Р. НАРАСИМХАН

Анализ на действительных и комплексных многообразиях

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

ADVANCED STUDIES
IN PURE MATHEMATICS

volume I

ANALYSIS ON REAL AND COMPLEX MANIFOLDS

RAGHAVAN NARASIMHAN
Université de Genève, Switzerland

1968

MASSON & CIE, EDITEUR — PARIS
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

Р. НАРАСИМХАН

Анализ на действительных и комплексных многообразиях

Перевод с английского
Е. М. ЧИРКИ

Под редакцией
Б. В. ШАБАТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1971

УДК 517. 55

В этой небольшой по объему книге автору удалось собрать и изложить богатый материал, разбросанный по различным источникам. Компактное изложение предполагает определенную математическую подготовку читателя, однако для чтения книги достаточно знакомства с традиционными курсами анализа и высшей алгебры. Книгу можно использовать как учебное пособие при изучении современного анализа.

Книга представляет интерес для математиков различных специальностей. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Р. НАРАСИМХАН

Анализ на действительных и комплексных многообразиях

Редакторы *Н. И. Плужникова и В. Ф. Пахомов.* Художник *А. А. Бессонов.*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов.* Технический редактор *В. П. Сизова.*

Сдано в набор 20/VIII 1970 г. Подписано к печати 25/II 1971 г. Бумага кн.-журн. 60×90 1/16
7,25 бум. л. 14,50 печ. л. Уч.-изд. л. 12,68 Изд. № 1/5766 Цена 1 р. 08 к. Зак. 751.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29

2-2-3
30-71

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Эта книга, написанная одним из выдающихся аналитиков — индийским математиком Рагхаваном Нарасимханом, ныне работающим в Швейцарии, — несколько необычна. Как утверждает автор, она рассчитана на читателей, которые прилично владеют линейной алгеброй, знакомы с топологией, но не знают анализа и только начинают им интересоваться. Пожалуй, несколько лет назад множество таких читателей было пустым, но теперь, в результате происходящей в математике алгебраико-топологической экспансии, его мощность постоянно увеличивается. Кроме того, круг читателей заведомо не исчерпывается этим множеством — отлично написанная крупным ученым книга, несомненно, заинтересует как начинающих, так и маститых математиков.

Изложение в ней очень тщательно продумано. Материал отобран так, чтобы читатель без особенно больших усилий мог войти в круг обсуждаемых проблем и овладел основными приемами. Многое из того, что не входит в очерченный автором минимум, сообщается без доказательства с коротко комментированными отсылками к специальной литературе. Например, теорема Бореля о том, что для любого задания постоянных c_α, зависящих от всевозможных наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ неотрицательных целых чисел, существует бесконечно дифференцируемая во всем пространстве функция f, которая имеет c_α своими тейлоровскими коэффициентами в какой-либо точке (или иначе, о том, что отображение из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в кольцо формальных степенных рядов сюръективно), приводится с доказательством, и притом весьма красивым. Но теорема Уитни, утверждающая, что заданные на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ функции $f_\alpha \in C^\infty(X)$ при некоторых условиях служат последовательными производными (в каждой точке X) какой-либо функции $f \in C^\infty(X)$, уже не доказывается.

Но именно отбор материала книги и необычен более всего. Книга не является курсом ни теории многообразий, ни какой-либо части анализа. Ее содержание составляют лишь несколько тем — приближения, вложения, линейные дифференциальные операторы. Однако эти темы поданы в таком блестящем окружении идей, наиболее популярных в современной математике, и поданы так хорошо, что книгу можно рекомендовать всем, кто учит математику и занимается ею.

Б. В. Шабат

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла из лекций, читанных мною в Тата-институте фундаментальных исследований в Бомбее зимой 1964/65 гг. В этих лекциях я хотел изложить различные вопросы анализа на многообразиях, действительных или комплексных. Можно было бы и не говорить, что выбор материала целиком определился личными вкусами автора. Записи лекций были изданы Тата-институтом, и настоящая книга основана на этом издании.

Книга рассчитана на читателей, которые интересуются анализом, но имеют по нему еще небольшую подготовку. Предполагаются известными только элементы теории функций действительных переменных (дифференциальное и интегральное исчисление и теория меры), а также некоторые факты теории функций комплексного переменного. Элементарные свойства функций нескольких комплексных переменных, которые мы используем, четко формулируются и даются необходимые ссылки. Однако мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с линейной и мультилинейной алгеброй (свойства сопряженности, тензорных произведений, внешних произведений векторных пространств и т. п.), а также с теоретико-множественной топологией (свойства связных и локально компактных пространств). Необходимый материал содержится в книгах Бурбаки: «Алгебра» и «Общая топология», главы I и II.

Книга состоит из трех глав. В первой изучаются свойства дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Задача этой главы — изложение с полными доказательствами некоторых часто используемых в дифференциальной топологии теорем о дифференцируемых функциях (таких, как теорема о неявной функции, теорема Сарда и теорема Уитни о приближении).

Вторую главу можно рассматривать как введение в теорию действительных и комплексных многообразий. Кроме обычных определений (дифференциальные формы и векторные поля), в этой

главе излагаются теорема Фробениуса, леммы Пуанкаре и Гротендика (с приложением леммы Гротендика к комплексному анализу), теорема Уитни о вложении и теорема Тома о трансверсальности.

В последней главе изучаются свойства линейных эллиптических дифференциальных операторов. Приводятся принадлежащие Петре и Хёрмандеру критерии линейных дифференциальных операторов. Доказываются неравенства Гординга и Фридрихса об эллиптических операторах, которые затем используются для доказательства регулярности слабых решений эллиптических уравнений. Глава заканчивается теоремой Мальгранжа — Лакса о приближении и ее применением к доказательству теоремы Рунге на открытых римановых поверхностях, принадлежащей Бенке и Штейну.

Мы не рассматриваем вопросы, связанные с римановыми метриками и элементарной дифференциальной геометрией. Мы ничего не говорим также о таких важных и интересных объектах, как эллиптические комплексы. Впрочем, такие теоремы, как теоремы конечности из главы 3, нетрудно распространить на эти комплексы.

Мне остается поблагодарить всех лиц, помогавших мне при подготовке этой книги. Я благодарен миссис М. Нарликар, сделавшей записи лекций, изданные Тата-институтом; особенно я обязан Х. Г. Дайемонду, который очень внимательно прочитал большую часть этих записей, исправил ошибки и предложил ряд улучшений и вариантов доказательств. Наконец, я весьма признателен Н. Х. Кюиперу за предложение переиздать записи Тата-института в виде книги, за его полезные замечания о главах 1 и 2 и за помощь при подготовке рукописи к печати.

Рагхаван Нарасимхан

Женева, июль 1968

ГЛАВА 1

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^n$

Обозначения. Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Символами $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ соответственно будем обозначать поле действительных чисел, поле комплексных чисел, поле рациональных и кольцо целых чисел и при этом будем считать, что первые два из них снабжены обычной топологией. Символы $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$,... будут обозначать декартовы произведения соответственно пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ..., так что, например,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Обозначения $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$ мы примем для множеств неотрицательных элементов $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ соответственно.

Большей частью α, β обозначают упорядоченные наборы n неотрицательных целых чисел, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{Z}^+$. Введем обозначения

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!,$$
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}, \quad \text{если} \quad \beta_j \leqslant \alpha_j.$$

Мы пишем $\beta \leqslant \alpha$, если все $\beta_j \leqslant \alpha_j$, и $\beta < \alpha$, если $\beta \leqslant \alpha$ и $\beta \neq \alpha$.

Для точек пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) мы используем обозначение $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (соответственно $z = (z_1, \ldots, z_n)$). Тогда

$$|x| = \max_j |x_j|, \qquad |z| = \max_j |z_j|,$$
$$\|x\| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}, \qquad \|z\| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2},$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}.$$

Если X — (хаусдорфово) топологическое пространство и S — подмножество X, то символом $\overset{\circ}{S}$ мы будем обозначать внутренность S, т. е. максимальное открытое множество, содержащееся в S. Если S_1 и S_2 — два подмножества X, то мы пишем $S_1 \Subset S_2$, когда S_1 — относительно компактное подмножество S_2, т. е. когда замыкание S_1 в S_2 является компактом.

Пусть f — отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^q$ и λ — неотрицательная функция в Ω; мы будем писать

$$f(x) = O(\lambda(x)) \qquad (\text{или } f = O(\lambda)),$$

если существует константа $C > 0$, такая, что $|f(x)| \leqslant C\lambda(x)$ для всех $x \in \Omega$. Кроме того, если $a \in \Omega$, мы пишем

$$f(x) = o(\lambda(x))$$

при $x \to a$ (или при $|x - a| \to 0$), если существует отображение ε: $\Omega \to \mathbb{R}^+$, такое, что $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to a$ и $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)\lambda(x)$. Это же обозначение используется, когда точка a заменена «бесконечной» точкой.

§ 1.1. Формула Тейлора

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и k — целое неотрицательное число. Мы обозначаем через $C^k(\Omega)$ множество действительных функций f в Ω, обладающих непрерывными частными производными порядков $\leqslant k$, т. е. множество функций, для которых производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

существуют и непрерывны в Ω для всех α с $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant k$. Символом $C^\infty(\Omega)$ мы обозначаем множество функций, принадлежащих $C^k(\Omega)$ для всех $k \geqslant 0$. Функции из $C^k(\Omega)$ называются C^k-функциями в Ω (или функциями класса C^k в Ω). Для частной производной

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

функции $f \in C^k(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant k$, мы используем сокращенное обозначение

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

Порядок, в котором выполняются дифференцирования, на результат не влияет. Для любой функции f (не обязательно непрерывной), определенной в Ω, мы обозначаем через $\operatorname{supp} f$ замыкание в Ω множества

$$\{x \in \Omega\colon f(x) \neq 0\};$$

$\operatorname{supp} f$ называется *носителем* f. Символ $C_0^k(\Omega)$ применяется для обозначения множества функций $f \in C^k(\Omega)$, носители которых являются компактами в Ω.

Если E — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, мы обозначаем через $C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \ldots$ множество всех отображений $f\colon \Omega \to E$, таких, что для любого (непрерывного) линейного функционала l на E мы имеем $l \circ f \in C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), \ldots$.

Если $e_1, \ldots, e_q$ есть $\mathbb{R}$ = базис E и $f\colon \Omega \to E$, то для каждой точки $x \in \Omega$ найдутся действительные числа $f_1(x), \ldots, f_q(x)$, такие, что

$$f(x) = \sum_{j=1}^{q} f_j(x) e_j.$$

Легко проверить, что

$$f \in C^k(\Omega, E),\ C_0^k(\Omega, E), \ldots$$

тогда и только тогда, когда

$$f_j \in C^k(\Omega),\ C_0^k(\Omega), \ldots \text{ для } j = 1, \ldots, q.$$

Элементы множества $C^k(\Omega, E)$ называются *C^k-отображениями* Ω в E. Если $E = \mathbb{R}^q$, то для $C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \ldots$ мы используем обозначения $C^k(\Omega, q), C_0^k(\Omega, q), \ldots$. Для $f \in C^k(\Omega, E)$ можно определить производные $D^\alpha f$ при $|\alpha| \leqslant k$. Очевидно,

$$D^\alpha f \in C^{k-|\alpha|}(\Omega, E).$$

Функцию $f \in C_0^k(\Omega)$ мы будем отождествлять с элементом $g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, равным f на Ω и нулю на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Мы часто будем иметь дело с комплексными функциями в Ω (или отображениями Ω в $\mathbb{C}^q$). В этом случае мы тоже будем использовать обозначения $C^k(\Omega), C^k(\Omega, q), \ldots$ для $C^k(\Omega, \mathbb{C}), C^k(\Omega, \mathbb{C}^q), \ldots$, если при этом не возникнут недоразумения.

Действительная функция f, определенная в Ω, называется ($\mathbb{R}$-)*аналитической*, если для всякой точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ существует степенной ряд

$$P_a(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x-a)^\alpha = \sum_{\alpha_j \geqslant 0} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - a_n)^{\alpha_n},$$

который сходится к $f(x)$ для всех x из некоторой окрестности U точки a. Этот ряд сходится тогда равномерно к f на компактных подмножествах U (так что f непрерывна), и, значит, его можно почленно дифференцировать. Следовательно, $f \in C^\infty(\Omega)$, и для любого $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ имеем

$$D^\beta f(x) = D^\beta P_a(x) = \sum_\alpha c_\alpha D^\beta (x-a)^\alpha.$$

Более того, этот ряд однозначно определен функцией f; действительно,

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a).$$

Аналитические отображения множества Ω в конечномерное векторное пространство определяются так же, как и выше.

Если U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to V$ — такой гомеоморфизм, что и f и f^{-1} являются C^k-отображениями, мы будем говорить, что f есть C^k-диффеоморфизм (или просто диффеоморфизм) U на V. Если $U = V$, то f называется *C^k-автоморфизмом.*

Если f и f^{-1} являются $\mathbb{R}$-аналитическими, то мы имеем аналитический изоморфизм (или автоморфизм, если $U = V$).

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и f — комплексная функция в U; f называется *голоморфной*, если для всякой точки $a \in U$ найдется степенной ряд $\sum c_\alpha (z-a)^\alpha$, который сходится к $f(z)$ для всех z из некоторой окрестности a.

Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$; отображение $f\colon U \to E$ называется *голоморфным*, если для всякой $\mathbb{C}$-линейной функции l на E функция $l \circ f$ голоморфна. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^q$ голоморфно тогда и только тогда, когда в координатной записи $f = (f_1, \ldots, f_q)$ каждая f_j является голоморфной функцией.

