, что справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leq c_0 \|x\|.$$

В самом деле, если бы нашелся такой элемент $x_0 \in X$, что $\|Ax_0\| > c_0 \|x_0\|$, то нашлось бы число $\varepsilon > 0$, для которого выполняется неравенство $\|Ax_0\| > (c_0 + \varepsilon) \|x_0\|$. Однако это невозможно, так как, согласно определению нижней грани, существует такое число $c > 0$, что $c < c_0 + \varepsilon$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\| \leq c \|x\|$. В частности, $\|Ax_0\| \leq c \|x_0\| < (c_0 + \varepsilon) \|x_0\|$. Таким образом, нижняя грань c_0 также удовлетворяет неравенству, с помощью которого определяется ограниченность оператора A . Поэтому в определении постоянной c_0 можно заменить нижнюю грань минимумом:

$$c_0 = \min \{c : \|Ax\| \leq c \|x\|, x \in X\}.$$

Из неравенства $\|Ax\| \leq c_0 \|x\|$ при $x \neq 0$ имеем

$$\|Ax\| / \|x\| \leq c_0,$$

откуда

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c_0, \quad x \in X.$$

Случай строгого неравенства

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0, \quad x \in X,$$

невозможен, так как тогда нашлось бы такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon$$

и, следовательно, для любого $x \in X$, $x \neq 0$, тем более было бы справедливо неравенство

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon, \text{ или } \|Ax\| < (c_0 - \varepsilon) \|x\|, \quad x \in X,$$

что противоречило бы выбору c_0 как минимальной постоянной, обладающей свойством $\|Ax\| \leq c \|x\|$, $x \in X$.

Итак,

$$c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Образно говоря, это равенство означает, что оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он имеет конечную норму. Таким образом, множество ограниченных операторов составляет пространство $\mathcal{L}(X, Y)$.

В п. 41.6 было показано, что всякий линейный оператор $A : X \rightarrow Y$ в случае, когда линейные нормированные пространства X и Y конечномерны и в качестве норм в них взяты квадратичные нормы $\|x\|_2$ и $\|y\|_2$, $x \in X$, $y \in Y$, имеет конечную норму. В конечномерных линейных пространствах все нормы эквивалентны (см. теорему 1 в п. 58.3), поэтому отсюда следует, что *любой линейный оператор A , отображающий конечномерное линейное пространство X в конечномерное же линейное пространство Y , ограничен при любом выборе норм в этих пространствах, т. е. в этом случае*

$$\mathfrak{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

Упражнение 13. Доказать, что если X и Y —линейные нормированные пространства, причем Y —банахово пространство, то пространство линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$ также банахово.

Так как всякое линейное нормированное пространство является метрическим пространством, то можно говорить о непрерывности отображения одного линейного нормированного пространства в другое. Оказывается, что понятие ограниченности линейного оператора тесно связано с его непрерывностью.

Теорема 3. Пусть X и Y —линейные нормированные пространства. Для того чтобы линейный оператор $A : X \rightarrow Y$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен.

Доказательство. Если A —ограниченный линейный оператор, то из неравенства

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\| \|x - x_0\| \quad (58.27)$$

сразу следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Ax = Ax_0.$$

Если же A — непрерывный линейный оператор, то из непрерывности его в нуле следует, что, например, для $\varepsilon=1$ существует такое $\delta>0$, что из условия $\|x\|<\delta$ следует, что $\|Ax\|<1$.

Зафиксируем какое-либо η , $0<\eta<\delta$. Так как для любого $x \in X$, $x \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\eta x}{\|x\|} \right\| = \frac{\eta}{\|x\|} \|x\| = \eta < \delta,$$

то для любого $x \in X$, $x \neq 0$, согласно выбору числа δ , будем иметь

$$\left\| A\left(\frac{\eta x}{\|x\|}\right) \right\| < 1. \quad (58.30)$$

Но, в силу линейности оператора A , имеет место равенство

$$A\left(\frac{\eta x}{\|x\|}\right) = \frac{\eta}{\|x\|} A(x).$$

Следовательно, для любого $x \in X$, $x \neq 0$, справедливо неравенство

$$\frac{\eta}{\|x\|} \|Ax\| < 1,$$

т. е. неравенство

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \frac{1}{\eta},$$

что и означает ограниченность оператора A . \square

Задача 38. Построить пример линейного разрывного оператора на некотором линейном нормированном пространстве.

Рассмотрим теперь композицию линейных операторов.

Теорема 4. Если X , Y и Z — линейные нормированные пространства, а $A: X \rightarrow Y$ и $B: Y \rightarrow Z$ — линейные ограниченные операторы, то для нормы композиции $B \circ A$ операторов A и B выполняется неравенство

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \|A\|. \quad (58.31)$$

Следствие. Композиция ограниченных линейных операторов также является ограниченным линейным оператором.

Доказательство. В самом деле, для любого $x \in X$ имеем

$$\|(B \circ A)(x)\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \|A\| \|x\|. \quad (58.27) \quad (58.27)$$

В силу свойства (58.28) — (58.29) нормы линейного оператора, отсюда сразу следует неравенство (58.31). \square

Произведением $X \times Y$ линейных нормированных пространств X и Y называется линейное пространство $X \times Y$ (см. определение 11 в п. 58.1), в котором задана норма формулой

$$\|(x, y)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}, \quad (58.32)$$

где $\|x\|$ — норма элемента x в пространстве X , а $\|y\|$ — норма элемента y в пространстве Y .

Выполнимость аксиом нормы для $\|(x, y)\|$ легко устанавливается непосредственной проверкой.

Упражнение 14. Доказать, что если

$$\|(x, y)\|^* \stackrel{\text{def}}{=} \max \{\|x\|, \|y\|\} \text{ и } \|(x, y)\|^{**} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\| + \|y\|,$$

где $(x, y) \in X \times Y$, X и Y — линейные нормированные пространства, то $\|(x, y)\|^*$ и $\|(x, y)\|^{**}$ являются нормами, эквивалентными норме (58.32).

15. Доказать, что произведение банаховых пространств также является банаховым пространством.

Теорема 5. Если $A: X \times Y \rightarrow Z$ — линейный ограниченный оператор, отображающий произведение $X \times Y$ линейных нормированных пространств X и Y в линейное нормированное пространство Z , то существуют, и примут единственные, такие линейные ограниченные операторы $A_1: X \rightarrow Z$ и $A_2: Y \rightarrow Z$, что для любого элемента $(x, y) \in X \times Y$ имеет место равенство

$$A(x, y) = A_1(x) + A_2(y). \quad (58.33)$$

При этом для норм операторов A , A_1 и A_2 выполняются неравенства

$$\|A_1\| \leq \|A\|, \|A_2\| \leq \|A\|. \quad (58.34)$$

Обратно: если $A_1: X \rightarrow Z$ и $A_2: Y \rightarrow Z$ — линейные ограниченные операторы, то оператор $A: X \times Y \rightarrow Z$, определенный формулой (58.33), является линейным ограниченным оператором и для него имеет место неравенство

$$\|A\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|. \quad (58.35)$$

Доказательство. Если задан линейный ограниченный оператор $A: X \times Y \rightarrow Z$, то для любого $x \in X$ положим

$$A_1(x) = A(x, 0) \quad (58.36)$$

и для любого $y \in Y$ —

$$A_2(y) = A(0, y). \quad (58.37)$$

Как легко убедиться непосредственной проверкой, операторы A_1 и A_2 линейны. Докажем их ограниченность:

$$\|A_1(x)\| = \|A(x, 0)\| \leq \|A\| \|(x, 0)\| = \|A\| \|x\|. \quad (58.38)$$

Аналогично,

$$\|A_2(y)\| \leq \|A\| \|y\|. \quad (58.39)$$

Из неравенств (58.38) и (58.39) сразу следует ограниченность операторов A_1 и A_2 , а также неравенство (58.34).

