где $m(S)$ — мера Лебега измеримого множества S в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, отсюда следовало бы (2.9.3), так как неотрицательная непрерывная функция $f \circ h$ с компактным носителем является равномерным пределом конечных линейных комбинаций $\sum c_j \chi_{Q_j}$, где константы $c_j \geqslant 0$, Q_j — замкнутые кубы и χ_S — характеристическая функция множества S (равная 1 на S и 0 вне S).

Доказательство неравенства (2.9.4). Пусть K — замкнутый куб в Ω' с ребрами, равными δ. Для $(n \times n)$-матрицы $M = (a_{ij})$ мы определим норму

$$\| M \| = \max_i \sum_j | a_{ij} | .$$

Если I — единичная матрица, то, очевидно, $\| I \| = 1$. Если l: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей M, то мы будем писать $\| l \| = \| M \|$.

Отображение h: $\Omega' \to \Omega$ задается n функциями, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. По формуле Тейлора 1.1.9 для любых точек x, $y \in K$ мы имеем

$$h_j(x) - h_j(y) = \sum_k \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(t_j)(x_k - y_k),$$

где $t_j \in K$. Следовательно,

$$| h_j(x) - h_j(y) | \leqslant \delta \| (dh)(t_j) \| \leqslant \delta \sup_{a \in K} \| dh(a) \| .$$

Отсюда сразу следует, что

$$m(h(K)) \leqslant \delta^n \{\sup_{a \in K} \| dh(a) \|\}^n = m(K) \sup_{a \in K} \| dh(a) \|^n. \tag{2.9.5}$$

Пусть $a \in K$ и l — линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, определяемое условием

$$l^{-1} = (dh)(a).$$

Пусть $g = l \circ h$. Тогда

$$m(g(K)) = | \det l | \, m(h(K)),$$

так как равенство (2.9.2) для линейных преобразований доказано. Если мы применим к g неравенства (2.9.5), то получим

$$m(h(K)) \leqslant | \det dh(a) | \, m(K) \sup_{y \in K} \| dh(a)^{-1} \circ dh(y) \|^n. \tag{2.9.6}$$

Очевидно, $dh(a)^{-1} \circ dh(y)$ стремится к I при $\delta \to 0$ (т. е. при $\| y - a \| \to 0$) равномерно по a из любого компактного подмножества Ω'. Поэтому найдется функция λ: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такая, что $\lambda(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и

$$\sup_{y \in K} \| dh(a)^{-1} \circ dh(y) \|^n \leqslant 1 + \lambda(\delta), \quad a \in Q$$

(Q — некоторый замкнутый куб в Ω'). Разобьем Q на N^n кубов K_j с ребром δ, в N раз меньшим, чем ребро Q. Тогда, учитывая (2.9.6), мы получим для $a_j \in K_j$

$$m(h(Q)) \leqslant \sum_j m(h(K_j)) \leqslant (1+\lambda(\delta)) \sum_j |\det dh(a_j)|\, m(K_j).$$

При $N \to \infty$ выражение справа стремится к

$$\int_Q |\det dh(y)|\, dy_1 \ldots dy_n,$$

что доказывает неравенство (2.9.4), а вместе с ним и всю теорему. ▶

Перейдем теперь к изучению интегрирования на ориентируемых многообразиях. Пусть V — ориентируемое C^k-многообразие размерности n ($k \geqslant 1$) с границей или без. Пусть ω — непрерывная n-форма на V с компактным носителем. Мы предполагаем, что V имеет счетную базу и ориентировано, т. е. что на V задана некоторая n-форма ω_0, нигде не равная нулю. Пусть (U, φ), (U, ψ) — две системы координат (с одним и тем же U). Напишем

$$\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n), \quad \psi(x) = (y_1, \ldots, y_n)$$

и положим

$$\theta_1 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad \theta_2 = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

Тогда

$$\theta_j = f_j \omega_0, \quad f_j \in C^0(U), \quad j = 1, 2.$$

Мы будем предполагать, что координаты выбраны так, что $f_j > 0$. (Заменим x_n или y_n на $-x_n$ или $-y_n$, если это необходимо.) Такие системы координат мы будем называть *положительными* относительно ω_0. В U, очевидно, имеем

$$\omega = g_1\theta_1 = g_2\theta_2, \quad g_j \in C^0(U), \quad j = 1, 2.$$

2.9.7. Замечание. Мы утверждаем, что если g_1 (и, значит, g_2) имеет компактный носитель в U, то

$$\int_{\varphi(U)} g_1 \circ \varphi^{-1}\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\psi(U)} g_2 \circ \psi^{-1}\, dy_1 \ldots dy_n.$$

В самом деле, если мы положим

$$u(x) = \det d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)), \quad x \in U,$$

то получим, что

$$\theta_1(x) = u(x)\, \theta_2(x),$$

а потому $u(x)=f_1(x)/f_2(x)>0$. Теперь можно применить теорему 2.9.1 и тот факт, что

$$[g_1\circ\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ\psi^{-1})](\psi(x))\cdot d(\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(x))=g_2\circ\psi^{-1}(\psi(x));$$

это даст нам утверждение 2.9.7.

Теперь мы можем определить интеграл от формы ω по многообразию V. Пусть $\{(U_i,\ \varphi_i)\}$ — семейство систем координат на $V=\bigcup U_i$, положительное относительно ω_0, т. е. такое, что если θ_i есть форма $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, связанная с $\varphi_i(x)=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, то $\theta_i=f_i\omega_0$ на U_i, где $f_i>0$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$ и

$$\omega=g_i\theta_i \quad \text{на} \quad U_i.$$

Мы полагаем

$$\int\limits_V \omega=\sum_i \int\limits_{\varphi_i(U_i)} (\eta_i g_i)\circ\varphi_i^{-1}\,dx_1\ldots dx_n. \tag{2.9.8}$$

Из замечания 2.9.7 непосредственно вытекает, что эта величина не зависит от выбора систем координат $\{(U_i,\ \varphi_i)\}$ и разбиения единицы $\{\eta_i\}$. Если заменить ω_0 другой формой ω_0', определяющей ту же ориентацию, то интеграл тоже не меняется.

2.9.9. Теорема Стокса. *Пусть V — ориентируемое C^k-многообразие размерности n со счетной базой, и пусть $(n-1)$-форма ω класса C^1 на V имеет компактный носитель. Тогда*

$$\int\limits_{\partial V}\omega=\int\limits_V d\omega.$$

В частности, эта формула справедлива для всех C^1-форм ω, если V — компакт. (Если $\partial V=\varnothing$, то слева стоит 0.)

◀ Пусть $\{(U_i,\ \varphi_i)\}$ — семейство систем координат, такое, что $\bigcup U_i=V$,

$$\theta_i=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n=f_i\omega_0,$$
$$\varphi_i(x)=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

и $f_i>0$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\partial V}\eta_i\omega=\int\limits_V d(\eta_i\omega).$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. Предположим, что $U_i\cap\partial V=\varnothing$; тогда $\varphi_i(U_i)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и

$$\int\limits_{\partial V}\eta_i\omega=0.$$

Мы можем считать, что само U_i — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (согласно замечанию 2.9.7). Пусть

$$\eta_i\omega = \sum_{j=1}^{n} g_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где знак $\widehat{\ }$ над dx_j означает, что этот множитель надо опустить. Тогда мы имеем

$$d(\eta_i\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(-1)^{j-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

откуда

$$\int_V d(\eta_i\omega) = \sum_{j=1}^{n} \int_{U_i} (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

так как $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx_j = 0$, поскольку все g_j имеют компактные носители.

Случай II. $U_i \cap \partial V \neq \varnothing$. В этом случае $\varphi_i(U_i)$ — (относительно) открытое множество в $\mathbb{R}^n_+$ и

$$\varphi_i(U_i) \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon\ x_1 = 0\} \neq \varnothing.$$

Снова мы можем предположить, что U_i — открытое множество в $\mathbb{R}^n_+$. Как и в случае I, если

$$\eta_i\omega = \sum_{j=1}^{n} g_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

$$d(\eta_i\omega) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

то

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \quad \text{когда} \quad j \neq 1.$$

Более того, если $j \neq 1$, то

$$g_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \,|\, \partial V = 0$$

(см. определение 2.5.16) и, кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \ldots \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 =$$

$$= - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_V d(\eta_i \omega) = - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g_i(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{\partial V} \eta_i \omega$$

(см. замечание 2.8.11). ▶

§ 2.10. *Однопараметрические группы*

В этом параграфе V будет обозначать C^k-многообразие размерности n со счетной базой; предполагается, что $k \geqslant 3$.

2.10.1. Определение. Пусть g: $\mathbb{R} \times V \to V$ — отображение класса C^r и g_t: $V \to V$ — отображение $x \longmapsto g(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$. Мы назовем g *однопараметрической группой C^r-преобразований* V, если g_t для каждого t является C^r-диффеоморфизмом V на себя и для любых t, $s \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$g_{s+t} = g_s \circ g_t;$$

в частности, g_0 — тождественное отображение.

Пусть U — открытое множество на многообразии V, $\varepsilon > 0$ и $I = \{t \in \mathbb{R}: |t| < \varepsilon\}$. Пусть g: $I \times U \to V$ — отображение класса C^r, а g_t: $U \to V$, как и выше, — отображение $x \longmapsto g(t, x)$. Тогда g называется локальной однопараметрической группой C^r-преобразований, если g_t для каждого $t \in I$ является C^r-диффеоморфизмом U на открытое подмножество V, g_0 — тождественное отображение и всякий раз, когда s, t, $s+t \in I$, а x, $g_t(x) \in U$, мы имеем

$$g_{s+t}(x) = g_s \circ g_t(x).$$

Пусть g: $I \times U \to V$ — локальная однопараметрическая группа C^r-преобразований. Определим C^{r-1}-векторное поле $X = X_g$ на U следующим образом. Пусть $a \in U$ и $f \in C_{a,k}$. Мы полагаем

$$X(a)(f) = \left.\frac{d(f \circ g_t(a))}{dt}\right|_{t=0},$$

заметим, что точки $g_t(a)$ близки к a при достаточно малых t, так как g_0 — тождественное отображение. Обратно, имеем

2.10.2. Предложение. *Пусть X — векторное поле класса C^{k-1} на V и $a \in V$. Тогда найдется окрестность U точки a и локальная однопараметрическая группа g преобразований U в V, такая, что X индуцируется группой g на U, т. е. $X = X_g$ на U.*

◀ Достаточно доказать предложение для случая, когда V — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть векторное поле X имеет разложение

$$X(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \quad x \in V.$$

По теореме 1.8.14 существуют $\delta > 0$, окрестность U_0 точки a и C^{k-1}-отображение

$$g\colon I_0 \times U_0 \to V \qquad (I_0 = \{t \in \mathbb{R}\colon |t| < \delta\}),$$

такие, что

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = a(g(t, x)), \quad g(0, x) = x, \quad x \in U,$$

где $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$. Мы утверждаем, что g — локальная однопараметрическая группа. Чтобы доказать это, положим $g_t(x) = g(t, x)$ и подберем интервал

$$I = \{t\colon |t| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

и окрестность U точки a столь малыми, что

$$g_{s+t}(U) \subset U_0 \quad \text{для всех } s, t \in I.$$

Фиксируем $s \in I$ и положим $h_t = g_t \circ g_s$ на U. Мы сразу видим, что h_t и g_{t+s} удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a(u(t, x)), \quad u(0, x) = g_s(x), \quad x \in U, \quad t \in I.$$

Отсюда, ввиду единственности решения такого уравнения (см. теорему 1.8.4), мы имеем

$$h_t = g_{t+s}, \quad \text{т. е.} \quad g_{t+s} = g_t \circ g_s.$$

В частности, $g_t \circ g_{-t} = g_0$ — тождественное отображение, откуда следует, что все g_t — диффеоморфизмы класса C^k при $t \in I$.

Если $f \in C_{b,k}$, $b \in U$, то

$$\left.\frac{d(f \circ g_t(b))}{dt}\right|_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(b) \left.\frac{\partial g_{t,\nu}(b)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum a_\nu(b) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(b) = X(b)(f)$$

$(g_t = (g_{t,1}, \ldots, g_{t,n}))$, т. е. эта однопараметрическая группа g индуцирует наше векторное поле X на U. ▶

2.10.3. Замечание. Как следует из утверждения о единственности в теореме 1.8.4, эта локальная однопараметрическая группа g в очевидном смысле единственная.

2.10.4. Теорема. *Пусть X — векторное поле класса C^{k-1} с компактным носителем на V. Тогда существует единственная однопараметрическая группа g C^{k-1}-преобразований V, которая индуцирует это поле X на V; кроме того, $g(t, x) = x$ для всех t, если x лежит вне некоторого компактного подмножества V.*

◀ Пусть K — компакт, такой, что $X(a) = 0$, если $a \notin K$. По предложению 2.10.2 для любой точки $a \in K$ найдется окрестность U_a и локальная однопараметрическая группа $g_t^{(a)}$: $U_a \to V$, $|t| < \varepsilon(a)$, индуцирующая X на U_a. Подберем точки a_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant p$, так, чтобы

$$U = \bigcup_{1 \leqslant \nu \leqslant p} U_{a_\nu} \supset K,$$

и положим

$$\varepsilon = \min_\nu \varepsilon(a_\nu).$$

Если $U_{a_\nu} \cap U_{a_\mu} \neq \varnothing$, то $g_t^{(a_\nu)}$ индуцируют на $U_{a_\nu} \cap U_{a_\mu}$ одно и то же векторное поле и поэтому совпадают при $|t| < \varepsilon$. Значит, мы можем определить g_t на U, полагая $g_t(x) = g_t^{(a_\nu)}(x)$, если $x \in U_{a_\nu}$. Кроме того, если $x \in U$, $x \notin K$, то $X(x) = 0$, и поэтому для всех $f \in C_{x,k}$ мы имеем

$$\left.\frac{df \circ g_t(x)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Из утверждения о единственности в теореме 1.8.4 следует, что $g_t(x) \equiv x$. Поэтому мы можем продолжить g: $I \times U \to V$ до отображения g: $I \times V \to V$, полагая $g(t, x) = x$, если $x \notin K$; здесь $I = \{t: |t| < \varepsilon\}$. Кроме того, если t, s, $t + s \in I$, то для любого $x \in V$ мы имеем $g_{t+s}(x) = g_t \circ g_s(x)$.