Отображение $f\colon U \to V$ (открытые множества в $\mathbb{C}^n$) называется *$\mathbb{C}$-аналитическим изоморфизмом* (или просто аналитическим изоморфизмом, когда не возникает недоразумений), если f и f^{-1} голоморфны. Теорема Осгуда (см., например, Эрве [1]), которую мы в этой книге доказывать не будем, утверждает, что всякое взаимно однозначное голоморфное отображение U на V является $\mathbb{C}$-аналитическим изоморфизмом. Аналогичное утверждение для C^k-отображений и $\mathbb{R}$-аналитических отображений неверно.

Сформулируем некоторые элементарные свойства голоморфных функций. Они доказаны в большинстве книг по нескольким комплексным переменным; см., например, Эрве [1] и Хёрмандер [4].

1.1.1. Уравнения Коши — Римана. *Функция, определенная в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$, голоморфна тогда и только тогда, когда она непрерывна и для всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, существуют и равны нулю частные производные*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Здесь $z_j = x_j + iy_j$; x_j и y_j — действительные числа и $i = \sqrt{-1}$.

Положим также по определению

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Для *голоморфной* функции f мы пишем

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

Принимая во внимание равенство нулю всех $\partial f/\partial \bar{z}_j$, получаем

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f.$$

Основная теорема Хартогса (см. Хёрмандер [4]) утверждает, что условие непрерывности в утверждении 1.1.1 излишне; мы не будем доказывать здесь этот факт.

1.1.2. Теорема единственности. *Если f — голоморфная ($\mathbb{R}$-аналитическая) функция на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) и $D^\alpha f(a) = 0$ для всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и некоторой точки $a \in U$ ($a \in \Omega$), то $f \equiv 0$. В частности, если f равна нулю на непустом открытом подмножестве U* (соответственно Ω), *то $f \equiv 0$.*

1.1.3. Теорема Вейерштрасса. *Если последовательность голоморфных в U функций $\{f_\nu\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах U к некоторой функции f, то f голоморфна в U. Более того, для любого α последовательность $\{D^\alpha f_\nu\}$ сходится к $D^\alpha f$ равномерно на компактах из U.*

1.1.3′. Теорема Монтеля. *Если $\sigma = \{f\}$ — некоторое семейство голоморфных в U функций, равномерно ограниченных на каждом компактном подмножестве $K \subset U$,*

$$|f(z)| \leqslant M_K \text{ для всех } z \in K,\ f \in \sigma,$$

то во всякой последовательности элементов семейства σ содержится подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактных подмножествах U.

1.1.3″. Принцип максимума. *Пусть f голоморфна на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$. Тогда отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ либо постоянно, либо открыто. В частности, если U ограничено и*

$$M = \sup_{\zeta \in \partial U} \overline{\lim_{z \to \zeta,\, z \in U}} |f(z)|,$$

то $|f(z)| < M$ для всех $z \in U$, если f не является константой.

1.1.4. Неравенства Коши. *Если f голоморфна в U и $|f(z)| \leqslant M$, когда $z \in U$, то для любого компакта $K \subset U$ и любого α*

$$|D^\alpha f(z)| \leqslant M\alpha!\,\delta^{-|\alpha|} \quad \text{для } z \in K,$$

где δ — расстояние от K до границы U.

1.1.5. Лемма. *Пусть функция f является $\mathbb{R}$-аналитической в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как замкнутое подпространство в $\mathbb{C}^n$. Тогда существуют открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$, $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$, и голоморфная функция F в U, такие, что $F|\Omega = f$.*

◀ [1]) Пусть $a \in \Omega$ и $P_a(x) = \sum c_\alpha (x-a)^\alpha$ — степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ при $|x-a| < r_a$, $r_a > 0$. Положим

$$U_a = \{z \in \mathbb{C}^n : |z-a| < r_a\}.$$

Тогда для $z \in U_a$ степенной ряд $P_a(z) = \sum c_\alpha (z-a)^\alpha$ сходится и его сумма голоморфна в U_a.

Пусть $U = \bigcup_{a \in \Omega} U_a$. Мы утверждаем, что если $U_a \cap U_b = U_{a,b} \neq \neq \varnothing$, то $P_a = P_b$ в $U_{a,b}$. Действительно, множество $U_{a,b}$ выпукло и потому связно. Далее, если $U_{a,b} \neq \varnothing$, то $U_{a,b} \cap \mathbb{R}^n \neq \varnothing$, для любой точки $c \in U_{a,b} \cap \mathbb{R}^n$

$$D^\alpha P_a(c) = D^\alpha f(c) = D^\alpha P_b(c),$$

и потому применима теорема единственности 1.1.2. Следовательно, мы можем определить голоморфную в U функцию F, полагая $F|U_a = P_a$. Очевидно, $F|\Omega = f$. ▶

Вернемся к действительным функциям. Пусть N — окрестность замкнутого единичного отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ в $\mathbb{R}$, и пусть $f \in C^k(N)$, $k \geqslant 1$. Тогда верна

1.1.6. Лемма. *Существует* ξ, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, *такое, что*

$$f(1) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

где

$$f^{(\nu)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^\nu f(t).$$

◀ Для непрерывной на N функции g положим

$$I_0(g, t) = g(t), \quad I_r(g, t) = \int_0^t I_{r-1}(g, s)\, ds, \quad r \geqslant 1.$$

Если $g \in C^k(N)$ и $g^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leqslant \nu \leqslant k-1$, то, очевидно,

$$g(t) = I_k(g^{(k)}, t).$$

Применив это к функции

$$g(t) = f(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^\nu,$$

---

[1]) Знаки ◀ и ▶ соответственно указывают начало и конец доказательства. — *Прим. перев.*

мы получим

$$f(1)-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}=I_k(g^{(k)},\ 1)=I_k(f^{(k)},\ 1). \tag{1.1.7}$$

Если m и M обозначают соответственно нижнюю и верхнюю грани $f^{(k)}$ на $[0,\ 1]$, то, очевидно,

$$\frac{m}{k!}\leqslant I_k(f^{(k)},\ 1)\leqslant\frac{M}{k!}.$$

Так как $f^{(k)}$ непрерывна и потому принимает все значения между m и M, то существует ξ, $0\leqslant\xi\leqslant 1$, для которого

$$I_k(f^{(k)},\ 1)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi). \ \blacktriangleright$$

Легко показать по индукции, что

$$I_k(g,\ t)=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t g(s)(t-s)^{k-1}\,ds.$$

Следовательно, (1.1.7) можно переписать в виде

$$f(1)=\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1(1-t)^{k-1}f^{(k)}(t)\,dt. \tag{1.1.8}$$

1.1.9. Теорема (формула Тейлора). *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\in C^k(\Omega)$ — действительная функция. Пусть точки x, y и соединяющий их замкнутый отрезок $[x,\ y]$ принадлежат Ω. Тогда*

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(y)(x-y)^\alpha+\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)(x-y)^\alpha,$$

где ξ — некоторая точка из $[x,\ y]$.

Это сразу же следует из леммы 1.1.6, примененной к функции

$$g(t)=f(y+t(x-y)),$$

которая принадлежит $C^k(N)$ для некоторой окрестности N отрезка $[0,\ 1]$.

Если $f\in C^m(\Omega)$ и S — подмножество Ω, мы полагаем

$$\|f\|_m^S=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}\sup_{x\in S}|D^\alpha f(x)|.$$

Отметим, что если f, $g\in C^m(\Omega)$, то

$$\|fg\|_m^S\leqslant\|f\|_m^S\|g\|_m^S,\quad \|f+g\|_m^S\leqslant\|f\|_m^S+\|g\|_m^S. \tag{1.1.10}$$

Топологию в $C^k(\Omega)$ для конечного k мы определим следующим образом. Фундаментальная система окрестностей точки $g \in C^k(\Omega)$ состоит из множеств

$$B(g, K, \varepsilon) = \{f \in C^k(\Omega): \|f - g\|_k^K < \varepsilon\};$$

здесь ε пробегает все положительные действительные числа, а K — все компактные подмножества Ω. Соответствующая топология в $C^\infty(\Omega)$ получится, если в качестве фундаментальной системы окрестностей взять множества

$$\{f \in C^\infty(\Omega): \|f - g\|_m^K < \varepsilon\},$$

где ε, K такие, как и прежде, а $m \geqslant 0$ — любое целое число.

Ясно, что аналогичные топологии можно ввести в $C^k(\Omega, E)$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, для любого конечномерного векторного пространства E (размерности q); эти пространства функций изоморфны, алгебраически и топологически, декартову произведению $(C^k(\Omega))^q$. Указанный изоморфизм зависит от выбора базиса в E. Однако $C^k(\Omega, E)$ канонически изоморфно $C^k(\Omega) \otimes E$.

Легко видеть, что введенная выше топология в $C^k(\Omega)$ имеет счетную базу. Последовательность $\{f_\nu\}$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $D^\alpha f_\nu \to 0$ равномерно на компактных подмножествах Ω для всех α с $|\alpha| \leqslant k$ (для всех α, если $k = \infty$). Далее, эта топология метризуема: если $k < \infty$, то в качестве метрики можно взять функцию

$$d(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_k^{K_\nu}}{1 + \|f - g\|_k^{K_\nu}},$$

где $\{K_\nu\}$ — последовательность компактных подмножеств Ω, таких, что $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ (внутренности $K_{\nu+1}$) и $\bigcup K_\nu = \Omega$. Если $k = \infty$, то вместо этой функции можно взять функцию

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_\nu^{K_\nu}}{1 + \|f - g\|_\nu^{K_\nu}}.$$

1.1.11. Теорема. *Метрическое пространство $C^k(\Omega)$ является полным при любом k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$.*

◀ Достаточно показать, что если последовательность $\{g_\nu\} \subset C^k(\Omega)$ такова, что

$$\|g_\nu - g_\mu\|_m^K \to 0$$

при μ, $\nu \to \infty$ для всех целых чисел $m \leqslant k$ и всех компактов $K \subset \Omega$, то существует $g \in C^k(\Omega)$, такая, что

$$\|g_\nu - g\|_m^K \to 0$$

для $m \leqslant k$ и всех компактов K. Для всякого α, $|\alpha| \leqslant k$, существует непрерывная функция g_α, такая, что

$$\|D^\alpha g_\nu - g_\alpha\|_0^K \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

(Это следует из того, что $D^\alpha(g_\nu - g_\mu) \to 0$ равномерно на компактных подмножествах и что пространство непрерывных функций в Ω с топологией равномерной сходимости на компактах полно.) Нужно только доказать, что $g = g_0 \in C^k(\Omega)$ и $D^\alpha g = g_\alpha$. Для этого достаточно показать, что если $|\alpha| \leqslant k-1$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таково, что $|\beta| = 1$, то $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ и $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

Если $a \in \Omega$ и x близко к a, то по формуле Тейлора

$$D^\alpha g_\nu(x) - D^\alpha g_\nu(a) = \sum_{|\beta|=1} D^{\alpha+\beta} g_\nu(\xi_\nu)(x-a)^\beta, \tag{1.1.12}$$

где ξ_ν — некоторая точка отрезка $[a, x]$. Мы можем выбрать подпоследовательность $\{\nu_p\}$, такую, что

$$\xi_{\nu_p} \to \xi \in [a, x].$$

Если заменить в (1.1.12) ν на ν_p и устремить $p \to \infty$, то

$$g_\alpha(x) - g_\alpha(a) = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(\xi)(x-a)^\beta = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(a)(x-a)^\beta + o(|x-a|),$$

где $o(|x-a|)$ — функция, стремящаяся к нулю быстрее, чем $|x-a|$, когда $x \to a$. Последнее равенство вытекает из непрерывности $g_{\alpha+\beta}$. Из него следует, что $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ и $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$, если $|\beta| = 1$. ▶

1.1.13. Замечание. Это утверждение, очевидно, справедливо и и для $C^k(\Omega, E)$.

Приведем еще одно следствие из формулы Тейлора.

1.1.14. Предложение. *Если $f \in C^\infty(\Omega)$, то f является $\mathbb{R}$-аналитической тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset \Omega$ существует $M > 0$, такое, что*

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant M^{|\alpha|+1}\alpha! \text{ для всех } x \in K \text{ и всех } \alpha. \tag{1.1.15}$$

◀ Если f $\mathbb{R}$-аналитична, то эти неравенства следуют из леммы 1.1.5 и неравенств Коши 1.1.4. Обратно, если выполнены неравенства (1.1.15), x принадлежит компактной выпуклой окрестности K точки $a \in \Omega$ и $\xi \in [a, x]$, то

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi)(x-a)^\alpha \right| \leqslant k^n M^{k+1} |x-a|^k.$$

Если $|x-a|<M^{-1}$, то из формулы Тейлора следует, что ряд

$$\sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha$$

сходится к $f(x)$. ▶

1.1.16. Замечание. Легко проверить, что (1.1.15) эквивалентно существованию такой константы $M'>0$, что

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant M'^{|\alpha|+1}(|\alpha|)! \text{ для всех } x \in K \text{ и всех } \alpha.$$

§ 1.2. Разбиения единицы

Прежде чем сформулировать основной результат, введем несколько определений.

Семейство $\{E_i\}_{i\in I}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки $a \in X$ найдется такая окрестность U, что множество

$$\{i \in I\colon E_i \cap U \neq \varnothing\}$$

конечно. Семейство $\{E'_j\}_{j\in J}$ называется *измельчением* семейства $\{E_i\}_{i\in I}$, если существует отображение

$$r\colon J \to I$$

(называемое *измельчающим отображением*), такое, что $E'_j \subset E_{r(j)}$ для всех $j \in J$.

Мы будем использовать следующее утверждение, принадлежащее Дьедонне [1]. Доказательства можно найти в стандартных курсах по общей топологии (см., например, Бурбаки [2, 3]).