Докажем формулу (58.33):

$$A(x, y) = A((x, 0) + (0, y)) = A(x, 0) + A(0, y) \stackrel{(58.36)}{=} A_1(x) + A_2(y).$$

Если $B_1: X \rightarrow Z$ и $B_2: Y \rightarrow Z$ — два таких линейных ограниченных оператора, что

$$A(x, y) = B_1(x) + B_2(y), \quad (58.40)$$

то, заметив, что $B_2(0)=0$, будем иметь для любого $x \in X$ равенство

$$B_1(x) = B_1(x) + B_2(0) \quad = \quad A(x, 0) \quad = \quad A_1(x). \quad (58.40)$$

Аналогично, для любого $y \in Y$ имеет место

$$B_2(y) = A_2(y),$$

т. е. $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, иначе говоря, линейные операторы A_1 и A_2 , для которых имеет место формула (58.33), единственны.

Наконец, если $A_1: X \rightarrow Z$, $A_2: Y \rightarrow Z$ — линейные ограниченные операторы и оператор $A: X \times Y \rightarrow Z$ определен формулой (58.33), то, очевидно, A — линейный оператор и, кроме того, ограниченный, ибо

$$\|A(x, y)\| = \|A_1(x) + A_2(y)\| \leq \|A_1(x)\| + \|A_2(y)\| \leq \|A_1\| \|x\| + \|A_2\| \|y\| \quad (58.27)$$

и поэтому

$$\frac{\|A(x, y)\|}{\|(x, y)\|} \leq \|A_1\| \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}} + \|A_2\| \frac{\|y\|}{\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}} \leq \|A_1\| + \|A_2\|. \quad (58.32)$$

Отсюда сразу следует ограниченность оператора A и неравенство (58.35). \square

Аналогично понятию произведения двух линейных нормированных пространств определяется понятие произведения *n* линейных нормированных пространств при любом натуральном *n* и для него доказывается теорема, аналогичная теореме 5.

58.7. БИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Введем понятие ограниченного билинейного отображения (см. определение 12 в п. 58.1).

Определение 26. *Билинейное отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ (X, Y и Z — линейные нормированные пространства) называется ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для любых $x \in X, y \in Y$ выполняется неравенство*

$$\|f(x, y)\| \leq c \|x\| \|y\|. \quad (58.41)$$

Нетрудно убедиться, что множество ограниченных билинейных отображений $f: X \times Y \rightarrow Z$ образует подпространство линейного пространства всех билинейных отображений $X \times Y \rightarrow Z$ (см. п. 58.1).

Если $f(x, y)$ — ограниченное билинейное отображение, то нижняя грань всех постоянных $c > 0$, для которых выполняется неравенство (58.41), называют *нормой билинейного отображения* и обозначают $\|f\|$:

$$\|f\| = \inf \{c : \|f(x, y)\| \leq c \|x\| \|y\|\}. \quad (58.42)$$

Аксиомы нормы для $\|f\|$ на линейном пространстве всех ограниченных билинейных отображений $f: X \times Y \rightarrow Z$ легко устанавливаются непосредственной проверкой.

Из неравенства (58.41) и определения (58.42) следует, что для всякого ограниченного билинейного отображения f выполняется неравенство

$$\|f(x, y)\| \leq \|f\| \|x\| \|y\|. \quad (58.43)$$

Линейное нормированное пространство ограниченных билинейных отображений $f: X \times Y \rightarrow Z$ обозначается через $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$.

Теорема 6. Для того чтобы билинейное отображение $z = f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, произведения $X \times Y$ линейных нормированных пространств X и Y в линейное нормированное пространство Z было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.

Доказательство. Если билинейное отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ ограничено, то для любых $x_0 \in X, x \in X, y_0 \in Y, y \in Y$, имеем

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| &= \|f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\| \leq \\ &\leq \|f(x - x_0, y)\| + \|f(x_0, y - y_0)\| \leq \\ &\leq c (\|x - x_0\| \|y\| + \|x_0\| \|y - y_0\|) \leq \\ &\leq c [\|x - x_0\| (\|y_0\| + \|y - y_0\|) + \|x_0\| \|y - y_0\|]. \end{aligned} \quad (58.44)$$

Очевидно, что из этого неравенства сразу следует непрерывность отображения f в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \rightarrow 0} f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (58.44)$$

Если, наоборот, билинейное отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ непрерывно на $X \times Y$, то, в частности, оно непрерывно в нуле и, следовательно, например для $\varepsilon=1$, существует такое $\delta>0$, что как только $\|x\|<\delta$, $\|y\|<\delta$, то выполняется неравенство

$$\|f(x, y)\| < 1. \quad (58.45)$$

Зафиксируем какое-либо η , $0<\eta<\delta$. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, будут выполняться неравенства

$$\left\| \frac{\eta x}{\|x\|} \right\| = \frac{\eta}{\|x\|} \|x\| = \eta < \delta, \quad \left\| \frac{\eta y}{\|y\|} \right\| = \frac{\eta}{\|y\|} \|y\| < \delta,$$

поэтому

$$\left\| f\left(\frac{\eta x}{\|x\|}, \frac{\eta y}{\|y\|} \right) \right\| < 1. \quad (58.45)$$

Отсюда, использовав билинейность отображения f , получим

$$\|f(x, y)\| < \frac{1}{\eta^2} \|x\| \|y\|, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

При $x=0$ или $y=0$ это неравенство также справедливо, ибо $f(0, y)=f(x, 0)=0$. Таким образом, отображение f действительно ограничено. \square

Упражнение 16. Доказать, что если Z — банахово пространство, то пространство билинейных ограниченных отображений $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ также банахово (X и Y — линейные нормированные пространства).

Пусть $f: X \times Y \rightarrow Z$ — билинейное отображение произведения линейных нормированных пространств X и Y в линейное нормированное пространство Z . При фиксированном элементе $x \in X$ отображение f задает некоторое линейное отображение (обозначим его f_x) пространства Y в пространство Z :

$$f_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y), \quad y \in Y. \quad (58.46)$$

При этом если f — ограниченное билинейное отображение, то

$$\|f_x(y)\| = \|f(x, y)\| \leq \|f\| \|x\| \|y\|; \quad (58.47)$$

(58.46) (58.43)

поэтому f_x также является ограниченным отображением и, согласно определению нормы линейного оператора,

$$\|f_x\| \leq \|f\| \|x\|.$$

Таким образом, для каждого билинейного отображения $f \in \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ отображение

$$F: x \rightarrow f_x \quad (58.48)$$

отображает пространство X в пространство $\mathcal{L}(Y, Z)$.

Из формул (58.46) и (58.48) следует, что

$$(F(x))(y) = f_x(y) = f(x, y). \quad (58.49)$$

(58.48) (58.46)

Лемма 8. Отображение F (см. (58.48)) является линейным ограниченным оператором, отображающим пространство X в пространство $\mathcal{L}(Y, Z)$, т. е. $F \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$, и

$$\|F\| = \|f\|. \quad (58.50)$$

Доказательство. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, λ_1 и λ_2 — числа, тогда для любого $y \in Y$ имеем

$$\begin{aligned} & (F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))(y) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \\ & \quad (58.49) \\ & = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y) = (\lambda_1 F(x_1))(y) + (\lambda_2 F(x_2))(y) = \\ & \quad (58.49) \\ & = (\lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2))(y), \end{aligned}$$

и так как это верно для каждого $y \in Y$, то

$$F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2),$$

т. е. F — линейный оператор.