Если теперь $t \in \mathbb{R}$ произвольно, то мы подберем целое число $p > 0$ так, чтобы $t' = t/p \in I$, и положим

$$g_t = g_{t'} \circ \ldots \circ g_{t'}$$

(p-кратная композиция $g_{t'}$). Непосредственно видно, что этим определено C^{k-1}-отображение g: $\mathbb{R} \times V \to V$, которое является однопараметрической группой и продолжает наше отображение g: $I \times V \to V$; в частности, g индуцирует векторное поле X. ▶

2.10.5. Замечание. Пусть U — открытое подмножество V и σ: $U \to V$ — диффеоморфизм класса C^k множества U на открытое подмножество V. Пусть X — векторное поле на U. Тогда σ индуцирует векторное поле $\sigma_*(X)$ на $U' = \sigma(U)$, где

$$\sigma_*(X)(\sigma(a)) = \sigma_{*,a}(X(a))$$

(см. замечание 2.4.5). Если $f \in C^k(U')$, то мы имеем

$$\sigma_*(X)(f) = X(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}.$$

Значит, если X, Y — два векторных поля на U и $f \in C^k(U')$, то

$$[\sigma_*(X), \sigma_*(Y)](f) = \sigma_*(X)\{Y(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}\} - \sigma_*(Y)\{X(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}\} =$$
$$= (X(Y(f \circ \sigma)) - Y(X(f \circ \sigma))) \circ \sigma^{-1} = \sigma_*([X, Y])(f),$$

откуда получаем, что

$$\sigma_*([X, Y]) = [\sigma_*(X), \sigma_*(Y)]. \tag{2.10.6}$$

Пусть теперь $\sigma = U \to U'$ — указанный выше C^r-диффеоморфизм. Пусть $W \Subset U$, $W' = \sigma(W)$ и g: $I \times U \to V$ — локальная однопараметрическая группа, индуцирующая векторное поле X на U. Тогда если интервал I достаточно мал, то $g(I \times W) \subset U'$, и поэтому отображение $t \mapsto \sigma \circ g_t \circ \sigma^{-1}$ определяет локальную однопараметрическую группу g': $I \times W' \to V$. Если $f \in C^k(\bar{W}')$ и $a \in W'$, то мы имеем

$$\sigma_*(X)(f)(a) = X(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}(a) = \left.\frac{d(f \circ \sigma \circ g_t \circ \sigma^{-1}(a))}{dt}\right|_{t=0},$$

и, значит, g' индуцирует на W' векторное поле $\sigma_*(X)$. Таким образом, мы получаем

2.10.7. Следствие. *Если $\sigma(W) = W'$, так же как и W, относительно компактно в U, то равенство*

$$\sigma \circ g_t(x) = g_t \circ \sigma(x)$$

для $x \in W$ и всех малых t выполняется в том и только в том случае, когда для всех $a \in W$ мы имеем

$$\sigma_{*,a}(X(a)) = X(\sigma(a)).$$

2.10.8. Определение. Пусть g: $I \times U \to V$ — локальная однопараметрическая группа C^r-преобразований, $r > 2$, и X — векторное поле на U. Мы скажем, что поле X *инвариантно* относительно g, если для любой точки $a \in U$ и всех достаточно малых t имеет место равенство

$$(g_t)_{*,a}(X(a)) = X(g_t(a)).$$

Пусть теперь g: $I \times U \to V$, как и выше, — локальная однопараметрическая группа C^r-преобразований, и пусть U' — открытое множество, $U' \Subset U$. Пусть Y — векторное поле класса C^r на U, $r \geqslant 2$. Для всех достаточно малых t определим векторное поле Y_t на U', полагая

$$Y_t(f) = Y(f \circ g_t) \circ g_{-t} = (g_t)_*(Y)(f),$$

и векторное поле dY_t/dt, полагая $(dY_t/dt)(f) = dY_t(f)/dt$.

2.10.9. Предложение. *Для всех достаточно малых t на U' выполняется равенство*

$$dY_t/dt = [Y_t, X],$$

где X — векторное поле на U, индуцируемое группой g (и потому инвариантное относительно g ввиду следствия 2.10.7).

◀ Положим $Z = dY_t/dt$. При $f \in C^k(U)$ мы имеем

$$Z_0(f) = \lim_{t\to 0} t^{-1}\{Y(f\circ g_t)\circ g_{-t} - Y(f)\} =$$
$$= \lim_{t\to 0} t^{-1}\{Y(f\circ g_t) - Y(f) - Y(f)\circ g_t + Y(f)\}\circ g_{-t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} t^{-1}Y(f\circ g_t - f) - \lim_{t\to 0} t^{-1}(Y(f)\circ g_t - Y(f)),$$

если эти последние два предела существуют равномерно на U', так как $\lim\limits_{t\to 0} g_{-t}$ — тождественное отображение. По определению поля X мы имеем

$$X(Y(f)) = \lim_{t\to 0} t^{-1}\{Y(f)\circ g_t - Y(f)\}$$

равномерно на U'. Пусть теперь $h(t, x) = f\circ g_t(x)$. Очевидно, $h \in C^2(I\times U')$, если $I \in \mathbb{R}$ — достаточно малый интервал, содержащий 0. Следовательно, функция

$$F = \begin{cases} t^{-1}(f\circ g_t - f) = t^{-1}(h(t, x) - h(0, x)) & \text{при } t\neq 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}(0, x) & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

принадлежит $C^1(I\times U')$, и потому

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}Y(f\circ g_t - f) = Y\left(\lim_{t\to 0} t^{-1}(f\circ g_t - f)\right) = Y(X(f)).$$

Отсюда для $f \in C^k(U)$ мы получаем равенство

$$Z_0(f) = [Y, X](f) = [Y_0, X](f).$$

Это означает, очевидно, что $Z_0 = [Y_0, X]$ на U'.

Если теперь t_0 достаточно мало, то

$$(g_{t_0})_* Z_0 = Z_{t_0} \quad \text{и} \quad (g_{t_0})_*[Y_0, X] = [(g_{t_0})_* Y_0, (g_{t_0})_* X] = [Y_{t_0}, X] \quad \text{на} \quad U',$$

чем и завершается доказательство. ▶

2.10.10. Предложение. *Пусть g, h: $I\times U \to V$ — локальные однопараметрические группы, индуцирующие на U векторные поля X и Y класса C^r, $r \geqslant 2$. Тогда равенство $g_t\circ h_s(x) = h_s\circ g_t(x)$ выполняется для любого множества $U' \Subset U$, $x \in U'$ и всех достаточно малых t, s в том и только в том случае, когда $[X, Y] = 0$ на U.*

◀ Если g_t, h_s коммутируют на U' при малых t, s, то сразу видно, что Y инвариантно относительно g_t (определение 2.10.8) и поэтому на U' (по предложению 2.10.9)

$$0=\frac{dY_t}{dt}\Big|_{t=0}=[Y,\ X].$$

Так как $U'\Subset U$ произвольно, то всюду на U

$$[X,\ Y]=-[Y,\ X]=0.$$

Обратно, если $[X,\ Y]=0$, мы имеем

$$dY_t/dt=(g_t)_*\quad [Y,\ X]=0$$

(по предложению 2.10,9) и, значит, Y инвариантно относительно g. Остается применить следствие 2.10.7. ▶

2.10.11. Замечание. Все результаты этого параграфа имеют аналоги для комплексно-аналитических многообразий V и голоморфных векторных полей. Вводятся голоморфные (локальные) однопараметрические группы, которые являются *голоморфными* отображениями g: $(I\times U)\mathbb{C}\times V\to V$ с очевидными свойствами. Тогда голоморфные векторные поля и голоморфные локальные однопараметрические группы, как и выше, соответствуют друг другу. Коммутирование элементов различных групп опять соответствует обращению в нуль скобок Пуассона.

Доказательства этих фактов совпадают с приведенными выше, и поэтому мы их опускаем.

По поводу затронутых здесь вопросов см. Номидзу [1].

§ 2.11. Теорема Фробениуса

Пусть V — многообразие класса C^k размерности n со счетной базой и $k\geqslant 3$.

2.11.1. Определение. Говорят, что на V задана *дифференциальная система* $\mathfrak{D}$ ранга p, если в каждой точке $a\in V$ выделено некоторое подпространство $\mathfrak{D}(a)\subset T_a(V)$ размерности p. Система $\mathfrak{D}$ называется *дифференцируемой класса* C^r $(0\leqslant r<k)$, если у каждой точки $a\in V$ имеется окрестность U и в ней C^r-векторные поля $X_1,\ \ldots,\ X_p$, такие, что векторы $X_1(b),\ \ldots,\ X_p(b)$ образуют базис пространства $\mathfrak{D}(b)$ для каждой точки $b\in U$. В этом случае говорят, что поля X_j *порождают* систему $\mathfrak{D}$ на множестве U.

2.11.2. Определение. Пусть $\mathfrak{D}$ — дифференциальная система ранга p. Подмногообразие i: $W\to V$ называется *интегралом* (или интегральным многообразием) системы $\mathfrak{D}$, если в любой точке $a\in W$ имеет место включение

$$i_{*,a}(T_a(W))\subset\mathfrak{D}(i(a)).$$

Мы будем говорить также, что C^r-отображение $f\colon V' \to V$ является интегралом $\mathfrak{D}$, если для всех $a \in V'$

$$f_{*,a}(T_a(V')) \subset \mathfrak{D}(f(a)).$$

Заметим, что подмногообразие интеграла — тоже интеграл.

2.11.3. Определение. Система $\mathfrak{D}$ называется *вполне интегрируемой*, если для любой точки $a \in V$ найдется система координат (U, φ), $a \in U$, $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, такая, что для всех c_j, $p < j \leqslant n$, многообразия

$$U_c = \{x \in U\colon\ x_j = c_j,\ p < j \leqslant n\}$$

являются интегралами $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathfrak{D}$ — вполне интегрируемая система и $a \in V$. Выберем систему координат (U, φ), $a \in U$, для которой выполняется условие определения 2.11.3. Тогда мы имеем

2.11.4. Предложение. *Если $i\colon W \to U$ — интеграл и многообразие W связно, то $i(W) \subset U_c$ для некоторого $c = (c_{p+1}, \ldots, c_n)$.*

◀ Пусть $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. Ясно, что пространство $T_b(U_c)$ для любой точки $b \in U$, $b = (b_1, \ldots, b_p, c_{p+1}, \ldots, c_n)$, имеет размерность p и принадлежит $\mathfrak{D}(b)$; поэтому $T_b(U_c) = \mathfrak{D}(b)$. Далее, $T_b(U_c)$ состоит из тех векторов в $T_b(V)$, которые аннулируются ковекторами $(dx_j)_b$, $p < j \leqslant n$. Следовательно, если $i\colon W \to V$ — интеграл $\mathfrak{D}$, то $i^*(dx_j) = 0$, $p < j \leqslant n$. Так как W связно, то отсюда следует, что функции $x_j \circ i$ постоянны на W, чем и доказывается наше утверждение. ▶

В частности, *интегральные подмногообразия $\{U_c\}$ при достаточно малых c не зависят от выбора системы координат* (U, φ), в которой $\varphi(a) = 0$.

2.11.5. Определение. Пусть $\mathfrak{D}$ — произвольная C^r-дифференциальная система. Мы скажем, что $\mathfrak{D}$ *инволютивна*, если для любой точки $a \in V$ существуют окрестность U и C^r-векторные поля $X_1, \ldots, X_p$, порождающие $\mathfrak{D}$ на U, таковы, что для всех точек $b \in U$

$$[X_\mu, X_\nu](b) \in \mathfrak{D}(b), \quad 1 \leqslant \mu,\ \nu \leqslant p.$$

2.11.6. Замечание. Это эквивалентно следующему условию: для любого открытого множества $U \subset V$ и любых двух C^r-векторных полей X, Y на U, таких, что $X(a), Y(a) \in \mathfrak{D}(a)$, когда $a \in U$, мы имеем

$$[X, Y](a) \in \mathfrak{D}(a), \quad a \in U.$$

2.11.7. Предложение. *Если $\mathfrak{D}$ — инволютивная C^r-дифференциальная система ранга p, то у любой точки $a \in V$ существуют окрест-*

ность U и в этой окрестности векторные поля X_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant p$, такие, что $X_\nu(b)$ порождают $\mathfrak{D}(b)$ для всех $b \in U$ и $[X_\nu, X_\mu] = 0$ на U.