1.2.1. Предложение. *Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, являющееся счетным объединением компактов, то X — паракомпактное пространство, т. е. всякое открытое покрытие X допускает локально конечное измельчение, также являющееся открытым покрытием. Далее, для всякого локально конечного покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ пространства X существует открытое покрытие $\{V_i\}_{i\in I}$ (с тем же множеством индексов), такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$ для всех $i \in I$.*

1.2.2. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\{U_i\}_{i\in I}$ — его открытое покрытие. Семейство C^∞-функций $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_i\}_{i\in I}$, если

$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1, \quad \operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i,$$

семейство $\{\operatorname{supp}\varphi_i\}$ локально конечно и

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1 \text{ для всех } x \in \Omega.$$

1.2.3. Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\{U_i\}_{i\in I}$ — его открытое покрытие. Тогда существует разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$.*

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

1.2.4. Лемма. *Существует C^∞-функция η в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\eta \geqslant 0$, $\eta(0) > 0$ и $\operatorname{supp}\eta \subset \{x\colon \|x\| < 1\}$.*

◀ Пусть $0 < c < 1$ и s — функция класса C^∞ на $\mathbb{R}$, определенная следующим образом:

$$s(r) = \begin{cases} \exp(-1/(c-r)), & \text{если } r < c, \\ 0, & \text{если } r \geqslant c. \end{cases}$$

Мы можем взять

$$\eta(x) = s(x_1^2 + \ldots + x_n^2). \ ▶$$

1.2.5. Лемма. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и U — открытое множество, содержащее K. Тогда существует C^∞-функция φ в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех x, $\varphi(x) > 0$ для $x \in K$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset U$.*

◀ Пусть δ — расстояние от K до $\mathbb{R}^n \setminus U$. Если $a \in K$, положим

$$\varphi_a(x) = \eta\left(\frac{x-a}{\delta}\right),$$

где функция η определена в лемме 1.2.4. Пусть

$$V_a = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi_a(x) > 0\}.$$

Тогда $a \in V_a \subset U$. Так как K — компакт, то найдется конечное число точек $a_1, \ldots, a_p \in K$, таких, что

$$K \subset V_{a_1} \cup \ldots \cup V_{a_p}.$$

Теперь можно взять $\varphi = \sum_{j=1}^{p} \varphi_{a_j}$. ▶

Доказательство теоремы 1.2.3. Пусть $\{V_j\}_{j\in J}$ — локально конечное измельчение $\{U_i\}_{i\in I}$ относительно компактными открытыми подмножествами Ω (оно существует в силу предложения 1.2.1). Пусть $\{W_j\}_{j\in J}$ — открытое покрытие Ω, такое, что $\overline{W}_j \subset V_j$ (предложение 1.2.1). По лемме 1.2.5 существуют C^∞-функции $\psi_j \geqslant 0$ в Ω, такие, что $\psi_j(x) > 0$ для $x \in \overline{W}_j$ и $\operatorname{supp}\psi_j \subset V_j$. Положим

$$\varphi_j' = \frac{\psi_j}{\sum_{j'\in J} \psi_{j'}}.$$

(Поскольку покрытие $\{V_j\}$ локально конечно, $\sum_{j'\in J}\psi_{j'}$ определена, принадлежит $C^\infty(\Omega)$ и всюду положительна, так как $\psi_j>0$ на W_j, а $\bigcup W_j=\Omega$.) Очевидно,

$$\varphi_j'\geqslant 0,\ \operatorname{supp}\varphi_j'\subset V_j \text{ и } \sum_{j\in J}\varphi_j'=1.$$

Пусть r: $J\to I$ — такое отображение, что $V_j\subset U_{r(j)}$. Обозначим через $J_i\subset J$ множество $r^{-1}(i)$. Положим $\varphi_i=\sum_{j\in J_i}\varphi_j'$, где справа стоит 0, если J_i пусто. Так как множества J_i попарно не пересекаются и покрывают J, то

$$\sum_{i\in I}\varphi_i=\sum_{j\in J}\varphi_j'=1.$$

Очевидно, $\operatorname{supp}\psi_i\subset U_i$. Поскольку семейство $\{\operatorname{supp}\varphi_j'\}$ локально конечно, то таким является и $\{\operatorname{supp}\varphi_i\}$. ▶

1.2.6. Следствие. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, X — замкнутое подмножество Ω и U — открытое подмножество Ω, содержащее X. Тогда существует C^∞-функция ψ в Ω, такая, что $\psi(x)=1$, если $x\in X$, $\psi(x)=0$, если $x\in\Omega\setminus U$, и $0\leqslant\psi\leqslant 1$ всюду в Ω.*

◀ По теореме 1.2.3 существуют C^∞-функции φ_1, $\varphi_2\geqslant 0$, такие, что $\operatorname{supp}\varphi_1\subset U$, $\operatorname{supp}\varphi_2\subset\Omega\setminus X$ и $\varphi_1+\varphi_2=1$ в Ω. Мы можем взять $\psi=\varphi_1$. ▶

1.2.7. Лемма. *Если $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие Ω, то существуют C^∞-функции ψ_i, такие, что $\operatorname{supp}\psi_i\subset U_i$, $0\leqslant\psi_i\leqslant 1$ и $\sum_i\psi_i^2=1$ в Ω.*

◀ Если $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$, то можно взять

$$\psi_i=\frac{\varphi_i}{\left(\sum_{j\in I}\varphi_j^2\right)^{1/2}}.\ ▶$$

§ 1.3. Обратные функции, неявные функции и теорема о ранге

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\in C^1(\Omega, m)$ — отображение Ω в $\mathbb{R}^m$ класса C^1. Пусть $a\in\Omega$.

1.3.1. Определение. *Дифференциалом f в точке a* называется $\mathbb{R}$-линейное отображение $(df)(a)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, такое, что

$$(df)(a)(v_1,\ldots,v_n)=(w_1,\ldots,w_m),$$

где

$$w_j=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\,v_k.$$

Дифференциал $(df)(a)$ голоморфного отображения f открытого подмножества $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$ мы определяем аналогично:

$$(df)(a)(v_1, \ldots, v_n) = (w_1, \ldots, w_m), \qquad w_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(a)\, v_k.$$

Очевидно, это есть $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Оно совпадает с определенным выше отображением $(df)(a)$, если естественным образом отождествить $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$ и воспользоваться уравнениями Коши — Римана.

1.3.2. Теорема. *Если f есть C^1-отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ и для точки $a \in \Omega$ дифференциал $(df)(a)$ является изоморфизмом $\mathbb{R}^n$ на себя, то существуют окрестности $U \ni a$ и $V \ni f(a)$, такие, что сужение $f|U$ является гомеоморфизмом на V.*

◀ Не теряя общности, мы можем считать, что $a = 0$ и $f(a) = 0$. Так как $(df)(a) = A$ есть изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя, то можно заменить f на $A^{-1} \circ f$ и считать, что $(df)(a)$ — тождественное отображение. Пусть g определена в Ω равенством

$$g(x) = f(x) - x.$$

Тогда, очевидно, $(dg)(a) = 0$. Из этого следует, что существует окрестность

$$W \ni 0, \quad \overline{W} \subset \Omega, \qquad W = \{x\colon |x| < r\},$$

такая, что для любых $x, y \in \overline{W}$

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Если $x, y \in W$, то, очевидно,

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \frac{1}{2}|x - y|,$$

так что отображение f взаимно однозначно в W. Пусть $V = \{x\colon |x| < r/2\}$ и $U = W \cap f^{-1}(V)$. Определим $\varphi_0\colon V \to W$, полагая $\varphi_0(y) \equiv 0$ и далее по индукции

$$\varphi_\nu(y) = y - g(\varphi_{\nu-1}(y)).$$

Легко проверить индукцией по ν, что

$$\varphi_\nu(V) \subset W, \quad \nu \geqslant 0,$$

и далее, что

$$|\varphi_\nu(y) - \varphi_{\nu-1}(y)| = |g(\varphi_{\nu-1}(y)) - g(\varphi_{\nu-2}(y))| \leqslant r2^{-\nu} \quad (\nu \geqslant 2),$$

причем это верно и для $\nu = 1$. Значит, последовательность $\{\varphi_\nu\}$ сходится равномерно к отображению $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$. Так как $\varphi_\nu(V) \subset W$, то $\varphi(V) \subset \overline{W}$ и

$$\varphi(y) = y - g(\varphi(y)).$$

Так как $|y|<r/2$ на V и $|g(\varphi(y))|\leqslant r/2$, то $\varphi(V)\subset W$; более того, $f(\varphi(y))=\varphi(y)+g(\varphi(y))=y$. Так как $f|W$ взаимно однозначно, то отображение φ является обратным к f. Очевидно, φ непрерывно, так как непрерывны все φ_ν. ▶

Позже мы увидим, что на самом деле $\varphi\in C^1(V, n)$.

1.3.3. Замечание. У этой теоремы есть аналог для голоморфных отображений. Если Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $f\colon \Omega\to\mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение, такое, что $(df)(a)$ для некоторой точки $a\in\Omega$ есть изоморфизм, то найдутся окрестности $U\ni a$ и $V\ni f(a)$, такие, что $f|U$ есть гомеоморфизм U на V и *отображение, обратное к* $f|U$, *тоже голоморфно*. Доказательство совпадает с приведенным выше. Мы определяем U, V и φ_ν так же, как и выше; последовательность $\{\varphi_\nu\}$ сходится равномерно к отображению φ, обратному к $f|U$. Так как каждое φ_ν голоморфно, то по теореме 1.1.3 φ тоже голоморфно.

1.3.4. Определение. Пусть Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно, f есть C^1-отображение $\Omega_1\times\Omega_2$ в $\mathbb{R}^p$ и точка $(a, b)\in\Omega_1\times\Omega_2$. Определим отображение $g\colon \Omega_2\to\mathbb{R}^p$, полагая $g(y)=f(a, y)$. *Частным дифференциалом* $(d_2f)(a, b)$ называется линейное отображение $(dg)(b)$ пространства $\mathbb{R}^{n_2}$ в $\mathbb{R}^p$. Частный дифференциал $(d_1f)(a, b)$ определяется аналогично.

1.3.5. Теорема. *Пусть Ω_1, Ω_2 — открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно и f есть C^1-отображение $\Omega_1\times\Omega_2$ в $\mathbb{R}^{n_2}$. Предположим, что $f(a, b)=0$ в некоторой точке $(a, b)\in\Omega_1\times\Omega_2$ и $\operatorname{rank}(d_2f)(a, b)=n_2$. Тогда найдется окрестность $U_1\times U_2$ точки (a, b), такая, что для любого $x\in U_1$ существует единственное $y=y(x)\in U_2$, такое, что $f(x, y(x))=0$. Отображение $x\mapsto y(x)$ непрерывно.*

◀ Рассмотрим отображение $F\colon \Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, определяемое соотношением

$$F(x, y)=(x, f(x, y)).$$

Тогда $(d_2f)(a, b)$ имеет ранг n_2 в том и только в том случае, если $(dF)(a, b)$ — изоморфизм. Значит, по теореме 1.3.2, найдутся окрестности $U\times U_2\ni(a, b)$ и $W\ni(a, 0)$, такие, что отображение $F|U\times U_2\to W$ является гомеоморфизмом. Пусть $\varphi\colon W\to U\times U_2$ — непрерывное отображение, обратное к $f|U\times U_2$. Точка a обладает такой окрестностью U_1, что если $x\in U_1$, то $(x, 0)\in W$. Пусть $y(x)$ для $x\in U_1$ означает проекцию $\varphi(x, 0)$ на U_2. Очевидно, если $y\in U_2$ удовлетворяет условию $f(x, y)=0$, то $y=y(x)$. Далее, $x\mapsto y(x)$ — непрерывное отображение и $f(x, y(x))=0$. ▶

1.3.6. Замечание. Эта теорема имеет очевидный аналог для голоморфных отображений $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}^{n_2}$ (с очевидными изменениями обозначений); в этом случае отображение $y(x)$ голоморфно.

1.3.7. Лемма. *В предположениях и обозначениях теоремы* 1.3.5 *пусть* $A(x) = (d_2 f)(x, y(x))$ *и* $B(x) = (d_1 f)(x, y(x))$. *Тогда если* U — *достаточно малая окрестность точки* a, *то* $A(x)$ — *изоморфизм для всех* $x \in U$, *отображение* $y \in C^1(U, n_2)$ *и*

$$(dy)(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x). \tag{1.3.8}$$

◀ Так как y непрерывно, то $x \mapsto A(x)$ является непрерывным отображением U_1 в пространство линейных отображений $\mathbb{R}^{n_2}$ в себя (пространство $n_2 \times n_2$-матриц). Далее, $A(a)$ — изоморфизм. Значит, если U — достаточно малая окрестность точки a, то $A(x)$ при $x \in U$ — тоже изоморфизм. Мы можем предположить, что U выпукла. Пусть x, $x+\xi \in U$ и $\eta = y(x+\xi) - y(x)$. Тогда $f(x+\xi, y(x)+\eta) = 0$, так что по формуле Тейлора

$$0 = f(x, y(x)) + B(x)\xi + A(x)\eta + o(|\xi| + |\eta|) \text{ при } |\xi|, |\eta| \to 0.$$

Но $\eta \to 0$ при $\xi \to 0$ и $f(x, y(x)) = 0$, поэтому

$$A(x)\eta = -B(x)\xi + o(|\xi| + |\eta|) \quad \text{при} \quad |\xi| \to 0.$$

Если K — компактное подмножество U, то отображение $A(x)^{-1}$, будучи непрерывным в U, ограничено на K (в очевидном смысле), и мы получаем, что

$$\eta = -A(x)^{-1} \circ B(x)\xi + o(|\xi| + |\eta|).$$

Значит, если $|\xi|$ достаточно мал, то найдется константа $C > 0$, такая, что

$$|\eta| \leqslant C|\xi| + \frac{1}{2}|\eta|,$$

откуда $|\eta| \leqslant 2C|\xi|$. Следовательно,

$$y(x+\xi) - y(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x)\xi + o(|\xi|) \quad \text{при} \quad |\xi| \to 0,$$

а это как раз и означает, что $y \in C^1(U, n_2)$ и что выполняется равенство (1.3.8). ▶

1.3.9. Следствие. *В предположениях и обозначениях теоремы* 1.3.5 *пусть* U — *окрестность точки* a, *в которой* $(df)(x, y(x))$ *является изоморфизмом для всех* $x \in U$. *Тогда если*

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2), \quad k \geqslant 1,$$

то

$$y \in C^k(\Omega_1, n_2).$$

◀ При $k=1$ утверждение совпадает с леммой 1.3.7. Для $k>1$ мы воспользуемся индукцией. Если

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2),$$
$$y \in C^r(U, n_2), \quad r<k,$$

то, по определению, $x \longmapsto A(x)$, $B(x)$ суть C^r-отображения U в соответствующее конечномерное векторное пространство. Но тогда из (1.3.8) следует, что $y \in C^{r+1}(U, n_2)$. ▶

1.3.10. Замечание. В обозначениях следствия 1.3.9, если f есть $\mathbb{R}$-аналитическое отображение, то таково же и отображение y. Это сразу следует из леммы 1.1.5 и замечания 1.3.6.