Ограниченностю оператора F следует из неравенства

$$\|F(x)\| = \|f_x\| \leq \|f\| \|x\|. \quad (58.48) \quad (58.47)$$

Более того, из этого неравенства вытекает, что

$$\|F\| \leq \|f\|. \quad (58.51)$$

С другой стороны, ограниченность оператора F означает, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|F(x)\| \leq \|F\| \|x\|, \quad (58.52)$$

поэтому

$$\|f(x, y)\| = \|(F(x))(y)\| \leq \|F(x)\| \|y\| \leq \|F\| \|x\| \|y\| \quad (58.53)$$

(58.49) (58.52)

Из неравенств (58.51) и (58.53) следует равенство (58.50). \square

Определение 27. Отображение одного линейного нормированного пространства на другое называется изоморфизмом или изоморфным отображением, если оно взаимно однозначно, линейно и сохраняет норму.

Два линейных нормированных пространства, для которых существует изоморфное отображение одного на другое, называются изоморфными.

Пример. Пространство $\mathcal{L}(R, X)$ для любого линейного нормированного пространства X изоморфно с X .

Поставим в соответствие каждому элементу $x \in X$ оператор $A_x: t \mapsto tx$, $t \in R$. Очевидно, что оператор A_x линеен и ограничен: $\|A\| = \|x\|$. Легко убедиться, что соответствие $x \mapsto A_x$ является изоморфизмом между X и $\mathcal{L}(R, X)$.

Теорема 7. Если X , Y и Z — линейные нормированные пространства, то пространства $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ и $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ являются изоморфными пространствами, причем изоморфным отображением пространства $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ на пространство $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ является отображение

$$f \mapsto F \quad (58.54)$$

(см. (58.46) и (58.48)).

Доказательство. Обозначим отображение (58.54) через Φ :

$$\Phi(f) = F. \quad (58.55)$$

Согласно определению, отображение $\Phi(f)$ является таким отображением пространства X в пространство $\mathcal{L}(Y, Z)$, что для любого $x \in X$ элемент $(\Phi(f))(x)$ является отображением Y в Z и для него выполняется равенство

$$(\Phi(f))(x) \underset{(58.55)}{=} F(x) \underset{(58.48)}{=} f_x. \quad (58.56)$$

Поэтому для любого $y \in Y$ выполняется соотношение

$$((\Phi(f))(x))(y) \underset{(58.56)}{=} f_x(y) \underset{(58.46)}{=} f(x, y). \quad (58.57)$$

Докажем линейность отображения Φ : пусть $f, g \in \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$, λ_1, λ_2 — числа, тогда

$$\begin{aligned} & ((\Phi(\lambda f + \mu g))(x))(y) \underset{(58.57)}{=} (\lambda f + \mu g)(x, y) = \\ & = \lambda f(x, y) + \mu g(x, y) \underset{(58.57)}{=} \lambda ((\Phi(f))(x))(y) + \mu ((\Phi(g))(x))(y) = \\ & = ((\lambda \Phi(f))(x) + (\mu \Phi(g))(x))(y) \end{aligned}$$

(мы здесь использовали обычное правило сложения функций и умножения их на число). Так как это равенство верно для любых $y \in Y$, то

$(\Phi(\lambda f + \mu g))(x) = (\lambda\Phi(f))(x) + (\mu\Phi(g))(x) = (\lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g))(x)$,
и так как это верно для любых $x \in X$, то

$$\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g),$$

что и означает линейность оператора Φ .

Если $F = \Phi(f)$, то $\|f\| = \|F\|$ (см. (58.50)), т. е. оператор Φ действительно сохраняет норму. Поэтому если $f \neq 0$, а следовательно, и $\|f\| \neq 0$, то $\|\Phi(f)\| \neq 0$, откуда $\Phi(f) \neq 0$, т. е. ядро отображения Φ состоит только из нуля, что означает взаимную однозначность (инъективность) отображения Φ .

Наконец покажем, что отображение Φ отображает пространство $\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$ на все пространство $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ (сюръективность отображения Φ).

Пусть F — линейный ограниченный оператор, отображающий пространство X в $\mathcal{L}(Y, Z)$, тем самым для каждого $x \in X$ элемент $F(x)$ является ограниченным линейным оператором, отображающим пространство Y в Z . Это означает, что для каждого $y \in Y$ элемент $(F(x))(y)$ принадлежит пространству Z .

Положим

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (F(x))(y). \quad (58.58)$$

Из линейности операторов F и $F(x)$ следует, что $f(x, y)$ является билинейным отображением $X \times Y$ в Z , а из неравенства

$$\|f(x, y)\| \stackrel{(58.58)}{=} \|(F(x))(y)\| \stackrel{(58.27)}{\leq} \|F(x)\| \|y\| \stackrel{(58.27)}{\leq} \|F\| \|x\| \|y\|$$

— его ограниченность, т. е. $f \in \mathcal{L}_2(X, Y; Z)$. При этом

$$((\Phi(f))(x))(y) \stackrel{(58.57)}{=} f(x, y) \stackrel{(58.58)}{=} (F(x))(y),$$

и так как это неравенство верно для любых $x \in X, y \in Y$, то

$$\Phi(f) = F. \quad \square$$

По аналогии с ограниченными билинейными отображениями вводится понятие ограниченных мультилинейных отображений (см. п. 58.1) произведения линейных нормированных пространств X_1, X_2, \dots, X_n в линейное нормированное пространство Y и определяются их нормы. Линейное нормированное пространство мультилинейных ограниченных отображений $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ обозначается $\mathcal{L}_n(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$.

Имеет место теорема, аналогичная теореме 8. Пространства $\mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, \dots, \mathcal{L}(X_n, Y)))$ и $\mathcal{L}_n(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$ изоморфны между собой, при этом существует такой изоморфизм этих пространств, что для элементов $F \in \mathcal{L}(X_1, \mathcal{L}(X_2, \dots, \mathcal{L}(X_n, Y)))$ и $f \in \mathcal{L}_n(X_1, X_2, \dots, X_n; Y)$, соответствующих при нем друг другу, для любых $x_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n$, имеет место соотношение

$$(\dots((F_{X_1})x_2)\dots)x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (58.59)$$

В заключение отметим, что когда $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, то вместо $\mathcal{L}_n(X, X, \dots, X; Y)$ пишут $\mathcal{L}_n(X^n; Y)$.

58.8. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определению понятия дифференцируемости отображения множества, лежащего в одном линейном нормированном пространстве, в другое такое пространство предпосыплем, как всегда, несколько замечаний о символе « o малое» для рассматриваемого случая.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, $E \subset X$ и $x_0 \in E$.

Отображение $\alpha: E \rightarrow Y$ назовем бесконечно малым при $x \rightarrow x_0$ по сравнению с отображением $\|x - x_0\|^n$ и будем писать

$$\alpha(x) = o((x - x_0)^n),$$

если существует такое отображение $\varepsilon: E \rightarrow Y$, что для всех точек из множества E , принадлежащих некоторой фиксированной окрестности точки x_0 , имеет место равенство

$$\alpha(x) = \varepsilon(x) \|x - x_0\|^n \quad (58.60)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0. \quad (58.61)$$

Если отображение $\alpha(x)$ определено в точке x_0 , т. е. $x_0 \in E$, то и отображение $\varepsilon(x)$ также определено в этой точке, а следовательно, согласно определению предела, и непрерывно в ней: $\varepsilon(x_0) = 0$.