◀ Пусть $a \in V$ и (U, φ) — система координат, $a \in U$, $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. Если U мала, то найдутся C^r-векторные поля $Y_1, \ldots, Y_p$, такие, что $Y_r(x)$ порождают $\mathfrak{D}(x)$ и $[Y_\nu, Y_\mu](x) \in \mathfrak{D}(x)$ для всех $x \in U$. Пусть

$$Y_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)_x; \quad a_{\nu\mu} \in C^r(U).$$

Так как $\{Y_\nu(a)\}$ порождают векторное пространство размерности p, то матрица $(a_{\nu\mu}(a))$, $1 \leqslant \nu \leqslant p$, $1 \leqslant \mu \leqslant n$, имеет ранг p. Не теряя общности, мы можем предположить, что ранг p имеет матрица $A(a)$, где

$$A(x) = (a_{\nu\mu}(x)), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant p.$$

Отсюда следует, что если U достаточно мала, то матрица $A(x)$ обратима для всех $x \in U$. Пусть $B(x) = (b_{\nu\mu}(x)) = A(x)^{-1}$; тогда $b_{\nu\mu} \in C^r(U)$, $1 \leqslant \nu, \mu \leqslant p$. Пусть

$$X_\nu = \sum_{\mu=1}^{p} b_{\nu\mu} Y_\mu.$$

Тогда поле X_ν имеет вид

$$X_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu > p} c_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad c_{\nu\mu} \in C^r(U);$$

кроме того, $\{X_\nu\}$ — базис $\mathfrak{D}$ в U. Так как система $\mathfrak{D}$ инволютивна, то

$$[X_\nu, X_\mu] = \sum_{m=1}^{p} \lambda_m X_m, \quad \lambda_m \in C^r(U).$$

Так как

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right] = 0,$$

то сразу видно, что в разложении

$$[X_\nu, X_\mu] = \sum_{m=1}^{n} \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

$\xi_m = 0$, когда $1 \leqslant m \leqslant p$. Очевидно, $\lambda_m = \xi_m$ при $m \leqslant p$ и поэтому все λ_m — нули. Таким образом $[X_\nu, X_\mu] = 0$. ▶

2.11.8. Теорема. *Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля на V класса C^r, $r \geqslant 2$, линейно независимые в каждой точке V и такие, что $[X_\nu, X_\mu] = 0$. Тогда для любой точки $a \in V$ найдется система координат*

(U, φ) класса C^r, $a \in U$, такая, что если $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ — соответствующие векторные поля на U, то $X_\nu = \partial/\partial x_\nu$, $\nu = 1, \ldots, p$.

◀ Пусть (U', φ') — система координат в точке a, такая, что векторы

$$X_1(a), \ldots, X_p(a), \left(\frac{\partial}{\partial x'_{p+1}}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x'_n}\right)_a$$

линейно независимы; здесь $\varphi'(x) = (x'_1, \ldots, x'_n)$ и $\partial/\partial x'_j$ — соответствующие векторные поля на U'. (Ясно, что такая система существует; максимум, что надо сделать для ее получения — это подвергнуть $\mathbb{R}^n$ линейному преобразованию.) Будем считать, что $\varphi'(a) = 0$. Пусть

$$g^{(\nu)}\colon I \times U' \to V$$

— локальные однопараметрические группы C^r-преобразований, индуцирующие X_ν на U' (здесь $I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \varepsilon\}$); эти группы определены однозначно, если U' достаточно мала (предложение 2.10.2 и замечание 2.10.3).

Пусть $t_1, \ldots, t_p, x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ — действительные числа, по модулю меньшие δ, где $\delta > 0$. Определим отображение

$$h\colon \Omega \to V, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$$

равенством

$$h(t_1, \ldots, t_p, x'_{p+1}, \ldots, x'_n) = \\ = g^{(1)}_{t_1} \circ \ldots \circ g^{(p)}_{t_p} \circ \varphi'^{-1}(0, \ldots, 0, x'_{p+1}, \ldots, x'_n).$$

Это определение корректно, если δ достаточно мало. По определению, для $f \in C_{a,k}$ мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(f \circ h)(0) = X_1(a)(f)$$

(ибо $g^{(1)}$ индуцирует X_1). Так как по условию $[X_\nu, X_\mu] = 0$, то, согласно предложению 2.10.10, отображения $g^{(\nu)}_{t_\nu}$ «коммутируют» и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu}(f \circ h)(0) = X_\nu(a)(f), \quad \nu = 1, \ldots, p,$$

т. е.

$$h_{*,a}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)_0\right) = X_\nu(a).$$

Более того, в очевидных обозначениях

$$h_{*,0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x'_j}\right)_0\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x'_j}\right)_a, \text{ когда } p < j \leqslant n,$$

Это показывает, в частности, что отображение $h_{*,0}$ имеет ранг n. Значит, по теореме об обратной функции 2.2.10, отображение h является C^r-изоморфизмом Ω на открытое множество $U \subset V$, если δ достаточно мало. Снова по определению,

$$h_{*,u}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_u\right) = X_1(h(u)),$$

и, ввиду коммутирования $g_{t_\nu}^{(\nu)}$, мы получаем, что

$$h_{*,u}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)_u\right) = X_\nu(h(u)), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p.$$

Система координат (U, h^{-1}) класса C^r обладает требуемыми свойствами. ▶

2.11.9. Теорема Фробениуса (первая форма). *Дифференциальная система $\mathfrak{D}$ класса C^r на V, где $r \geqslant 2$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда она инволютивна.*

◀ Инволютивная система вполне интегрируема по предложению 2.11.7 и теореме 2.11.8. Обратно, если система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема и (U, φ) — система координат класса C^r, такая, что $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, а множества

$$U_c = \{x \in U: \quad x_j = c_j, \ p < j \leqslant n\}$$

— интегралы системы $\mathfrak{D}$, то векторы $(\partial/\partial x_\nu)_a$, $1 \leqslant \nu \leqslant p$, $a \in U_c$, порождают касательное пространство $T_a(U_c)$, а следовательно, и $\mathfrak{D}(a)$ для всех $a \in U$; отсюда, очевидно, следует, что $\mathfrak{D}$ инволютивна (только здесь система $\mathfrak{D}$ имеет базис класса C^{r-1}). ▶

2.11.10. Замечание. Мы существенно использовали тот факт, что рассматриваемые векторные поля принадлежали C^r, где $r \geqslant 2$ (в доказательстве предложения 2.10.9). Однако инволютивные C^1-системы тоже C^1-вполне интегрируемы. Это можно доказать, используя методы, аналогичные изложенным выше. При этом понадобятся теоремы из § 1.8 и тот факт, что для системы уравнений $dx/dt = f(x, t)$ решение x имеет на единицу больше производных по t, чем по всем остальным переменным.

Рассмотрим теперь другой способ определения дифференциальных систем. Пусть $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ — линейно независимые в каждой точке 1-формы на V. Определим дифференциальную систему $\mathfrak{D}$, полагая

$$\mathfrak{D}(a) = \{X \in T_a(V): \ \omega_\nu(a)(X) = 0, \quad p < \nu \leqslant n\}.$$

Если все ω_i — дифференцируемые класса C^r, то $\mathfrak{D}$ — тоже класса C^r. В самом деле, мы можем предполагать, что в подходящих координатах формы ω_ν имеют вид

$$\omega_\nu = dx_\nu + \sum_{\mu \leqslant p} a_{\nu\mu} dx_\mu, \quad \nu > p, \quad a_{\nu\mu} \in C^r(U).$$

Тогда $\mathfrak{D}$ — дифференциальная система, натянутая на векторные поля

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \sum_{\nu > p} a_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant p,$$

так как, очевидно, $\omega_\nu(X_\mu) = 0$ и X_μ линейно независимы. Более того, локально всякая дифференциальная система получается таким способом.

2.11.11. Теорема Фробениуса (вторая форма). *Пусть* $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ — *линейно независимые в каждой точке* 1-*формы класса* C^r *и* $\mathfrak{D}$ — *определяемая ими дифференциальная система. Тогда* $\mathfrak{D}$ *вполне интегрируема в том и только в том случае, когда выполняется следующее условие*:

У каждой точки $a \in V$ *существует окрестность* U *и в ней* 1-*формы* $\alpha_{\mu\nu}$, *такие, что*

$$d\omega_\nu = \sum_{\mu=p+1}^{n} \omega_\mu \wedge \alpha_{\mu\nu}; \tag{2.11.12}$$

т. е. $d\omega_\nu$ *принадлежат идеалу, порожденному формами* ω_μ.

◀ Заметим, что условие (2.11.12) инвариантно относительно замены базиса. Другими словами, если $\{\omega'_\nu\}$ — другое множество из $n-p$ 1-форм, порождающее ту же систему $\mathfrak{D}$, то найдутся C^r-функции $a_{\mu\nu}$, такие, что

$$\omega'_\nu = \sum_\mu a_{\mu\nu}\omega_\nu.$$

Отсюда следует, что если (2.11.12) имеет место, то $d\omega'_\nu$ принадлежат идеалу, порожденному ω'_μ.

Если система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема и (U, φ) — система координат, указанная в определении 2.11.3, то касательное пространство $T_a(U_c)$, $a \in U_c$, является пространством, ортогональным к $(dx_{p+1})_a, \ldots, (dx_n)_a$. Следовательно, $\mathfrak{D}|U$ определяется 1-формами $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$. Эти формы замкнуты, и поэтому условие (2.11.12) для них выполняется тривиально.

Обратно, предположим, что имеет место (2.11.12). Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля в окрестности a, порождающие $\mathfrak{D}$. Тогда по предложению 2.6.6 мы имеем

$$(d\omega_\nu)(X_\varkappa, X_\mu) = X_\varkappa \omega_\nu(X_\mu) - X_\mu \omega_\nu(X_\varkappa) - \omega_\nu([X_\varkappa, X_\mu]).$$

Далее, по условию,

$$\omega_\nu(X_\mu) = \omega_\nu(X_\varkappa) = 0,$$

а ввиду (2.11.12)

$$(d\omega_\nu)(X_\varkappa, X_\mu) = 0.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\omega_\nu([X_\varkappa, X_\mu])=0, \quad \nu=p+1, \ldots, n,$$

и поэтому $[X_\varkappa, X_\mu](b)\in\mathfrak{D}(b)$ для всех $b\in U$. Следовательно, система $\mathfrak{D}$ инволютивна и, значит, по теореме 2.11.9, вполне интегрируема. ▶

Следующая теорема утверждает существование максимальных интегралов у вполне интегрируемых дифференциальных систем.

2.11.13. Теорема. *Пусть $\mathfrak{D}$ — вполне интегрируемая C^r-дифференциальная система ранга p на V. Тогда для любой точки $a\in V$ найдется связное интегральное C^r-подмногообразие $(W, i)\subset V$ размерности p, такое, что $a\in i(W)$ и для любого связного интегрального C^r-подмногообразия j: $W'\to V$, такого, что $a\in j(W')$, существует C^r-отображение η: $W'\to W$, превращающее W' в C^r-подмногообразие W, для которого $j=i\circ\eta$.*

◀ Пусть I — замкнутый единичный интервал в $\mathbb{R}$. Набор C^r-отображений γ_ν: $I\to V$, $0\leqslant\nu\leqslant N$, таких, что $\gamma_0(0)=a$, $\gamma_N(1)=x$, $\gamma_{\nu+1}(0)=\gamma_\nu(1)$, $0\leqslant\nu<N$, называется интегральной цепочкой, соединяющей a с x, если каждое γ_ν является интегралом системы $\mathfrak{D}$ (определение 2.11.2). Пусть W — множество точек $x\in V$, для которых существует интегральная цепочка, соединяющая a с x. Пусть $x_0\in W$ и (U, φ) — система координат, такая, что $x_0\in U$ и множества

$$U_c=\{x\in U:\ x_j=c_j, \quad p<j\leqslant n\},$$

где $x_1, \ldots, x_n=\varphi(x)$ являются интегралами $\mathfrak{D}$; мы будем еще предполагать, что $\varphi(U)$ — куб, так что U_c связно, и что $\varphi(x_0)=0$. Тогда, очевидно, $U_0\subset W$. Снабдим W топологией, потребовав, чтобы полученные так множества U_0 образовывали фундаментальную систему окрестностей точки x_0 в W. Очевидно, что W — хаусдорфово пространство и что вложение i: $W\to V$ непрерывно. Если опять U, φ, U_0 — те же, что и выше, а π_i — проекция $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^p$, $\pi_1(x_1, \ldots, x_n)=(x_1, \ldots, x_p)$, то отображение $\varphi_0=\pi_1\circ\varphi|U_0$ является гомеоморфизмом U_0 на открытое множество в $\mathbb{R}^p$. Пары (U_0, φ_0) определяют на W структуру C^r-многообразия, а вложение i: $W\to V$ превращает W в подмногообразие V. Очевидно, что i: $W\to V$ — *интегральное* подмногообразие $\mathfrak{D}$.

Пусть теперь j: $W'\to V$ — произвольное связное интегральное C^r-подмногообразие и точка $a'\in W'$ такова, что $j(a')=a$. Пусть $w'\in W'$ и $\gamma'_0, \ldots, \gamma'_N$ — цепочка C^r-отображений γ'_ν: $I\to W'$, таких, что $\gamma'_0(0)=a$; $\gamma'_N(1)=w'$, $\gamma_{\nu+1}(0)=\gamma'_\nu(1)$, $0\leqslant\nu<N$. Пусть $\gamma_\nu=j\circ\gamma'_\nu$. Тогда γ_ν образуют интегральную цепочку, соединяющую a с $j(w')$, и поэтому $j(w')\in W$. Положим $\eta(w')=i_0^{-1}j(w')$. Этим определяется отображение η: $W'\to W$. Очевидно, $i\circ\eta=j$. Из

предложения 2.11.4 сразу следует, что отображение η непрерывно. Значит, по предложению 2.5.12, η принадлежит классу C^r. Так как для $w' \in W'$ мы имеем

$$j_{*,\, w'} = i_{*,\, \eta(w')} \circ \eta_{*,\, w'}$$

и отображение $j_{*,\, w'}$ инъективно, то $\eta_{*,\, w'}$ тоже инъективно, и, значит, отображение η превращает W' в C^r-подмногообразие W. ▶

А сейчас мы рассмотрим третью форму теоремы Фробениуса, в которой она выступает как прямое обобщение теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений (§ 1.8).