1.3.11. Замечание. В предположениях теоремы 1.3.2 и с теми же обозначениями, если отображение $f \in C^k(\Omega, n)$ (или $\mathbb{R}$-аналитично), то таково же и $(f \mid U)^{-1}$. Это вытекает сразу из следствия 1.3.9 и замечания 1.3.10, примененных к отображению g: $\mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, где

$$g(x, y) = x - f(y).$$

1.3.12. Замечание. Теорема 1.3.2 вместе с замечанием 1.3.11 известна как *теорема об обратной функции*. Утверждения 1.3.5, 1.3.9 и 1.3.10 составляют *теорему о неявной функции*.

1.3.13. Определение. *Брус* в $\mathbb{R}^n$ — это множество вида $\{x\colon |x_j - a_j| < r_j\}$. *Поликруг* в $\mathbb{C}^n$ есть множество вида $\{z\colon |z_j - a_j| < r_j\}$.

1.3.14. Теорема о ранге. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^k(\Omega, m)$, $k \geqslant 1$, т. е. $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^k. Предположим, что ранг $(df)(x)$ есть целое число r, не зависящее от точки $x \in \Omega$. Тогда существуют открытые окрестности $U \ni a$ и $V \ni b = f(a)$, брусы Q, Q' в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ соответственно и C^k-диффеоморфизмы $u\colon Q \to U$, $u'\colon V \to Q'$, такие, что отображение $\varphi = u' \circ f \circ u$ имеет вид*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Далее, если f является $\mathbb{R}$-аналитическим, то u, u' вместе с обратными к ним отображениями можно взять $\mathbb{R}$-аналитическими.

◀ После выполнения подходящих автоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ мы можем предполагать, что $a=0$, $b=0$ и что $(df)(0)$ совпадает с линейным отображением

$$(v_1, \ldots, v_n) \longmapsto (v_1, \ldots, v_r, 0, \ldots, 0).$$

Рассмотрим отображение w: $\Omega \to \mathbb{R}^n$, определяемое равенством

$$w(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

где

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x), \ldots, f_m(x)).$$

Тогда $(dw)(0)$ — тождественное отображение; следовательно, по теореме об обратной функции (см. замечание 1.3.12), существуют окрестность $U \ni 0$ и брус Q, такие, что w: $U \to Q$ есть C^k-диффеоморфизм. Пусть $u = (w \mid U)^{-1}$. Очевидно,

$$f \circ u(y) = (y_1, \ldots, y_r, \varphi_{r+1}(y), \ldots, \varphi_m(y)).$$

где φ_j принадлежат $C^k(Q)$. Если теперь $\psi = f \circ u$, то

$$\operatorname{rank}(d\psi)(y) = r$$

для $y \in Q$, и потому

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} = 0, \quad \text{если} \quad j, k > r.$$

Таким образом, φ_j не зависят от $y_{r+1}, \ldots, y_m$. Пусть теперь $Q = Q^r \times Q^{n-r}$, где Q^r, Q^{n-r} — брусы соответственно в $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^{n-r}$. Пусть отображение

$$v\colon Q^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to Q^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

определяется равенством

$$v(y_1, \ldots, y_r, \ldots, y_m) = \\ = (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1} - \varphi_{r+1}(y_1, \ldots, y_r), \ldots, y_m - \varphi_m(y_1, \ldots, y_r)).$$

Очевидно, что v есть C^k-диффеоморфизм. Пусть Q' — брус в $\mathbb{R}^m$, такой, что

$$v \circ \psi(Q) \subset Q' \subset Q^r \times \mathbb{R}^{m-r},$$

и пусть $V = v^{-1}(Q')$. Если мы положим $u' = v \mid V$, то получим, что

$$u' \circ f \circ u(x_1, \ldots, x_n) = u' \circ \psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0). \ \blacktriangleright$$

Отметим, что C^k-отображения можно заменить $\mathbb{R}$-аналитическими, если f аналитическое.

1.3.15. Замечание. Ясно, что теорема о ранге имеет аналог для голоморфных отображений. Мы не формулируем его явно, так как и утверждение и доказательство практически те же, что и в теореме 1.3.14.

§ 1.4. Теорема Сарда и функциональная зависимость

1.4.1. Лемма. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и f: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица на компактных подмножествах Ω, т. е. для любого компакта $K \subset \Omega$ существует такое $M > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ для всех $x, y \in K$. Тогда для любого множества $S \subset \Omega$ меры нуль множество $f(S)$ имеет меру нуль.*

Это следует из определения множества меры нуль.

1.4.2. Лемма. *Если Ω открыто в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^1(\Omega, n)$, то f переводит множества меры нуль в множества меры нуль.*

1.4.3. Лемма. *Если m и n — целые числа, $m > n$, Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^1-отображение, то $f(\Omega)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.*

◀ Если мы определим отображение $g\colon \Omega \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

то $f(\Omega) = g(\Omega \times 0)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$ по лемме 1.4.2. ▶

1.4.4. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^1-отображение. Точка $a \in \Omega$ называется *критической точкой* f, если $\operatorname{rank}(df)(a) < m$.

1.4.5. Замечания. (a) Если $m > n$, то всякая точка в Ω является критической. (b) Множество критических точек отображения f замкнуто в Ω.

Основная цель этого параграфа — доказательство следующей теоремы.

1.4.6. Теорема Сарда. *Если Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^∞-отображение и A — множество критических точек f, то $f(A)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.*

Эта теорема верна даже в предположении $f \in C^r(\Omega, m)$, где $r = \max(n - m + 1, 1)$. Доказательство этого более сильного варианта требует, однако, и несколько более тонкого анализа: см. Сард [1] и Морс [1], а также Мальгранж [2]. Уитни [3] показал, что требование дифференцируемости $\max(n - m + 1, 1)$ раз — лучшее из возможных, и привел пример C^{n-m}-отображения f $(n > m)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, для которого образ множества критических точек содержит непустое открытое множество.

Прежде всего мы докажем теорему Сарда в случае, когда $m = n$, но в более слабом предположении относительно дифференцируемости.

1.4.7. Предложение. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ есть C^1-отображение. Если A — множество критических точек f, то $f(A)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.*

◀ Пусть $a \in A$. По предположению, $\operatorname{rank}(df)(a) < n$; следовательно, $f(a) + (df)(a)(\mathbb{R}^n)$ есть аффинное подпространство $V_a \subset \mathbb{R}^n$ размерности $< n$. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ с центром $f(a)$, такой, что V_a лежит в пространстве, натянутом на $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Пусть Q — замкнутый куб в Ω; нам доста-

точно показать, что $f(Q \cap A)$ имеет меру нуль. Когда $x, y \in Q$, мы имеем

$$f(x) - f(y) = (df)(y)(x-y) + r(x, y),$$

где

$$r(x, y) = o(\|x-y\|)$$

равномерно на $Q \times Q$ при $\|x-y\| \to 0$; следовательно, найдется функция λ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такая, что $\lambda(t) \to 0$ при $t \to 0$ и

$$\|r(x, y)\| \leqslant \lambda(\|x-y\|) \cdot \|x-y\|.$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и x лежит в кубе Q_ε с ребром ε, содержащем точку $a \in A$, то $f(x)$ лежит в слое между гиперплоскостями

$$u_n = 2\lambda(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad \text{и} \quad u_n = -2\lambda(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Более того, из формулы Тейлора следует, что $f(x)$ лежит в кубе с ребром $M\varepsilon$ и центром $f(a)$ (ребра куба параллельны осям координат u_i), где M — константа, не зависящая от a, $x \in Q$ и от выбора координат $\{u_i\}$. Объем пересечения куба с ребром $M\varepsilon$ и слоя между гиперплоскостями $u_n = \pm 2\lambda(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ не превышает $4M^{n-1}\varepsilon^n\lambda(\varepsilon)$. Так как мера в $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно ортонормированной замены координат, то $f(Q_\varepsilon)$ имеет меру $\leqslant 4M^{n-1}\varepsilon^n\lambda(\varepsilon)$. Пусть l — длина ребра куба Q. Разобьем Q на $(l/\varepsilon)^n$ кубов Q_i с ребром ε, $i = 1, \ldots, (l/\varepsilon)^n$. Мы показали, что если $Q_i \cap A \neq \varnothing$, то

$$\operatorname{mes} f(Q_i) \leqslant 4M^{n-1}\varepsilon^n\lambda(\varepsilon),$$

где mes — мера в $\mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\operatorname{mes} f(A \cap Q) \leqslant \sum_{i,\ A \cap Q_i \neq \varnothing} \operatorname{mes} f(A \cap Q_i) \leqslant l^n 4M^{n-1}\lambda(\varepsilon).$$

Так как $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\operatorname{mes} f(A \cap Q) = 0$. ▶

Для доказательства теоремы 1.4.6 нам понадобится одно подготовительное предложение.

1.4.8. Предложение. *Если f: $\Omega \to \mathbb{R}^1$ — функция класса C^∞ и A — множество ее критических точек, то $f(A)$ имеет меру нуль.*

◀ Положим

$$A_k = \{a \in \Omega\colon D^\alpha f(a) = 0 \text{ для всех } \alpha,\ 0 < |\alpha| \leqslant k\}.$$

Очевидно, $A_{k+1} \subset A_k$ и

(1.4.9) $\quad A = A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup A_n.$

Если $a \in A_n$ и Q — замкнутый куб в Ω, содержащий a, то

$$|f(x) - f(a)| \leqslant M|x-a|^{n+1}, \quad x \in Q,$$

так что образ куба с ребром ε, содержащего точку a, имеет меру $\leqslant M\varepsilon^{n+1}$ в $\mathbb{R}^1$ ($M = M(Q) > 0$ — фиксированная константа). Значит, разбивая Q на $(l/\varepsilon)^n$ кубов с ребром ε, мы получим, что $f(A_n \cap Q)$ имеет меру $< l^n M\varepsilon$, а поскольку ε произвольно, $f(A_n)$ имеет меру нуль. Если $n = 1$, то $A = A_1 = A_n$, так что в этом случае предложение доказано. Предположим теперь по индукции, что если Ω' — открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, g есть C^∞-отображение Ω' в $\mathbb{R}^1$ и A_g — множество критических точек g, то $g(A_g)$ имеет меру нуль.

Как видно из разложения (1.4.9) для отображения $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, достаточно показать, что $f(A_k \setminus A_{k+1})$ имеет меру нуль при $1 \leqslant k < n$. Для этого достаточно показать, что для любой точки $a \in A_k \setminus A_{k+1} = B_k$ найдется окрестность U в $\mathbb{R}^n$, такая, что $f(U \cap B_k)$ имеет меру нуль.

Так как $a \notin A_{k+1}$, то найдется мультииндекс

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = k + 1,$$

для которого

$$D^\alpha f(a) \neq 0.$$

Если $\alpha_j \neq 0$, пусть

$$\beta = \alpha - (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

(1 на j-м месте и 0 на остальных местах), и пусть $h = D^\beta f$. Тогда $(dh)(a)$ имеет в точке a максимальный ранг (равный 1); значит, по теореме о ранге 1.3.14, найдутся окрестность $U \ni a$, куб Q в $\mathbb{R}^n$ и C^∞-диффеоморфизм $u\colon U \to Q$, такие, что

$$u(\{x\colon h(x) = 0\}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in Q\colon x_1 = 0\} = H.$$

По построению, $u(B_k \cap U) \subset H$, и мы положим

$$\Omega' = \{(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\colon (0, x_2, \ldots, x_n) \in H\}.$$

Пусть g есть C^∞-функция в Ω', определяемая условием

$$g(x_2, \ldots, x_n) = F(0, x_2, \ldots, x_n),$$

где $F = f \circ u^{-1}$. Если $S = u(B_k \cap U)$, то, очевидно, $F(S) \subset g(A_g)$, где A_g — множество критических точек g. По индуктивному предположению, $g(A_g)$, а значит и $F(S) = f(U \cap B_k)$, имеет меру нуль. ▶

1.4.10. Следствие. *Если $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^∞-отображение и $B = \{x\colon (df)(x) = 0\}$, то $f(B)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.*

◀ Если $f = (f_1, \ldots, f_m)$, то $B \subset B_1 = \{x\colon (df_1)(x) = 0\}$. Следовательно,

$$f(B) \subset f_1(B_1) \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Согласно предложению 1.4.8, $f_1(B_1)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}$, поэтому $f_1(B_1) \times \mathbb{R}^{m-1}$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$. ▶

Наконец, нам понадобится еще один результат, который прямо следует из теоремы Фубини о представлении кратных интегралов повторными.