Определение 28. Отображение f открытого множества G линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y называется дифференцируемым в точке $x \in G$, если существует такой линейный ограниченный оператор $A: X \rightarrow Y$, что имеет место равенство

$$f(x + h) = f(x) + A(h) + o(h), \quad h \in X, \quad h \rightarrow 0. \quad (58.62)$$

Линейный оператор A называется дифференциалом отображения f в точке x и обозначается $Df(x)$ (или, более подробно, $(Df)(x)$). Дифференциал $Df(x)$ называется также дифференциалом Фреше*).

Используя обозначение дифференциала, определение (58.62) можно записать в виде

* М. Фреше (1878—1973) — французский математик.

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h), \quad h \rightarrow 0 \quad (58.63)$$

(здесь для краткости написано $Df(x)h$ вместо $(Df(x))(h)$).

Дифференциал Фреше $Df(x)$ называют также производной Фреше и обозначают $f'(x)$. В конечномерном случае (см. п. 41.7), по аналогии со случаем числовых функций, мы называли производной отображения матрицу дифференциала (матрицу Якоби) в некотором заданном базисе. В бесконечномерном случае нет прямого аналога этого определения хотя бы потому, что не во всяком линейном нормированном пространстве имеется базис. В том случае, когда в рассматривающих пространствах существуют базисы, линейные операторы, в частности дифференциалы, можно задавать их бесконечными матрицами, но мы на этом не будем здесь останавливаться.

Отметим, что если отображение $F: G \rightarrow Y$, $G \subset X$, дифференцируемо в точке $x \in G$, то оно и непрерывно в этой точке. Это сразу следует из формулы (58.63):

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

Пример 1. Если X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$, $a \in X$ и $f(t) = x_0 + ta$, $-\infty < t < +\infty$, то отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ дифференцируемо во всех точках и

$$f'(x_0 + ta) = a. \quad (58.64)$$

Действительно, здесь $f(t+a) = f(t) + ah$, т. е. условие (58.63) выполняется при $o(h) \equiv 0$ (напомним, что каждый элемент $a \in X$ можно рассматривать и как элемент пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$, см. пример в п. 58.8).

Ниже формулируемые теоремы 8—10 доказываются дословно так же, как аналогичные теоремы 3—5 в п. 41.7 для отображений множеств, лежащих в конечномерных пространствах, так как в приведенных там доказательствах нигде не использовалась конечномерность рассматриваемых пространств (длины $|x|$ векторов евклидовых пространств надо заменить, конечно, нормами $\|x\|$ элементов линейных нормированных пространств). Поэтому здесь мы не будем приводить доказательства указанных теорем.

Теорема 8. Если отображение $f: G \rightarrow Y$ (G — открытое множество, $G \subset X$, X и Y — линейные нормированные пространства) дифференцируемо в точке $x \in G$, то его дифференциал в этой точке определен однозначно.

Следствие. Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.

Теорема 9 (линейность дифференциала). Если отображения $f: G \rightarrow Y$ и $g: G \rightarrow Y$ (G — открытое множество в X , X и Y — линейные нормированные пространства) дифференцируемы в

точке $x \in G$, то для любых чисел λ и μ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ также дифференцируема в этой точке и

$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x).$$

Теорема 10. Пусть G и D — открытые множества соответственно в X и Y , а X , Y и Z — линейные нормированные пространства. Если отображение $f: G \rightarrow D$ дифференцируемо в точке $x \in G$, а отображение $g: D \rightarrow Z$ в точке $f(x)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и ее дифференциал в этой точке равен композиции дифференциалов отображений f и g :

$$D(g \circ f)(x) = D(g(f(x))) \circ Df(x). \quad (58.65)$$

Если X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$, $x \in X$, то множество всех точек из X вида

$$x_0(1-t) + tx, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

называется *отрезком* $[x_0, x]$, а множество всех точек вида

$$x_0(1-t) + tx, \quad 0 < t < 1,$$

— *шагом* (x_0, x) в пространстве X . Точки x_0 и x называются *концами* указанных отрезка и интервала.

Пример 2. Если отображение $f: G \rightarrow Y$ (G — открытое в X множество) дифференцируемо в точке $x + t_0 h$, $0 < t_0 < 1$, *интервала* $(x, x+h) \subset G$, то отображение $g(t) = f(x + th)$, $0 < t < 1$, дифференцируемо в точке $t_0 \in (0, 1)$ и

$$g'(t_0) = f'(x + t_0 h) h.$$

Это сразу следует из формул (58.64) и (58.65).

Наряду с понятием дифференцируемости отображения в смысле определения 28 бывает полезным понятие дифференцируемости отображения в данном направлении, к рассмотрению которого мы и перейдем.

Определение 29. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, $x \in E \subset X$, $h \neq 0$, и отображение $f: E \rightarrow Y$ определено на элементах вида $x + th$ при достаточно малых $t > 0$.

Отображение f называется *дифференцируемым в точке x по направлению вектора h* , если существует такой элемент $(D_h f)(x) \in Y$, что

$$f(x + th) = f(x) + (D_h f)(x)t + o(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (58.66)$$

Это условие равносильно условию существования в пространстве Y предела

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = (D_h f)(x).$$

Элемент $D_h f(x) \equiv (D_h f)(x)$ называется *производной по направлению h* (или *производной Гато**) по направлению h).

* Р. Гато (ум. 1914) — французский математик.

Производная Фреше $Df(x)$ и производная Гато $D_h f(x)$ имеют разную природу: производная Фреше — элемент пространства $\mathfrak{L}(X, Y)$, а производная Гато — элемент пространства Y .

Упражнение 17. Доказать, что отображение $x \mapsto \|x\|$, $x \in X$ (X — линейное нормированное пространство), имеет в точке $x=0$ производную по любому направлению и не дифференцируемо по Фреше.

18. Доказать, что если отображение $f: G \rightarrow Y$ ($G \subset X$, X и Y линейные нормированные пространства, G — открытое в X множество) дифференцируемо в точке $x \in G$ по Фреше, то оно в этой точке имеет производную по любому направлению.

Если у отображения $f: G \rightarrow Y$, $G \subset X$, в точке $x \in G$ существует производная по любому направлению, т. е. при любом $h \neq 0$ существует $D_h f(x) \in Y$, то, вообще говоря, этот элемент нелинейно зависит от h . Если же существует такой линейный ограниченный оператор, обозначаемый обычно $D_{\text{сл.}} f(x): X \rightarrow Y$, что

$$(D_{\text{сл.}} f(x))(h) = D_h f(x),$$

то этот оператор называется *слабым дифференциалом, слабой производной или дифференциалом Гато*.

В этом случае равенство (58.66) имеет вид

$$f(x+th) = f(x) + tD_{\text{сл.}} f(x)(h) + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

(вместо $(D_{\text{сл.}} f(x))(h)$ пишут короче: $D_{\text{сл.}} f(x)(h)$) и оно уже имеет смысл для всех $h \in X$.

Дифференциал Фреше называют также *сильным дифференциалом*.

Очевидно, что если у отображения $f: G \rightarrow Y$, $G \subset X$, в точке x существует сильный дифференциал, то в ней существует и слабый дифференциал, причем они совпадают. В самом деле, если имеет место равенство (58.63), то при любом фиксированном $h \neq 0$ и достаточно малом $t > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} f(x+th) &= f(x) + Df(x)(th) + o(th) = \\ &= f(x) + tDf(x)(h) + o(t), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ибо

$$o(th) = o(\|th\|) = o(t\|h\|) = o(t), \quad t \rightarrow 0$$

(h — фиксированный элемент пространства X , не равный нулю).