2.11.14. Теорема Фробениуса (третья форма). *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, Ω' — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Точки $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а точки $\mathbb{R}^m$ — символом $t = (t_1, \ldots, t_m)$. Пусть f_ν: $\Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$ — отображения класса C^k, $k \geqslant 2$, $\nu = 1, \ldots, m$. Тогда чтобы для каждых $t_0 \in \Omega'$ и $x_0 \in \Omega$ существовали окрестность $U \ni t_0$ и единственное C^k отображение x: $U \to \Omega$, такое, что*

$$(2.11.15) \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \frac{\partial x(t)}{\partial t_\nu} = f_\nu(x(t), t), \qquad t \in U, \qquad \nu = 1, \ldots, m,$$

необходимо и достаточно, чтобы

(2.11.16)

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t_\mu}(x, t) + (d_1 f_\nu)(x, t) f_\mu(x, t) = \frac{\partial f_\mu}{\partial t_\nu}(x, t) + (d_1 f_\mu)(x, t) f_\nu(x, t),$$

при $(x, t) \in \Omega \times \Omega'$, $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$. [Здесь $(d_1 f_\nu)(a, b)$ — линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в себя, определяемое равенством $(d_1 f_\nu)(a, b) = (dg)(a)$, где g: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение $x \mapsto f_\nu(x, b)$; см. определение 1.3.4.]

◀ Единственность решения, если оно существует, следует из соответствующего утверждения о единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема 1.8.4).

Если (2.11.15) всегда имеет решение, то имеет место и (2.11.16), так как тогда обе части этих уравнений в точке (x_0, t_0) равны

$$\left.\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t_\mu \partial t_\nu}\right|_{t=t_0}.$$

Для доказательства обратного утверждения мы поступим следующим образом. Систему (2.11.15) можно записать в виде

$$(2.11.17) \qquad \frac{\partial x_\varkappa}{\partial t_\nu} = f_{\nu\varkappa}(x, t), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad f_\nu = (f_{\nu 1}, \ldots, f_{\nu n}),$$

$$\varkappa = 1, \ldots, n, \qquad \nu = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим дифференциальные формы

$$dx_\varkappa - \sum_{\nu=1}^{m} f_{\nu\varkappa}(x, t)\, dt_\nu, \quad \varkappa = 1, \ldots, n, \tag{2.11.18}$$

на $\Omega \times \Omega'$ и обозначим через $\mathfrak{D}$ дифференциальную систему ранга m, определяемую этими формами. Очевидно, что если $\mathfrak{D}$ имеет интегральное многообразие вида

$$x - \xi(t) = 0, \qquad \xi(t_0) = x_0,$$

где ξ есть C^k-отображение окрестности t_0 в Ω, $x = \xi$ является решением системы (2.11.15).

Если $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема, то в $\Omega \times \Omega'$ найдется C^r подмногообразие размерности m в окрестности (x_0, t_0), скажем W, которое является интегралом системы $\mathfrak{D}$. Затем мы можем найти C^r-функции $u_1, \ldots, u_n$ в окрестности (x_0, t_0), такие, что вблизи (x_0, t_0)

$$W = \{(x, t)\colon u_1(x, t) = \ldots = u_n(x, t) = 0\},$$

причем $du_\mu(x_0, t_0)$, $\mu = 1, \ldots, n$, линейно независимы. Тогда формы $du_\mu(x_0, t_0)$, $\mu = 1, \ldots, n$, порождают, очевидно, то же пространство $T^*_{(x_0, t_0)}(\Omega \times \Omega')$, что и формы (2.11.18). Отсюда следует, что ковекторы $(d_1 u_\mu)(x_0, t_0)$, $\mu = 1, \ldots, n$, линейно независимы. После этого из теоремы 1.3.5 о неявной функции и из следствия 1.3.9 получается, что в окрестности (x_0, t_0) многообразие W определяется уравнениями вида $x - \xi(t) = 0$; как уже отмечалось, отсюда следует разрешимость системы уравнений (2.11.15), если система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема.

Далее, мы знаем, что $\mathfrak{D}$ порождается векторными полями

$$X_\nu = \frac{\partial}{\partial t_\nu} + \sum_{\varkappa=1}^{n} f_{\nu\varkappa}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}, \quad \nu = 1, \ldots, m$$

(см. рассуждения перед теоремой 2.11.11). Поэтому, как и в доказательстве предложения 2.11.7, система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема в том и только в том случае, когда

$$[X_\nu, X_\mu] = 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, m.$$

Но это и есть в точности условия (2.11.16). ▶

2.11.19. Замечание. Теорема справедлива также и в случае, когда f_ν являются C^1-отображениями. Это можно доказать, используя замечание 2.11.10.

Если в изложенной выше теореме мы возьмем $n = 1$, а в качестве f_ν — функции, не зависящие от x, то получим следующее утверждение:

Для существования C^k-функции $x(t_1, \ldots, t_m)$ в окрестности $t = t_0$, удовлетворяющей системе уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t_\nu} = f_\nu(t), \qquad \nu = 1, \ldots, m,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\partial f_\nu/\partial t_\mu = \partial f_\mu/\partial t_\nu$. Это можно также сформулировать следующим образом: *пусть*

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{m} f_\nu(t)\, dt_\nu;$$

тогда условие $d\omega = 0$ является необходимым и достаточным для существования в окрестности каждой точки Ω' функции f, такой, что $df = \omega$.

Это частный случай леммы Пуанкаре, которая будет доказана в § 2.13.

Другую трактовку теоремы Фробениуса в форме теоремы 2.11.9 можно найти у Шевалле [1].

2.11.20. Замечание. Все результаты этого параграфа имеют аналоги для голоморфных векторных полей и т. п. на комплексных многообразиях. Так, голоморфные дифференциальные системы $\mathfrak{D}$ определяются условием локальной порождаемости голоморфными векторными полями. Вполне интегрируемые системы определяются, как и в 2.11.3, с помощью комплексных координат. Теоремы 2.11.8, 9, 11, 13, 14 все имеют аналоги для голоморфных систем. Естественно, в (2.11.12) требуется, чтобы $\alpha_{\mu\nu}$ были *голоморфными* 1-формами.

§ 2.12. Почти комплексные многообразия

Мы уже видели (замечание 2.4.6), что касательное пространство $T_a(V)$ комплексного многообразия V в точке $a \in V$ обладает естественной структурой комплексного векторного пространства. Иногда полезно рассматривать *только* эту структуру $T_a(V)$ вместо комплексной структуры самого V. Это приводит к более общему классу многообразий.

Пусть дано C^∞-многообразие V четной размерности $n = 2m$. Предположим, что для каждой точки $a \in V$ на $T_a(V)$ задана структура $\mathbb{C}$-векторного пространства (размерности m). Мы будем говорить, что эта структура зависит от a дифференцируемым образом, если выполняется следующее условие: у любой точки $a \in V$ имеется окрестность U и в ней m комплекснозначных C^∞-дифференциальных 1-форм (замечание 2.1.12) $\omega_1, \ldots, \omega_m$, таких, что отображение

$$T_x(V) \to \mathbb{C}^m, \quad x \in U,$$

задаваемое условием

$$X \mapsto (\omega_1(x)(X), \ldots, \omega_m(x)(X)),$$

является $\mathbb{C}$-изоморфизмом (относительно заданной комплексной структуры на $T_x(V)$).

2.12.1. Определение. *Почти комплексной структурой* на V называется комплексная структура на каждом $T_a(V)$, дифференцируемым образом зависящая от a.

Формы $\omega_1, \ldots, \omega_m$, существование которых требуется, называются *структурными формами*. Вообще говоря, эти формы *не замкнуты*.

Обозначим через J_a, $a \in V$, линейное над полем $\mathbb{R}$ отображение пространства $T_a(V)$ в себя, задаваемое условием $X \mapsto \sqrt{-1}\, X$ (умножение относительно заданной на $T_a(V)$ структуры $\mathbb{C}$-векторного пространства); для векторного поля X определим векторное поле JX, полагая

$$(JX)(a) = J_a X(a).$$

Почти комплексное многообразие мы будем обозначать также символом (V, J), так как отображение J_a пространства $T_a(V)$ однозначно определяет на нем структуру $\mathbb{C}$-векторного пространства. Очевидно, что $-J_a^2$ совпадает на $T_a(V)$ с тождественным отображением.

Теперь можно применить замечания 2.4.10 к пространству $E = T_a(V)$. У нас есть пространства $\mathscr{E}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{C})$, $\mathscr{E}^*_{p,q}, \ldots$. В частности,

$$\mathscr{E}^*_{1,0} = \{\omega \in \mathscr{E}^*\colon\ \omega(JX) = i\omega(X) \text{ для всех } X \in T_a(V)\}.$$

Если $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — множество структурных форм, то $\omega_1(a), \ldots, \omega_m(a)$ принадлежат $\mathscr{E}^*_{1,0}$ и образуют $\mathbb{C}$-базис этого пространства. Следовательно, базис в $\mathscr{E}^*_{p,q}$ задается ковекторами

$$\omega_{j_1}(a) \wedge \ldots \wedge \omega_{j_p}(a) \wedge \bar{\omega}_{k_1}(a) \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}_{k_q}(a),$$
$$1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant m, \quad 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_q \leqslant m,$$

и поэтому мы можем, как и в случае комплексных многообразий, говорить о дифференциальных формах типа (p, q) (определение 2.4.11). Если на комплексном многообразии форма ω имеет тип (p, q), то $d\omega$ является суммой двух форм типа $(p+1, q)$, $(p, q+1)$ соответственно. Однако для почти комплексных многообразий в общем случае это неверно. Если $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — множество структурных форм, то дифференциалы $d\omega_\nu$ являются 2-формами и, значит,

$$d\omega_\nu = \eta_\nu + \eta'_\nu + \eta''_\nu, \tag{2.12.2}$$

где η_ν имеет тип (2, 0), η'_ν — тип (1, 1) и η''_ν — тип (0, 2). Мы сразу получаем

2.12.3. Следствие. *Если ω — форма типа (p, q), то $d\omega$ является суммой четырех форм типов соответственно $(p-1, q+2)$, $(p, q+1)$, $(p+1, q)$, $(p+2, q-1)$. Кроме того, компоненты типа $(p-1, q+2)$ и $(p+2, q-1)$ равны нулю в том и только в том случае, когда все формы η''_ν типа (0, 2) в разложении (2.12.2) равны нулю.*

2.12.4. Определение. Почти комплексная структура на многообразии V называется *интегрируемой*, если для любого множества $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ структурных форм их дифференциалы $d\omega_\nu$ не содержат компонент типа (0, 2).

Пусть теперь η — некоторая 2-форма и X, Y — векторные поля. Пусть

$$S_\eta(X, Y) = \eta(X, Y) + i\eta(JX, Y) + i\eta(X, JX) - \eta(JX, JY).$$

Легко проверяется следующее утверждение:

2.12.5. Следствие. *Если η — форма типа (2, 0) или (1, 1), то*

$$S_\eta(X, Y) = 0 \text{ для всех } X, Y,$$

тогда как для формы η типа (0, 2) мы имеем

$$S_\eta(X, Y) = 2\eta(X, Y).$$

Используя формулу из предложения 2.6.6 для 1-формы ω:

$$(d\omega)(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]),$$

и тот факт, что

$$\omega_\nu(JX) = i\omega_\nu(X)$$

для любой структурной формы ω_ν, мы легко получаем такой результат:

2.12.6. Следствие. *Почти комплексная структура на V интегрируема в том и только в том случае, когда для любых двух векторных полей X, Y на V выполняется равенство*

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0.$$

2.12.7. Замечание. Мы уже видели, что любой комплексно-аналитической структуре на V соответствует некоторая почти комплексная структура (замечание 2.4.6), которая интегрируема (2.6.10). В этом случае локально существует множество *замкнутых* структурных форм. Пусть J — соответствующее структуре отображение векторных полей. Росток C^∞-функций в точке $a \in V$ голоморфен в том и только в том случае, когда $(df)_x \in \mathscr{E}^*_{1,0}(x)$ для любого x из окрестности a, так как это просто означает, что $\bar\partial f = 0$ вблизи a.

Поэтому функция f голоморфна в том и только в том случае, когда

$$(df)_x(J_xX) = i(df)_x(X), \quad X \in T_x(V),$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$(J_xX)(f) = iX(f), \quad X \in T_x(V). \tag{2.12.8}$$

Пусть теперь V, V' — комплексные многообразия и (V, J), (V', J') — соответствующие почти комплексные структуры. Предположим, что C^∞-отображение $f\colon V \to V'$ удовлетворяет условию

$$f_{*,a} \circ J_a = J'_{f(a)} \circ f_{*,a} \text{ для всех } a \in V.$$

Тогда отображение f голоморфно. В самом деле, как мы только что показали, если g — росток голоморфной функции в точке $f(a)$, то росток $g \circ f$ голоморфен в точке a. Но если $X \in T_a(V)$, то ввиду голоморфности g

$$(J_aX)(g \circ f) = f_{*,a}(J_aX)(g) = (J'_{f(a)}f_{*,a}(X))(g) =$$
$$= if_{*,a}(X)(g) = iX(g \circ f).$$

В частности, мы получаем

2.12.9. Предложение. *Комплексная структура однозначно определяется почти комплексной структурой.*

Важная теорема Ньюлендера и Ниренберга [1] утверждает, что *всякая интегрируемая почти комплексная структура индуцируется некоторой комплексной структурой.* Позднейшие доказательства принадлежат Кону [1] и Хёрмандеру [2]. Мальгранж недавно получил очень простое доказательство этого результата, применимое в гораздо более общих ситуациях. Мы не будем доказывать этот результат. Мы только покажем, что если данные $\mathbb{R}$-*аналитичны*, то результат можно вывести из теоремы Фробениуса 2.11.11 для голоморфных форм (см. замечание 2.11.20).