1.4.11. Лемма. *Пусть S — измеримое множество в $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{p-r}$ $(0 < r < p)$. Обозначим точку в $\mathbb{R}^p$ через (x, y), $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^{p-r}$. Для $c \in \mathbb{R}^r$ пусть*

$$S_c = \{y \in \mathbb{R}^{p-r}\colon (c, y) \in S\}.$$

Тогда S имеет меру нуль в $\mathbb{R}^p$ в том и только в том случае, когда S_c имеет меру нуль в $\mathbb{R}^{p-r}$ для почти всех $c \in \mathbb{R}^r$.

◀ Достаточно применить теорему Фубини к характеристической функции S (которая, по определению, равна 1 на S и 0 вне S). ▶

Доказательство теоремы 1.4.6. Пусть

$$E_k = \{x \in \Omega\colon \operatorname{rank}(df)(x) = k\},$$

где $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ — заданное C^∞-отображение. Если $m > n$, то теорема следует непосредственно из леммы 1.4.3, и потому мы можем считать, что $n \geqslant m$. Тогда

$$A = \bigcup_{0 \leqslant k < m} E_k.$$

Нам надо показать, что у любой точки $a \in E_k$ найдется окрестность U в $\mathbb{R}^n$, такая, что $f(U \cap E_k)$ имеет меру нуль. Множество

$$\{x \in \Omega\colon \operatorname{rank}(df)(x) \leqslant k\} = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant k} E_r$$

замкнуто для любого k; значит, E_k локально замкнуто, т. е. для любой точки $a \in E_k$ и всех достаточно малых окрестностей $U \ni a$ в $\mathbb{R}^n$ множество $U \cap E_k$ замкнуто в U и потому является счетным объединением компактов. Так как образ компакта при отображении f есть компакт и потому измеримое множество, то $S_k = f(U \cap E_k)$ измеримо в $\mathbb{R}^m$.

Если $k = 0$, то S_0 имеет меру нуль, согласно следствию 1.4.10. Пусть $0 < k < m$ и $a \in E_k$. Если $f = (f_1, \ldots, f_m)$, то мы можем считать, переставляя f_j, что

$$\operatorname{rank}(du)(a) = k,$$

где $u = (f_1, \ldots, f_k)$. В Ω найдутся C^∞-функции $u_{k+1}, \ldots, u_n$ (на самом деле — линейные функции в $\mathbb{R}^n$), такие, что

$$\operatorname{rank}(dw)(a) = n,$$

где

$$w = (f_1, \ldots, f_k, u_{k+1}, \ldots, u_n).$$

По теореме об обратной функции 1.3.11, существуют сколь угодно малые окрестности $U \ni a$ и $V \ni w(a)$, такие, что $w\colon U \to V$ есть C^∞-диффеоморфизм. Отображение

$$F = f \circ w^{-1}\colon V \to \mathbb{R}^m$$

имеет вид

$$F(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_k, F_{k+1}(v), \ldots, F_m(v));$$

если

$$E'_k = \{v \in V\colon (dF)(v) \text{ имеет ранг } k\},$$

то

$$S_k = f(U \cap E_k) = F(E'_k).$$

Для $c \in \mathbb{R}^k$ определим отображение $F_c\colon V_c \to \mathbb{R}^{m-k}$, полагая

$$F_c(y) = (F_{k+1}(c, y), \ldots, F_m(c, y)).$$

Здесь $V_c = \{y \in \mathbb{R}^{n-k}\colon (c, y) \in V\}$. Ясно, что

$$(c, y) \in E'_k \Leftrightarrow (dF_c)(y) = 0.$$

Значит, согласно следствию 1.4.10, если

$$E'_{k,c} = \{y \in V_c\colon (c, y) \in E'_k\},$$

то $F_c(E'_{k,c})$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^{m-k}$. Далее,

$$S_{k,c} = \{y \in \mathbb{R}^{m-k}\colon (c, y) \in S_k = F(E'_k)\} = F_c(E'_{k,c}).$$

Следовательно, так как S_k измеримо, то, по лемме 1.4.11, S_k имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$. Как мы уже отмечали, этим завершается доказательство теоремы 1.4.6. ▶

Эта теорема, в ее общей формулировке, принадлежит М. Морсу, А. Морсу и Сарду.

Приведем одно применение теоремы Сарда.

1.4.12. Применение. Пусть $f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(\Omega)$. Набор функций $\{f_j\}$ называется *функционально зависимым* на подмножестве $S \subset \Omega$, если существуют открытое множество

$$\Omega' \supset f(S), \text{ где } f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m,$$

и C^∞-функция g в Ω', такая, что $g^{-1}(0)$ нигде не плотно в Ω' и $g(f(x)) = 0$ для всех $x \in S$. Если g можно взять $\mathbb{R}$-аналитической, то набор $\{f_j\}$ называется *аналитически зависимым*. Соответствующее определение формулируется и для голоморфных функций.

1.4.13. Лемма. *Для произвольного замкнутого множества X в $\mathbb{R}^n$ найдется функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что $X = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(x) = 0\}$.*

◀Возьмем в $\mathbb{R}^n$ открытые множества U_p, $p \geqslant 1$, такие, что $X = \bigcap_{p \geqslant 1} U_p$. Пусть $\{K_m\}$ — последовательность компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{R}^n, \quad K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}.$$

Согласно следствию 1.2.6, найдутся $\varphi_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $0 \leqslant \varphi_p \leqslant 1$, $\varphi_p = 0$ на X и $\varphi_p = 1$ на $\mathbb{R}^n \setminus U_p$. Пусть

$$c_p = \|\varphi_p\|_p^{K_p} = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in K_p} |D^\alpha \varphi_p(x)|.$$

Подберем $\varepsilon_p > 0$ так, чтобы

$$\sum_1^\infty \varepsilon_p c_p < \infty.$$

Положим

$$\psi_m = \sum_{p=1}^m \varepsilon_p \varphi_p.$$

Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое r, что $K \subset K_r$, поэтому если $p > 0$ задано и $m' \geqslant m > r, p$, то $\|\psi_m - \psi_{m'}\|_p^K \leqslant \sum_{q > m} \varepsilon_q \|\varphi_q\|_p^K \leqslant \sum_{q > m} \varepsilon_q \|\varphi_q\|_q^K \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\{\psi_m\}$ является фундаментальной последовательностью в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и ее предел φ, очевидно, обладает требуемыми свойствами.▶

1.4.14. Теорема. *Если $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ есть C^∞-отображение $f = (f_1, \ldots, f_m)$, то набор $\{f_j\}$ функционально зависим на каждом компактном подмножестве Ω в том и только в том случае, когда* $\operatorname{rank}(df)(x) < m$ *для всех $x \in \Omega$.*

◀Предположим, что $\operatorname{rank}(df)(a) = m$ в некоторой точке $a \in \Omega$. Тогда $\operatorname{rank}(df)(x) = m$ для всех x, достаточно близких к a, так что, по теореме о ранге, найдется относительно компактная окрестность U точки a, такая, что $f(U)$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а потому $f(\overline{U})$ не является нигде не плотным. Очевидно, что в этом случае набор $\{f_j\}$ функционально независим на $\overline{U}$.

Обратно, если $\operatorname{rank}(df)(x) < m$ для всех $x \in \Omega$, то, по теореме Сарда 1.4.6, $f(\Omega)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$. Если $K \subset \Omega$ — компакт, то $f(K)$ — компакт меры нуль и, значит, нигде не плотное множество. По лемме 1.4.13, найдется функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, такая, что $g^{-1}(0) = f(K)$. Очевидно, $g \circ f(x) = 0$ для всех $x \in K$.▶

Несколько более слабое утверждение справедливо для аналитической зависимости.

1.4.15. Теорема. *Пусть* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ — *аналитическое отображение,* $f = (f_1, \ldots, f_m)$. *Тогда* $\operatorname{rank}(df)(x) < m$ *для всех* $x \in \Omega$ *в том и только в том случае, когда существует нигде не плотное замкнутое множество* $S \subset \Omega$, *такое, что у любой точки* $a \in \Omega \setminus S$ *найдется окрестность* $U \subset \Omega$, *где* $f_j | U$ *аналитически зависимы.*

Отметим, что если Ω связно, то по теореме единственности $\operatorname{rank}(df)(x) < m$ *для всех* $x \in \Omega$, если он $< m$ для всех x из некоторого непустого открытого подмножества Ω.

◀ Мы можем считать, что Ω связно. Если множество S с указанными выше свойствами существует, то, очевидно, $\operatorname{rank}(df)(x) < m$ для $x \in \Omega \setminus S$ (теорема 1.4.14), а тогда и всюду на Ω, так как множество $\{x\colon \operatorname{rank}(df)(x) = m\}$ открыто.

Обратно, пусть

$$p = \max_x \operatorname{rank}(df)(x) < m;$$

возьмем точку $b \in \Omega$, в которой

$$\operatorname{rank}(df)(b) = p.$$

Тогда найдутся индексы $j_1, \ldots, j_p$, $1 \leqslant j_r \leqslant m$, и $k_1, \ldots, k_p$, $1 \leqslant k_p \leqslant n$, такие, что $h(b) \neq 0$, где

$$h(x) = \det\left(\frac{\partial f_{j_r}}{\partial x_{k_s}}(x)\right).$$

Пусть $S = \{x \in \Omega\colon h(x) = 0\}$. Так как функция h аналитична в Ω и $\not\equiv 0$, то S не содержит никакого открытого множества и потому нигде не плотно. Очевидно,

$$\operatorname{rank}(df)(x) = p, \quad x \in \Omega \setminus S.$$

По теореме о ранге 1.3.15, существуют окрестности $U \ni a$, $V \ni f(a)$, брусы Q, Q' в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ соответственно и аналитические изоморфизмы $u\colon Q \to U$, $u'\colon V \to Q'$, такие, что $u' \circ f \circ u$ совпадает с отображением $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$. Если $u' = (u'_1, \ldots, u'_m)$ и мы положим $g = u'_m$, то получим, что

$$g \circ f = 0 \text{ на } U. \ ▶$$

1.4.16. Пример. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция комплексного переменного z, которая не является многочленом и действительна на действительной оси (например, $\varphi(z) = e^z$). Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, задаваемое равенством

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2, x_1 \varphi(x_2)).$$

Можно показать, что не существует аналитической функции $g \not\equiv 0$ в окрестности $0 \in \mathbb{R}^3$, такой, что $g \circ f = 0$ в окрестности

$0 \in \mathbb{R}^2$. Этот пример показывает, что наличие множества S в теореме 1.4.15 необходимо.

1.4.17. Замечание. Теорема 1.4.15 и пример 1.4.16 с очевидными изменениями применимы и к голоморфным функциям.

§ 1.5. Теорема Бореля о рядах Тейлора

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, такое, что $0 \in \Omega$, и пусть $f \in C^\infty(\Omega)$. Обозначим через $T(f)$ формальный степенной ряд

$$T(f) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(0)\, x^\alpha;$$

если $m > 0$ — целое число, положим

$$T^m(f) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(0)\, x^\alpha;$$

$T^m(f)$, конечно, является многочленом.

1.5.1. Определение. Пусть X — замкнутое подмножество Ω. Функция $f \in C^k(\Omega)$ называется *m-плоской* на X, $m \leqslant k$, если $D^\alpha f(x) = 0$ для всех $x \in X$ и всех α с $|\alpha| \leqslant m$. Если $f \in C^\infty(\Omega)$ и $D^\alpha f(x) = 0$ для $x \in X$ и всех α, мы будем говорить, что f — *плоская* на X.

1.5.2. Лемма. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ является m-плоской в начале координат. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная нулю в окрестности 0 и такая, что*

$$\| g - f \|_m^{\mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

◀ По следствию 1.2.6 найдется функция $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что $\eta(x) \geqslant 0$ для всех x и $\eta(x) = 0$, если $|x| \leqslant 1/2$, $\eta(x) = 1$, если $|x| \geqslant 1$. Для $\delta > 0$ положим

$$g_\delta(x) = \eta\left(\frac{x}{\delta}\right) f(x).$$

Очевидно, $g_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и равна нулю вблизи 0; поэтому достаточно доказать, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (D^\alpha g_\delta)(x) - (D^\alpha f)(x) \right| \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \text{ если } |\alpha| \leqslant m.$$

Так как $g_\delta(x) = f(x)$, если $|x| \geqslant \delta$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\alpha g_\delta(x) - D^\alpha f(x) \right| = \sup_{|x| \leqslant \delta} \left| D^\alpha g_\delta(x) - D^\alpha f(x) \right|.$$

Так как f является m-плоской в 0, то $D^\alpha f(0)=0$, и потому

$$\sup_{|x|\leqslant\delta}|D^\alpha f(x)|\to 0 \text{ при } \delta\to 0, \text{ если } |\alpha|\leqslant m.$$

Далее, мы имеем

$$D^\alpha g_\delta(x)=\sum_{\mu+\nu=\alpha}\binom{\alpha}{\nu}\delta^{-|\nu|}(D^\nu\eta)\left(\frac{x}{\delta}\right)(D^\mu f)(x).$$

Поскольку $\eta(x)=1$, если $|x|\geqslant 1$, то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\nu\eta(x)|=M_\nu<\infty.$$

Следовательно,

$$|D^\alpha g_\delta(x)|\leqslant M\sum_{\mu+\nu=\alpha}\delta^{-|\nu|}|D^\mu f(x)|, \quad \text{где } M=\max_\nu\binom{\alpha}{\nu}M_\nu.$$

Функция $D^\mu f$ является $(m-|\mu|)$-плоской в 0, так что

$$\sup_{|x|\leqslant\delta}|D^\mu f(x)|=o(\delta^{m-|\mu|}) \text{ при } \delta\to 0;$$

значит,

$$\sup_{|x|\leqslant\delta}|D^\alpha g_\delta(x)|=o\Big(\sum_{\mu+\nu=\alpha}\delta^{m-|\mu|-|\nu|}\Big)=o(1), \text{ если } |\alpha|\leqslant m. \blacktriangleright$$

1.5.3. Замечание. На самом деле достаточно предполагать, что $f\in C^m(\mathbb{R}^n)$ и является m-плоской в 0. Функция g из леммы 1.5.2, в частности, является плоской в 0.