Это и означает, что сильный дифференциал является и слабым.

Упражнение 19. Привести пример отображения, имеющего в некоторой точке слабый дифференциал и не имеющего в ней сильного.

Указание: см. п. 20.7.

Можно показать (см.: Ильин В. А., Садовничий В. А., Сенцов Б. Х. Математический анализ.—М.: Наука, 1979, с. 617), что если у отображения $f: G \rightarrow Y$, $G \subset X$, в некоторой окрестности

точки $x \in G$ существует слабая производная $D_{\text{сл}}f(x)$, непрерывная в точке x (это означает, что отображение $x \mapsto (D_{\text{сл}}f)(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$, т. е. отображение вида $X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, непрерывно), то в этой точке существует сильная производная $Df(x)$, причем она совпадает со слабой.

58.9. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Получим теперь для дифференцируемых отображений линейных нормированных пространств аналог формулы конечных приращений Лагранжа для числовых функций (см. п. 102 и 15.2). Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 9 (лемма Л. Шварца *). Пусть ϕ — отображение отрезка $[0, 1]$ в линейное нормированное пространство Y , а ψ — действительная функция, заданная также на отрезке $[0, 1]$, причем ϕ и ψ непрерывны на этом отрезке и дифференцируемы в его внутренних точках.

Если для всех $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\|\phi(t)\| \leq \psi'(t), \quad (58.67)$$

то имеет место неравенство

$$\|\phi(1) - \phi(0)\| \leq \psi(1) - \psi(0). \quad (58.68)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и обозначим через E_ε множество точек отрезка $[0, 1]$, для которых выполняется неравенство

$$\|\phi(t) - \phi(0)\| \leq (t) - \psi(0) + \varepsilon t + \varepsilon. \quad (58.69)$$

В силу непрерывности ϕ и ψ , множество E_ε , как определенное нестрогим неравенством, замкнуто: в самом деле, если $t_n \in E_\varepsilon$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$, то, перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\|\phi(t_n) - \phi(0)\| \leq \psi(t_n) - \psi(0) + \varepsilon t_n + \varepsilon,$$

в силу непрерывности ϕ , ψ и нормы, получим

$$\|\phi(t_0) - \phi(0)\| \leq \psi(t_0) - \psi(0) + \varepsilon t_0 + \varepsilon.$$

Это означает, что $t_0 \in E_\varepsilon$, т. е. что множество E_ε замкнуто.

Множество E_ε не пусто, так как неравенство (58.69) заведомо справедливо для достаточно малых t , ибо предел его левой части при $t \rightarrow 0$ равен нулю, а правой равен $\varepsilon \rightarrow 0$.

Положим

$$a = \sup E_\varepsilon. \quad (58.70)$$

*Л. Шварц (род. в 1915 г.) — французский математик.

Из замкнутости множества E_ε следует, что $a \in E_\varepsilon$. Покажем, что $a=1$. В самом деле, пусть

$$a < 1. \quad (58.71)$$

В силу дифференцируемости отображения φ , для достаточно малых $h > 0$ имеем

$$\|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| = \|\varphi'(a)h + o(h)\| \leq \|\varphi'(a)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h. \quad (58.72)$$

Из неравенства (58.67) следует, что $\psi'(t) \geq 0$ и, следовательно, функция ψ не убывает, а поэтому

$$|\psi(a+h) - \psi(a)| = \psi(a+h) - \psi(a), \quad h > 0. \quad (58.73)$$

В силу же дифференцируемости функции ψ , для достаточно малых $h > 0$ получим

$$\begin{aligned} |\psi(a+h) - \psi(a)| &= |\psi'(a)h + o(h)| \geq |\psi'(a)|h - |o(h)| \geq \\ &\geq \psi'(a)h - \frac{\varepsilon}{2}h. \end{aligned} \quad (58.74)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| &\stackrel{(58.72)}{\leq} \|\varphi'(a)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h \stackrel{(58.67)}{\leq} \psi'(a)h + \frac{\varepsilon}{2}h \stackrel{(58.73)}{\leq} \\ &\leq \psi(a+h) - \psi(a) + \varepsilon h. \end{aligned} \quad (58.75)$$

Заметив, что

$$\|\varphi(a) - \varphi(0)\| \stackrel{(58.69)}{\leq} \psi(a) - \psi(0) + \varepsilon a + \varepsilon, \quad (58.76)$$

для всех достаточно малых $h > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|\varphi(a+h) - \varphi(0)\| &= \|\varphi(a+h) - \varphi(a) + \varphi(a) - \varphi(0)\| \leq \\ &\leq \|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| + \|\varphi(a) - \varphi(0)\| \stackrel{(58.75)}{\leq} \\ &\leq \psi(a+h) - \psi(0) + \varepsilon(a+h) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для числа $a+h$ при указанных h выполняется неравенство (58.69), что противоречит (58.70), ибо $h > 0$.

Итак, $a = \sup E_\varepsilon = 1$. Это означает, что неравенство (58.69) справедливо при $t=1$ и любом $\varepsilon > 0$:

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \psi(1) - \psi(0) + 2\varepsilon.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получим неравенство (58.68). \square

Теорема 11. Если отображение $f: G \rightarrow Y$ (G — открытое в X множество, X и Y — линейные нормированные пространства)

непрерывно на отрезке $[x_0, x] \subset G$ и дифференцируемо на интервале (x_0, x) , то

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leq \|h\| \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f'(\xi)\|. \quad (58.77)$$

Доказательство. Если $\sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f'(\xi)\| = +\infty$, то неравенство (58.77) очевидно, если же производная f' ограничена:

$$c = \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f'(\xi)\| < +\infty,$$

то рассмотрим функции $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ и $\psi(t) = c \|h\| t$, $0 \leq t \leq 1$. Функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируемы на интервале $(0, 1)$ (для отображения это следует из того, что оно является композицией отображений $x = x_0 + th$ и f). Так как (см. пример 2 в. п. 58.8)

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h,$$

то

$$\|\varphi'(t)\| \leq \|f'\| \|h\| \leq c \|h\| = \psi'(t), \quad 0 < t < 1,$$

и, следовательно, φ и ψ удовлетворяют условию леммы 10, а неравенство (58.68) превращается в рассматриваемом случае в неравенство (58.77). \square

58.10. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть f — отображение открытого множества G линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y . Если это отображение дифференцируемо во всех точках $x \in G$, то его производная $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ задает отображение $f'': X \mapsto f'(x)$ множества G в линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$. Если это отображение, в свою очередь, дифференцируемо в точке $x \in G$, то его производная $(f'')'(x)$ обозначается $f''(x)$, т. е.

$$f''(x) = \overset{\text{def}}{(f')}'(x), \quad (58.78)$$

и является элементом пространства $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

Оператор $f''(x)$ называется второй производной отображения f в точке x .

Если отображение f имеет в точке x вторую производную, то оно называется дважды дифференцируемым в этой точке.

Пусть $h \in X$, $k \in X$, тогда $f''(x)h \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $(f''(x)h)k \in Y$. Отображение

$$(h, k) \mapsto (f''(x)h)k$$

является, как легко видеть, билинейной формой, т. е. элементом пространства $\mathcal{L}_2(X^2; Y)$ (см. п. 58.7).

Таким образом, вторую производную можно рассматривать как билинейную форму, определяемую равенством

$$f''(x)(h, k) = (f''(x)h)k, \quad h \in X, \quad k \in X. \quad (58.79)$$

Задача 39. Билинейная форма $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$ (X — линейное нормированное пространство), называется *симметричной*, если для любых элементов $x \in X$ и $y \in X$ выполняется равенство $f(x, y) = f(y, x)$.