2.12.10. Теорема. *Пусть дано $\mathbb{R}$-аналитическое многообразие V размерности $n = 2m$. Предположим, что V обладает интегрируемой почти комплексной структурой, которая в окрестности каждой точки имеет множество $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ $\mathbb{R}$-аналитических структурных форм. Тогда на V существует структура комплексного многообразия, согласованная как с $\mathbb{R}$-аналитической, так и с почти комплексной структурами многообразия V.*

◀ Так как теорема локальная, мы можем считать, что V — открытая окрестность точки 0 в $\mathbb{R}^n$, $n = 2m$. Напишем

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_\mu,$$

где $a_{\nu\mu}$ — комплекснозначные $\mathbb{R}$-аналитические функции на V. По лемме 1.1.5. существует открытое множество U в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$ и голоморфные в U функции, которые мы снова обозначим $a_{\nu\mu}$, продолжающие $a_{\nu\mu}$ из V. Более того, если мы предположим, что U — поликруг (это возможно ввиду локальности рассматриваемого вопроса), то в U существуют однозначно определенные голоморфные функции $b_{\nu\mu}$, такие, что

$$b_{\nu\mu}(x) = \overline{a_{\nu\mu}(x)}, \quad x \in V = U \cap \mathbb{R}^n,$$

в самом деле, надо взять

$$b_{\nu\mu}(z) = \overline{a_{\nu\mu}(\bar{z})}.$$

Положим

$$\eta_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} b_{\nu\mu}(z_1, \ldots, z_n)\, dz_\mu, \qquad \nu = 1, \ldots, m,$$

и продолжим ω_ν в U по формуле

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(z_1, \ldots, z_n)\, dz_\mu, \qquad \nu = 1, \ldots, m.$$

По условию, $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — множество структурных форм для почти комплексной структуры на V. Поэтому векторы

$$\omega_1(0), \ldots, \omega_m(0), \ \bar{\omega}_1(0) = \eta_1(0), \ldots, \bar{\omega}_m(0) = \eta_m(0)$$

образуют базис пространства $\mathscr{E}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_0(V), \mathbb{C})$. Значит, ω_ν, $\eta_\varkappa$, $1 \leqslant \nu, \varkappa \leqslant m$, $\mathbb{C}$-независимы в 0, и поэтому, если U достаточно мала, они $\mathbb{C}$-независимы и в U. Следовательно, дифференциалы

$$dz_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, n,$$

являются в U линейными комбинациями с голоморфными коэффициентами форм ω_ν, $\eta_\varkappa$ $(1 \leqslant \nu, \varkappa \leqslant m)$. Значит, голоморфные 2-формы $d\omega_\nu$ можно записать в виде

$$d\omega_\nu = \sum_{r<s} f^{(\nu)}_{r,s}\omega_r \wedge \omega_s + \sum_{r,s} g^{(\nu)}_{r,s}\omega_r \wedge \eta_s + \sum_{r<s} h^{(\nu)}_{r,s}\eta_r \wedge \eta_s,$$

где все коэффициенты голоморфны. По условию, наша почти комплексная структура интегрируема; следовательно, $d\omega_\nu | V$ не имеет компонент типа (0, 2), и поэтому

$$h^{(\nu)}_{r,s} | U \cap \mathbb{R}^n = 0.$$

Так как $h^{(\nu)}_{r,s}$ голоморфны, то они равны 0 и в U, откуда следует, что $d\omega_\nu$ *принадлежит идеалу, порожденному формами* $\{\omega_\mu\}$ *с коэффициентами — голоморфными* 1-*формами*. По теореме Фробениуса во второй форме (см. замечание 2.11.20), существуют голоморфные функции $F_1, \ldots, F_m$, такие, что $dF_1, \ldots, dF_m$ порождают

в окрестности $U' \ni 0$ ту же дифференциальную систему, что и $\omega_1, \ldots, \omega_m$, и для всех $z \in U'$ дифференциалы $dF_1, \ldots, dF_m$ порождают то же подпространство $T_z^*(\mathbb{C}^n)$, что и $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$. Значит, $(dF_1, \ldots, dF_m)$ являются структурными формами почти комплексной структуры на $U' \cap \mathbb{R}^n$. Кроме того, если $\xi_\nu = F_\nu | \mathbb{R}^n \cap U'$, то очевидно, что ковекторы $(d\xi_\nu)(0)$, $(d\bar{\xi}_\nu)(0)$ $\mathbb{R}$-независимы и образуют базис в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$. Значит, отображение ξ: $x \mapsto (\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x))$ имеет в 0 дифференциал, являющийся изоморфизмом $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{C}^m$, так что по теореме об обратной функции (см. замечание 1.3.11) ξ является C^∞-диффеоморфизмом некоторой окрестности W начала координат из $\mathbb{R}^n$ на открытое множество $W' \subset \mathbb{C}^m$. Ясно, что ξ переводит почти комплексную структуру на W в структуру, индуцированную на W' комплексной структурой пространства $\mathbb{C}^m$.

После этого теорема следует непосредственно из предложения 2.12.9. ▶

Сделаем одно заключительное замечание.

2.12.11. Замечание. Всякое почти комплексное многообразие V обладает естественной ориентацией; в частности, всякое комплексное многообразие ориентируемо.

◀ Выберем покрытие $\{U_j\}$ многообразия V так, чтобы в каждой U_j имелась система структурных форм $(\omega_1^{(j)}, \ldots, \omega_m^{(j)})$, $n = 2m$. Положим

$$\omega^{(j)} = \left(\frac{i}{2}\right)^m \omega_1^{(j)} \wedge \overline{\omega_1^{(j)}} \wedge \ldots \wedge \omega_m^{(j)} \wedge \overline{\omega_m^{(j)}}.$$

Это n-форма класса C^∞ без нулей на U_j. Заметим, что если $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $(\omega_1', \ldots, \omega_m')$ — два множества структурных форм на открытом подмножестве V, то существуют комплексные функции $a_{\mu\nu}$, $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$, такие, что

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} \omega_\mu'.$$

Пусть $D = \det(a_{\mu\nu})$. Тогда

$$\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m \wedge \bar{\omega}_m = |D|^2 \omega_1' \wedge \bar{\omega}_1' \wedge \ldots \wedge \omega_m' \wedge \bar{\omega}_m',$$

а $|D|^2 > 0$. Значит,

$$\omega^{(j)} = f_{jj'} \omega^{(j')} \text{ на } U_j \cap U_{j'},$$

где $f_{jj'} > 0$. Отсюда непосредственно следует наш результат. ▶

§ 2.13. Леммы Пуанкаре и Гротендика

Мы определили замкнутые и точные формы (определение 2.6.9) и группы де Рама $H^p(V)$ на C^∞-многообразии V. А теперь мы докажем лемму, принадлежащую Пуанкаре, которая оказывается чрезвычайно важной при изучении этих групп.

2.13.1. Лемма Пуанкаре. *Пусть D — выпуклое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и на D определена C^k-форма ω $(k \geqslant 1)$ степени $p \geqslant 1$, которая является замкнутой, т. е. $d\omega = 0$. Тогда существует C^k-форма ω' степени $p-1$ на D, такая, что $d\omega' = \omega$. Более того, для каждого целого числа $p \geqslant 1$ существует $\mathbb{R}$-линейное отображение A: $A^p(D, r) \to A^{p-1}(D, r)$, такое, что для любой формы $\omega \in A^p(D, r)$ мы имеем*

$$A(d\omega) + dA(\omega) = \omega.$$

Отображение A называется *оператором гомотопии*. Этот результат применим к любому многообразию, диффеоморфному D.

◀ Без ограничения общности можно считать, что начало координат 0 пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит D. Пусть $I = (0, 1)$ — открытый единичный интервал в $\mathbb{R}$ и h: $D \times I \to D$ — отображение $(x, t) \to tx$.

Пусть J пробегает все наборы из p целых чисел $j_1, \ldots, j_p$, такие, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n$, и пусть $dx_J = dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$, если $J = (j_1, \ldots, j_p)$. Всякую p-форму ω на D класса C^k единственным образом можно записать в виде

$$\omega = \sum_J a_J(x)\, dx_J, \quad a_J \in C^k(D).$$

Далее, $h^*(\omega) = \omega_1 + dt \wedge \omega_0$, где ω_1, ω_0 — формы степени p, $p-1$ соответственно, и ни та ни другая не содержат dt, т. е. представляются в виде

$$\omega_1 = \sum_J b_J(x, t)\, dx_J, \qquad J = (j_1, \ldots, j_p), \qquad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n,$$

$$\omega_0 = \sum_K c_K(x, t)\, dx_K, \quad K = (k_1, \ldots, k_{p-1}), \quad 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{p-1} \leqslant n.$$

Определим $(p-1)$-форму $A(\omega)$ класса C^k на D по формуле

$$A(\omega) = \int_0^1 \omega_0\, dt = \sum_K \left(\int_0^1 c_K(x, t)\, dt \right) dx_K.$$

Отображение A, очевидно, $\mathbb{R}$-линейно. Рассмотрим теперь $A(d\omega)$. Мы имеем

$$h^*(d\omega) = dh^*(\omega) = d\omega_1 - dt \wedge d\omega_0 = d'\omega_1 + dt \wedge \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - d'\omega_0 \right),$$

где для p-формы χ на $D \times I$, не содержащей dt, мы обозначаем через $d'\chi$ форму степени $p+1$ на D, не содержащую dt и такую, что

$$d\chi = d'\chi + dt \wedge \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum \frac{\partial a_J(x, t)}{\partial t} dx_J, \quad \chi = \sum a_J(x, t)\, dx_J.$$

Отсюда

$$A(d\omega) = \int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt - \int_0^1 (d'\omega_0)\, dt.$$

Непосредственно видно (по определению h), что

$$\int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt = \omega.$$

Это дает нам формулу

$$\omega = dA(\omega) + A(d\omega). \quad \blacktriangleright \tag{2.13.2}$$

В частности, если ω замкнута, то $A(d\omega) = 0$ и $\omega = d\omega'$, где $\omega' = A(\omega)$.

Как показал впервые Гротендик (не опубликовано), соответствующий результат имеет место и для оператора $\bar{\partial}$. Однако здесь надо рассматривать другой класс областей. Мы начнем со следующей леммы.

2.13.3. Лемма. *Пусть K, L, L' — компакты в $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^m$ соответственно. Точки множества $S = K \times L \times L'$ будем обозначать (z, w, t). Пусть g — функция класса C^∞ в окрестности S, голоморфная по w при фиксированных z, t. Тогда существует C^∞-функция f в окрестности S, голоморфная по w при фиксированных z, t и такая, что $\partial f/\partial \bar{z} = g$ в окрестности S.*

◀ Мы можем считать, что g при фиксированных w, t имеет компактный носитель в $\mathbb{C}$; для этого достаточно умножить g на C^∞-функцию с компактным носителем в подходящей окрестности K, равную 1 в меньшей окрестности K.

Пусть ζ — произвольная точка в $\mathbb{C}$, $\zeta = \xi + i\eta$, где ξ, η — действительные числа. Положим

$$f(z, w, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta, w, t)}{\zeta - z} d\xi \wedge d\eta.$$

Так как функция $1/\zeta$ интегрируема в окрестности 0 в $\mathbb{C}$, то это равно

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \zeta^{-1} g(z+\zeta, w, t)\, d\xi \wedge d\eta,$$

и поэтому f является функцией класса C^∞, голоморфной по w при фиксированных z, t. Более того,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z, w, t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \zeta^{-1}\frac{\partial g}{\partial \bar z}(z+\zeta, w, t)\, d\xi \wedge d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|\geqslant\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial \bar\zeta}(z+\zeta, w, t)\zeta^{-1}d\zeta\wedge d\zeta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|\geqslant\varepsilon} d\,(g(\zeta+z, w, t)\zeta^{-1}d\zeta),$$

а это по теореме Стокса 2.9.9 равно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} g(\zeta+z, w, t)\zeta^{-1}d\zeta = g(z).$$

Утверждение доказано. ▶

Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Любую C^∞ форму ω типа (p, q) в открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ можно единственным образом записать в виде

$$\omega = \sum_{J,K} a_{JK}\, dz_J\wedge d\bar z_K, \quad a_{JK}\in C^\infty(\Omega),$$

$$J=(j_1, \ldots, j_p), \quad K=(k_1, \ldots, k_q), \quad \begin{array}{l} 1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant n,\\ 1\leqslant k_1<\ldots<k_q\leqslant n.\end{array}$$

Мы назовем a_{JK} коэффициентами формы ω. Положим

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar z_\nu} = \sum_{J,K}\frac{\partial a_{JK}}{\partial\bar z_\nu}dz_J\wedge d\bar z_K$$

и аналогично определим $\partial\omega/\partial z_\nu$. Тогда мы имеем

$$\bar\partial\omega = \sum_{\nu=1}^{n} d\bar z_\nu\wedge\frac{\partial\omega}{\partial\bar z_\nu}.$$