1.5.4. Теорема Бореля. *Для любых наперед заданных действительных констант c_α, где α пробегает все наборы $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ из n неотрицательных целых чисел, существует такая функция $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что*

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(0)=c_\alpha.$$

Другими словами, отображение пространства $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в кольцо формальных степенных рядов от n переменных, при котором $f\mapsto T(f)$, является сюръективным, т. е. отображением *на*.

◀ Пусть

$$T_m(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}c_\alpha x^\alpha.$$

Очевидно, функция $T_{m+1}-T_m$ является m-плоской в 0; значит, по лемме 1.5.2, существует $g_m\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная нулю в окрестности 0 и такая, что

$$\|T_{m+1}-T_m-g_m\|_m^{\mathbb{R}^n}<2^{-m}.$$

Очевидно, что функция

$$f = T_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (T_{m+1} - T_m - g_m) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Далее, для любого $k > 0$ сумма $\sum_{m \geqslant k} (T_{m+1} - T_m - g_m)$ является k-плоской в 0. Следовательно,

$$T^k(f) = T^k\left(T_0 + \sum_{m=0}^{k-1} (T_{m+1} - T_m - g_m)\right) = T_k. \blacktriangleright$$

Эта теорема Бореля является весьма частным случаем теорем Уитни [1] о дифференцируемых функциях на замкнутых множествах. Мы сформулируем без доказательства одну из главных теорем Уитни в этом направлении. Элегантное ее доказательство, основанное на предложенных Глезером [1] упрощениях, приведено в книге Мальгранжа [2].

1.5.5. Теорема Уитни о продолжении. Часть 1. *Пусть k — целое положительное число, Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и X — замкнутое подмножество Ω. Предположим, что для каждого набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из n неотрицательных целых чисел, $|\alpha| \leqslant k$, задана непрерывная функция f_α на X. Тогда для существования функции $f \in C^k(\Omega)$, такой, что $D^\alpha f \mid X = f_\alpha$, $|\alpha| \leqslant k$, необходимо и достаточно, чтобы для любого α, $|\alpha| \leqslant k$, выполнялось равенство*

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta| \leqslant k - |\alpha|} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta + o(|x-y|^{k-|\alpha|})$$

равномерно на компактных подмножествах X при $|x-y| \to 0$.

1.5.6. Теорема Уитни о продолжении. Часть 2. *Для заданных при всех α непрерывных функций f_α на X продолжение $f \in C^\infty(\Omega)$, такое, что $D^\alpha f \mid X = f_\alpha$ для всех α, существует в том и только в том случае, когда для любого целого $m > 0$ и любого компакта $K \subset X$ выполняется равенство*

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta| \leqslant m} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta + o(|x-y|^m)$$

равномерно при $|x-y| \to 0$, $x, y \in K$.

Теорема Бореля является частным случаем теоремы 1.5.6, когда $X = \{0\}$ состоит из одной точки.

§ 1.6. Теорема Уитни о приближении

Начнем с леммы.

1.6.1. Лемма. *Пусть* $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant k < \infty$. *Для* $\lambda > 0$ *положим*

$$I_\lambda(f)(x) \equiv g_\lambda(x) =$$

$$= c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\{-\lambda[(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2]\}\, dy \equiv$$

$$\equiv c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\{-\lambda \| x-y \|^2\}\, dy,$$

где $c = \pi^{-n/2}$, *так что*

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\| x \|^2)\, dx = 1.$$

Тогда

$$\| g_\lambda - f \|_k^{\mathbb{R}^n} \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Отметим, что $g_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

◀ Имеем

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \exp(-\lambda \| y \|^2)\, dy,$$

так что для $|\alpha| \leqslant k$

$$D^\alpha g_\lambda(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x-y) \exp(-\lambda \| y \|^2)\, dy =$$

$$= c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(y) \exp(-\lambda \| x-y \|^2)\, dy.$$

Отсюда получаем

$$D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\} \exp(-\lambda \| x-y \|^2)\, dy.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ когда } \| x-y \| \leqslant \delta \text{ и } |\alpha| \leqslant k,$$

так как $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Более того, существует $M > 0$, такое, что

$$|D^\alpha f(y)| < M \text{ для всех } y,\ |\alpha| \leqslant k.$$

Следовательно,

$$\left|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)\right| =$$
$$= c\lambda^{n/2}\left|\left(\int\limits_{\|x-y\|<\delta} + \int\limits_{\|x-y\|\geqslant\delta}\right)\{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon c\lambda^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy + 2Mc\lambda^{n/2}\int\limits_{\|x-y\|\geqslant\delta}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy.$$

Далее,

$$c\lambda^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy = 1,$$

$$c\lambda^{n/2}\int\limits_{\|x-y\|\geqslant\delta}\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\lambda\delta^2/2}c\lambda^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\|x-y\|^2\right)dy = 2^{n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\delta^2\right).$$

Это дает нам оценку

$$\left|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + M2^{1+n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\delta^2\right).$$

Так как для фиксированного $\delta > 0$ можно подобрать λ столь большим, что последний член справа станет $< \varepsilon$, то

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)\right| \to 0 \text{ при } \lambda\to\infty. \blacktriangleright$$

1.6.2. Теорема Вейерштрасса о приближении. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой функции $f \in C^k(\Omega)$, $0 \leqslant k < \infty$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset \Omega$ найдется многочлен $P(x)$ от $x_1, \ldots, x_n$, такой, что*

$$\|f - P\|_k^K < \varepsilon.$$

◀ Заменяя f на φf, где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$ и $\varphi = 1$ в окрестности K (такая функция φ существует, согласно следствию 1.2.6), мы можем считать, что $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Тогда, по лемме 1.6.1, для данного $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое λ, что если

$$I_\lambda(f)(x) \equiv g_\lambda(x) = c\lambda^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy,$$

то

$$\|g_\lambda - f\|_k^K < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Далее,

$$\exp(-\lambda\|x-y\|^2)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(-\lambda)^p\|x-y\|^{2p}.$$

Поэтому если положить

$$Q_N(x, y)=\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{p!}(-\lambda)^p\|x-y\|^{2p},$$

то $$D^\alpha Q_N(x, y)\to D^\alpha\exp(-\lambda\|x-y\|^2) \text{ при } N\to\infty$$

равномерно для x, y из любого компактного множества. Если мы положим

$$P_N(x)=c\lambda^{n/2}\int f(y)\,Q_N(x, y)\,dy,$$

то P_N будет многочленом и $\|g_\lambda-P_N\|_k^K\to 0$ при $N\to\infty$. ▶

1.6.3. Следствие. *Если Ω_j — открытые множества и x_j — точки в $\mathbb{R}^{n_j}$ $(j=1, 2)$, то конечные линейные комбинации*

$$\sum_\mu \varphi_\mu^{(1)}(x_1)\,\varphi_\mu^{(2)}(x_2),$$

где $\varphi_\mu^{(j)}\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_j})$, плотны в $C^k(\Omega_1\times\Omega_2)$ при $0\leqslant k\leqslant\infty$.

Так как топология на $C^k(\Omega_1\times\Omega_2)$ определяется сходимостью на компактных подмножествах, то, домножая $\varphi_\mu^{(j)}$ на подходящие C^∞-функции с компактным носителем, мы получаем

1.6.4. Следствие. *В обозначениях следствия 1.6.3 конечные линейные комбинации $\sum_\mu \varphi_\mu^{(1)}(x_1)\,\varphi_\mu^{(2)}(x_2)$, где $\varphi_\mu^{(j)}\in C_0^\infty(\Omega_j)$, плотны в $C^k(\Omega_1\times\Omega_2)$ для всех k, $0\leqslant k\leqslant\infty$.*

Теперь мы займемся теоремой Уитни о приближении [1], играющей большую роль при детальном изучении дифференцируемых и аналитических многообразий.

1.6.5. Теорема Уитни о приближении. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\in C^k(\Omega)$, $0\leqslant k\leqslant\infty$. Пусть η — непрерывная функция в Ω, $\eta(x)>0$ для всех $x\in\Omega$. Тогда существует $\mathbb{R}$-аналитическая функция g в Ω, такая, что*

$$|D^\alpha f(x)-D^\alpha g(x)|<\eta(x) \text{ при } 0\leqslant|\alpha|\leqslant\min\left(k, \frac{1}{\eta(x)}\right)$$

(естественно, $\min(\infty, a)=a$, если $a\in\mathbb{R}$).

Начнем с небольшой переформулировки результата.

1.6.6. Замечание. Пусть $\{K_p\}$ — последовательность компактных подмножеств Ω, такая, что $K_0=\varnothing$, $K_p\subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$ и $\bigcup K_p=\Omega$. Если $\{\varepsilon_p\}$ — последовательность (строго) положительных чисел, то существует такая непрерывная функция η, что $\eta(x)>0$ для всех x и $\eta(x)<\varepsilon_p$, когда $x\in K_{p+1}\setminus K_p$, $p\geqslant 0$.

Поэтому теорему 1.6.5. можно сформулировать следующим образом.

1.6.7. Теорема. *Пусть Ω открыто в $\mathbb{R}^n$ и $f\in C^k(\Omega)$, $0\leqslant k\leqslant\infty$. Пусть $\{K_p\}$ — последовательность компактных подмножеств Ω, такая, что $K_0=\varnothing$, $K_p\subset\overset{\circ}{K}_{p+1}$ и $\bigcup K_p=\Omega$. Пусть $\{n_p\}$ — произвольная последовательность положительных целых чисел и $m_p=\min(k, n_p)$. Наконец, пусть $\{\varepsilon_p\}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Тогда существует $\mathbb{R}$-аналитическая функция g в Ω, такая, что для всякого $p\geqslant 0$*

$$\|f-g\|_{m_p}^{K_{p+1}\setminus K_p}<\varepsilon_p.$$

◀ Мы можем считать, что $m_{p+1}\geqslant m_p$ для всех $p\geqslant 0$. Напишем неравенство (1.1.10): если φ, $\psi\in C^{m_p}(\Omega)$ и $S\subset\Omega$, то

$$\|\varphi\psi\|_{m_p}^S\leqslant\|\varphi\|_{m_p}^S\|\psi\|_{m_p}^S.$$

Пусть $L_p=K_{p+1}\setminus K_p\,(p\geqslant 0)$. Пусть $\varphi_p\in C^\infty(\Omega)$ таковы, что $\operatorname{supp}\varphi_p$ — компакты из Ω, $\varphi_p(x)=0$, если x лежит в окрестности K_{p-1}, и $\varphi_p(x)=1$, если x лежит в некоторой окрестности $\overline{L}_p$. (Такие φ_p существуют согласно следствию 1.2.6.) Положим

$$M_p=1+\|\varphi_p\|_{m_p}^\Omega.$$

Пусть $\delta_p>0$ подобраны так, что

$$2\delta_{p+1}\leqslant\delta_p,\quad \sum_{q\geqslant p}\delta_q M_{q+1}\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon_p\quad\text{при } p\geqslant 0. \tag{1.6.8}$$

Как и в лемме 1.6.1, определим $I_\lambda(f)$ при $f\in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$I_\lambda(f)(x)=c\lambda^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\exp(-\lambda\|x-y\|^2)\,dy,$$

где

$$c\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\|x\|^2)\,dx=1.$$

По лемме 1.6.1, можно подобрать $\lambda_0>0$ так, чтобы функция $g_0=I_{\lambda_0}(\varphi_0 f)$ удовлетворяла неравенству

$$\|g_0-\varphi_0 f\|_{m_0}^{K_1}<\delta_0.$$

Определим теперь по индукции числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \ldots$ и функции $g_0, g_1, \ldots, g_p, \ldots$ следующим образом. Предположим, что $g_0, \ldots, g_{p-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ уже заданы. По лемме 1.6.1, существует функция $l_p(\lambda_j, g_j)$, $j \leqslant p-1$, такая, что если $\lambda_p > l_p$ и $g_p = I_{\lambda_p}[\varphi_p(f - g_0 - \ldots - g_{p-1})]$, то

$$\| g_p - \varphi_p(f - g_0 - \ldots - g_{p-1}) \|_{m_p}^{K_{p+1}} < \delta_p. \tag{1.6.9}$$

Так как g_p зависит только от λ_p и $g_0, \ldots, g_{p-1}$, то мы видим, что l_p зависит только от $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$.