Доказать, что если отображение f открытого множества $G \subset X$ в пространство Y дважды дифференцируемо в точке $x \in G$, то вторая производная $f''(x)$ является билинейной ограниченной симметричной формой из $\mathcal{L}_2(X^2; Y)$ (X и Y — линейные нормированные пространства).

Аналогичным образом определяются последовательно и производные высших порядков рассматриваемого отображения $f: G \rightarrow Y$, $G \subset X$:

$$f'''(x) = (f'')'(x)$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)})'(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (58.80)$$

(как обычно $f^{(0)}(x) = f(x)$).

При фиксированном $x \in G$ производная $f'''(x)$ является отображением X в $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, т. е. $f'''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)))$.

Подобным образом

$$f^{(n)}(x) \in \mathcal{L}(\underbrace{X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots)}_{X \text{ } n \text{ раз}}). \quad (58.81)$$

Так как пространство $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots))$ изоморфно пространству n -линейных форм $\mathcal{L}_n(X^n; Y)$, то производную $f^{(n)}(x)$ можно рассматривать как полилинейную форму

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) = (\dots (f^{(n-1)}(x)h_1) \dots) h_n, \quad (58.82)$$

$h_k \in X, k = 1, 2, \dots, n.$

Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) = ((f^{(n-1)})'(x)h_1)(h_2, \dots, h_n). \quad (58.83)$$

В самом деле, согласно (58.81),

$$f^{(n)}(x)h_1 \in \mathcal{L}(\underbrace{X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots)}_{n-1 \text{ раз}}), \quad h_1 \in X,$$

но пространство $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots))$ изоморфно пространству полилинейных функций $\mathcal{L}(X^{n-1}, Y)$, причем при описанном выше их изоморфизме оператору $f^{(n)}(x)h_1$ соответствует $(n-1)$ -линейная форма, определяемая равенством (см. (58.59))

$$(f^n(x)h_1)(h_2, \dots, h_n) = (\dots (f^{(n)}(x)h_1)h_2 \dots) h_n. \quad (58.84)$$

Таким образом,

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) \underset{(58.82)}{=} (f^{(n)}(x)h_1)(h_2, \dots, h_n). \underset{(58.84)}{=}$$

Отсюда, в силу формулы (58.80), сразу следует равенство (58.83).

По индукции доказывается формула

$$\begin{aligned} & ((f^{(m)})^{(n-m)}(x)(h_1, \dots, h_{n-m}))(h_{n-m+1}, \dots, h_n) = \\ & = f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n), \quad 0 \leq m \leq n. \end{aligned} \quad (58.85)$$

В том случае, когда $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$, вместо $f^{(n)}(x)(h, \dots, h)$ будем писать $f^{(n)}(x)h^n$. Таким образом,

$$f^{(n)}(x)h^n = (\dots (f^n(x)h) \dots)h. \quad (58.86)$$

58.11. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Докажем теперь справедливость формулы Тейлора для отображений линейных нормированных пространств.

Теорема 12. Если отображение $f: G \rightarrow \bar{Y}$ (G — открытое в X множество, X и \bar{Y} — линейные нормированные пространства) имеет на отрезке $[x_0, x_1] \subset G$ n непрерывных производных и на интервале (x_0, x_1) производную порядка $n+1$, то

$$\begin{aligned} & \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n\| \leq \\ & \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in (x_0, x_1)} \|f^{(n+1)}(\xi)\|. \end{aligned} \quad (58.87)$$

Следствие. Если в предположениях теоремы производная порядка $n+1$ ограничена на интервале (x_0, x_1)

$$c = \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f^{n+1}(\xi)\| < +\infty, \quad (58.88)$$

то

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (58.89)$$

Доказательство. При $n=0$ неравенство (58.87) уже доказано: оно превращается в формулу конечных приращений (см. п. 58.9). В общем случае его доказательство проведем по индукции. Пусть теорема справедлива для всех k , $0 \leq k < n$. Заметим, что

$$f^{(k)}(x)h^k \underset{(58.85)}{=} ((f')^{(k-1)}(x)h^{k-1})h, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (58.90)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+th) - f(x) - f'(x)(th) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(th)^n,$$

отображающую отрезок $[0, 1]$ в пространство Y . Очевидно, что

$$g(1) - g(0) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n \quad (58.91)$$

и что $g(t)$ имеет на отрезке $[0, 1]$ производную, для которой справедлива формула

$$g'(t) \underset{(58.64)}{=} f'(x+th)h - f'(x)h - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)h^n \underset{(58.65)}{=} \left[f'(x+th) - f'(x) - \dots - \frac{1}{(n-1)!}(f')^{(n-1)}(x)(th)^{n-1} \right] h, \quad (58.92)$$

где выражение в квадратных скобках является элементом пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. Оценим норму этого элемента, применив к отображению $f': X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ неравенство (58.87) (это возможно в силу индуктивного предположения: производная f' имеет n производных):

$$\begin{aligned} \|f'(x+th) - f'(x) - \dots - \frac{1}{(n-1)!}(f')^{(n-1)}(th)^{n-1}\| &\leqslant \\ &\leqslant \frac{\|th\|}{n!} \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f'(\xi)\| = \frac{ct^n \|h\|^n}{n!} \end{aligned} \quad (58.93)$$

где $c = \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \leqslant +\infty$. Следовательно,

$$\|g'(t)\| \underset{(58.92)}{\leqslant} \frac{ct^n \|h\|^{n+1}}{n!}.$$

Применив лемму 2 к функциям $\phi(t) = g(t)$ и $\psi(t) = \frac{ct^n \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$, получим

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant \frac{c\|h\|^{n+1}}{(n+1)!},$$

что, в силу (58.91), и означает справедливость формулы (58.87). \square

Формула Тейлора (58.89) является обобщением формул Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, полученные ранее как для скалярного случая (см. п. 13.2 и п. 39.1), так и для векторного (см. п. 15.2 и 50.1).

§ 59. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

59.1. СКАЛЯРНОЕ И ПОЧТИ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В этом параграфе будут изучены более узкие, чем изучавшиеся раньше, типы пространств, содержащие в себе как частный случай нормированные (соответственно полунормированные) пространства.

Определение 1. Действительная функция, определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства X и обычно обозначаемая (x, y) , $x \in X$, $y \in X$, называется скалярным произведением, если она для любых точек $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ и любых чисел $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. (коммутативность). $(x, y) = (y, x)$.
2. (линейность). $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.
3. $(x, x) \geq 0$.
4. Если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

Свойства 3 и 4 называются положительной определенностью скалярного произведения.

Определение 2. Действительная функция, обозначаемая также обычно (x, y) , определенная на множестве упорядоченных пар элементов действительного линейного пространства X , $x \in X$, $y \in X$, и удовлетворяющая условиям 1, 2, 3, называется почти скалярным произведением.

Согласно этому определению, скалярное произведение является, конечно, и почти скалярным.

Свойство 3 почти скалярного произведения называется его положительной полуопределенностью.

В силу свойств 1 и 2 почти скалярного произведения, оно является билинейным отображением пространства $X^2 = X \times X$ в пространство действительных чисел \mathbf{R} .

Из свойства 2 почти скалярного произведения следует, что для любого элемента $x \in X$ выполняется равенство

$$(x, 0) = 0$$

(здесь нуль в левой части равенства — нуль пространства X , а нуль в правой части — нуль действительных чисел).

В самом деле, $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) = 0(x, 0) = 0$.