2.13.4. Лемма Гротендика. *Пусть $K_1, \ldots, K_n$ — компакты в $\mathbb{C}$, $S=K_1\times\ldots\times K_n\subset\mathbb{C}^n$ и в окрестности S дана C^∞ форма ω типа (p, q), $q\geqslant 1$, такая, что $\bar\partial\omega=0$. Тогда существует форма ω' типа $(p, q-1)$ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar\partial\omega'=\omega$ в окрестности S.*

◀ Если ν — целое число, $\nu\geqslant 1$, то обозначим через

$$A_\nu^{p,q} = A_\nu^{p,q}(S)$$

пространство C^∞-форм ω типа (p, q), определенных в окрестности $U=U(\omega)$ компакта S и не содержащих $d\bar z_\nu, \ldots, d\bar z_n$, т. е. имеющих вид

$$\omega = \sum a_{JK}\, dz_J\wedge d\bar z_K, \quad a_{JK}\in C^\infty(U),$$

где $J=(j_1, \ldots, j_p)$, $K=(k_1, \ldots, k_q)$ и $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_q \leqslant \nu-1$. (Если $\nu > n$, то это пространство *всех* форм типа (p, q).) Очевидно, если $\omega \in A_1^{p,q}$, а $q \geqslant 1$, то $\omega \equiv 0$, так что утверждение леммы 2.13.4 в этом случае тривиально. Предположим по индукции, что этот результат доказан для всех форм из $A_\nu^{p,q}$, где $1 \leqslant \nu \leqslant n$, и возьмем $\omega \in A_{\nu+1}^{p,q}$. Мы можем написать

$$\omega = d\bar{z}_\nu \wedge \omega_1 + \omega_2,$$

где $\omega_2 \in A_\nu^{p,q}$, $\omega_1 \in A_\nu^{p,q-1}$. Если $\bar{\partial}\omega = 0$, то мы имеем

$$-d\bar{z}_\nu \wedge \bar{\partial}\omega_1 + \bar{\partial}\omega_2 = 0.$$

Так как ω_1 и ω_2 не содержат $d\bar{z}_\nu, \ldots, d\bar{z}_n$, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\bar{z}_j} = 0, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial\bar{z}_j} = 0$$

для $j \geqslant \nu+1$ и, таким образом, коэффициенты форм ω_1, ω_2 голоморфны по $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$. По лемме 2.13.3 в окрестности S существует форма χ' типа $(p, q-1)$, все коэффициенты которой голоморфны по $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$, такая, что $\partial\chi'/\partial\bar{z}_\nu = \omega_1$. Умножая χ' на подходящую C^∞-функцию с компактным носителем, равную 1 в окрестности S, мы видим, что существует C^∞-форма χ в $\mathbb{C}^n$, все коэффициенты которой голоморфны по $z_{\nu+1}, \ldots, z_n$ в окрестности S и для которой $\partial\chi/\partial\bar{z}_\nu = \omega_1$ в некоторой окрестности S. Отсюда следует, что

$$\omega - \bar{\partial}\chi \in A_\nu^{p,q}.$$

По предположению индукции, существует $(p, q-1)$-форма ψ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\omega - \bar{\partial}\chi = \bar{\partial}\psi$ в окрестности S. Это доказывает наш результат. ▶

2.13.5. Теорема. *Пусть $D_1, \ldots, D_n$ — открытые множества в $\mathbb{C}$, $D = D_1 \times \ldots \times D_n$ и на D дана C^∞-форма ω типа (p, q), такая, что $q \geqslant 1$ и $\bar{\partial}\omega = 0$. Тогда существует C^∞-форма ω' типа $(p, q-1)$ на D, такая, что $\bar{\partial}\omega' = \omega$.*

◀ Пусть $\{K_{\nu,m}\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, \ldots, n$, — последовательность компактных подмножеств D_ν, таких, что

$$K_{\nu,m} \subset \mathring{K}_{\nu,m+1}, \quad \bigcup_{m \geqslant 0} K_{\nu,m} = D_\nu,$$

и пусть $S_m = K_{1,m} \times \ldots \times K_{n,m}$. Рассмотрим два случая.

Случай I. $q \geqslant 2$. По лемме 2.13.4 для любого $m \geqslant 0$ существует форма ω_m типа $(p, q-1)$ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar{\partial}\omega_m = \omega$ в окрестности S_m. Тогда $\omega_{m+1} - \omega_m$ есть форма типа $(p, q-1)$, $q-1 \geqslant 1$,

причем $\bar\partial(\omega_{m+1}-\omega_m)=0$ в окрестности S_m. Опять применяя лемму 2.13.4, мы найдем форму χ_m типа $(p, q-2)$ в $\mathbb{C}^n$, такую, что $\bar\partial\chi_m=\omega_{m+1}-\omega_m$ на S_m. Определим C^∞-форму ω' типа $(p, q-1)$ на D, полагая

$$\omega'=\begin{cases}\omega_0 \text{ на } S_0,\\ \omega_m-\bar\partial\chi_{m-1}-\ldots-\bar\partial\chi_0 \text{ на } S_m, \quad m>0;\end{cases}$$

заметим, что

$$(\omega_{m+1}-\bar\partial\chi_m-\ldots-\bar\partial\chi_0)-(\omega_m-\bar\partial\chi_{m-1}-\ldots-\bar\partial\chi_0)=$$
$$=\omega_{m+1}-\omega_m-\bar\partial\chi_m=0 \text{ на } S_m,$$

и, значит, это определение корректно. Очевидно, $\bar\partial\omega'=\omega$ на D.

Случай II. $q=1$. Предположим теперь, что последовательность $\{K_{\nu,m}\}$ обладает тем свойством, что всякую функцию, голоморфную в окрестности $K_{\nu,m}$, можно аппроксимировать равномерно на $K_{\nu,m}$ функциями, голоморфными в D_ν. Такая последовательность компактов $\{K_{\nu,m}\}$ существует в любом открытом подмножестве $\mathbb{C}$ — это известная классическая теорема Рунге (это следует также из результатов § 3.10). Тогда из теоремы 1.7.7 вытекает, что всякую функцию, голоморфную в окрестности $S_m=K_{1,m}\times\ldots$ $\ldots\times K_{n,m}$, можно аппроксимировать равномерно на S_m функциями, голоморфными в D.

Если форма χ в D имеет разложение $\sum a_{JK}\,dz_J\wedge d\bar z_K$ и S — подмножество D, то мы будем писать

$$\|\chi\|_S=\sum_{J,K}\sup_{z\in S}|a_{JK}(z)|.$$

Пусть на D задана $(p, 1)$-форма ω, такая, что $\bar\partial\omega=0$. По лемме 2.13.4 существует форма ω_m типа $(p, 0)$ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar\partial\omega_m=\omega$ в окрестности S_m. Тогда $\bar\partial(\omega_{m+1}-\omega_m)=0$, и поэтому все коэффициенты формы $\omega_{m+1}-\omega_m$ голоморфны в окрестности S_m (см. замечание 2.6.15). Согласно сделанному выше замечанию о возможности аппроксимации, существует голоморфная $(p, 0)$-форма на D, скажем χ_m, такая, что

$$\|\omega_{m+1}-\omega_m-\chi_m\|_{S_m}<2^{-m}, \quad m=0, 1, 2, \ldots.$$

Положим

$$\omega'=\omega_0+\sum_{m=0}^{\infty}(\omega_{m+1}-\omega_m-\chi_m).$$

Тогда ω' — форма типа $(p, 0)$ на D, а на S_{m+1} мы имеем

$$\omega'=\omega_{m+1}-\chi_0-\ldots-\chi_m-\sum_{\mu>m}(\omega_{\mu+1}-\omega_\mu-\chi_\mu).$$

Последний ряд представляет форму типа $(p, 0)$, все коэффициенты которой голоморфны в окрестности S_m, и поэтому ввиду голо-

морфности $\chi_0, \ldots, \chi_m$ мы получаем, что $\bar\partial\omega' = \bar\partial\omega_{m+1} = \omega$ на S_m. Так как это верно для любого m, то теорема доказана. ▶

В приведенном здесь доказательстве леммы Гротендика мы следовали изложению Серра [1] первоначального доказательства Гротендика. Отметим, что аналогичную индукцию можно использовать при доказательстве леммы Пуанкаре для кубов. Это было сделано Картаном [1].

§ 2.14. Применения: теорема Хартогса о продолжении и теорема Ока — Вейля

В этом параграфе мы покажем, как можно применять леммы Пуанкаре и Гротендика в комплексном анализе.

2.14.1. Предложение. *Пусть Ω — выпуклое открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и φ — действительная функция класса C^2 в Ω. Для существования голоморфной функции f в Ω, такой, что $\operatorname{Re} f = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы $\partial^2\varphi/\partial z_\nu \partial \bar z_\mu = 0$ в Ω для всех μ и ν, $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n$.*

◀ Если $\varphi = \operatorname{Re} f = (f + \bar f)/2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0, \quad \frac{\partial \bar f}{\partial z_\nu} = \frac{\overline{\partial f}}{\partial \bar z_\nu} = 0,$$

и поэтому $\partial^2\varphi/\partial z_\nu \partial \bar z_\mu = 0$. Обратно, предположим, что последние уравнения удовлетворяются; это просто означает, что

$$\bar\partial\, \partial\varphi = 0.$$

Далее,
$$d\, \partial\varphi = (\bar\partial + \partial)\, \partial\varphi = \bar\partial\, \partial\varphi = 0$$

(так как $\partial^2 = 0$) и, значит, по лемме Пуанкаре 2.13.1 существует комплекснозначная C^1-функция g, такая, что $dg = \partial\varphi$. Далее, $\partial\varphi$ есть форма типа (1, 0); поэтому $\partial g = \partial\varphi$ и $\bar\partial g = 0$, так что функция g голоморфна. Затем,

$$d(g + \bar g) = \partial\varphi + \overline{\partial\varphi} = d\varphi$$

(так как φ действительная), и поэтому $g + \bar g - \varphi$ есть константа. Предложение доказано. ▶

Из него получается

2.14.2. Следствие. *Пусть φ — действительная C^2-функция на комплексном многообразии V. Тогда φ локально является действительной частью голоморфной функции в том и только в том случае, когда $\bar\partial\, \partial\varphi = 0$.*

2.14.3. Лемма. *Пусть*

$$P = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu| < R_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n\}$$

есть поликруг в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. *Пусть* U — *окрестность* ∂P *и функция* f *голоморфна в* U. *Тогда существуют голоморфная в* P *функция* F *и окрестность* $V \supset \partial P$, *такие, что* $F|V \cap P = f|V \cap P$.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$U_1 = \{(z_1, \ldots, z_n)\colon R_1 - \varepsilon < |z_1| < R_1,\ |z_\nu| < R_\nu,\ \nu \geqslant 2\},$$
$$U_2 = \{(z_1, \ldots, z_n)\colon |z_1| < R_1,\ R_2 - \varepsilon < |z_2| < R_2,\ |z_\nu| < R_\nu,\ \nu \geqslant 3\}.$$

Тогда, если ε достаточно мало, мы имеем $U_1 \cup U_2 \subset U$. Для всякой функции f, голоморфной в U_1, существуют голоморфные функции $a_p(z') = a_p(z_2, \ldots, z_n)$ в поликруге

$$\{(z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}\colon |z_\nu| < R_\nu,\ \nu = 2, \ldots, n\},$$

такие, что

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(z') z_1^p, \quad z = (z_1, z'),$$

причем ряд сходится равномерно на компактных подмножествах U_1. Возьмем произвольную точку $z' = (z_2, \ldots, z_n)$, для которой

$$R_2 - \varepsilon < |z_2| < R_2, \quad |z_\nu| < R_\nu, \quad \nu \geqslant 3.$$

Если f голоморфна в U, то $f(z_1, z')$ голоморфна при $|z_1| < R_1$. Значит, в разложении Лорана для $f(z_1, z')$ отсутствуют члены с отрицательными степенями z_1. Отсюда следует, что $a_p(z') = 0$ при $p < 0$, если z' удовлетворяет указанному выше условию. По теореме единственности имеем $a_p(z') \equiv 0$ при $p < 0$. Следовательно,

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z') z_1^p \quad \text{на} \quad U_1 \cup U_2.$$

Этот ряд сходится равномерно на компактных подмножествах P по лемме Абеля. Если

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z') z_1^p$$

на P, то $F = f$ в связной компоненте $U \cap P$, содержащей $U_1 \cup U_2$. Ясно, что эта компонента имеет вид $V \cap P$, где V — некоторая окрестность ∂P. ▶

2.14.4. Лемма. *Пусть в* $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, *дана* C^∞-*дифференциальная форма* ω *типа* (0, 1) *с компактным носителем. Если* $\bar\partial\omega = 0$, *то существует* C^∞-*функция* φ *с компактным носителем, такая, что* $\bar\partial\varphi = \omega$.

◀ Выберем $R > 0$ так, чтобы

$$\operatorname{supp}\omega \subset P = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon |z_\nu| < R\}.$$

По лемме Гротендика 2.13.4, существует C^∞-функция ψ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar\partial\psi=\omega$. Так как $\bar\partial\psi=\omega=0$ в некоторой окрестности U границы поликруга ∂P, то ψ голоморфна в окрестности ∂P. По лемме 2.14.3 существует голоморфная в P функция F, продолжающая $\psi|U\cap P$ (если U выбрано подходящим образом). Пусть

$$\varphi(z)=\begin{cases}\psi(z)-F(z), & \text{если } z\in P,\\ 0, & \text{если } z\notin P.\end{cases}$$

Тогда φ — функция класса C^∞ с компактным носителем, и $\bar\partial\varphi=\omega$. ▶

А теперь докажем следующую важную теорему, принадлежащую Хартогсу.

