любого $y \in Y$ имеем

$$(z, y) = (\lim_{n\to\infty} z_n, y) = \lim_{n\to\infty} (z_n, y) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

т. е. $z \in Y^{\perp}$, а это и означает замкнутость множества $Y^{\perp}$. □

Теорема 15. *Если Y — подпространство гильбертова пространства X и $x_0 \in X$, то существует такой единственный элемент $y_0 \in Y$, что*

$$\| x_0 - y_0 \| = \inf_{y \in Y} \| x_0 - y \|. \tag{60.58}$$

Элемент y_0 называется *ортогональной проекцией элемента* x_0 в подпространство Y. Очевидно, эта теорема является в некотором смысле обобщением теоремы 3 п. 60.4 на случай, когда подпространство Y не является обязательно конечномерным.

Доказательство. Пусть X — гильбертово пространство, $x_0 \in X$, и Y — подпространство пространства X. Положим

$$d \overset{\text{def}}{=} \inf_{y \in Y} \| x_0 - y \|^2.$$

Выберем последовательность точек $y_n \in Y$, так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \| x_0 - y_n \|^2 = d. \tag{60.59}$$

Заметим, что для любых элементов u и v какого-либо линейного пространства со скалярным произведением имеет место тождество

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \| u \|^2 + \frac{1}{2} \| v \|^2. \tag{60.60}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно записать это равенство через скалярные произведения

$$\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} \right) + \left(\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2} \right) = \frac{1}{2}(u, u) + \frac{1}{2}(v, v)$$

и произвести соответствующее умножение, воспользовавшись дистрибутивностью скалярного произведения. Положив в тождестве (60.60) $u = x_0 - y_n$, $v = x_0 - y_m$, получим

$$\left\| x_0 - \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \frac{1}{4} \| y_n - y_m \|^2 = \frac{1}{2} \| x_0 - y_n \|^2 + \frac{1}{2} \| x_0 - y_m \|^2. \tag{60.61}$$

Так как $\frac{y_n+y_m}{2}\in Y$, то

$$\left\| x_0-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \geqslant d. \tag{60.62}$$

В силу условия (60.59), для произвольно заданного $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n>n_0$ выполняется неравенство

$$\| x_0-y_n\|^2<d+\frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{60.63}$$

Поэтому если $n>n_0$ и $m>n_0$, то из равенства (60.61), в силу неравенств (60.62) и (60.63), следует, что

$$d+\frac{1}{4}\| y_n-y_m\|^2<\frac{1}{2}\left(d+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(d+\frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

т. е. при $n>n_0$ и $m>n_0$ выполняется неравенство

$$\| y_n-y_m\|<\varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{y_n\}$ фундаментальная, а поэтому, в силу полноты пространства X, она сходится.

Пусть

$$y_0 \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{60.64}$$

Отсюда, в силу непрерывности нормы, следует, что на элементе y_0 достигается минимум отклонения $\|x_0-y\|$ элемента x_0 от подпространства Y, т. е. выполняется условие (60.58). В самом деле,

$$\| x_0-y_0\|=\|x_0-\lim_{n\to\infty} y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_0-y_n\| \underset{(60.59)}{=} \sqrt{d}=\inf_{y\in Y}\| x_0-y\|. \tag{60.65}$$

Таким образом, так как нижняя грань достигается, то ее можно заменить минимумом

$$\| x_0-y_0\|=\min_{y\in Y}\|x_0-y\|. \tag{60.66}$$

Покажем, что элемент y_0, обладающий этим свойством, единствен. Действительно, если $y_1\in Y$,

$$\| x_0-y_1\|^2=d, \tag{60.67}$$

то, положив в тождестве (60.60) $u=x_0-y_0$, $v=x_0-y_1$, получим

$$\left\| x_0 - \frac{y_0+y_1}{2} \right\|^2 + \frac{1}{4}\| y_0 - y_1 \|^2 = \frac{1}{2}\| x_0 - y_0 \|^2 + \frac{1}{2}\| x_0 - y_1 \|^2. \quad (60.68)$$

Так как $\frac{y_0+y_1}{2} \in Y$, то, в силу (60.59), выполняется неравенство

$$\left\| x_0 - \frac{y_0+y_1}{2} \right\|^2 \geqslant d,$$

а так как, кроме того,

$$\| x_0 - y_0 \|^2 = d, \quad \| x_0 - y_1 \|^2 = d,$$

то из (60.68) следует неравенство

$$d + \frac{1}{4}\left\| y_0 - y_1 \right\|^2 \leqslant d,$$

т. е. $\| y_0 - y_1 \|^2 \leqslant 0$, что возможно лишь тогда, когда $y_0 = y_1$ □.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 15 видно, что полнота пространства X использовалась лишь для существования ортогональной проекции элемента в подпространство, а не для ее единственности. Таким образом, если у элемента линейного пространства со скалярным произведением существует ортогональная проекция в некоторое подпространство, то она единственна.

В рассматриваемом случае имеет место и обобщение следствия 1 теоремы 3 п. 60.4.

Теорема 16. *Для того чтобы элемент y_0 был ортогональной проекцией элемента x_0 гильбертова пространства X в его подпространство Y, необходимо и достаточно, чтобы для всех $y \in Y$ выполнялось условие*

$$(x_0 - y_0, \ y) = 0, \quad (60.69)$$

т. е. чтобы $x_0 - y_0 \perp Y$.

Доказательство необходимости условия (60.69). Пусть элемент x_0 удовлетворяет условию (60.66). Выберем произвольно элемент $y \in Y$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} \| x_0 - y_0 + ty \|^2 = (x_0 - y_0 - ty, \ x_0 - y_0 + ty) =$$

$$= (x_0 - y_0, \ x_0 - y_0) + 2t(x_0 - y_0, \ y) + t^2(y, \ y),$$

$$-\infty < t < +\infty.$$

Найдем ее производную:

$$f'(t) = 2((x_0 - y_0, \ y) + t(y, \ y)). \quad (60.70)$$

Так как $y_0+ty\in Y$, то, в силу (60.66), функция f достигает наименьшего значения при $t=0$. Следовательно, $f'(0)=0$, или, в силу формулы (60.70),

$$(x_0-y_0,\ y)=0$$

(для произвольного $y\in Y$), т. е. выполняется условие (60.69).

Доказательство достаточности условия (60.69). Пусть $x_0\in X$, $y_1\in Y$ и для всех элементов $y\in Y_0$ выполняется условие

$$(x_0-y_1,\ y)=0. \tag{60.71}$$

Покажем, что элемент y_1, удовлетворяющий этому условию, единствен. Действительно, пусть элемент $y_2\in Y$ таков, что для всех $y\in Y$ также выполняется условие

$$(x_0-y_2,\ y)=0; \tag{60.72}$$

написав тождество

$$y_1-y_2+(x_0-y_1)-(x_0-y_2)=0 \tag{60.73}$$

и заметив, что $y_1-y_2\in Y$, умножим скалярно равенство (60.73) на y_1-y_2. Тогда, в силу (60.71) и (60.72), будем иметь $(y_1-y_2,\ y_1-y_2)=0$, т. е.

$$\|y_1-y_2\|=0,$$

а из этого следует, что $y_1=y_2$. Выше было доказано, что элемент y_0, удовлетворяющий условию (60.66), удовлетворяет и условию (60.69). Следовательно, в силу единственности такого элемента, $y_1=y_0$, т. е. элемент y_1 является ортогональной проекцией элемента x_0 в пространстве Y. □

Замечание 2. Отметим, что для любого билинейного функционала $A(x,\ y)$ (билинейного отображения, см. п. 58.7) имеет место тождество, аналогичное тождеству (60.60):

$$A\left(\frac{u+v}{2}\right)+A\left(\frac{u-v}{2}\right)=\frac{1}{2}A(u)+\frac{1}{2}A(v),$$

где $A(x)=A(x,\ x)$.

Поэтому метод, примененный в доказательствах теорем 16 и 17, является типичным для решения задач на экстремум квадратичных функционалов $A(x)$ в бесконечномерных пространствах.

Теорема 17. *Линейное пространство X со скалярным произведением является прямой суммой всякого своего подпространства Y и его ортогонального дополнения $Y^{\perp}$:*

$$X=Y\oplus Y^{\perp}. \tag{60.74}$$

Доказательство. Согласно определению прямой суммы (см. п. 58.1), надо доказать, что каждый элемент $x\in X$

представим в виде $x=y+z$, $y\in Y$, $z\in Y^{\perp}$, и при этом единственным образом.

Пусть $x\in X$; обозначим через $y\in Y$ его ортогональную проекцию на пространство Y и положим $z\overset{\text{def}}{=}x-y$. Тогда, очевидно,

$$x=y+z \tag{60.75}$$

и, согласно теореме 15, имеет место равенство $(x-y,\ y)=0$, или

$$(z,\ y)=(x-y,\ y)=0,$$

т. е. элемент z ортогонален элементу y и, следовательно, $z\in Y^{\perp}$.

Докажем единственность разложения элемента x в сумму элементов, принадлежащих ортогональным подпространствам X и Y. Хотя она следует и из предыдущих результатов, для наглядности приведем ее прямое доказательство.

Если $x=y_1+z_1$ $(y_1\in Y,\ z_1\in Y^{\perp})$, то, вычитая это равенство из равенства (60.75), получим

$$(y-y_1)+(z-z_1)=0.$$

Так как $y-y_1\in Y$, $z-z_1\in Y^{\perp}$ и, следовательно, $y-y_1\perp z-z_1$, то из теоремы Пифагора имеем

$$\|y-y_1\|^2+\|z-z_1\|^2=0,$$

откуда $y=y_1$, $z=z_1$. □

Упражнение 5. Доказать, что если X — линейное пространство со скалярным произведением и Y — его подпространство, то

$$(Y^{\perp})^{\perp}=Y.$$

60.8. ФУНКЦИОНАЛЫ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

При изучении линейных нормированных пространств и пространств других типов большую роль играют так называемые линейные функционалы на этих пространствах, с которыми мы встречались в случае конечномерных пространств в (см. п. 41.6). В дальнейшем мы убедимся в существенном значении линейных функционалов на примере теории обобщенных функций, а теперь сформулируем их определение для случая линейных нормированных пространств.

Определение 9. *Линейное отображение линейного нормированного пространства в множество действительных чисел называется линейным функционалом на этом пространстве (или над этим пространством).*

Очевидно, что линейные функционалы линейного нормированного пространства X являются частным случаем операторов $X\to Y$, когда линейное нормированное пространство Y является

множеством действительных чисел, и поэтому для линейных функционалов справедливы все понятия, введенные для линейных операторов, например их ограниченность, непрерывность, норма, и имеют место все их свойства, доказанные выше (см. п. 58.6). В частности, непрерывность и ограниченность линейного функционала эквивалентны между собой. Функционалы линейного нормированного пространства также (как и вообще операторы) образуют линейное нормированное пространство, которое называется *сопряженным данному.*

В случае конечномерных пространств было показано, что все функционалы порождаются скалярным произведением; покажем, что аналогичное утверждение верно и для гильбертовых пространств.

Теорема 18. *Для всякого линейного ограниченного функционала f действительного гильбертова пространства X существует единственный элемент $a \in X$ такой, что для всех $x \in X$ выполняется равенство*

$$f(x) = (x, a), \tag{60.76}$$

причем $\|f\| = \|a\|$. Обратно: если $a \in X$, то отображение

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} (a, x), \quad x \in X, \tag{60.77}$$

является непрерывным линейным функционалом и $\|f\| = \|a\|$.