Аналогично вводится понятие и почти скалярного (в частности, скалярного) произведения в комплексном линейном пространстве X . В этом случае комплекснозначная функция (x, y) называется почти скалярным (соответственно скалярным) произведением, если она удовлетворяет свойству 2' для любых комплексных чисел λ и μ , свойству 3' и свойству

$$1'. (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

где, как всегда, черта над числом обозначает сопряженное ему комплексное число.

В этом случае скалярное произведение уже не является билинейным отображением в смысле определения 12 п. 58.1, так как оно не линейно по второму аргументу:

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = \bar{\lambda} (x, y).$$

В дальнейшем под линейным пространством будем понимать действительное линейное пространство, если не оговорено что-либо другое.

Линейные пространства, для элементов которых определена операция скалярного (почти скалярного) произведения, называются *линейными пространствами со скалярным (почти скалярным) произведением*.

Лемма 1 (неравенство Коши—Буняковского). *Если (x, y) — почти скалярное произведение в линейном пространстве X , то для любых $x \in X$ и $y \in X$ справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}. \quad (59.1)$$

Следствие 1 (неравенство треугольника). *Для любых $x \in X$ и $y \in X$ имеет место неравенство*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}.$$

Следствие 2. *Если (x, y) — почти скалярное (скалярное) произведение в линейном пространстве X , то функция*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (59.2)$$

является полунормой (соответственно нормой) в этом пространстве, а неравенство Коши—Буняковского (59.1) можно записать в виде

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (59.3)$$

Доказательство леммы. В силу свойства 3' почти скалярного произведения, для любого действительного числа λ имеем

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0.$$

Применив свойства 1° и 2° почти скалярного произведения, получим

$$\lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Если $(x, x) = 0$, то $2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0$. Так как это справедливо для любого действительного числа λ , то $(x, y) = 0$ (действительно, при $(x, y) \neq 0$ на λ будет иметь место ограничение $\lambda > -\frac{(y, y)}{(x, y)}$). Следовательно, неравенство (59.1) справедливо — обе его части обращаются в нуль. Если же $(x, x) \neq 0$, то дискриминант получающегося квадратного относительно λ трехчлена неположителен

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0,$$

а это равносильно неравенству (59.1). \square

Докажем теперь следствие 1:

$$\begin{aligned} (x+y, x+y) &\stackrel{2,3}{=} |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \stackrel{1,3}{\leqslant} \\ &\leqslant (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \stackrel{(59.1)}{\leqslant} \\ &\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2. \quad \square \end{aligned}$$

Свойства полуформы (соответственно нормы) для функции (59.2) (следствие 2) проверяются непосредственно:

$$1) \|x\| \stackrel{(59.2)}{=} \sqrt{(x, x)} \geq 0;$$

$$2) \|\lambda x\| \stackrel{(59.2)}{=} \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|;$$

$$3) \|x+y\| \stackrel{(59.2)}{=} \sqrt{(x+y, x+y)} \stackrel{\text{Сл. 1}}{\leqslant} \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} \stackrel{(59.2)}{=} \|x\| + \|y\|.$$

Если (x, y) — скалярное произведение и $\|x\| = 0$, т. е. $\sqrt{(x, x)} = 0$, то, согласно свойству 4° скалярного умножения, $x = 0$. \square

Из доказанного непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Каждое линейное пространство со скалярным (соответственно почти скалярным) произведением является нормированным (соответственно полуформированным) пространством с нормой (соответственно полуформой), определяемой формулой (59.2), а следовательно, линейное пространство со скалярным произведением есть метрическое пространство с метрикой (58.18).

Полуформу (59.2) будем называть полуформой (соответственно нормой), порожденной заданным почти скалярным (скалярным) произведением. Расстояние (58.18), порожденное нормой (59.2) линейного пространства со скалярным произведением, будем также называть расстоянием, порожденным заданным скалярным произведением.

Неравенство Коши — Буняковского в виде (59.3) справедливо и для комплексных линейных пространств (для них, как и для действительных пространств, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$), только доказывается оно несколько сложнее. Пусть X — комплексное линейное пространство с почти скалярным произведением. Для любых $x \in X$, $y \in Y$ и комплексного числа $\lambda \in C$, в силу свойства 3° почти скалярного произведения, имеем

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0. \quad (59.4)$$

Раскрывая скобки согласно свойствам 1° и 2°, получим

$$\begin{aligned} 0 \leq (\lambda x + y, \lambda x + y) &= \lambda \bar{\lambda} (x, x) + \lambda (x, y) + \\ &+ \bar{\lambda} (x, y) + (y, y). \end{aligned} \quad (59.5)$$

Пусть t — произвольно выбранное действительное число. Выберем теперь $\lambda \in C$ так, чтобы

$$\lambda (x, y) = t |(x, y)| \quad (59.6)$$

(подробнее: если $(x, y) \neq 0$, то $\lambda = \frac{t |(x, y)|}{|(x, y)|}$, а если $(x, y) = 0$, то $\lambda = t$). Тогда

$$\bar{\lambda} (x, y) = t |(x, y)|. \quad (59.7)$$

Перемножив равенства (59.6) и (59.7), получим

$$\lambda \bar{\lambda} (x, y) \bar{(x, y)} = t^2 |(x, y)|^2;$$

отсюда при $(x, y) \neq 0$ имеем

$$\lambda \bar{\lambda} = t^2, \quad (59.8)$$

а в силу того, что $\lambda = t$ при $(x, y) = 0$, равенство (59.8) имеет место всегда.

Далее,

$$\lambda (x, y) + \bar{\lambda} (x, y) \stackrel{(59.6)}{=} 2t |(x, y)|. \quad (59.9)$$

Поэтому

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \stackrel{(59.5)}{=} t^2 (x, x) + 2t |(x, y)| + (y, y) \stackrel{(59.8)}{=} 2t^2 |(x, y)| + (y, y) \stackrel{(59.9)}{\geq} 0.$$

Следовательно, дискриминант получившегося квадратичного трехчлена неположителен:

$$|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leq 0,$$

а это равносильно неравенству (59.3). \square

Существуют нормированные пространства, в которых нельзя ввести скалярные произведения, порождающие нормы, эквивалентные соответствующим заданным в них нормам. Можно показать, что примером такого пространства является пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке функций.

59.2. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

1. В множестве действительных чисел \mathbf{R} обычная операция умножения является и скалярным умножением в смысле определения 1.

В множестве комплексных чисел \mathbf{C} скалярным произведением чисел x и y является произведение $x\bar{y}$.

2. Действительное арифметическое n -мерное векторное пространство \mathbf{R}^n , в котором скалярное произведение векторов $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ и $y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ определяется по формуле (см. (18.32) в п. 18.4)

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

является линейным пространством со скалярным произведением в смысле определения 1 п. 59.1. В этом случае норма элемента $x \in \mathbf{R}^n$ совпадает с его длиной $|x|$ (см. п. 58.3, пример 2):

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

а соответствующая метрика с расстоянием в n -мерном арифметическом точечном пространстве:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Напомним, что для этого пространства неравенство Коши — Шварца было доказано нами раньше (см. лемму 1 в п. 18.1 и неравенство (18.39) в п. 18.4).