Так как $\varphi_p = 0$ в окрестности K_{p-1}, то из (1.6.9) вытекает, в частности, что

$$\| g_p \|_{m_p}^{K_{p-1}} < \delta_p; \tag{1.6.10}$$

Поскольку $\varphi_p = 1$ в окрестности $\overline{L}_p$, то, кроме того,

$$\| f - g_0 - \ldots - g_p \|_{m_p}^{L_p} < \delta_p, \qquad L_p = K_{p+1} \setminus K_p. \tag{1.6.11}$$

Таким образом, если в (1.6.9) заменить p на $p+1$, то мы получим

$$\| g_{p+1} \|_{m_p}^{L_p} \leqslant \left\| \varphi_{p+1}\left(f - \sum_0^p g_q\right) \right\|_{m_p}^{L_p} + \left\| g_{p+1} - \varphi_{p+1}\left(f - \sum_0^p g_q\right) \right\|_{m_p}^{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi_{p+1} \|_{m_p}^{\Omega} \cdot \left\| f - \sum_0^p g_q \right\|_{m_p}^{L_p} + \delta_{p+1} \leqslant M_{p+1}\delta_p + \delta_{p+1},$$

кроме того, мы имеем неравенство (1.6.10), откуда

$$\| g_{p+1} \|_{m_p}^{K_p} \leqslant \delta_{p+1};$$

поэтому

$$\| g_{p+1} \|_{m_p}^{K_{p+1}} \leqslant M_{p+1}\delta_p + 2\delta_{p+1} \leqslant M_{p+1}\delta_p + \delta_p \leqslant 2\delta_p M_{p+1}.$$

В частности,

$$\sum_{q>p} \| g_q \|_{m_p}^{K_{p+1}} \leqslant 2 \sum_{q>p} \delta_q M_{q+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_p.$$

Отсюда следует, что

$$g = \sum_{q=0}^{\infty} g_q \in C^{m_p}(\Omega) \text{ для всех } p.$$

Далее, согласно (1.6.11),

$$\|f-g\|_{m_p}^{L_p} \leqslant \left\| f-\sum_0^p g_q \right\|_{m_p}^{L_p} + \left\| \sum_{q>p} g_q \right\|_{m_p}^{L_p} < \delta_p + \frac{1}{2}\varepsilon_p < \varepsilon_p.$$

Таким образом, если последовательность $\{\lambda_p\}$ такова, что $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})$, последовательность $\{g_p\}$ определена описанным выше индуктивным процессом и $g=\sum g_p$, то

$$\|f-g\|_{m_p}^{K_{p+1}\setminus K_p} < \varepsilon_p.$$

Теперь нам надо показать, что если $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})$ выбирать подходящим образом, то функция g будет аналитической. По определению,

$$g_p(x) = c\lambda_p^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_p(y)\left(f(y)-\sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\right)\exp(-\lambda_p\|x-y\|^2)\,dy =$$
$$= c\lambda_p^{n/2} \int_{\operatorname{supp}\varphi_p} \ldots .$$

Так как интегрирование ведется по компактному множеству и $\exp(-\lambda\|x-y\|^2)$ аналитична по x, то g_p аналитична в $\mathbb{R}^n$ при любом p. Пусть теперь $2\rho_p$ равно расстоянию от K_p до $\Omega\setminus K_{p+1}$. Очевидно, $\rho_p>0$.

Пусть U_p — открытое множество в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$, $U_p \supset K_p$, причем если $z\in U_p$, а $y\in\Omega\setminus K_{p+1}$, то

$$\operatorname{Re}\{(z_1-y_1)^2+\ldots+(z_n-y_n)^2\} > \rho_p.$$

Ясно, что g_p является сужением на $\mathbb{R}^n$ целой функции

$$h_p(z) = c\lambda_p^{n/2} \int_{\operatorname{supp}\varphi_p} \varphi_p(y)\times$$
$$\times\left(f(y)-\sum_{q=0}^{p-1} g_q(y)\right)\exp(-\lambda_p[(z_1-y_1)^2+\ldots+(z_n-y_n)^2])\,dy.$$

Далее, так как $\operatorname{supp}\varphi_q \subset \Omega\setminus K_{p+1}$, если $q>p+1$, то интеграл, определяющий g_q, $q>p+1$, можно заменить интегралом по $\Omega\setminus K_{p+1}$. Это показывает, что для $z\in U_p$

$$(1.6.12)\qquad |h_q(z)| \leqslant c\lambda_q^{n/2}\exp(-\lambda_q\rho_p)H_q(g_0, \ldots, g_{q-1}) =$$
$$= c\lambda_q^{n/2}H_q\exp(-\lambda_q\rho_p),$$

где H_q зависит только от $\lambda_0, \ldots, \lambda_{q-1}$, поскольку g_k зависит только от λ_j с $j \leqslant k$. Мы можем по индукции подобрать числа $\lambda_q > l_q(\lambda_0, \ldots, \lambda_{q-1})$ так, чтобы

$$\sum \lambda_q^{n/2} H_q \exp(-\lambda_q \rho) < \infty \text{ для любого } \rho > 0.$$

(Для этого достаточно брать λ_q такими, что $\lambda_q^{n/2} H_q \exp(-\lambda_q/q) < q^{-2}$.) При таком выборе последовательности $\{\lambda_q\}$ из (1.6.12) следует, что ряд

$$h(z) = \sum h_q(z)$$

сходится равномерно на U_p для любого p; очевидно, $U = \bigcup U_p$ — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$; функция h голоморфна в U по теореме Вейерштрасса 1.1.3. Ее сужение на Ω, равное g, является поэтому $\mathbb{R}$-аналитической функцией в Ω. ▶

§ 1.7. Теорема о приближении для голоморфных функций

Вопросы приближения голоморфными функциями намного сложнее тех, с которыми мы имели дело в § 1.6. Прежде всего, так как равномерный предел голоморфных функций также является голоморфной функцией, то самое большее, на что мы можем надеяться, — это приближение *голоморфных* функций многочленами от комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. Однако имеется ряд геометрических и аналитических условий на открытые множества $U \subset \mathbb{C}^n$, необходимых для того, чтобы любая голоморфная в U функция приближалась многочленами.

Простейший пример области, где приближение невозможно, — это область $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}: z \neq 0\}$: функцию z^{-1} нельзя приблизить в $\mathbb{C}^*$ многочленами от z. В случае одного переменного упомянутые ограничения являются чисто топологическими (см. теоремы 1.7.2 и 3.10.11), однако при $n > 1$ это уже не так.

1.7.1. Определение. Открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$ называется *областью Рунге*, если всякую голоморфную в U функцию можно приближать многочленами от $z_1, \ldots, z_n$ равномерно на компактных подмножествах U.

Следующая теорема содержится в более общей теореме, доказываемой в гл. 3 (см. § 3.10). Простое прямое доказательство, основанное на интегральной формуле Коши, можно найти, например, в книге Хёрмандера [4].

1.7.2. Теорема Рунге. *Открытое связное множество $U \subset \mathbb{C}$ является областью Рунге тогда и только тогда, когда всякая связная компонента U односвязна.*

Пусть теперь U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и λ: $U \to \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция ($\lambda(z) > 0$ для всех $z \in U$). Пусть $dv = dv_z$

обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}^n$ (с переменными $z_1, \ldots, z_n$) и $\mathscr{H}(\lambda)$ — множество голоморфных в U функций, для которых

$$\int_U |f(z)|^2 \lambda(z)\, dv < \infty.$$

1.7.3. Лемма. *Для f, $g \in \mathscr{H}(\lambda)$ положим*

$$(f, g)_\lambda = (f, g) = \int_U f(z)\, \overline{g(z)}\, \lambda(z)\, dv.$$

Тогда $\mathscr{H}(\lambda)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением (f, g).

Так как пространство $L^2(\lambda\, dv)$ квадратично интегрируемых функций по мере $\lambda(z)\, dv_z$ полно, то достаточно показать, что $\mathscr{H}(\lambda)$ замкнуто в $L^2(\lambda\, dv)$. Этот результат сразу вытекает из следующего предложения.

1.7.4. Предложение. *Если $\{f_p\}$ — последовательность элементов из $\mathscr{H}(\lambda)$ и*

$$\int_U |f_p(z) - f_q(z)|^2 \lambda(z)\, dv_z \to 0 \quad \text{при} \quad p, q \to \infty,$$

то $\{f_p\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах из U.

◀ Поскольку λ ограничена снизу на каждом компактном подмножестве из U положительной константой, мы можем считать, что на заданном компакте $\lambda \equiv 1$.

Если g голоморфна в окрестности замкнутого круга $\{z \in \mathbb{C}: |z-a| \leqslant \rho\}$, то из формулы Коши следует, что

$$g(a) = (\pi\rho^2)^{-1} \int_{|z| \leqslant \rho} g(a+z)\, dv.$$

Применяя эту формулу n раз, мы получим, что если $h(z_1, \ldots, z_n)$ голоморфна в окрестности поликруга $|z_1 - a_1| \leqslant \rho, \ldots, |z_n - a_n| \leqslant \rho$, то

$$h(a) = (\pi\rho^2)^{-n} \int_{|z| \leqslant \rho} h(a+z)\, dv.$$

Пусть K — компакт в U и $\rho > 0$ столь мало, что множество

$$K_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n: \text{существует } a \in K, \text{ такая, что } |z-a| \leqslant \rho\}$$

является компактом в U. Если f голоморфна в U и $a \in K$, то

$$|f(a)| \leqslant (\pi\rho^2)^{-n} \int_{|z| \leqslant \rho} |f(a+z)|\, dv \leqslant (\pi\rho^2)^{-n} \int_{K_\rho} |f(z)|\, dv.$$

Если мы применим это неравенство к квадрату разности $(f_p - f_q)^2$, то получим наше предложение. ▶

Пусть $\{\varphi_\nu\}$ — полная ортонормированная система в $\mathscr{H}(\lambda)$. Тогда если $f \in \mathscr{H}(\lambda)$, то

$$f = \sum c_\nu \varphi_\nu, \quad c_\nu = (f, \varphi_\nu),$$

где ряд сходится в $\mathscr{H}(\lambda)$. Из предложения 1.7.4 вытекает

1.7.5. Лемма. *Если $\{\varphi_\nu\}$ — полная ортонормированная система в $\mathscr{H}(\lambda)$, то любую функцию $f \in \mathscr{H}(\lambda)$ можно приблизить равномерно на компактных подмножествах U конечными линейными комбинациями*

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \varphi_\nu, \qquad c_\nu \in \mathbb{C}.$$

1.7.6. Предложение. *Пусть U_j — открытые множества в $\mathbb{C}^{n_j}$ и λ_j — строго положительные функции в U_j $(j = 1, 2)$. Определим $\lambda_1 \times \lambda_2$ в $U_1 \times U_2$, полагая*

$$(\lambda_1 \times \lambda_2)(z_1, z_2) = \lambda_1(z_1) \cdot \lambda_2(z_2).$$

Пусть $\{\varphi_\nu^{(j)}\}$ — полная ортонормированная система в $\mathscr{H}(\lambda_j)$. Тогда функции $\{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1) \cdot \varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)\}$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

◀ Достаточно показать, что если $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$ и

$$\int_{U_1 \times U_2} f(z_1, z_2) \overline{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)}\, \overline{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)}\, \lambda_1(z_1) \lambda_2(z_2)\, dv = 0 \text{ для всех } \nu_1, \nu_2$$

(где dv — мера Лебега в $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$), то $f \equiv 0$. Пусть dv_j — мера Лебега в $\mathbb{C}^{n_j}$. Сначала покажем, что если $a_1 \in U_1$, то функция

$$z_2 \mapsto f(a_1, z_2)$$

в U_2 принадлежит $\mathscr{H}(\lambda_2)$. В самом деле, из доказательства предложения 1.7.4 вытекает, что если $z_2 \in U_2$ и $\rho > 0$ достаточно мало, то

$$|f(a_1, z_2)|^2 \leqslant c^{-1} (\pi\rho^2)^{-n_1} \int_{|z_1 - a_1| \leqslant \rho} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1)\, dv_1,$$

где

$$c = \inf \lambda_1(z_1) \text{ для } |z_1 - a_1| \leqslant \rho,$$

и потому

$$\int_{U_2} |f(a_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2)\, dv_2 \leqslant$$

$$\leqslant c^{-1} (\pi\rho^2)^{-n_1} \int_{U_1 \times U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1) \lambda_2(z_2)\, dv < \infty.$$

Мы утверждаем теперь, что для любого ν_2 функция

$$g(z_1) = g^{(\nu_2)}(z_1) = \int\limits_{U_2} f(z_1, z_2)\overline{\varphi^{(2)}_{\nu_2}(z_2)}\lambda_2(z_2)\,dv_2$$

(которая, как мы показали выше, определена корректно) принадлежит $\mathscr{H}(\lambda_1)$. Прежде всего, $g(z_1)$ голоморфна в U_1, так как если $\{K_p\}$ — последовательность компактов, исчерпывающих U_2, то последовательность

$$\int\limits_{K_p} f(z_1, z_2)\overline{\varphi^{(2)}_{\nu_2}(z_2)}\lambda_2(z_2)\,dv_2$$

сходится к $g(z_1)$ равномерно на компактных подмножествах U_1, как в предложении 1.7.4. Далее, по неравенству Шварца,

$$|g(z_1)|^2 \leqslant \int\limits_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2\lambda_2(z_2)\,dv_2 \cdot \int\limits_{U_2} |\varphi^{(2)}_{\nu_2}(z_2)|^2\lambda_2(z_2)\,dv_2,$$

откуда

$$\int\limits_{U_1} |g(z_1)|^2\lambda_1(z_1)\,dv_1 \leqslant \int\limits_{U_1}\left(\int\limits_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2\lambda_2(z_2)\,dv_2\right)\lambda_1(z_1)\,dv_1 < \infty,$$

поскольку $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. Таким образом, $g(z_1) \in \mathscr{H}(\lambda_1)$. По предложению, $g(z_1)$ ортогональна всем $\varphi^{(1)}_{\nu_1}(z_1)$ в $\mathscr{H}(\lambda_1)$; следовательно, $g(z_1) \equiv 0$. Значит, для каждого фиксированного z_1 функция $f(z_1, z_2)$ ортогональна в $\mathscr{H}(\lambda_2)$ всем $\varphi^{(2)}_{\nu_2}(z_2)$, откуда следует, что $f(z_1, z_2) \equiv 0$. ▶

1.7.7. Теорема. *Если U_j — открытые множества в $\mathbb{C}^{n_j}$ $(j = 1, 2)$, то конечные линейные комбинации*

$$\sum_{\nu} \varphi^{(1)}_{\nu}(z_1)\,\varphi^{(2)}_{\nu}(z_2),$$

где $\varphi^{(j)}_{\nu}(z_j)$ голоморфны в U_j, плотны в пространстве голоморфных в $U_1 \times U_2$ функций относительно топологии сходимости на компактах.