Следствие. *Гильбертово пространство изоморфно со своим сопряженным пространством.*

Доказательство. Прежде всего очевидно, что функционал $f(x) = (x, a)$ линейный и ограниченный. Последнее следует из неравенства Коши — Шварца

$$|f(x)| = |(x, a)| \leqslant \|x\| \, \|a\|.$$

Так как при $x = a$ это неравенство превращается в равенство, то (см. п. 58.6)

$$\|f\| = \|a\|.$$

Пусть f — линейный ограниченный функционал на гильбертовом пространстве X, а Y — его ядро:

$$Y \overset{\text{def}}{=} \ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}. \tag{60.78}$$

Тогда, как это было показано в п. 60.7, множество Y является подпространством пространства X. Обозначим через Z ортогональное дополнение в X подпространства Y, т. е. $Z = Y^{\perp}$.

Если $f \equiv 0$ на X, что равносильно равенству $X = Y$, то формула (60.76) очевидна, так как для любого $x \in X$ имеем $f(x) = (0, x) = 0$, т. е. $a = 0$.

Пусть $f \not\equiv 0$ на X и, следовательно, $X \neq Y$. Поэтому существует такой элемент $x_0 \in X$, что $x_0 \notin Y$ и, следовательно, $f(x_0) \neq 0$.

Согласно теореме 16, имеет место разложение

$$x_0 = y_0 + z_0, \quad y_0 \in Y, \quad z_0 \in Z.$$

Так как $f(x_0) \neq 0$, $f(y_0) = 0$ (ибо $y_0 \in Y = \ker f$), то

$$f(x_0) = f(y_0 + z_0) = f(y_0) + f(z_0) = f(z_0)$$

и, следовательно,

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} f(z_0) \neq 0. \tag{60.79}$$

Положим $z_1 = \frac{z_0}{\alpha}$. Тогда

$$f(z_1) = f\left(\frac{z_0}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f(z_0) = 1.$$

Выберем произвольно элемент $x \in X$ и пусть

$$f(x) = \beta; \tag{60.80}$$

тогда

$$f(x - \beta z_1) = f(x) - \beta f(z_1) = 0.$$

Поэтому элемент $x - \beta z_1$ принадлежит пространству Y:

$$y \overset{\text{def}}{=} x - \beta z_1 \in Y. \tag{60.81}$$

Таким образом,

$$x = y + \beta z_1, \quad y \in Y, \quad \beta z_1 \in Z. \tag{60.82}$$

Так как $y \perp z_1$, то

$$(x, z_1) \underset{(60.82)}{=} \beta (z_1, z_1). \tag{60.83}$$

Положим

$$a \overset{\text{def}}{=} \frac{z_1}{(z_1, z_1)}; \tag{60.84}$$

тогда

$$f(x) \underset{(60.80)}{=} \beta \underset{(60.83)}{=} \frac{(x, z_1)}{(z_1, z_1)} = \left(x, \frac{z_1}{(z_1, z_1)}\right) \underset{(60.84)}{=} (x, a).$$

Таким образом, искомый элемент a найден и формула (60.76) доказана.

Покажем, что такой элемент a единственный. Если элемент $b \in X$ таков, что для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = (x, b)$, а следовательно, и $(x, b-a)=0$, то, положив $x=b-a$, получим $\|b-a\|=0$ и, следовательно, $a=b$. □

Замечание 3. Изоморфизм гильбертова пространства с ему сопряженным имеет место и для комплексных гильбертовых пространств.

60.9*. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ В КВАДРАТЕ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ

Если квадрат функции f интегрируем на всей действительной оси, то сама функция f, вообще говоря, не абсолютно интегрируема на всей оси, как это видно на примере функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Поэтому, на основании теории преобразования Фурье, изложенной в § 56, нельзя утверждать существование преобразования Фурье для функций из пространства $L_2(-\infty, \infty)$. Покажем, что в этом случае можно определить преобразование Фурье в некотором обобщенном смысле. Предварительно остановимся на определении пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ для комплекснозначных функций.

Пусть f и g — две непрерывные функции с интегрируемым квадратом модуля на всей оси и принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Их скалярное произведение определяется в этом случае по формуле

$$(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Легко проверяется, что все свойства, которыми должно обладать скалярное произведение в комплексном линейном пространстве (см. п. 59.1), в этом случае выполняются.

Пространство $L_2(-\infty, \infty)$, которое мы будем рассматривать в этом пункте, определим как пополнение предгильбертова пространства непрерывных и с интегрируемым на всей оси квадратом модуля комплекснозначных функций с указанным скалярным произведением (ср. с теоремой 3 в п. 59.4).

Через $\|f\|$ в настоящем параграфе обозначается норма элемента $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)},$$

а также и полунорма

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx}$$

для функций f с интегрируемым на всей оси квадратом модуля. Выше для случая действительных функций отмечалось без доказательства (см. п. 59.4), что каждый элемент пространства L_2 можно рассматривать как класс функций. Аналогичный факт справедлив и для пространства L_2 комплекснозначных функций, причем полунорма $\|f\|$ функций f совпадает с нормой элемента пространства L_2, которому принадлежит (в смысле, аналогичном указанному в п. 59.4) функция f. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих фактов и не будем их использовать в дальнейшем.

Комплекснозначную функцию $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — действительные функции, $-\infty < x < +\infty$, назовем финитной ступенчатой функцией, если финитными ступенчатыми функциями являются функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см. определение 7 в п. 55.2). В дальнейшем для краткости финитные ступенчатые функции будем называть просто ступенчатыми функциями.

Любые две ступенчатые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации одних и тех же одноступенчатых функций (см. п. 55.2), принимающих значения 1 и 0. Для этого достаточно взять всевозможные непустые пересечения полуинтервалов постоянства функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Эти пересечения также являются полуинтервалами $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на которых постоянны одновременно функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому если

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 0, & \text{если} \quad x < x_{k-1} \text{ или } x \geqslant x_k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

— соответствующие одноступенчатые функции, то существуют такие действительные числа λ_k, $\mu_k = 1, 2, \ldots, n$, что

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k(x).$$

Отсюда следует, что любая комплекснозначная ступенчатая функция $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(x), \tag{60.85}$$

где $\zeta_k = \lambda_k + i\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — комплексные числа.

Лемма 7. *Пусть f — комплекснозначная ступенчатая функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье, тогда*

$$\|F[f]\| = \|f\|.$$

Доказательство. Если функция f задана формулой (60.85), то

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}\,dx =$$

$$= \sum_{j,\ k=1}^{n} \zeta_j \overline{\zeta_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_j(x)\overline{\omega_k(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}). \quad (60.86)$$

Пусть теперь $0 < \eta < +\infty$; тогда

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}e^{i\xi y}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}\,dx\,d\xi \int_{-\eta}^{\eta} e^{iy(\xi - x)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}\,\frac{\sin\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,dx\,d\xi. \quad (60.87)$$

Все преобразования здесь законны, так как на самом деле все интегралы берутся в конечных пределах.

Поскольку действительная и мнимая части функции $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы о представлении функций с помощью интеграла Фурье (см. теорему 1 в п. 56.1), то для всех x, кроме $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеем (см. доказательство указанной теоремы)

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}\,\frac{\sin\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi = \overline{f(x)}.$$

Оказывается, что в силу этого, при наших предположениях в последнем интеграле (60.87) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to +\infty$. Однако соответствующая теорема не была доказана в настоящем курсе, и потому нам придется сделать несколько дополнительных вычислений. Подставляя (60.85) в (60.87), получим

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}\,dy=\frac{1}{\pi}\sum_{i,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\sin\eta(\xi-x)}{\xi-x}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i,k=1}^{n}\zeta_j\overline{\zeta_k}\int_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}dt. \qquad (60.88)$$

Рассмотрим поведение каждого слагаемого получившейся суммы при $\eta\to+\infty$. Если $j=k$, то, меняя порядок интегрирова-

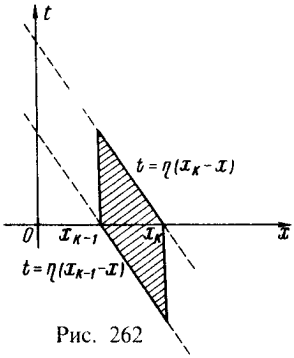

Рис. 262

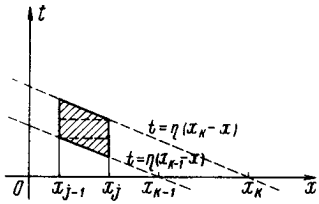

Рис. 263

ния (рис. 262) и производя интегрирование по переменной x, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})}\left(x_k-x_{k-1}-\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{-\eta(x_k-x_{k-1})}^{0}\left(x_k-x_{k-1}+\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}dt\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int_{0}^{\eta(x_k-x_{k-1})}\frac{\sin t}{t}dt+\frac{2}{\pi\eta}\left[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})\right].$$

Поскольку

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

(см. п. 54.4), то

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}(x_k-x_{k-1})\int\limits_0^{\eta(x_k-x_{k-1})}\frac{\sin t}{t}dt=x_k-x_{k-1}.$$

Далее, очевидно,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\pi\eta}[1-\cos\eta(x_k-x_{k-1})]=0,$$

поэтому

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}dx\int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}dt=x_k-x_{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Покажем теперь, что при $j\neq k$

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}dt=0.$$

Пусть для определенности $x_{j-1}<x_j\leqslant x_{k-1}<x_k$. При других расположениях полуинтервалов постоянства $[x_{j-1},x_j)$ и $[x_{k-1},x_k)$ доказательство аналогично. Меняя снова порядок интегрирования и производя интегрирование по x (рис. 263), с помощью аналогичных рассуждений получим

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}dx\int\limits_{\eta(x_{k-1}-x)}^{\eta(x_k-x)}\frac{\sin t}{t}dt=\int\limits_{\eta(x_k-x_j)}^{\eta(x_k-x_{j-1})}\left(x_k-x_{j-1}-\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}dt+$$

$$+\int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})}^{\eta(x_k-x_j)}(x_j-x_{j-1})\frac{\sin t}{t}dt+$$

$$+\int\limits_{\eta(x_{k-1}-x_j)}^{\eta(x_{k-1}-x_{j-1})}\left(x_j-x_{k-1}+\frac{t}{\eta}\right)\frac{\sin t}{t}dt\to0\ \text{ при }\ \eta\to\infty.$$

Теперь из (60.88) имеем

$$\|F[f]\|^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F[f]\overline{F[f]}\,dx=\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}F[f]\overline{F[f]}\,dy=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}) = \|f\|^2. \quad \square$$

Лемма 8. *Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и равная нулю вне его, тогда существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, $n=1, 2, \ldots$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0.$$

Доказательство. Для действительных функций это следует из леммы 6 п. 59.4. Пусть теперь $\varphi = u + iv$ — комплекснозначная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$; тогда действительные функции u и v также непрерывны на отрезке $[a, b]$. Поэтому существуют такие последовательности ступенчатых функций $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, что $\|u - u_n\| \to 0$ и $\|v - v_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $\varphi_n = u_n + iv_n$, то $\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|v - v_n\|$, отсюда $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Лемма 9. *Пусть комплекснозначная функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его, тогда*

$$\|F[\varphi]\| = |\varphi\|.$$

Доказательство. Пусть φ_n — последовательность ступенчатых функций таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$$

(см. лемму 8), тогда в силу непрерывности нормы,

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = \|\varphi\|. \tag{60.89}$$

Из неравенства же Коши — Буняковского получим

$$\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2\, dx\right)^{1/2} =$$

$$= (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в среднем к функции φ и в смысле L_1. Поэтому если

$$\psi = F[\varphi], \quad \psi_n = F[\varphi_n], \quad n = 1, \ 2, \ \ldots,$$

то последовательность непрерывных (см. следствие теоремы 2 в п. 56.7) функций $\{\psi_n\}$ равномерно сходится к функции ψ, которая в силу этого непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, в силу леммы 7,

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{60.90}$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывные функции ψ_n являются функциями с интегрируемым квадратом модуля, т. е. принадлежат пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. Далее, функции ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют фундаментальную последовательность в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Это следует из сходимости в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\varphi_n\}$ и из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2 \, dy,$$

которое также вытекает из леммы 6, ибо разность ступенчатых функций также является ступенчатой функцией.