В арифметическом комплексном пространстве \mathbf{C}^n (см. п. 58.1) скалярное произведение вводится по формуле

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{C}^n.$$

3. Рассмотрим линейное полуформированное пространство $RL_2[a, b]$ из примера 7, п. 58.3, состоящее из функций с интегрируемым (вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[a, b]$ квадратом, т. е. из таких функций f , для которых

$$\int_a^b f^2(t) dt < +\infty.$$

Пусть $f \in RL_2[a, b]$ и $g \in RL_2[a, b]$. Вспомним, что произведение функций, интегрируемых по Риману на некотором отрезке,

также интегрируемо по Риману на этом отрезке. Поэтому на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset [a, b]$, на котором функции f и g интегрируемы по Риману, будет интегрируемо по Риману и их произведение и, следовательно, имеет смысл рассматривать несобственный интеграл

$$\int_a^b f(t) g(t) dt. \quad (59.10)$$

Кроме того, в любой точке t , в которой определены функции f и g , справедливо неравенство

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{f^2(t) + g^2(t)^*)}{2},$$

поэтому интеграл (59.10) сходится, и притом абсолютно.

Почти скалярное произведение в этом пространстве определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt. \quad (59.11)$$

Свойства 1°, 2°, 3° почти скалярного произведения легко проверяются. Полученное пространство с почти скалярным произведением (59.11) будем также обозначать через $RL_2[a, b]$.

Заметим, что неравенство (59.2) в этом случае может быть записано следующим образом:

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt;$$

оно является частным случаем неравенства Гёльдера (см. п. 28.4*) при $p=q=2$ и называется неравенством Коши — Буняковского.

Полунорма, порожденная почти скалярным произведением (59.11), имеет, очевидно, вид

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}, \quad (59.12)$$

т. е. совпадает с полунормой (58.14), рассмотренной в примере 7 п. 58.3 при $p=2$. Отсюда следует, что почти скалярное произведение (59.11) не является скалярным, так как в п. 58.3 было установлено, что полунорма (58.14) не является нормой при всех $p \geq 1$.

* Оно следует из очевидного неравенства $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geq 0$.

Однако в подпространстве $CL_2[a, b]$ пространства $RL_2[a, b]$, состоящем только из функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, почти скалярное произведение (59.11) является уже скалярным, ибо, как было показано в примере 8 п. 58.3, в этом случае

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in CL_2[a, b]$$

является не только полуформой, но и нормой.

Для расстояния между двумя непрерывными функциями f и g в этом пространстве получаем формулу

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (59.13)$$

Мы уже встречались со сходимостью функций в смысле этой метрики (см., например, следствие теоремы 12 в п. 55.9).

Все сказанное естественным образом распространяется и на функции, определенные на любом бесконечном промежутке, в частности на всей оси.

Упражнение 1. Пусть X — линейное пространство с почти скалярным произведением. Элементы $x \in X$ и $y \in X$ называются эквивалентными, если $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 0$. Обозначим через \tilde{X} множество, элементы которого — классы эквивалентных элементов пространства X . Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ и μ — числа. Определим $\lambda\tilde{x} + \mu\tilde{y}$ как элемент множества \tilde{X} , содержащий $\lambda x + \mu y$, и положим $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$. Доказать, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$ и $y \in \tilde{y}$, и что \tilde{X} является линейным пространством, а (\tilde{x}, \tilde{y}) — скалярным произведением в нем.

59.3. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Линейное пространство с почти скалярным произведением является, согласно (59.2), и полуформированным. Поэтому для него определены понятие сходящейся последовательности, ее предела и понятие непрерывной функции (см. п. 58.4).

Лемма 3. *Почти скалярное произведение (x, y) является непрерывной функцией (см. п. 58.4) своих аргументов x и y на множестве $X \times X$, на котором оно задано: $x \in X$, $y \in X$.*

Доказательство. В самом деле, для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |(x_0, y_0) - (x, y)| &= |(x_0 - x, y_0) + (x, y_0 - y)| \leq \\ &\leq \|x_0 - x\| \|y_0\| + \|x\| \|y - y_0\|, \end{aligned} \quad (59.14)$$

из которого сразу следует указанная непрерывность почти скалярного произведения. Действительно, если $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$, то, заметив, что $\|x\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| < \|x_0\| + \delta$, из

(59.14) получим

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| < \delta \|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\delta.$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном числе $\varepsilon > 0$ всегда можно выбрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что при $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$ выполняется неравенство $|(x_0, y_0) - (x, y)| < \varepsilon$; для этого достаточно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\delta \|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\delta < \varepsilon$; это, очевидно, всегда возможно. \square

В пространстве X с почти скалярным произведением можно говорить о сходимости рядов по полуформе, порожденной почти скалярным произведением: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ сходится по указанной полуформе к некоторому элементу $s \in X$, который называется суммой ряда: $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Отметим, что сумма ряда в пространстве с почти скалярным произведением определена неоднозначно. Однако, если $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $s^* = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, т. е. s и s^* суть суммы одного и того же ряда, то $\|s^* - s\| = 0$ (см. п. 58.4), и поэтому для любого элемента $a \in X$ имеет место равенство $(s^*, a) = (s, a)$. Действительно, в силу неравенства Коши — Шварца для почти скалярного произведения,

$$|(s^*, a) - (s, a)| = |(s^* - s, a)| \leq \|s^* - s\| \|a\| = 0.$$

Из непрерывности почти скалярного произведения во всем пространстве следует, например, что ряды в пространстве с почти скалярным произведением можно умножать почленно не только на числовые множители, но и на элементы самого пространства. Докажем это.

Лемма 4. Пусть в пространстве X с почти скалярным произведением задан сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда для всякого элемента $a \in X$ числовой ряд, получающийся из данного ряда почлененным умножением его на a , также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = (s, a).$$

Иначе говоря, для сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и любого элемента $a \in X$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, a \right).$$

Доказательство. Так как

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k, a \right) = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k, a \right) = (s, a). \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим пространство $RL_2[a, b]$ из примера 3 п. 59.2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ функций $f_n \in RL_2[a, b]$ сходится в этом пространстве к функции $f \in RL_2[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \quad t \in [a, b],$$

т. е. последовательность частичных сумм

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$$

этого ряда сходится к функции f в смысле среднего квадратичного:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0.$$

Тогда для любой функции $\varphi(x) \in RL_2[a, b]$, согласно лемме 4,

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \varphi(x) dx.$$

В частности, при $\varphi = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Иначе говоря,

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Итак, если ряд функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, b]$ сходится на нем в смысле среднего квадратичного к некоторой функции также с интегрируемым квадратом на $[a, b]$, то ряд можно почленно интегрировать.

Из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций вытекает сходимость этой последовательности к той же функции и в смысле среднего квадратичного (см. п. 58.3), поэтому из доказанного здесь утверждения следует, что если ряд непрерывных функций сходится на отрезке равномерно, то его можно почленно интегрировать.

Этот результат был получен ранее другим путем в главе о рядах (см. теорему 9 в п. 36.4). Все сказанное переносится естественным образом на бесконечные промежутки.

Определение 3. Два линейных пространства X и Y со скалярным (почти скалярным) произведением называются изоморфными, если они изоморфны как линейные пространства, и отображение f , отображающее пространство X на пространство Y и осуществляющее этот изоморфизм, сохраняет скалярное произведение (почти скалярное произведение), т. е. для любых двух элементов $x \in X$ и $y \in X$ выполняется равенство

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Два изоморфных линейных пространства со скалярным (почти скалярным) произведением могут отличаться лишь природой своих элементов, а не метрическими свойствами, поэтому в дальнейшем изоморфные линейные пространства со скалярным (почти скалярным) произведением часто не будут различаться.

Поясним это на примере. Пусть X и Y^* —линейные пространства со скалярным (почти скалярным) произведением и пусть f —изоморфное отображение пространства X на множество $Y \subset Y^*$. Тогда, «отождествляя» элементы пространства X с соответствующими им элементами множества Y , можно рассматривать пространство X как подпространство пространства Y^* . Под этим понимается (сравните с соответствующими