2.14.5. Теорема. *Пусть D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, со связным дополнением. Пусть U — окрестность ∂D и функция f голоморфна в U. Тогда существуют окрестность $V\supset\partial D$ и голоморфная в D функция F, такие, что $F|V\cap D=f|V\cap D$.*

◀ Пусть α — функция класса C^∞ с компактным носителем в U и $\alpha=1$ в окрестности ∂D. Пусть $f'=\alpha f$ в U, $f'=0$ в $D\setminus U$. Тогда $f'\in C^\infty(D)$. Пусть $\omega=\bar\partial f'$ в D и $\omega=0$ в $\mathbb{C}^n\setminus D$. Так как $f'=f$ в окрестности ∂D и f голоморфна, то $\omega=0$ в окрестности ∂D; в частности, ω — форма класса C^∞ с компактным носителем в $\mathbb{C}^n$ (D — ограниченное множество). По лемме 2.14.4 существует C^∞-функция φ с компактным носителем в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar\partial\varphi=\omega$. Очевидно, φ голоморфна на всяком открытом множестве, где $\omega=0$; в частности, φ голоморфна в окрестности $\mathbb{C}^n\setminus D$. Далее, $\varphi=0$ вне некоторого компакта $K\subset\mathbb{C}^n$. Так как по условию множество $\mathbb{C}^n\setminus D$ связно и D ограничено, то существует связная окрестность W множества $\mathbb{C}^n\setminus D$, которая пересекается с $\mathbb{C}^n\setminus K$. По теореме единственности $\varphi\equiv 0$ в W.

Пусть $F=f'-\varphi$ в D. Так как $\varphi=0$ в W и, в частности, $\varphi=0$ в окрестности $V\supset\partial D$, в которой $\alpha\equiv 1$, мы имеем $F=f$ на $V\cap D$. Далее, $\bar\partial F=\bar\partial f'-\bar\partial\varphi=\omega-\bar\partial\varphi=0$ в D, и поэтому F голоморфна в D. ▶

2.14.6. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^n$. Мы будем говорить, что Ω *$\bar\partial$-ациклично*, если для любой C^∞-формы ω типа (p, q) на Ω, для которой $p\geqslant 0$, $q\geqslant 1$ и $\bar\partial\omega=0$, существует C^∞-форма ω' типа $(p, q-1)$, такая, что $\bar\partial\omega'=\omega$.

2.14.7. Теорема (Ока). *Пусть $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$ и Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^n$, такое, что множество $\Omega\times D$ $\bar\partial$-ациклично. Тогда если функция f голоморфна в Ω, то множество*

$$\Omega_f=\{x\in\Omega: |f(x)|<1\}$$

тоже $\bar\partial$-ациклично. Кроме того, для любой C^∞-формы ω типа (p, q) на Ω_f, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $\bar\partial\omega = 0$, существует C^∞-форма ω' типа (p, q) на $\Omega \times D$, такая, что $\bar\partial\omega' = 0$ и $u^*(\omega') = \omega$, где u: $\Omega_f \to \Omega \times D$ — отображение $x \mapsto (x, f(x))$.

◀ Мы начнем с последнего утверждения. Пусть на Ω дана C^∞-форма ω типа (p, q), $p, q \geqslant 0$, такая, что $\bar\partial\omega = 0$. Очевидно, отображение u — голоморфное, собственное и инъективное, поэтому касательное отображение u_* инъективно в каждой точке. Значит, $V = u(\Omega_f)$ — замкнутое комплексное подмногообразие в $\Omega \times D$.

Пусть π: $\Omega \times D \to \Omega$ — проекция $(x, z) \mapsto x$, и пусть $U = \pi^{-1}(\Omega_f) = \Omega_f \times D$. Очевидно, U является окрестностью подмногообразия V в $\Omega \times D$.

Пусть U' — окрестность V в $\Omega \times D$, такая, что $\overline{U'} \subset U$. Пусть C^∞-функция α в $\Omega \times D$ такова, что

$$\alpha(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, z) \notin U', \\ 1, & \text{если } (x, z) \text{ лежит в некоторой окрестности } V. \end{cases}$$

Форма $\omega_0 = \pi^*(\omega)$ имеет тип (p, q) на U. Более того, $u^*(\omega_0) = (\pi \circ u)^*(\omega) = \omega$, так как $\pi \circ u$ — тождественное отображение Ω_f.

Определим форму ω_1 на $\Omega \times D$, полагая

$$\omega_1 = \begin{cases} \alpha\omega_0 & \text{в } U, \\ 0 & \text{вне } U. \end{cases}$$

Тогда ω_1 есть C^∞-форма типа (p, q) на $\Omega \times D$ и $u^*(\omega_1) = \omega$. Пусть

$$\omega_2(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, z) \in V, \\ (z - f(x))^{-1}(\bar\partial\omega_1)(x, z), & \text{если } (x, z) \in \Omega \times D - V. \end{cases}$$

Тогда ω_2 является C^∞-формой типа $(p, q+1)$ на $\Omega \times D$ и $\bar\partial\omega_2 = 0$ (ω_2 принадлежит классу C^∞, так как $\bar\partial\omega_1 = 0$ в окрестности V). Так как $\Omega \times D$ по условию — $\bar\partial$-ацикличное множество, то найдется форма ω_3 типа (p, q) на $\Omega \times D$, такая, что $\bar\partial\omega_3 = \omega_2$.

Пусть

$$\omega' = \omega_1 - (z - f(x))\,\omega_3;$$

тогда ω' является C^∞-формой типа (p, q) на $\Omega \times D$. Кроме того,

$$\bar\partial\omega' = \bar\partial\omega_1 - (z - f(x))\,\omega_2 = 0$$

и $u^*(\omega') = u^*(\omega_1)$ (так как $z - f(x) = 0$, если $(x, z) \in V$), и поэтому $u^*(\omega') = \omega$.

Утверждение о $\bar\partial$-ацикличности множества Ω_f сразу следует из доказанного выше и из того, что $\Omega \times D$ $\bar\partial$-ациклично. ▶

2.14.8. Следствие. *В обозначениях теоремы* 2.14.7, *если* $\Omega \times D^k$ *является* $\bar\partial$*-ацикличным множеством для любого* $k \geqslant 0$, *то таким же является и множество* $\Omega_f \times D^k$ *для всех* $k \geqslant 0$.

◀ Это следует из того, что

$$\Omega_f \times D^k = \Omega'_g,$$

где $\Omega' = \Omega \times D^k$ и $g(x, z) = f(x)$. ▶

2.14.9. Теорема (Ока). *Пусть* $f_1, \ldots, f_k$ — *голоморфные функции в* $\mathbb{C}^n$ *и*

$$U = \{x \in \mathbb{C}^n\colon |f_\nu(x)| < 1,\ \nu = 1, \ldots, k\}.$$

Пусть $u\colon U \to \mathbb{C}^n \times D^k$ — *голоморфное отображение*

$$x \mapsto (x, f_1(x), \ldots, f_k(x)).$$

Тогда для всякой голоморфной в U *функции* g *найдется голоморфная в* $\mathbb{C}^n \times D^k$ *функция* G, *такая, что* $G \circ u = g$.

◀ Пусть

$$\Omega_0 = \mathbb{C}^n,\ \Omega_p = \{x \in \Omega_{p-1}\colon |f_p(x)| < 1\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant k.$$

Обозначим через

$$u_p\colon \Omega_{k-p} \times D^p \to \Omega_{k-p-1} \times D^{p+1}$$

отображение

$$(x, z) \mapsto (x, z, f_{k-p}(x)).$$

По теореме 2.13.5 и следствию 2.14.8 множества $\Omega_r \times D^s$ $\bar\partial$-ацикличны для всех $s \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant k$. Более того, по теореме 2.14.7, для любой $\bar\partial$-замкнутой (p, q)-формы ω на $\Omega_{k-p} \times D^p$ найдется $\bar\partial$-замкнутая (p, q)-форма ω' на $\Omega_{k-p-1} \times D^{p+1}$, такая, что $u_p^*(\omega') = \omega$.

Далее, у нас $\Omega_k = U$ и

$$u\colon U \to \mathbb{C}^n \times D^k$$

есть отображение

$$u = u_{k-1} \circ \ldots \circ u_1 \circ u_0.$$

Отсюда следует, что для всякой формы ω типа (p, q) на U, для которой $\bar\partial\omega = 0$, найдется форма ω' типа (p, q) на $\Omega_0 \times D^k = \mathbb{C}^n \times D^k$, такая, что $\bar\partial\omega' = 0$ и $u^*(\omega') = \omega$; теорема 2.14.9 получается отсюда как частный случай, когда $p = q = 0$. ▶

2.14.10. Аппроксимационная теорема Ока — Вейля. *Если функции* $f_1, \ldots, f_k$ *голоморфны в* $\mathbb{C}^n$, *то множество*

$$U = \{x \in \mathbb{C}^n\colon |f_\nu(x)| < 1, \quad \nu = 1, \ldots, k\}$$

является областью Рунге (см. определение 1.7.1), *т. е. всякую голоморфную на U функцию можно аппроксимировать многочленами от $z_1, \ldots, z_n$ равномерно на компактных подмножествах U.*

◀ Пусть u: $U \to \mathbb{C}^n \times D^k = \Omega$ есть отображение $x \longmapsto (x, f_1(x), \ldots, f_k(x))$. Если функция g голоморфна в U, то по теореме 2.14.9 существует голоморфная в Ω функция G, такая, что $G \circ u = g$. Функцию G можно разложить в ряд Тейлора

$$G(x, z) = \sum a_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} z_1^{\beta_1} \ldots z_k^{\beta_k},$$

который сходится равномерно на компактных подмножествах Ω; в частности, G есть предел последовательности многочленов P_N, сходящейся равномерно на компактных подмножествах Ω. Следовательно, целые функции

$$g_N(x) = P_N(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_k(x))$$

равномерно стремятся к функции $G \circ u = g$ на компактных подмножествах U. Так как целые функции являются пределами многочленов, то отсюда следует наше утверждение. ▶

2.14.11. Предложение. *Всякое выпуклое открытое множество в $\mathbb{C}^n$ является областью Рунге.*

◀ Достаточно показать, что всякое ограниченное выпуклое открытое множество Ω в $\mathbb{C}^n$ есть область Рунге. Пусть K — компактное подмножество Ω. Если $x_1, \ldots, x_n$ — координатные функции в $\mathbb{C}^n$, то для любой граничной точки $a \in \partial\Omega$ найдется линейная функция

$$l_a(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu + c_0,$$

такая, что $l_a(a) = 0$ и $\operatorname{Re} l_a(x) < 0$ для всех $x \in \Omega$. Значит, для любой точки $a \in \partial\Omega$ существует линейная функция L в $\mathbb{C}^n$, такая, что

$$\operatorname{Re} L(x) < 0, \quad x \in K, \quad \operatorname{Re} L(a) > 0$$

(надо заменить l_a на $L = l_a + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало). Тогда $\operatorname{Re} L(x) > 0$ для всех x, близких к a. Так как $\partial\Omega$ — компакт, то существует конечное число линейных функций $L_1, \ldots, L_r$, таких, что

$$\max_\nu \operatorname{Re} L_\nu(x) \begin{cases} > 0, & \text{если } x \in \partial\Omega, \\ < 0, & \text{если } x \in K. \end{cases}$$

Следовательно, множество

$$U = \{x \in \Omega\colon \operatorname{Re} L_\nu(x) < 0, \quad \nu = 1, \ldots, r\}$$

содержит K и относительно компактно в U. Далее, множество $V = \{x \in \mathbb{C}^n\colon \operatorname{Re} L_\nu(x) < 0, \ \nu = 1, \ldots, r\}$ выпукло в $\mathbb{C}^n$, а значит,

связно, и $V \cap \Omega = U$ относительно компактно в Ω. Поэтому $V = U$. Таким образом,

$$U = \{x \in \mathbb{C}^n\colon |f_\nu(x)| < 1, \quad f_\nu = \exp(L_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, r\}.$$

По теореме 2.14.10, U есть область Рунге, и поэтому голоморфные в U функции равномерно на K аппроксимируются многочленами. Так как K — произвольный компакт из Ω и $U \subset \Omega$, то предложение доказано. ▶

Приведенное здесь доказательство теоремы Хартогса подсказано доказательством аппроксимационной теоремы Мальгранжа — Лакса (см. § 3.10, а также Мальгранж [1]). Что касается нашего доказательства теоремы Ока — Вейля, то оно по существу — перевод доказательства самого Ока [1] на язык дифференциальных форм. Эти теоремы приведены также в книге Хёрмандера [4].

§ 2.15. *Погружения и вложения: теоремы Уитни*

Мы будем рассматривать только C^k-многообразия V, V', ..., счетные в бесконечности.

2.15.1. Определение. Пусть даны C^k-многообразия V, V' и C^k-отображение $f\colon V \to V'$. Отображение f называется *регулярным* в точке $a \in V$, если касательное в этой точке отображение $f_{*,a}\colon T_a(V) \to T_{f(a)}(V')$ инъективно; f называется регулярным на множестве $S \subset V$, если оно регулярно в каждой точке S; f называется регулярным отображением, или *погружением*, если оно регулярно на V.

Отображение $f\colon V \to V'$ класса C^k называется вложением, если f — инъективное погружение. Если, кроме того, f — гомеоморфизм V на множество $f(V)$ с топологией, индуцируемой из V', то отображение f называется локально собственным вложением (см. предложение 2.5.8). Вложение (погружение) $f\colon V \to V'$ называется замкнутым, если f — собственное отображение (см. определение 2.5.7). Аналогичные определения можно дать для $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-аналитических многообразий и отображений.