Покажем, что последовательность $\{\psi_n\}$ сходится к функции ψ и в пространстве L_2. Действительно, пусть фиксировано $\varepsilon > 0$, тогда, в силу фундаментальности последовательности $\{\psi_n\}$, существует такой номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 \, dy < \varepsilon.$$

Тем более, для любого числа $c > 0$ будем иметь

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 \, dy < \varepsilon. \tag{60.91}$$

При фиксированных n и c при $m \to \infty$ подынтегральное выражение в (60.91) равномерно стремится к функции $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Поэтому в неравенстве (60.91) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $m \to \infty$. В результате будем иметь

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 \, dy \leqslant \varepsilon.$$

Устремляя теперь c к $+\infty$, получим, что при $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 \, dy \leqslant \varepsilon, \tag{60.92}$$

что и означает сходимость в среднем в смысле L_2 последовательности $\{\psi_n\}$ к функции ψ.

Из доказанного следует также, что $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, в силу (60.90) и (60.92),

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Наконец, из неравенства (58.10) и того что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = \|\psi\|. \tag{60.93}$$

Из (60.89), (60.90) и (60.93) следует, что

$$\|\psi\| = \|\varphi\|. \ \square$$

Теорема 19 (теорема Планшереля*). *Пусть функция* φ *непрерывна и с интегрируемым квадратом модуля на всей числовой оси и пусть*

$$\psi_M(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-M}^{M} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx, \qquad M > 0.$$

Тогда:

1) *функция* $\psi_M(y)$ *также непрерывна и с интегрируемым на всей числовой оси квадратом,*

2) *при* $M \to +\infty$ *функции* ψ_M *сходятся в пространстве* $L_2(-\infty; +\infty)$ *к некоторому элементу* $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ *и*

3) $\|\varphi\| = \|\psi\|$.

Доказательство. Если

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x \in [-M, M], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [-M, M], \end{cases}$$

то, очевидно,

$$\psi_M = F[\varphi_M],$$

$$\lim_{M\to+\infty} \varphi_M = \varphi \quad \text{в} \quad L_2(-\infty, +\infty), \tag{60.94}$$

$$\lim_{M\to+\infty} \|\varphi_M\| = \|\varphi\|. \tag{60.95}$$

Согласно лемме 8,

$$\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|, \qquad M > 0, \tag{60.96}$$

---

*) М. Планшерель (1855—1967) — швейцарский математик.

$$\|\psi_{M_1}-\psi_{M_2}\|=\|\varphi_{M_1}-\varphi_{M_2}\|, \qquad M_1>0, \qquad M_2>0. \quad (60.97)$$

Из (60.94) и (60.97) следует, в силу полноты пространства $L_2(-\infty, +\infty)$, что существует предел (почему?)

$$\lim_{M\to+\infty} \psi_M=\psi \quad \text{в} \quad L_2(-\infty, +\infty).$$

В силу непрерывности нормы,

$$\lim_{M\to+\infty} \|\psi_M\|=\|\psi\| \tag{60.98}$$

из (60.95), (60.96) и (60.98) имеем

$$\|\psi\|=\|\varphi\|. \ \square$$

Полученный в процессе доказательства элемент $\psi\in L_2(-\infty, +\infty)$ мы будем также называть *преобразованием Фурье* заданной непрерывной функции $\varphi\in L_2(-\infty, +\infty)$ и писать

$$\psi=F[\varphi]. \tag{60.99}$$

Эта запись естественна, так как если функция φ, кроме того, и абсолютно интегрируема, то $\lim\limits_{M\to+\infty} \psi_M$ совпадает с обычным преобразованием Фурье. Действительно, в этом случае

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x)-\varphi(x)|\,dx=0.$$

Следовательно, функции $\psi_M=F[\varphi_M]$ при $M\to\infty$ равномерно сходятся к преобразованию Фурье $F[\varphi]$ функции φ. Как мы видели, ψ_M сходится в среднем в смысле L_2 к функции ψ; отсюда нетрудно убедиться, что $\psi=F[\varphi]$ (сравните аналогичное рассуждение в доказательстве леммы 9).

Преобразование Фурье (60.99) определено пока лишь для тех элементов $\varphi\in L_2(-\infty, +\infty)$, которые являются непрерывными функциями с интегрируемым квадратом, однако по непрерывности оно может быть распространено на все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$. Действительно, пусть φ — произвольный элемент из пространства $L_2(-\infty, +\infty)$. Согласно определению пространства $L_2(-\infty, +\infty)$, множество непрерывных функций плотно в нем. Следовательно, существует последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n\in L_2(-\infty, +\infty), \qquad n=1, 2, \ldots,$$

такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n=\varphi$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n-\varphi\|=0$.

Пусть $F[\varphi_n]=\psi_n$, $n=1, 2, \ldots$. В силу теоремы Планшереля

$$\|\psi_n-\psi_m\|=\|\varphi_n-\varphi_m\|, \qquad n, m=1, 2, \ldots,$$

поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ фундаментальна в L_2 и, следовательно, сходится. Пусть $\psi=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$. По определению полагаем

$$\psi=F[\varphi]. \tag{60.100}$$

Если $\varphi_n^*\in L_2(-\infty, +\infty)$, $n=1, 2, \ldots$,— какая-либо другая последовательность непрерывных функций, сходящаяся в $L_2(-\infty, +\infty)$ к элементу φ, и если $\psi_n^*=F[\varphi_n^*]$, то из равенства

$$\|\varphi_n-\varphi_n^*\|=\|\psi_n-\psi_n^*\|$$

имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n^*=\psi$. Таким образом, определение (60.100) не зависит от выбора последовательности непрерывных функций, сходящейся к элементу φ.

Для любого $\varphi\in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$\|F[\varphi]\|=\|\varphi\|,$$

что сразу следует из того, что это равенство имеет место для непрерывных функций $\varphi\in L_2(-\infty, +\infty)$ и непрерывности нормы.

Далее, легко проверить, что преобразование Фурье F линейно на $L_2(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$F[\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2]=\lambda_1F[\varphi_1]+\lambda_2F[\varphi_2]$$

для любых φ_1 и φ_2 из $L_2(-\infty, +\infty)$ и любых чисел λ_1 и λ_2. Это верно для ступенчатых функций. Они образуют плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Отсюда предельным переходом указанное равенство получается для любых элементов пространства $L_2(-\infty, +\infty)$.

Наконец, преобразование Фурье отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, т. е. каков бы ни был элемент $\psi\in L_2(-\infty, +\infty)$, существует такой элемент $\varphi\in L_2(-\infty, +\infty)$, что $F[\varphi]=\psi$. Для того чтобы это показать, следует тем же методом, как это было сделано для преобразования Фурье, определить на пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ обратное преобразование Фурье F^{-1} и показать, что для любого элемента $\psi\in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F^{-1}[\psi]\|=\|\psi\|$. Затем можно показать, что

$$F[F^{-1}[\psi]]=\psi \quad \text{и} \quad F^{-1}[F[\psi]]=\psi$$

для всех $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, исходя из того, что это верно на множестве ступенчатых функций, образующих плотное в $L_2(-\infty, +\infty)$ множество. Если теперь для элемента $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ взять элемент $\varphi = F^{-1}[\psi]$, то получим $F[\varphi] = \psi$, что и означает, что преобразование F отображает все пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя.

Суммируя все сказанное, получим следующую теорему.

Теорема 20 (теорема Планшереля). *Преобразование Фурье F линейно и взаимно однозначно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 61. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

61.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим одно обобщение классического понятия функции, а именно понятие обобщенной функции. Оно возникло при решении некоторых физических задач и в последние годы быстро и прочно вошло в математику. С помощью этого понятия можно распространить преобразование Фурье на существенно более широкий класс функций, чем абсолютно интегрируемые или интегрируемые в квадрате функции. Оно позволяет сформулировать на математическом языке такие идеализированные понятия, как, например, плотность точечного заряда, плотность материальной точки, мгновенный импульс и т. п.

Поясним это подробнее. При изучении физических явлений с помощью математического аппарата нам неизбежно приходится пользоваться различными математическими абстракциями, в частности понятием точки. Мы говорим, например, о массе, сосредоточенной в данной точке пространства, о силе, приложенной в данный момент времени (т. е. в данной точке оси отсчета времени), о точечном источнике того или иного физического поля и т. п. Это удобно при использовании математического аппарата, хотя при этом мы воспроизводим не вполне точную реальную картину: всякая масса имеет определенный объем, всякая сила действует определенный промежуток времени, всякий источник поля имеет определенные размеры и т. д. Оказывается, что при таком подходе к изучению физических явлений недостаточно методов классической математики. Иногда приходится вводить новые математические понятия, создавать новый математический аппарат.

Рассмотрим в качестве примера действие «мгновенной» силы. Пусть в момент времени $t=0$ на тело массы $m\neq 0$ подействовала сила, сообщившая ему скорость $v\neq 0$, после чего действие силы прекратилось. Обозначая через $F(t)$ силу, действующую на тело в момент времени t, получим $F(t)=0$ при $t\neq 0$. Попытаемся найти, чему же равна сила $F(t)$ при $t=0$. По второму закону Ньютона сила равна скорости изменения количества движения относительно времени

$$F(t)=\frac{d(mv)}{dt}$$

и, следовательно, для любого момента времени τ, $0<\tau<+\infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t)\,dt=mv. \tag{61.1}$$

В качестве нижнего предела интегрирования взята $-\infty$, можно, конечно, вместо нее взять и любое число $a<0$, поскольку до момента времени $t=0$ тело находилось в покое.

Обратим внимание на то, что с точки зрения классической математики, т. е. с точки зрения того понятия интеграла, которое было нами изучено, равенство (61.1) лишено смысла: функция $F(t)$ равна нулю во всех точках, кроме $t=0$, и потому стоящий в левой части формулы (61.1) интеграл, рассматриваемый как несобственный, равен нулю, в то время как правая часть этого равенства не равна нулю. Вместе с тем, исходя из физических соображений, естественно ожидать, что написанное равенство имеет определенный смысл. Это противоречие означает, что мы оказались за пределами возможности использования известного нам математического аппарата, что необходимо ввести какие-то новые математические понятия.

Предположим, для простоты, что количество движения, которое получило тело, равно единице, т. е. что $mv=1$. В этом случае силу $F(t)$, действующую на тело, будем обозначать через $\delta(t)$, следовательно, формула (61.1) будет теперь иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt=1, \quad \tau>0. \tag{61.2}$$

Функция $\delta(t)$ называется обычно дельта-функцией (δ-функцией), или функцией Дирака*).