◀ Пусть $f(z_1, z_2)$ голоморфна в $U_1 \times U_2$. Тогда существует (строго) положительная непрерывная функция η: $U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^+$, такая, что $f \in \mathscr{H}(\eta)$, т. е.

$$\int\limits_{U_1 \times U_2} |f|^2\eta\,dv < \infty.$$

Пусть $\{K^{(j)}_p\}$ — компактные множества в U_j, такие, что

$$K^{(j)}_p \subset \overset{\circ}{K}{}^{(j)}_{p+1}, \quad \bigcup K^{(j)}_p = U_j.$$

Тогда
$$\bigcup_p K_p^{(1)} \times K_p^{(2)} = U_1 \times U_2.$$

Пусть $0 < \varepsilon_p < 1$ таковы, что $\eta(z_1, z_2) \geqslant \varepsilon_p$, когда $(z_1, z_2) \in K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}$. Пусть λ_j — (строго) положительная непрерывная в U_j функция, такая, что $\lambda_j(z_j) \leqslant \varepsilon_p$, если $z_j \in K_p^{(j)} \setminus K_{p-1}^{(j)}$ (о существовании таких функций см. замечание 1.6.6). Так как

$$(K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}) \setminus (K_{p-1}^{(1)} \times K_{p-1}^{(2)}) = K_p^{(1)} \times (K_p^{(2)} \setminus K_{p-1}^{(2)}) \cup (K_p^{(1)} \setminus K_{p-1}^{(1)}) \times K_p^{(2)},$$

то отсюда тривиально следует, что если

$$(z_1, z_2) \in (K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}) \setminus (K_{p-1}^{(1)} \times K_{p-1}^{(2)}),$$

то
$$\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2) \leqslant \varepsilon_p \leqslant \eta(z_1, z_2).$$

Поэтому мы имеем

$$\lambda_1(z_1)\lambda_2(z_2) \leqslant \eta(z_1, z_2) \text{ в } U_1 \times U_2;$$

следовательно, $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

Если теперь $\{\varphi_\nu^{(j)}\}$ — полная ортонормированная система в $\mathscr{H}(\lambda_j)$, то произведения $\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. Так как $f \in \mathscr{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$, то по лемме 1.7.5 существуют комплексные константы $c_{\nu_1\nu_2}$, такие, что конечные линейные комбинации вида

$$\sum c_{\nu_1\nu_2}\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)$$

приближают f равномерно на компактных подмножествах из $U_1 \times U_2$. ▶

1.7.8. Следствие. *Если U_j — области Рунге в $\mathbb{C}^{n_j}$ $(j = 1, 2)$, то $U_1 \times U_2$ — область Рунге в $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$. В частности, если $U_1, \ldots, U_n$ — односвязные открытые множества в $\mathbb{C}$, то $U_1 \times \ldots \times U_n$ — область Рунге в $\mathbb{C}^n$.*

В дальнейшем мы изучим более глубокие свойства областей Рунге в $\mathbb{C}^n$.

§ 1.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.8.1. Лемма. *Пусть I — интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0, и пусть $w\colon I \to \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция. Пусть $M, \eta \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\eta > 0$ и для $t \in I$*

$$w(t) \leqslant M \int_0^t w(s)\,ds + \eta. \tag{1.8.2}$$

Тогда $w(t) \leqslant \eta e^{M|t|}$ для всех $t \in I$.

◀ Пусть сначала $t \geqslant 0$. Мы имеем

$$e^{Mt} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-Mt} \int_0^t w(s)\, ds \right\} = w(t) - M \int_0^t w(s)\, ds \leqslant \eta,$$

откуда

$$e^{-Mt} \int_0^t w(s)\, ds \leqslant \eta \int_0^t e^{-Ms}\, ds = \frac{\eta}{M}(1 - e^{-Mt}).$$

Комбинируя это соотношение с (1.8.2), мы получаем неравенство

$$w(t) \leqslant \eta e^{Mt} \quad (\text{так как } M > 0).$$

Если $t < 0$, положим $\tau = -t > 0$. Тогда

$$w(-\tau) \leqslant -M \int_{-\tau}^0 w(s)\, ds + \eta = M \int_0^\tau w(-s)\, ds + \eta$$

и, как мы уже видели, $w(-\tau) \leqslant \eta e^{M\tau}$, т. е. $w(t) \leqslant \eta e^{M|t|}$ также и при $t < 0$. ▶

1.8.3. Определение. Пусть Ω, Ω' — подмножества $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ соответственно и $f\colon \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}^p$ — некоторое отображение. Мы говорим, что f *удовлетворяет условию Липшица по* $x \in \Omega$ *на множестве* $S \times S' \subset \Omega \times \Omega'$ ($S \subset \Omega$, $S' \subset \Omega'$) *равномерно по* $x' \in S'$, если существует число $M > 0$, такое, что

$$\| f(x, x') - f(y, x') \| \leqslant M \| x - y \|$$

для всех (x, x'), $(y, x') \in S \times S'$.

1.8.4. Теорема. *Пусть* Ω, Ω' — *открытые множества в* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ *соответственно и* I — *открытый интервал в* $\mathbb{R}$, *содержащий* 0. *Пусть*

$$f\colon \Omega \times I \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$$

— *непрерывное отображение; обозначим точку в* $\Omega \times I \times \Omega'$ *через* (x, t, α). *Предположим, что для любых компактов* $K \subset \Omega$, $K' \subset \Omega'$ *функция* f *удовлетворяет условию Липшица по* x *на* $K \times I \times K'$ *равномерно по* t, α.

Тогда для любого данного $x_0 \in \Omega$ *и компакта* $K' \subset \Omega'$ *существует интервал* $I_0 = \{t\colon |t| < \varepsilon\}$ *и для любого* $\alpha \in K'$ *существует единственное* C^1-*отображение* $I_0 \to \Omega$, $t \longmapsto x(t, \alpha)$, *такое, что*

$$f(x(t, \alpha), t, \alpha) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha), \qquad x(0, \alpha) = x_0. \tag{1.8.5}$$

Кроме того, отображение $I_0 \times K' \to \Omega$, *при котором* $(t, \alpha) \longmapsto x(t, \alpha)$, *непрерывно.*

◀ Пусть $M>0$ таково, что при $x,\ y\in K,\ \alpha\in K'$ мы имеем

$$\|f(x,\ t,\ \alpha)-f(y,\ t,\ \alpha)\|\leqslant M\|x-y\|.$$

Пусть x_0 — внутренняя точка K и $r>0$ столь мало, что

$$\Omega_0=\{x\colon\ \|x-x_0\|\leqslant r\}\subset K.$$

Пусть $\|f\|<C$ на $\Omega_0\times I\times K'$. Подберем $\varepsilon'>0$ таким, чтобы $\{t\colon\ |t|\leqslant\varepsilon'\}\subset I$, и положим

$$I_0=\{t\colon\ |t|<\varepsilon\},$$

где $\varepsilon=\min(\varepsilon',\ r/C)$. Положим $x_0(t,\ \alpha)\equiv x_0$, а отображение $x_n\colon\ I_0\times K'\to\mathbb{R}^n$ для $n>0$ определим по формуле

$$x_n(t,\ \alpha)=x_0+\int_0^t f(x_{n-1}(s,\ \alpha),\ s,\ \alpha)\,ds. \tag{1.8.6}$$

Мы утверждаем, что $x_n(t,\ \alpha)\in\Omega_0$, если $(t,\ \alpha)\in I_0\times K'$. Действительно, для $n=0$ этот факт тривиален. Если он уже доказан для x_{n-1}, то

$$\left\|\int_0^t f(x_{n-1}(s,\ \alpha),\ s,\ \alpha)\,ds\right\|\leqslant C|t|<C\varepsilon\leqslant r,$$

откуда

$$\|x_n(t,\ \alpha)-x_0\|<r.$$

Кроме того, мы имеем

$$\|x_{n+1}(t,\ \alpha)-x_n(t,\ \alpha)\|\leqslant\frac{1}{n!}M^nC|t|^n$$

при $n\geqslant 0$. В самом деле,

$$\|x_1-x_0\|=\left\|\int_0^t f(x_0,\ s,\ \alpha)\,ds\right\|\leqslant|t|C,$$

и это совпадает с нашим неравенством при $n=0$. Если это неравенство справедливо при $n=m$, то

$$\begin{aligned}\|x_{m+2}(t,\ \alpha)-x_{m+1}(t,\ \alpha)\|&=\\&=\left\|\int_0^t\{f(x_{m+1}(s,\ \alpha),s,\ \alpha)-f(x_m(s,\ \alpha),\ s,\ \alpha)\}\,ds\right\|\leqslant\\&\leqslant M\frac{1}{m!}M^mC\int_0^{|t|}s^m\,ds=\frac{1}{(m+1)!}M^{m+1}C|t|^{m+1},\end{aligned}$$

а это как раз то, что нам надо. Значит, при $n\to\infty$ отображения $x_n(t,\ \alpha)$ равномерно стремятся к непрерывной функции $x(t,\ \alpha)$.

Более того, устремляя $n \to \infty$ в (1.8.6), мы получаем

$$x(t, \alpha) = x_0 + \int_0^t f(x(s, \alpha), s, \alpha)\, ds,$$

откуда следует, что при любом фиксированном α отображение $t \mapsto x(t, \alpha)$ принадлежит классу C^1.

Наконец, если u: $I_0 \to \Omega$ для некоторого $\alpha_0 \in K'$ есть C^1-отображение, такое, что

$$f(u(t), t, \alpha_0) = \frac{du}{dt}(t), \quad u(0) = x_0,$$

то мы положим

$$w(t) = x(t, \alpha_0) - u(t).$$

Тогда для $t \geqslant 0$ имеем

$$\| w(t) \| \leqslant \int_0^t \| f(x(s, \alpha_0), s, \alpha_0) - f(u(s), s, \alpha_0) \| ds \leqslant M \int_0^t \| w(s) \| ds,$$

а отсюда по лемме 1.8.1 с $\eta = 0$ следует, что $w(t) = 0$ при $t \geqslant 0$. Аналогичные рассуждения применимы и при $t < 0$; утверждение о единственности доказано. ▶

1.8.7. Замечание. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$ и f удовлетворяет оценке

$$\| f(x, t, \alpha) \| \leqslant C_1 \| x \| + C_2, \quad C_1,\ C_2 > 0,$$

в $\mathbb{R}^n \times I \times \Omega'$, то отображение x определено (и единственно) всюду в $I \times \Omega'$. Действительно, если мы определим x_n по формуле (1.8.6) для любого фиксированного α и $t \in I$, то для $t \geqslant 0$

$$\| x_n(t, \alpha) \| \leqslant M_1 \int_0^t \| x_{n-1}(s) \| ds + M_2,$$

где M_2 взято таким, что все еще

$$\| x_0 \| \leqslant M_2 e^{M_1 t}.$$

По индукции получаем, что

$$\| x_n(t, \alpha) \| \leqslant M_2 e^{M_1 t},$$

и, значит, последовательность $\{x_n(t, \alpha)\}_{n \geqslant 0}$ *равномерно ограничена* (при $t \in I$, $t \geqslant 0$; аналогичные рассуждения показывают, что это верно и для $t < 0$). Применяя условие Липшица для f, мы можем показать, что

$$\| x_n(t, \alpha) - x_{n+1}(t, \alpha) \| \leqslant \frac{1}{n!} C M^n |t|^n, \quad n \geqslant 0,$$

а затем повторить доказательство теоремы 1.8.4. В частности, если f *линейно по* x, то решение уравнения (1.8.5) существует в $I \times \Omega'$. ▶

1.8.8. Теорема. *Пусть обозначения остаются теми же, что в теореме* 1.8.4, *и пусть* J — *открытый интервал, содержащий замыкание* I. *Предположим, что* $f \in C^k(\Omega \times J \times \Omega')$, $k \geqslant 1$ (*в частности,* f *удовлетворяет условию Липшица, как в теореме* 1.8.4). *Тогда решение* x *уравнения* (1.8.5) *принадлежит* $C^k(I_0 \times \overset{\circ}{K}')$.

◀ Пусть $U' = \overset{\circ}{K}'$. Покажем сначала, что если $f \in C^1(\Omega \times J \times \Omega')$, то $x \in C^1(I_0 \times U')$. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, то достаточно показать, что частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

существуют и непрерывны в $I_0 \times U'$, так как, согласно (1.8.5), $\partial x/\partial t$ существует и непрерывна. Будем считать, что $t \geqslant 0$. При фиксированных t, α пусть $h_{t,\alpha}$: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ есть отображение $x \longmapsto f(x, t, \alpha)$, и пусть

$$A(t, \alpha) = (dh)(x(t, \alpha)) = (d_1 f)(x(t, \alpha), t, \alpha);$$

$A(t, \alpha)$ — линейное преобразование $\mathbb{R}^n$ в себя. Пусть

$$B(t, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x(t, \alpha), t, \alpha);$$

B — непрерывное отображение $I_0 \times U'$ в $\mathbb{R}^n$.

Согласно замечанию 1.8.7, существует непрерывное отображение

$$y\colon I_0 \times U' \to \mathbb{R}^n$$

(которое при каждом фиксированном α принадлежит C^1), такое, что

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t, \alpha) y + B(t, \alpha), \quad y(0, \alpha) = 0. \tag{1.8.9}$$

Для фиксированного $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in U'$ и достаточно малого действительного числа $h \neq 0$

$$\alpha^h = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + h, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m),$$

положим, по определению,

$$u_h(t) = \frac{x(t, \alpha^h) - x(t, \alpha)}{h}.$$

По формуле Тейлора при $0 \leqslant s \leqslant t$ имеем

$$f(x(s, \alpha^h), s, \alpha^h) - f(x(s, \alpha), s, \alpha) = hA(s, \alpha) u_h(s) + hB(s, \alpha) + \varepsilon(s, h),$$

где $$\varepsilon(s, h) = o(|h| \|u_h(s)\| + |h|)$$