Чтобы лучше вникнуть в сущность вопроса, предположим, что на тело действует не мгновенная сила, а что в течение промежутка времени от $-\varepsilon$ до 0 ($\varepsilon>0$) на тело действует некоторая постоянная сила, которую мы обозначим через $\delta_\varepsilon(t)$.

*) П. Дирак (род. 1902 г.) — английский физик.

Предположим также, что эта сила сообщает нашему телу то же самое количество движения, равное единице. Короче говоря, распределим искомую силу $\delta(t)$ на интервал длины ε. Найдем силу $\delta_\varepsilon(t)$.

По закону сохранения времени для любого времени $\tau \geqslant 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt = 1.$$

Поскольку сила $\delta_\varepsilon(t)$ равна нулю вне отрезка $[-\varepsilon, 0]$, а на этом отрезке постоянна, то

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{0} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \varepsilon\delta_\varepsilon(t), \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, \text{ если } -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, \text{ если } t < -\varepsilon \text{ или } t > 0. \end{cases} \tag{61.3}$$

Естественно предположить, что мгновенная сила $\delta(t)$ получается из «распределенной силы» $\delta_\varepsilon(t)$ предельным переходом при $\varepsilon \to 0$, т. е.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t),$$

тогда

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{если } t \neq 0. \end{cases} \tag{61.4}$$

Эта формула не дает нам возможности, используя известные определения интеграла (собственного или несобственного), получить формулу (61.2). Равенство нулю функции во всех точках, кроме одной, где она равна бесконечности, и одновременное равенство интеграла от этой функции единице противоречат друг другу в рамках той математики, которая в настоящее время называется классической. Это приводит к мысли о необходимости введения нового определения — определения «интеграла» (61.2).

Физически естественно считать, что количество движения, приданное телу мгновенной силой $\delta(t)$, т. е. интеграл (61.2)

является пределом количества движения, приданного телу распределенными во времени силами $\delta_\varepsilon(t)$, когда время их действия стремится к нулю, т. е. когда $\varepsilon \to 0$. Поэтому положим, по определению,

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt, \qquad \tau > 0.$$

Отсюда, в силу равенства $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt \equiv 1$, $\tau > 0$ для всех $\varepsilon > 0$ и следует непосредственно равенство (61.2).

Таким образом, когда говорится, что интеграл (61.2) от дельта-функции равен единице, то этот интеграл следует понимать как предел соответствующих обычных интегралов от δ_ε-функций при $\varepsilon \to +0$.

Оказывается полезным дать аналогичным образом определение и более общих «интегралов», а именно интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\,dt, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{61.5}$$

где $f(t)$ — некоторая непрерывная функция. Именно, определим символ (61.5) равенством

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,dt. \tag{61.6}$$

Чтобы доказать, что это определение корректно, надо доказать, что предел (61.6) всегда существует. Покажем, более того, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,dt = \begin{cases} f(0) & \text{при} \quad \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad \tau < 0. \end{cases} \tag{61.7}$$

Пусть сначала $\tau \geqslant 0$. Используя (61.3), получим

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\,dt - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t)\,dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} |f(t) - f(0)|\,dt. \tag{61.8}$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ при $x=0$, для любого $\eta>0$ существует такое $\varepsilon_\eta>0$, что для всех t, удовлетворяющих условию $|t|<\varepsilon_\eta$, выполняется неравенство

$$|f(t)-f(0)|<\eta.$$

Поэтому для всех $\varepsilon<\varepsilon_\eta$ из неравенства (61.8) следует, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\tau}\delta_\varepsilon(t)\,f(t)\,dt-f(0)\right|<\frac{\eta}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{0}dt=\eta.$$

Равенство (61.7) при $\tau\geqslant 0$ доказано. Еще проще оно доказывается при $\tau<0$. Итак, из определения (61.6) следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\tau}\delta(t)\,f(t)\,dt=\begin{cases} f(0) & \text{при} \quad \tau\geqslant 0,\\ 0 & \text{при} \quad \tau<0.\end{cases} \tag{61.9}$$

Формула (61.2) следует отсюда при $f(t)\equiv 1$.

Если положить

$$\theta(t)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad t\geqslant 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0,\end{cases} \tag{61.10}$$

то формула (61.9) при $f(t)\equiv 1$ перепишется в виде

$$\theta(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\delta(t)\,dt. \tag{61.11}$$

Функция $\theta(t)$ имеет специальное название — она называется функцией Хевисайда*). Вычисляя производную функции $\theta(t)$ согласно классическому определению производной, из (61.10) получим

$$\theta'(t)=\begin{cases} \infty & \text{при} \quad t=0,\\ 0 & \text{при} \quad t\neq 0.\end{cases} \tag{61.12}$$

На основании этого было бы неверно утверждать, что $\theta'(t)$ является дельта-функцией, так как одной лишь формулой (61.4) функция $\delta(t)$ не определяется, поскольку даже физически ясно, что только из этой формулы не может следовать, что сила $\delta(t)$

---

*) О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик.

сообщает рассматриваемому телу именно единичное количество движения. Однако, удобно положить, по определению,

$$\theta'(t)=\delta(t).$$

Это помимо равенства (61.12) оправдывается тем, что в этом случае сохраняется основная формула интегрального исчисления, восстанавливающая функцию по ее производной — фомула Ньютона — Лейбница. Действительно, теперь формула (61.11) может быть переписана в виде

$$\theta(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\theta'(t)\,dt, \qquad -\infty<\tau<+\infty$$

(отметим, что $\theta(-\infty)=0$).

Заметим, что мы не дали четкого математического определения самой функции $\delta(t)$ как функции точки (выше отмечалось, что формула (61.4) не является таким определением); это вообще невозможно сделать, так как дельта-функция является понятием другой природы. Мы же определили не функцию $\delta(t)$, а «интеграл» (61.5). Это не случайно. Характерным для многих задач физики является то обстоятельство, что вводимые для описания того или иного объекта функции имеют смысл лишь постольку, поскольку непосредственный физический смысл имеют некоторые интегралы от этих функций. Обобщенные функции и возникают как некоторое обобщение семейств интегралов от произведения двух функций, одна из которых фиксирована, а другая может выбираться произвольно из некоторой совокупности.

Итак, нами определено новое понятие — понятие интеграла от дельта-функции (и даже более общее понятие интеграла от произведения непрерывной функции на дельта-функцию). Это не обычный интеграл, т. е. не предел интегральных сумм, а предел соответствующих интегралов, или, образно выражаясь, «предел пределов интегральных сумм». Иначе говоря, для определения интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\,dx$ надо к предельному переходу, дающему значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)f(x)\,dx$, добавить еще один предельный переход при $\varepsilon\to 0$. Здесь наблюдается своеобразная аналогия с определением несобственного интеграла исходя из известного определения интеграла, мы с помощью дополнительного предельного перехода получаем новое математическое понятие. Конечно, дополнительные предельные переходы в этих случаях различны, это приводит к различным понятиям.

При новом определении символа (61.5) мы находимся в круге привычных нам математических определений, расширяющих запас понятий, с которыми имели дело раньше; нам удалось выявить одно интересное свойство дельта-функции $\delta(t)$ (см. (61.9)): она ставит в соответствие каждой непрерывной функции $f(t)$ число $f(0)$, т. е. дельта-функцию можно рассматривать как функцию, определенную на множестве всех непрерывных функций. Отображения, области определения которых представляют собой некоторые множества функций, называются *функционалами*. Дельта-функция является одним из простейших примеров функционалов. Обобщенными функциями, которые упоминались в начале этого пункта, называются функционалы определенного вида (см. п. 61.2).

Как мы видели, свойства дельта-функции определяются свойствами функций $\delta_\varepsilon(x)$. Если взять $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, то получится последовательность функций, которая, как и аналогичные ей в определенном смысле, называется дельта-образной последовательностью (точное определение дельта-образных последовательностей будет дано ниже: см. упражнение 7 в п. 61.3). Всякая дельта-образная последовательность может служить для определения свойства (61.9) дельта-функции. Следует отметить, что мы уже встречались раньше с дельта-образными последовательностями: примером такой последовательности является последовательность ядер Фейера $\Phi_n(n)$, $n=1, 2, \ldots$. Однако мы не акцентировали внимания на последовательностях такого рода, поскольку они, не являясь самостоятельным объектом изучения, играли вспомогательную роль.

Теперь мы перейдем к систематическому изучению обобщенных функций. Отдельные обобщенные функции возникли первоначально в работах П. Дирака и других физиков в качестве символического способа описания определенных физических явлений. Для использования этих понятий в качестве метода теоретического исследования возникла необходимость создания теории обобщенных функций, что и было сделано. Теория обобщенных функций является весьма полезным математическим аппаратом. С ее помощью удалось решить ряд задач, не поддававшихся решению старыми методами. Ныне обобщенные функции широко применяются как в прикладных, так и в чисто математических исследованиях.

В следующих пунктах этого параграфа мы изложим основы общей теории обобщенных функций, построенной С. Л. Соболевым и Л. Шварцем*).

---

*) С. Л. Соболев (род. в 1908 г).— советский математик.

61.2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СХОДИМОСТЬЮ. ФУНКЦИОНАЛЫ. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. *Пусть X — некоторое множество и пусть в совокупности всех последовательностей $\{x_n\}$ его элементов, $x_n \in X$, выделен некоторый класс последовательностей, названных сходящимися, и каждой сходящейся последовательности поставлен в соответствие элемент $x \in X$, называемый ее пределом.*

Если при этом выполняются три условия:

1) *каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела;*

2) *всякая последовательность вида $\{x, x, x, \ldots, x, \ldots\}$ является сходящейся, и ее пределом является элемент x;*

3) *всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел, что и вся последовательность;*

то множество X называется пространством со сходимостью.

Условия 1, 2 и 3 называются *аксиомами Фреше.*

Если x является пределом последовательности $\{x_n\}$, то, как обычно, пишется

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Определение 2. *Линейное пространство X называется линейным пространством со сходимостью, если оно является пространством со сходимостью, относительно которой операции сложения элементов пространства и умножения их на число являются непрерывными.*

Это означает, что для любых сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X, имеющих своими пределами соответственно $x \in X$ и $y \in X$, и любых чисел λ и μ последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ также сходится и

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

Кроме того, если $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность и $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n x = \lambda x$ для любого $x \in X$.

Примером линейных пространств со сходимостью являются нормированные линейные пространства; однако существуют линейные пространства со сходимостью, в которых нельзя ввести норму, порождающую заданную сходимость последовательностей.

Важным для дальнейшего является понятие линейного функционала на пространстве со сходимостью, с которым мы

встречались в частном случае линейных нормированных пространств (см. п. 41.6 и 60.8).

Определение 3. *Отображения линейного пространства X во множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (или во множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$) называются функционалами, определенными на этом пространстве, или функционалами над этим пространством.*

Значение функционала f в точке x линейного пространства X обозначается через (f, x), т. е. так же как скалярное произведение элементов f и x в линейном пространстве X со скалярным произведением. Это обозначение оправдывается, в частности, тем, что скалярное произведение (y, x) при фиксированном элементе y является функционалом, определенным на указанном пространстве X.

Определение 4. *Пусть X — линейное пространство. Функционал f, определенный на этом пространстве, называется линейным (точнее, линейным однородным), если для любых элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел λ, μ выполняется условие*

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda (f, x) + \mu (f, y).$$

Определение 5. *Функционал f, определенный на линейном пространстве X со сходимостью, называется непрерывным, если для любой сходящейся последовательности $x_n \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, выполняется условие*

$$\lim_{n \to \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Функционалы, как и всякие числовые функции, можно складывать, умножать друг на друга, в частности на число. Например, если f и g — функционалы, то значение функционала $\alpha f + \beta g$ (α и β — числа) определяется в точке $x \in X$ по формуле

$$(\alpha f + \beta g, x) = \alpha (f, x) + \beta (g, x).$$

Лемма 1. *Линейные непрерывные функционалы образуют линейное пространство.*

Доказательство. Пусть f и g — линейные функционалы, α и β — числа. Покажем, что $\alpha f + \beta g$ — также линейный функционал:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g, \lambda x + \mu y) &= \alpha (f, \lambda x + \mu y) + \beta (g, \lambda x + \mu y) = \\ &= \alpha [\lambda (f, x) + \mu (f, y)] + \beta [\lambda (g, x) + \mu (g, y)] = \\ &= \lambda [\alpha (f, x) + \beta (g, x)] + \mu [\alpha (f, y) + \beta (g, y)] = \\ &= \lambda (\alpha f + \beta g, x) + \mu (\alpha f + \beta g, y),\end{aligned}$$

т. е. $\alpha f + \beta g$ — линейный функционал.

Пусть теперь f и g — непрерывные функционалы. Покажем, что тогда и $\alpha f+\beta g$ — также непрерывный функционал. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha f+\beta g,\ x_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\alpha(f,\ x_n)+\beta(g,\ x_n)\right]=$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}(f,\ x_n)+\beta\lim_{n\to\infty}(g,\ x_n)=\alpha(f,\ x)+\beta(g,\ x)=(\alpha f+\beta g,\ x).$$

Таким образом, во множестве линейных непрерывных функционалов естественным образом определены операции их сложения и умножения на число. Выполнение для этих операций аксиом линейного пространства проверяется безо всякого труда. □

Любой функционал f, как и всякий линейный оператор (см. п. 58.1), отображает нуль в нуль.

Функционал, принимающий на всех точках пространства значение нуль, называется нулевым функционалом.

Отметим, что если линейный функционал принимает на всех точках пространства одно и то же значение, то это значение равно нулю. Иначе говоря, кроме нулевого, не существует никакого другого линейного функционала, принимающего одно и то же значение на всех точках пространства.

В самом деле, если для всех $x\in X$ имеет место равенство $f(x)=c$, то, в частности, $c=f(0)=0$.

В линейном пространстве линейных непрерывных функционалов пространства X понятие сходимости последовательностей определяется следующим образом.

Определение 6. *Последовательность функционалов f_n, $n=1$, 2, ..., называется сходящейся к функционалу f, если последовательность значений функционалов f_n сходится в каждой точке $x\in X$ к значению в ней функционала f, иначе говоря, если для любого элемента $x\in X$ числовая последовательность $\{(f_n,\ x)\}$ сходится к числу $(f,\ x)$.*

Таким образом, утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ равносильно утверждению

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\ x)=(f,\ x)\ \text{для всех}\ x\in X.$$

При таком определении сходимости функционалов операции их сложения и умножения на число непрерывны (это непосредственно следует из линейности функционалов и из свойств пределов числовых последовательностей), и, следовательно,

если ввести понятие сходимости функционалов согласно определению 6, то будет справедливым следующее утверждение, которое мы сформулируем в виде отдельной леммы.

Лемма 2. *Линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве со сходимостью, также образуют линейное пространство со сходимостью.*

Определение 7. *Линейное пространство со сходимостью, элементами которого являются линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве X, называется пространством, сопряженным X.*

Как мы знаем, в случае гильбертовых пространств (см. п. 60.8) сопряженное пространство изоморфно самому пространству. В общем случае это не имеет места.

Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью, причем каждый элемент пространства X является элементом пространства Y, и пусть всякая последовательность $x_n \in X$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся в X к элементу x, сходится к x и в Y. В этом случае будем писать

$$X \subsetneq Y.$$

Определение 8. *Говорят, что линейный непрерывный функционал f, определенный на пространстве $X \subsetneq Y$, продолжаем на пространство Y в линейный непрерывный функционал, если существует такой линейный непрерывный функционал F, определенный на пространстве Y, что $(F, x)=(f, x)$ для всех $x \in X$ (т. е. $F=f$ на X). В этом случае функционал F называется продолжением функционала f.*

Упражнение 1. Пусть X и Y — линейные пространства со сходимостью. Доказать, что если $X \subsetneq Y$ и множество X плотно в пространстве Y (т. е. каждый элемент из пространства Y является пределом в этом пространстве последовательности элементов из X), то всякий линейный непрерывный функционал пространства X, продолжаемый в линейный непрерывный функционал пространства Y, продолжаем единственным образом.

Как и для отображений любых линейных пространств, для пространств со сходимостью имеет смысл понятие линейного отображения (линейного оператора) одного пространства со сходимостью в другое такое же пространство (см. определение 7 в п. 58.1). Введем еще понятие непрерывного отображения одного линейного пространства со сходимостью в другое.

Определение 9. *Пусть X_1 и X_2 — два линейных пространства со сходимостью. Отображение Φ пространства X_1 в X_2 называется непрерывным в точке $x_0 \in X_1$, если, какова бы ни была последовательность $x_n \in X_1$, $n=1, 2, \ldots$, сходящаяся в пространстве X_1 к точке x_0, последовательность $\Phi(x_n) \in X_2$, $n=1, 2, \ldots$, сходится в X_2 к элементу $\Phi(x_0)$.*

Инача говоря, отображение Φ является непрерывным в точке x_0, если из $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0)$.

Лемма 3. *Если линейное отображение Φ линейного пространства со сходимостью X_1 в линейное пространство со сходимостью X_2 непрерывно в нуле пространства X_1, то оно непрерывно и всюду в X_1.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$; тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_0) = 0$. В силу непрерывности отображения Φ в нуле

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n - x_0) = 0.$$

Поскольку отображение Φ линейно, то

$$\Phi(x_n - x_0) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi(x_n) - \Phi(x_0)] = 0, \text{ откуда } \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0).$$

Таким образом, отображение Φ непрерывно в каждой точке $x_0 \in X_1$. □

Определение 10. *Отображение Φ линейного пространства со сходимостью X_1 в линейное пространство со сходимостью X_2 называется непрерывным на X_1, если оно непрерывно в каждой точке пространства X_1.*

Для всякого линейного пространства X со сходимостью имеют смысл понятие ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящегося ряда и его суммы. Эти понятия вводятся аналогично случаю линейных нормированных пространств. Это возможно, поскольку в соответствующих определениях из свойств нормы используется лишь то, что во всяком нормированном пространстве определено понятие сходящейся последовательности.

Примеры линейных и непрерывных отображений пространств со сходимостью будут даны в п. 61.6 и в п. 61.7.

61.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. ПРОСТРАНСТВА D И D'

Определим прежде всего основное для нас линейное пространство функций D. Для этого рассмотрим функции, заданные на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и принимающие комплексные значения.

Интересующее нас пространство D состоит из бесконечно дифференцируемых финитных функций (определение финитных функций см. в п. 55.2). Все финитные функции при естественным образом определенных операциях их сложения и умножения на число образуют линейное пространство, а бесконечно дифференцируемые финитные функции (которые мы будем называть здесь основными) — его подпространство. Введем в этом подпространстве понятие сходимости последовательностей.

Определение 11. *Последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций* φ_n, $n=1, 2, \ldots$, *называется сходящейся к бесконечно дифференцируемой финитной функции* φ, *если:*

1) *существует отрезок* $[a, b]$, *вне которого все функции* φ_n, $n=1, 2, \ldots$, *и* φ *обращаются в нуль**);

2) *на этом отрезке последовательность функций* φ_n, $n=1, 2, \ldots$, *и последовательности всех их производных* $\varphi_n^{(k)}$, $n=1, 2, \ldots$, *равномерно сходятся соответственно функции* φ *и к ее производным* $\varphi^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$.

Совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью. Это непосредственно следует из свойств пределов функций и свойств равномерно сходящихся последовательностей.

Определение 12. *Пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций с введенной сходимостью называется пространством* D *основных функций.*

Очевидно, что если $\varphi \in D$, то и любая производная функция φ принадлежит пространству D.

Заметим еще, что если $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в D, то и последовательность $\{\varphi_n^{(k)}\}$ производных любого порядка $k=1, 2, \ldots$ сходится к $\varphi^{(k)}$ в D. Это непосредственно следует из определения сходимости в пространстве D.

Тривиальным примером функции пространства D является функция, равная нулю на всей оси, менее тривиальным — функция (рис. 264)

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & \text{если } |x|<a, \\ 0, & \text{если } |x|\geqslant a, \end{cases} \tag{61.13}$$

Упражнения. **2.** Доказать, что функция (61.13) бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (ср. с (37.25)).

3. Доказать, что, для того чтобы для функции $\varphi \in D$ существовала функция $\psi \in D$ такая, что $\varphi=\psi'$, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt=0$.

---

*) Отрезок $[a, b]$ содержит носители всех функций φ, φ_n, $n=1, 2, \ldots$.

Определение 13. *Всякий линейный непрерывный функционал f, определенный на D, называется обобщенной функцией.*

Определение 14. *Функция f, определенная на всей действительной оси, называется локально интегрируемой, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.*

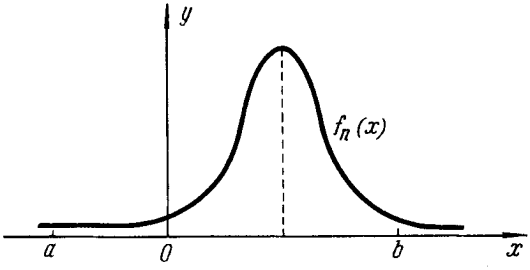

Рис. 264

Если f — локально интегрируемая функция, а $\varphi \in D$, то произведение $f\varphi$ абсолютно интегрируемо на всей оси. Действительно, пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$ (определение носителя $\operatorname{supp}\varphi$ функции φ см. в п. 55.2); функция φ, очевидно, ограничена: $|\varphi(x)| \leqslant C$, $-\infty < x < +\infty$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Определим для локально интегрируемой функции f функционал (f, φ) на D равенством

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{61.14}$$

Этот функционал линеен и непрерывен. Линейность его очевидна; докажем его непрерывность. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D. Тогда существует такой отрезок $[a, b]$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место включения $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a, b]$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [a, b]$; поэтому

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sup_{[a,\,b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_a^b |f(x)|\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, всякой локально интегрируемой функции $f(x)$ соответствует обобщенная функция (f, φ)*); в этом смысле всякую локально интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию.

---

*) В этом случае говорится также, что обобщенная функция (f, φ) порождается функцией f.

Как мы знаем, не существует линейного функционала, принимающего одно и то же значение, не равное нулю, на всех точках пространства (см. п. 61.2). *Постоянной обобщенной функцией* c (в частности, нулевой) называется обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией $f(x)=c$, $-\infty<x<+\infty$. Таким образом, для любой основной функции φ имеет место равенство

$$(c,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} c\varphi(x)\,dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Упражнение **4.** Доказать, что две непрерывные на числовой оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

Иногда обобщенные функции обозначаются символом $f(x)$. Это обозначение чисто символическое; оно отнюдь не обозначает значения обобщенной функции в точке $x\in\boldsymbol{R}$, а отражает лишь тот факт, что обобщенные функции являются в указанном выше смысле обобщением обычных (локально интегрируемых) функций; никакое значение обобщенной функции в точке x здесь не подразумевается.

Для обозначения значения обобщенной функции f в точке $\varphi=\varphi(x)$ пространства D наряду с записью $(f,\ \varphi)$ употребляется также запись

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{61.15}$$

Таким образом, по определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx=(f,\ \varphi).$$

Это равенство является определением символа (61.15), который формально читается как «интеграл от произведения f на φ». Эта запись отражает собой тот факт, что обобщенные функции являются обобщением функционалов (61.14), где f — локально интегрируемая функция.

Упражнение **5.** Доказать, что функционал $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi\in D$, является обобщенной функцией (она обычно обозначается $\mathscr{P}\frac{1}{x}$).

В качестве другого примера обобщенной функции рассмотрим функционал, обозначаемый $\delta=\delta(x)$ и называемый δ-функцией (см. п. 61.1).

Определение 15. *Функционал, определяемый формулой*

$$(\delta,\ \varphi)=\varphi(0),\quad \varphi\in D,$$

называется δ-*функцией.*

Его линейность и непрерывность легко проверяются. Он не может быть представлен в виде (61.14) ни при какой локально интегрируемой функции f. Действительно, если бы нашлась такая локально интегрируемая функция f, что

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

то для этой функции f и для функции φ, заданной формулой (61.13), мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \tag{61.16}$$

Но, в силу абсолютной интегрируемости функции f,

$$\lim_{a\to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$$

(почему?).

Далее, замечая, что $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \frac{1}{e}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, получим

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \right| = \left| \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}\,dx \right| \leqslant \frac{1}{e} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx,$$

поэтому левая часть равенства (61.16) при $a \to 0$ стремится к нулю, а правая нет. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. Таким образом, запас обобщенных функций в указанном смысле больше, чем запас обычных.

Определение 16. *Функционал, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in D$ число $\varphi(x_0)$, где x_0 фиксировано, называется δ-функцией и обозначается $\delta(x - x_0)$.*

Применяя запись (59.15), можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D.$$

Определение 17. *Совокупность обобщенных функций, как и всякая совокупность функционалов, определенных на линейном пространстве со сходимостью (см. п. 61.2), образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное к D. Оно называется пространством обобщенных функций и обозначается D'.*

Таким образом, сходимость последовательности обобщенных функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, к обобщенной функции f

означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\ \varphi)=(f,\ \varphi)$$

для любой функции $\varphi\in D$.

Задача 43. Пусть $f_n\in D'$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, и пусть для любой функции $\varphi\in D$ существует предел числовой последовательности $(f_n,\ \varphi)$. Положим, $F(\varphi)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\ \varphi)$. Доказать, что $F(\varphi)$ является обобщенной функцией.

В п. 61.1 мы рассматривали функции $\delta_\varepsilon(x)$, которые, очевидно, локально интегрируемы. Мы видели, что они обладают тем свойством, что для любой непрерывной на всей оси функции φ и, следовательно, для любой функции $\varphi\in D$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,\ \varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0)=(\delta,\ \varphi).$$

С точки зрения обобщенных функций это означает, что в D'

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\delta_\varepsilon=\delta.^{*)}$$

Таким образом, δ-функция в пространстве D' является пределом последовательности обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями.

Упражнения **6.** Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$ в пространстве D'.

7. Пусть последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, такова, что:

а) каково бы ни было число $M>0$ при $|a|<M$, $|b|<M$, величины

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx\right|,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

ограничены постоянной, не зависящей от a, b, n (она зависит только от M);

б) при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } a<b<0 \text{ и } 0<a<b,\\ 1 & \text{при } a<0<b.\end{cases}$$

Такие последовательности $f_n(x)$ (рис. 265) *называются дельта-последовательностями.*

Доказать, что для любой непрерывной функции φ и любой дельта-последовательности $f_n(x)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(0);$$

иначе говоря, $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\ \varphi)=(\delta,\ \varphi)$.

---

*) Как и для обычных функций, символ $\varepsilon\to+0$ означает, что указанное предельное соотношение имеет место для любой последовательности $\varepsilon_n>0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, стремящейся к нулю.

8. Пусть $f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{t}}$.

Доказать, что в пространстве D' справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} f_t(x)=\delta(x).$$

9. Доказать, что в пространстве D' существует предел $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{x\pm iy}$ (он обозначается $\frac{1}{x\pm i0}$) и что справедливы формулы

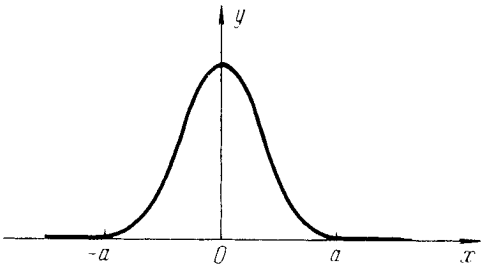

Рис. 265

$$\frac{1}{x\pm i0}=\mp i\pi\delta+\mathscr{P}\frac{1}{x}$$

(они называются формулами Сохоцкого*).

Задача 44. Доказать, что всякая обобщенная функция является пределом обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями. В этом смысле пространство обобщенных функций является «пополнением» пространства обычных (локально интегрируемых) функций.

Как мы видели, понятие обобщенной функции не сводится к понятию функции точки, и поэтому говорить о значении обобщенной функции в данной точке, в частности обращении ее в нуль в этой точке, вообще говоря, не имеет смысла. Однако можно ввести естественное понятие обращения в нуль обобщенной функции на интервале.

Определение 18. *Будем говорить, что обобщенная функция f обращается в нуль на интервале (a, b), если $(f, \varphi)=0$ для всех $\varphi\in D$, которые имеют носитель, содержащийся в интервале (a, b).*

Упражнение **10.** Доказать, что для того чтобы непрерывная функция обращалась в нуль в каждой точке интервала, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль на этом интервале как обобщенная функция.

Определение 19. *Обобщенные функции f и g называются равными на интервале (a, b), если $f-g=0$ на (a, b).*

61.4 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определим теперь производную обобщенной функции. Выясним прежде всего, что представляет собой производная обычной непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции f, рассматриваемая как функционал (f', φ) на D. Это имеет смысл, поскольку производная f', будучи непрерывной на всей числовой оси, является локально интегрируемой функцией.

*) Ю. В. Сохоцкий (1842—1929) — русский математик.

Интегрируя по частям, в силу финитности функции $\varphi \in D$, получим

$$(f', \ \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -(f, \ \varphi'), \qquad (61.17)$$

причем, как известно, $\varphi' \in D$. Таким образом, производная f' является функционалом на D, значения которого выражаются через значения функции f, рассматриваемой как функционал, с помощью формулы (61.17). Это делает естественным следующее определение.

Определение 20. *Производной обобщенной функции f называется функционал на D, обозначаемый f' и определяемый равенством*

$$(f', \ \varphi) = -(f, \ \varphi'), \ \ \varphi \in D. \qquad (61.18)$$

Иначе говоря, значение функционала f' в любой точке φ пространства D равно значению функционала f в точке $\varphi' \in D$, взятому с противоположным знаком.

Таким образом, любая обобщенная функция имеет производную. Отсюда следует, что и любая локально интегрируемая функция имеет в смысле определения 20 производную!

Из формулы (61.17) следует, что производная в обычном смысле непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции, рассматриваемая как функционал над D, совпадает с ее производной в смысле обобщенных функций.

Операцию вычисления производной обобщенной функции называют по аналогии со случаем обычных функций дифференцированием.

Лемма 4. *Функционал f' является линейным непрерывным функционалом и, следовательно, обобщенной функцией.*

Доказательство. Проверим линейность:

$$(f', \ \lambda\varphi + \mu\psi) = -(f, \ (\lambda\varphi + \mu\psi)') = -(f, \ \lambda\varphi' + \mu\psi') =$$
$$= -\lambda(f, \ \varphi') - \mu(f, \ \psi') = \lambda(f', \ \varphi) + \mu(f', \ \psi), \ \ \varphi \in D, \ \ \psi \in D.$$

Для того чтобы проверить непрерывность функционала f, вспомним, что если $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ в D, то в силу определения сходимости в пространстве D, и $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi'_k = \varphi'$ в D; поэтому, если $\varphi_k \to \varphi$ в D, то $\lim\limits_{k\to\infty} (f', \ \varphi_k) = -\lim\limits_{k\to\infty} (f, \ \varphi'_k) =$
$= -(f, \ \varphi') = (f', \ \varphi)$.

Таким образом, если $f \in D'$, то f' всегда существует и $f' \in D'$. □

Производные высших порядков обобщенной функции определяются последовательно, как и для обычных функций:

$$f''=(f')',\quad f'''=(f'')',\quad \ldots,$$

вообще

$$f^{(k)}=(f^{(k-1)})',\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ f^{(0)}=f.$$

По индукции легко проверить, что

$$(f^{(k)},\ \varphi)=(-1)^k(f,\ \varphi^{(k)}),\quad \varphi\in D,\quad k=0,\ 1,\ \ldots .$$

Согласно этому определению, обобщенные функции имеют производные любых порядков, или, как иногда говорят, бесконечно дифференцируемы.

Примеры. 1. Пусть

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда* (см. (61.10)) или единичной функцией. Она локально интегрируема и поэтому может рассматриваться как обобщенная функция. Найдем ее производную. Согласно определению (61.18),

$$(\theta',\ \varphi)=-(\theta,\ \varphi')=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\varphi'(x)\,dx=-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx=$$

$$=\varphi(0)=(\delta,\ \varphi),\quad \varphi\in D,$$

т. е. $\theta'=\delta$.

В смысле обычной производной при любом $x\neq 0$ имеет место $\theta'(x)=0$, а при $x=0$ производная функции $\theta(x)$ бесконечна: $\theta'(0)=+\infty$. Поэтому, согласно равенству $\theta'=\delta$, иногда говорят, что функция δ равна нулю всюду на числовой оси, кроме точки $x=0$, где она равна $+\infty$ (ср. с п. 61.1). Хотя это высказывание не является логически строгим, так как функция Дирака δ не есть обычная функция и поэтому нельзя говорить о ее значениях в отдельных точках, оно бывает иногда удобным при правдоподобных рассуждениях.

2. В качестве другого примера вычислим производные δ-функции:

$$(\delta^{(k)},\ \varphi)=(-1)^k(\delta,\ \varphi^{(k)})=(-1)^k\varphi^{(k)}(0).$$

Упражнения. **11.** Пусть f и g — обобщенные функции, λ и μ — числа. Доказать, что

$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'.$$

12. Доказать, что в пространстве обобщенных функций:

а) $|x|'=\operatorname{sign} x$;

б) $|x_+|'=\theta$, где $x_+=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x<0. \end{cases}$

13. Доказать, что $\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)\theta(x)e^{-\lambda x}=\delta(x)$.

14. Доказать, что $\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\theta(x)\sin\omega x}{\omega}=\delta(x)$.

15. Если $\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } |x|<\frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{при } |x|\geqslant\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ то в пространстве обобщенных функций

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)=\delta(x) \text{ и } \delta'_\varepsilon(x)=\frac{\delta\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\delta\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}.$$

16. Пусть $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{при } x<x_0, \\ f_2(x) & \text{при } x>x_0, \end{cases}$ где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на всей числовой оси $\boldsymbol{R}$ (следовательно, в частности, существуют пределы $f'(x_0\pm 0)$). Найти производную $f'(x)$ в пространстве D'.

17. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси. Найти производную $(\theta f)'$ в пространстве D'.

18. Доказать, что если f — кусочно-гладкая функция, имеющая в точках $x_1, \ldots, x_n$ разрывы первого рода со скачками $p_1, \ldots, p_n$, то

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}+\sum_{k=1}^{n}p_k\delta(x-x_k),$$

где f' — обобщенная, а $\frac{df}{dx}$ — обычная при $x\neq x_k$ производная, $k=1, 2, \ldots, n$.

Лемма 5. *Пусть $f_n\in D'$, $f\in D'$ и*

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f; \tag{61.19}$$

тогда и

$$\lim_{n\to\infty}f'_n=f', \tag{62.20}$$

т. е. для любой сходящейся в D' последовательности обобщенных функций производная предельной функции равна пределу последовательности производных.

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in D$

$(f', \varphi)-(f'_n, \varphi)=-[(f, \varphi')-(f_n, \varphi')]\to 0$ при $n\to\infty$, ибо $\varphi'\in D$. □

Последовательно применив лемму 5, получим, что из сходимости последовательности обобщенных функций следует сходимость последовательностей производных всех порядков обобщенных функций рассматриваемой последовательности.

Можно рассматривать и ряды обобщенных функций

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{61.21}$$

где $u_n \in D'$, $n=1, 2, \ldots$. Сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

называется *частичной суммой n-го порядка* $(n=1, 2, \ldots)$ ряда (61.21). Ряд (61.21) называется сходящимся, если в D' существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Обобщенную функцию s называют суммой ряда (61.21); при этом пишут

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Лемма 6. *Сходящийся ряд обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз:*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \quad k=1, 2, \ldots .$$

Это следует из леммы 5.

Упражнения. **19.** Доказать, что в пространстве обобщенных функций D' справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-2k\pi).$$

Указание. Воспользоваться формулой (см. пример 3 в п. 55.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

20. Доказать, что в пространстве D' справедлива формула $\mathscr{P}\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$ (см. упражнение 5).

61.5. ПРОСТРАНСТВО ОСНОВНЫХ ФУНКЦИЙ S И ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ S'

Обозначим через S множество всех бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси комплекснозначных функций, которые вместе со всеми своими производными стремятся к

нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{x}$. Иначе говоря, множество S состоит из тех и только тех бесконечно дифференцируемых функций φ, для которых при любых целых неотрицательных n и m выполняется условие

$$\lim_{x \to \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0. \tag{61.22}$$

Условие принадлежности функции φ к множеству S можно сформулировать и несколько иначе: бесконечно дифференцируемая функция φ принадлежит S тогда и только тогда, когда для любых целых неотрицательных n и m имеем

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = c_{n,m} < \infty. \tag{61.23}$$

Действительно, если это так, то, заменяя в (61.23) n на $n+1$, получим $|x^{n+1} \varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{n+1,m}$, поэтому

$$|x^n \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{n+1,m}}{|x|},$$

откуда и следует (61.22).

Наоборот, если выполнено условие (61.22), то функция $x^n \varphi^{(m)}(x)$, имея конечный предел в бесконечной удаленной точке ∞, будет ограничена на некоторой ее окрестности $U(\infty) = \{x : |x| > a > 0\}$. Будучи же непрерывной, функция $x^n \varphi^{(m)}(x)$ ограничена и на отрезке $[-a, a] = R \setminus U(\infty)$. Таким образом, функция $x^n \varphi^{(m)}(x)$ ограничена на всей числовой прямой $\boldsymbol{R}$ и, следовательно, для нее существует постоянная $c_{n,m}$, удовлетворяющая условию (61.23).

Очевидно, что множество S является линейным пространством. При этом если $\varphi \in S$, то и любая производная функции φ принадлежит пространству S.

Определение 21. *Последовательность функций* $\varphi_k(x) \in S$, $k = 1, 2, \ldots$, *называется сходящейся в* S *к функции* $\varphi(x) \in S$, *если для всех целых неотрицательных* n *и* m *каждая последовательность* $x^n \varphi_k^{(m)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *равномерно на всей оси сходится к функции* $x^n \varphi^{(m)}(x)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$ в S тогда и только тогда, когда при любых целых неотрицательных n и m

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n [\varphi_k^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)]| = 0. \tag{61.24}$$

Отметим, что если $\varphi_k \to \varphi$ в S, то для производных любого порядка $\varphi_k^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ в S, $m = 1, 2, \ldots$. Линейное пространство S с введенной операцией предельного перехода является линейным пространством со сходимостью.

Очевидно, что $D \subsetneq S$, в частности, последовательность функций $\varphi_k \in D, k=1, 2, \ldots$, сходящаяся в D к функции φ, сходится к функции φ и в S. Вместе с тем $D \neq S$, ибо $e^{-x^2} \in S$, но $e^{-x^2} \notin D$.

Задача 45. Доказать, что пространство D плотно в S, т. е. что любая функция $\varphi \in S$ является пределом в S некоторой последовательности функций $\varphi_k \in D$, $k=1, 2, \ldots$.

Определение 22. *Линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве S, называется обобщенной функцией медленного роста. Множество всех таких функционалов называется пространством обобщенных функций медленного роста и обозначается S'.*

Каждый функционал $f \in S'$, рассматриваемый только на множестве D, является обобщенной функцией, следовательно, элемент множества S' можно интерпретировать как продолжение некоторого линейного непрерывного функционала с множества D на S (см. п. 61.2). Например, функционал δ, определенный нами в п. 61.3 на пространстве D формулой $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, может быть продолжен с помощью той же формулы на пространство S.

Можно показать, что не всякая обобщенная функция из D' продолжаема на S, в этом смысле можно сказать, что S' составляет строгую часть D'.

Упражнение **21.** Доказать, что обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией e^x, не продолжаема в элемент пространства S'.

Всякая локально интегрируемая функция $f(x)$, для которой в некоторой окрестности ∞ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant A\,|x|^k \tag{61.25}$$

(A и k — неотрицательные постоянные)*), в частности любой многочлен порождает функционал пространства D, продолжаемый в линейный непрерывный функционал на S. Он определяется формулой

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in S. \tag{61.26}$$

Действительно, из условий (61.22) и (61.25) следует, что $f(x)\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{x}$ и, следовательно, интеграл (61.26) существует.

Заметим еще, что всякая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция $f(x)$ также порождает по

*) Такие функции называются функциями медленного роста, откуда и термин «обобщенные функции медленного роста».

формуле (61.26) линейный непрерывный функционал над S. Действительно, так как всякая функция $\varphi \in S$ ограничена, то в этом случае существование интеграла (61.26) следует из неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \sup_{-\infty<x<+\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Упражнения. **22.** Доказать, что функционал (61.26) линеен и непрерывен на пространстве S (как в случае, когда функция f медленного роста на бесконечности, так и в случае, когда она абсолютно интегрируема на всей числовой оси).

23. Доказать, что обобщенная функция $\frac{1}{x+i0} \in D'$ (см. упражнение 9) продолжаема в элемент пространства S'.

Множество S' образует линейное пространство со сходимостью, сопряженное с S (см. п. 61.2).

Так как для любой функции $\varphi \in S$ будем иметь $\varphi' \in S$, то для обобщенных функций пространства S', как и для обобщенных функций из D', можно определить производную f' по формуле

$$(f',\ \varphi) = -(f,\ \varphi'),\quad \varphi \in S.$$

Таким образом, для любой обобщенной функции $f \in S'$ производная f' всегда существует и $f' \in S'$. При этом на элементе $\varphi \in D$ производные обобщенной функции f, рассматриваемые соответственно как производные в пространствах D' и S', совпадают. Как и в случае пространства D', в пространстве S' производная от предела всегда существует и равна пределу производных.

61.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ S

Каждая функция $\varphi \in S$ абсолютно интегрируема. Более того, если $\varphi \in S$, то при любом $k = 1, 2, \ldots$ функция $x^k \varphi(x)$ также абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Действительно, так как для функции $\varphi \in S$ выполняется условие (61.23), то

$$|x^{(k)} \varphi(x)| \leqslant c_{k,0},$$

$$x^2 |x^{(k)} \varphi(x)| = |x^{k+2} \varphi(x)| \leqslant c_{k+2,0}$$

и поэтому

$$|x^k \varphi(x)| \leqslant \frac{c_{k,0} + c_{k+2,0}}{1+x^2}. \tag{61.27}$$

Здесь справа стоит абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция; следовательно, по признаку сравнения для несобственных интегралов, функция $x^{(k)}\varphi(x)$ также абсолютно интегрируема при всех $k=0, 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что для функций $\varphi \in S$ существует классическое преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}=F[\varphi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ixy}\,dx, \quad \varphi\in S, \tag{61.28}$$

а также обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[\varphi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{ixy}\,dy, \quad \varphi\in S.$$

Классичность преобразования Фурье здесь понимается в том смысле, что написанные интегралы являются обычными абсолютно сходящимися интегралами, а не интегралами в смысле главного значения (см. п. 56.3). При этом на S справедливы формулы обращения для прямого и обратного преобразования Фурье (см. п. 56.5):

$$F[F^{-1}[\varphi]]=\varphi, \quad F^{-1}[F[\varphi]]=\varphi, \quad \varphi\in S. \tag{61.29}$$

Отметим, что, например, вторая из этих формул в интегральной форме принимает вид

$$F^{-1}[\hat{\varphi}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(y)e^{ixy}\,dy=\varphi(x).$$

Теорема 1. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают взаимно однозначно, линейно и непрерывно пространство S на себя.*

Доказательство. Покажем, что если $\varphi\in S$, то и $\hat{\varphi}\in S$.

Прежде всего, из того, что для каждой функции $\varphi\in S$ при любом $k=0, 1, 2, \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ является, как показано выше, абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, следует согласно теореме 4 из п. 56.10, что преобразование Фурье $\hat{\varphi}=F[\varphi]$ функции φ существует и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию.

Оценим теперь функцию $|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|$, где n и m — целые неотрицательные числа. Применяя формулы для производной преобразования Фурье (см. п. 56.10) и для преобразования

Фурье производной (см. п. 56.8), получим

$$|y^n \hat{\varphi}^{(m)}(y)| = |y^n F^{(m)}[\varphi]| = |y^n F[x^m \varphi]| =$$

$$= |F[(x^m \varphi)^{(n)}]| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^m \varphi(x))^{(n)} e^{-ixy}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^m \varphi(x))^{(n)}|\, dx.$$

Заметим, что выражение $[x^m \varphi(x)]^{(n)}$ в силу правил дифференцирования представляет собой линейную комбинацию выражений вида $x^p \varphi^{(q)}(x)$, где p и q — неотрицательные целые и, как это было отмечено выше, $\varphi^{(q)} \in S$. Поэтому (см. (61.27)) функции $(1+x^2) x^p \varphi^{(q)}(x)$ ограничены на всей числовой оси, следовательно, ограничена и функция $(1+x^2)[x^m \varphi(x)]^{(n)}$, т. е.

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} (1+x^2) |[x^m \varphi(x)]^{(n)}| < +\infty.$$

Разделим и умножим теперь получившееся выше подынтегральное выражение на $1+x^2$, тогда, принимая во внимание, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, получим

$$|y^n \hat{\varphi}^{(m)}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi(x))^{(n)}| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi(x))^{(n)}|. \qquad (61.30)$$

Поскольку справа стоит конечная величина, то $\hat{\varphi} \in S$.

Итак, преобразование Фурье отображает S в S, при этом это отображение взаимно однозначно (см. лемму 3 п. 56.5).

Аналогично доказывается и то, что обратное отображение Фурье F^{-1} отображает S в S и притом взаимно однозначно. Легко убедиться, что на самом деле эти отображения происходят на пространство S, т. е. являются биекциями. Это сразу следует из формул взаимности (61.29) для прямого и обратного преобразований Фурье *).

*) Заметим еще, что из того, что $F(S) = F^{-1}(S) = S$, следует, что в формулах (61.29) интегралы существуют в обычном смысле, а не только в смысле главного значения (ср. с п. 56.5).

Действительно, покажем, что $F(S)$ совпадает со всем пространством S. Пусть $\psi \in S$, положим $\varphi = F^{-1}[\psi]$.

Тогда

$$F[\varphi] = F[F^{-1}[\psi]] = \psi.$$

Подобным же образом доказывается и то, что

$$F^{-1}(S) = S.$$

Линейность преобразования Фурье отмечалась раньше (см. лемму 2 в п. 56.5).

Докажем теперь непрерывность отображения F.

Сначала докажем его непрерывность в нуле. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ в S. Тогда из (61.30) следует, что

$$|y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi_k(x))^{(n)}|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Но из (61.24) (при $\varphi(x) = 0$) имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sup_x (1+x^2) |(x^m \varphi_k(x))^{(n)}| = 0;$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \sup_y |y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| = 0, \text{ т. е. } \lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k = 0 \text{ в } S.$$

Поскольку преобразование Фурье является линейным отображением линейного пространства S в себя, непрерывным в нуле, то оно непрерывно и во всех точках этого пространства (см. лемму 3 в п. 61.2).

Таким образом, преобразование Фурье F непрерывно отображает S на S.

Совершенно аналогично доказывается непрерывность обратного преобразования Фурье F^{-1}. □

61.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Предварительно докажем одно интегральное равенство. Пусть функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и пусть $\varphi \in S$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\,dx. \quad (61.31)$$

Это следует из теоремы 7 п. 54.3. Действительно, повторный интеграл, стоящий слева, существует, ибо существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-ixy}dy\right|dx\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|dy.$$

Если $[a, b]$ — произвольный отрезок, то функция f, в силу ее непрерывности ограничена на $[a, b]: |f(y)|\leqslant M$; поэтому

$$|f(y)\varphi(x)e^{-ixy}|\leqslant M|\varphi(x)|,\quad a\leqslant y\leqslant b.$$

Отсюда в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(y)|dx$ следует равномерная сходимость интеграла $f(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ixy}dx$ на отрезке $[a, b]$.

Далее, $|\varphi(x)|\leqslant c_{0,0}$, $-\infty<x<+\infty$ (см. (61.23)); поэтому $|\varphi(x)f(y)e^{-ixy}|\leqslant c_{0,0}|f(y)|$, и так как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|dy$ сходится, то интеграл

$$\varphi(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-ixy}dy$$

равномерно сходится на всей оси.

Наконец, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)f(y)e^{ixy}|dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|dy$$

конечен, поэтому в рассматриваемом случае выполнены все условия торемы 7 п. 54.3 и, следовательно, можно переставить порядок интегрирования. Равенство (61.31) доказано.

Если функция $F[f]$ порождает некоторый функционал на S (например, удовлетворяет условию (61.25) или абсолютно интегрируема на всей числовой оси), то, умножив равенство (61.31) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, получим

$$(F[f],\ \varphi)=(f,\ F[\varphi]),\quad \varphi\in S. \tag{61.32}$$

Эту формулу и примем за определение преобразования Фурье обобщенных функций из пространства S'.

Определение 23. *Преобразованием Фурье обобщенной функции $f \in S'$ называется функционал $F[f]$, определяемый формулой* (61.32).

Итак, для любой обобщенной функции f из S' определено ее преобразование Фурье $F[f]$: значение функционала $F[f]$ в любой точке φ пространства S равно значению функционала f в точке $F[\varphi] \in S$. Преобразование Фурье обобщенной функции f будем, как и в случае обычных функций, обозначать также и символом $\hat{f}$.

Пример 1. Найдем преобразование Фурье единицы, рассматриваемой как обобщенная функция. Очевидно, $1 \in S'$. Имеем

$$(\hat{1},\ \varphi)=(1,\ \hat{\varphi})=\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx=$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{iy(t-x)} dx\right]\Bigg|_{t=0}=$$

$$=\sqrt{2\pi} F^{-1}(F(\varphi))|_{t=0}=\sqrt{2\pi}\,\varphi(t)|_{t=0}=\sqrt{2\pi}\,\varphi(0)=\sqrt{2\pi}(\delta,\ \varphi)$$

(мы воспользовались здесь леммой 1 п. 56.5). Таким образом, $\hat{1}=\sqrt{2\pi}\,\delta$.

Отметим, что преобразование Фурье $F[\varphi]$ функции $\varphi \in D$, вообще говоря, не принадлежит пространству D, поскольку $F[\varphi]$ не всегда является финитной функцией. Поэтому формула (61.32) имеет смысл не для всех $f \in D'$. Из-за этого обстоятельства при рассмотрении преобразования Фурье обобщенных функций нам и пришлось сузить класс обобщенных функций, введенных раньше, ограничившись только обобщенными функциями медленного роста.

Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции f будем обозначать также символом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Таким образом, равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = F[f] \tag{61.33}$$

в случае, когда f — обобщенная функция, является определением символа, стоящего в левой части этого равенства.

Определив преобразование Фурье для всех обобщенных функций из S', мы, в частности, определили и преобразование Фурье для обычных функций f, удовлетворяющих условию (61.25), т. е. функций существенно более широкого класса, чем это было сделано раньше (см. п. 56.5 и 60.9*). Это является одним из весьма существенных обстоятельств, оправдывающих целесообразность введения понятия обобщенных функций.

Покажем, что преобразование Фурье обобщенных функций обладает рядом свойств, аналогичных свойствам классического преобразования Фурье, т. е. преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций.

Лемма 7. *Преобразование Фурье $F[f]$ обобщенной функции $f \in S'$ также является обобщенной функцией класса S', т. е. $F[f]$ — линейный и непрерывный функционал над пространством S.*

Доказательство. Проверим линейность преобразования Фурье, т. е. покажем, что, какова бы ни была обобщенная функция $f \in S'$, для любых функций $\varphi \in S$, $\psi \in S$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$(F[f],\ \lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda(F[f],\ \varphi)+\mu(F[f],\ \psi).$$

Действительно,

$$(F[f],\ \lambda\varphi+\mu\psi)=(f,\ F[\lambda\varphi+\mu\psi])=$$

$$=(f,\ \lambda F[\varphi]+\mu F[\psi])=\lambda(f,\ F[\varphi])+\mu(f,\ F[\psi])=$$
$$=\lambda(F[f],\ \varphi)+\mu(F[f],\ \psi).$$

Проверим непрерывность преобразования Фурье. Пусть $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_n \in S$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n=\varphi$ и, следовательно (см. теорему 1 п. 61.6),

$$\lim_{n\to\infty} F[\varphi_n]=F[\varphi].$$

Тогда, в силу непрерывности функционала f на S, получим

$$\lim_{n\to\infty}(F[f],\ \varphi_n)=\lim_{n\to\infty}(f,\ F[\varphi_n])=(f,\ F[\varphi])=(F[f],\ \varphi).$$

Итак, мы показали, что если $f \in S'$, то и $F[f] \in S'$. □

Естественно определяется и обратное преобразование Фурье $F^{-1}[f]$ элемента $f \in S'$ как функционал пространства S', задава-

емый формулой

$$(F^{-1}[f],\ \varphi)=(f,\ F^{-1}[\varphi]),\ f\in S.$$

Если f — абсолютно интегрируемая непрерывная функция, это равенство выполняется для нее в обычном смысле. Это проверяется так же, как и в случае формулы (61.31). По определению, полагается также (ср. (61.33))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}\,dx=F^{-1}[f]. \tag{61.34}$$

Как и в случае прямого преобразования Фурье F, показывается, что если $f\in S'$, то и $F^{-1}[f]\in S'$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье F и обратное преобразование Фурье F^{-1} отображают линейно, взаимно однозначно и непрерывно пространство S' на себя; при этом для любого элемента $f\in S'$ справедливы равенства*

$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f. \tag{61.35}$$

Доказательство. Докажем сначала формулы (61.35). Для любого элемента $\varphi\in S$ имеем

$$(F^{-1}[F[f]],\ \varphi)=(F[f],\ F^{-1}[\varphi])=(f,\ F[F^{-1}[\varphi]]=(f,\ \varphi).$$

Аналогично,

$$(F[F^{-1}[f]],\ \varphi)=(F^{-1}[f],\ F[\varphi])=(f,\ F^{-1}[F[\varphi]])=(f,\ \varphi).$$

Покажем теперь, что преобразование Фурье F отображает пространство S' на все пространство S': $F(S')=S'$. Пусть $g\in S'$, тогда если $f=F^{-1}[g]$, то $F[f]=F[F^{-1}[g]]=g$, т. е. в любой элемент из S' при преобразовании Фурье F отображается некоторый элемент из S'.

Покажем, что F взаимно однозначно. Если $f_1\in S'$, $f_2\in S'$ и $F[f_1]=F[f_2]$, то и $F^{-1}[F[f_1]]=F^{-1}[F[f_2]]$, откуда, в силу (61.35), имеем $f_1=f_2$.

Покажем, что отображение F линейно, т. е. для любых обобщенных функций $f\in S'$, $g\in S'$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство

$$F[\lambda f+\mu g]=\lambda F[f]+\mu F[g].$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, проверим его для любого, но фиксированного элемента $\varphi \in S$:

$$(F[\lambda f+\mu g],\ \varphi)=(\lambda f+\mu g,\ F[\varphi])=\lambda(f,\ F[\varphi])+\mu(g,\ F[\varphi])=$$
$$=\lambda(F[f],\ \varphi)+\mu(F[g],\ \varphi)=(\lambda F[f]+\mu F[g],\ \varphi).$$

Наконец, докажем, что F является непрерывным отображением. Действительно, пусть $f \in S'$, $f_n \in S'$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, $\lim f_n = f$ и, следовательно, для любого $\varphi \in S$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\ \varphi)=(f,\ \varphi)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(F[f_n],\ \varphi)=\lim_{n\to\infty}(f_n,\ F[\varphi])=(f,\ F[\varphi])=(F[f],\ \varphi).$$

Аналогично доказывается, что и F^{-1} непрерывно взаимно однозначно отображает S' на S'. □

Пример 2. Найдем $F[\delta]=\hat{\delta}$. Имеем

$$(\hat{\delta},\ \varphi)=(\delta,\ \hat{\varphi})=\hat{\varphi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ixy}\,dx\,|_{y=0}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi\right),\quad \varphi \in S,$$

поэтому $F[\delta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и, следовательно, $F^{-1}[1]=\sqrt{2\pi}\,\delta$ (заметим, что обратное классическое преобразование Фурье $F^{-1}[1]$, так же как и прямое $F[1]$, не существуют). С помощью интегралов (61.33) и (61.34) эти формулы можно переписать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-ixy}\,dx=1,\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}\,dx=\delta(y).$$

Подобным же образом находится и обратное преобразование Фурье δ-функции:

$$F^{-1}[\delta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=F[\delta],$$

отсюда

$$F[1]=F^{-1}[1]=\sqrt{2\pi}\,\delta.$$