Рассмотрим теперь случай, когда $V' = \mathbb{R}^q$. Пусть $C^k(V, q)$ — множество всех C^k-отображений V в $\mathbb{R}^q$. Введем в этом пространстве топологию. Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство систем координат,

$$\mathfrak{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{J}},$$

такое, что семейство $\{U_i\}$ образует локально конечное покрытие V. Мы будем предполагать, что $U_i \Subset V$. Пусть K_i — компактные подмножества U_i, такие, что $\bigcup K_i = V$. Рассмотрим семейство $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ положительных действительных чисел и семейство $\mathfrak{m} = \{m_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ положительных целых чисел $m_i \leqslant k$ с теми же множествами индексов, что и у семейства $\mathfrak{U}$. Для произвольной C^k-функ-

ции ψ на U_i и набора из n целых чисел $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_\nu \geqslant 0$, где $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leqslant k$, положим

$$D^\alpha \psi(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \psi(x),$$

где векторные поля $\partial/\partial x_\nu$, соответствующие системе координат (U_i, φ_i), определены естественным образом, как в § 2.4. Для $f_0 \in C^k(V, q)$ обозначим через

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathfrak{U}, \mathfrak{m}, \varepsilon, f_0)$$

множество

$$\mathscr{B}=\{f \in C^k(V, q): |D^\alpha(f-f_0)(x)|<\varepsilon_i \text{ для } x \in K_i, |\alpha| \leqslant m_i, i \in \mathscr{I}\}.$$

Определим топологию в $C^k(V, q)$, потребовав, чтобы множества $\mathscr{B}$, для которых $\mathfrak{U}$ фиксировано, а $\mathfrak{m}$ и ε пробегают все семейства с перечисленными выше свойствами, образовывали фундаментальную систему окрестностей f_0. Если

$$\mathfrak{V}=\{V_j, \varphi_j'\}_{j \in J}$$

— другое семейство систем координат, такое же, как выше и $\varepsilon'=\{\varepsilon_j'\}$, $\mathfrak{m}'=\{m_j'\}$ соответствуют $\mathfrak{V}$, то сразу видно, что для любого множества

$$\mathscr{B}(\mathfrak{V}, \mathfrak{m}', \varepsilon', f_0)=\mathscr{B}'$$

найдется множество $\mathscr{B}(\mathfrak{U}, \mathfrak{m}, \varepsilon, f_0)$, содержащееся в $\mathscr{B}'$, и обратно. Следовательно, введенная топология в $C^k(V, q)$ не зависит от выбора семейства $\mathfrak{U}$ (и системы компактов $K_i \subset U_i$).

Пространство $C^k(V, q)$ с этой топологией мы будем обозначать символом $\mathfrak{C}^k(V, q)$ либо просто $\mathfrak{C}^k$ или $\mathfrak{C}^k(V)$, когда не возникает недоразумений.

Заметим, что эта топология совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах вместе с производными порядка $\leqslant k$ (см. § 2.16) только в случае, когда V — компакт. Пространство $\mathfrak{C}^k(V, q)$, вообще говоря, не имеет счетной базы и не метризуемо.

Следующее предложение легко получается из определений.

2.15.2. Предложение. *Множество C^k-погружений $f: V \to \mathbb{R}^q$ открыто в $\mathfrak{C}^k(V, q)$ при $k \geqslant 1$.*

Фиксируем покрытие $\mathfrak{U}=\{(U_i, \varphi_i)\}$ с ранее перечисленными свойствами. Если L — произвольный компакт из V и $f \in C^k(V, q)$, то положим для $0 \leqslant r \leqslant k$

$$\|f\|_{r, L}=\sum_i \sum_{|\alpha| \leqslant r} \sup_{x \in L \cap K_i} |D^\alpha f(x)|.$$

2.15.3. Лемма. *Пусть K — компактное подмножество V и L — компактная окрестность K. Тогда для любого C^k-вложения $f\colon V \to \mathbb{R}^q$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $g \in C^k(V, q)$, для которых*

$$\|f - g\|_{1, L} < \delta,$$

отображение $g|K$ инъективно.

◀ Пусть (U, φ) — система координат на V, такая, что множество U относительно компактно, и пусть $C \subset U$ — компакт. Если $a, b \in U$, то положим

$$d(a, b) = \|\varphi(a) - \varphi(b)\|.$$

Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$|f(a) - f(b)| \geqslant \varepsilon d(a, b), \quad a, b \in C,$$

так как f — вложение. Если $g \in C^k(V, q)$ и $\|f - g\|_{1, \overline{U}}$ достаточно мала, то для $h = f - g$ мы имеем

$$|h(a) - h(b)| \leqslant \varepsilon d(a, b)/2 \text{ для всех } a, b \in C.$$

Отсюда следует, что $g|C$ — инъективное отображение; в самом деле, $|g(a) - g(b)| \geqslant \varepsilon d(a, b)/2$ для всех $a, b \in C$.

Так как K — компакт, мы можем выбрать конечное число систем координат $(V_1, \varphi_1), \ldots, (V_N, \varphi_N)$, таких, что $K \subset \bigcup V_\nu \subset L$. Если $\|f - g\|_{1, L}$ достаточно мала, то $g|V_\nu$ инъективно. Поэтому существует окрестность W диагонали Δ произведения $K \times K$, такая, что если $(a, b) \in W \setminus \Delta$, то $g(a) \neq g(b)$ для любой g, такой, что полунорма $\|f - g\|_{1, L}$ мала.

Далее, существует $\theta > 0$, такое, что $|f(a) - f(b)| \geqslant \theta$, если $(a, b) \in (K \times K) \setminus W$. Если $\|f - g\|_{0, K} < \theta/2$, то $|g(a) - g(b)| > \theta/2$ для всех $(a, b) \in (K \times K) \setminus W$. Отсюда сразу следует утверждение леммы. ▶

2.15.4. Предложение. *Множество замкнутых вложений V в $\mathbb{R}^q$ открыто в $\mathfrak{C}^k(V, q)$, если $k \geqslant 1$.*

◀ Пусть $\{K_m\}$ — последовательность компактных подмножеств V, таких, что

$$K_0 = \varnothing, \quad K_m \subset \mathring{K}_{m+1} \text{ и } \bigcup K_m = V.$$

Пусть L_m есть замыкание $K_{m+1} \setminus K_m$. Тогда

$$L_m \cap L_{m'} = \varnothing, \text{ если } m' \geqslant m + 2,$$

и семейство $\{L_m\}$ локально конечно. Если $f\colon V \to \mathbb{R}^q$ — замкнутое вложение, то множества $f(L_m) \subset \mathbb{R}^q$ обладают такими же свойствами. Поэтому существуют открытые множества U_m в $\mathbb{R}^q$, такие, что $f(L_m) \subset U_m$ и $U_m \cap U_{m'} = \varnothing$, если $m' \geqslant m + 2$. Мы можем выбрать $\delta_m > 0$ так, что если $g \in C^k(V, q)$ и

$$\|f - g\|_{1, L_m} < \delta_m$$

для всех $m > 0$, то $g(L_m) \subset U_m$ и $g \mid L_m \cup L_{m+1}$ — инъективное отображение (по лемме 2.15.3). Мы утверждаем, что все такие g инъективны. В самом деле, если $a, b \in V$, $a \neq b$, то пусть $a \in L_m$, $b \in L_{m'}$ (и, скажем, $m' \geqslant m$). Если $m' \geqslant m+2$, то $g(a) \in U_m$, $g(b) \in U_{m'}$ и $U_m \cap U_{m'} = \varnothing$, поэтому $g(a) \neq g(b)$. Если $m' = m+1$ или $m' = m$, то $g(a) \neq g(b)$, так как $g \mid L_m \cap L_{m+1}$ инъективно. Из определения топологии в $C^k(V, q)$ следует теперь существование окрестности $\mathscr{B} \ni f$, такой, что всякое отображение $g \in \mathscr{B}$ является вложением. Ясно, что если $f\colon V \to \mathbb{R}^q$ — собственное отображение и $|f(x) - g(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in V$, то g тоже собственное. Предложение 2.15.4 доказано. ▶

2.15.5. Замечание. Легко показать, как в приведенном выше доказательстве, что любое отображение g из подходящей окрестности локально собственного вложения тоже является вложением. Без предположения о том, что вложение локально собственное, это утверждение неверно. Даже на компактных множествах отображение, близкое к (нерегулярному) инъективному, не обязано быть инъективным.

2.15.6. Лемма. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ — отображение класса C^k, $k \geqslant 1$, $q \geqslant 2n$. Пусть r — произвольное целое число, $r \leqslant k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует C^k-отображение $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$, такое, что $\|g - f\|_r^\Omega < \varepsilon$ и векторы $\partial g/\partial x_1, \ldots, \partial g/\partial x_n$ линейно независимы в каждой точке Ω.*

◀ Согласно теореме 1.6.5, мы можем считать, что $k \geqslant 2$. Пусть $f_0 = f$. Достаточно показать, что если f' — отображение класса C^k, для которого $\partial f'/\partial x_1, \ldots, \partial f'/\partial x_s$ линейно независимы в каждой точке Ω, то существует $g \in C^k(\Omega)$, такое, что $\|g - f'\|_r^\Omega < \varepsilon$ и $\partial g/\partial x_1, \ldots, \partial g/\partial x_{s+1}$ независимы во всех точках Ω; здесь $0 \leqslant s < n$. Пусть

$$v_j(x) = \frac{\partial f'}{\partial x_j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

есть C^{k-1}-отображение Ω в $\mathbb{R}^q$. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R}^s \times \Omega \to \mathbb{R}^q,$$

определяемое равенством

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_s, x) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f'}{\partial x_j} - v_{s+1}(x).$$

Так как $\dim(\mathbb{R}^s \times \Omega) = s + n < 2n \leqslant q$ и $\varphi \in C^1$ (ибо $k \geqslant 2$), то по лемме 1.4.3 для любого $\delta > 0$ найдется $a \in \mathbb{R}^q$, $\|a\| < \delta$, такое, что $a \notin \varphi(\mathbb{R}^s \times \Omega)$. Если теперь $\partial f'/\partial x_1, \ldots, \partial f'/\partial x_s$ $\mathbb{R}$-независимы в Ω и $a \notin \varphi(\mathbb{R}^s \times \Omega)$, то, полагая

$$g(x) = f'(x) + a \cdot x_{s+1},$$

мы заключаем, что $\partial g/\partial x_1, \ldots, \partial g/\partial x_{s+1}$ $\mathbb{R}$-независимы во всех точках $x \in \Omega$. Если δ достаточно мало, мы получаем требуемый результат. ▶

Заметим, что отображение g в лемме 2.15.6 является погружением Ω.

2.15.7. Теорема Уитни о погружениях. *Для любого многообразия V класса C^k, $k \geqslant 1$, размерности n и любого $q \geqslant 2n$, множество C^k-погружений V в $\mathbb{R}^q$ является открытым плотным подмножеством в $\mathfrak{C}^k(V, q)$.*

◀ Пусть $\mathfrak{U} = \{(U_\nu, \varphi_\nu)\}$, $\nu = 0, 1, \ldots$ — последовательность систем координат, такая, что семейство $\{U_\nu\}$ локально конечно, $\varphi_\nu(U_\nu) = \Omega_\nu$ — ограниченные открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, U_ν относительно компактны в V и $V = \bigcup U_\nu$. Пусть компакты $K_\nu \subset U_\nu$ таковы, что $\bigcup K_\nu = V$, и пусть заданы $\varepsilon_\nu > 0$ и целые числа $n_\nu \geqslant 0$, $n_\nu \leqslant k$. Пусть $f \in C^k(V, q)$ и $f_0 = f$. Предположим, что мы уже построили отображения $f_0, \ldots, f_m$: $V \to \mathbb{R}^q$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i, m) $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \varepsilon_\nu$ для $x \in K_\nu$, $|\alpha| \leqslant n_\nu$;

(ii, m) f_m регулярно на $\bigcup_{\nu=0}^{m} K_\nu$;

(iii, m) $\operatorname{supp}(f_{p+1} - f_p) \subset U_{p+1}$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$.

Пусть C^k-функция α_m на V равна 1 в окрестности K_{m+1} и $\operatorname{supp} \alpha_m \subset U_{m+1}$. По лемме 2.15.6 для любого $\delta > 0$ и любого целого числа N, $0 \leqslant N \leqslant k$, существует C^k-отображение h_m: $U_{m+1} \to \mathbb{R}^q$, регулярное в U_{m+1} и такое, что

$$|D^\alpha(f_m - h_m)| < \delta \text{ на } U_{m+1}, \quad |\alpha| \leqslant N.$$

Рассмотрим отображение

$$f_{m+1} = \begin{cases} f_m + \alpha_m(h_m - f_m) & \text{на } U_{m+1}, \\ f_m & \text{на } V \setminus U_{m+1}. \end{cases}$$

Тогда $f_{m+1} \in C^k(V, q)$ и $f_{m+1} \to f_m$ в $\mathfrak{C}^k(V, q)$ при $\delta \to 0$, $N \to k$. Поэтому если δ достаточно мало и $N \geqslant 1$, то отображение f_{m+1} регулярно на $\bigcup_{\nu \leqslant m} K_\nu$. Далее, $f_{m+1} = h_m$ на K_{m+1} и потому регулярно и на K_{m+1}. Значит, если δ достаточно мало, а N достаточно велико, то отображения $(f_0, \ldots, f_{m+1})$ удовлетворяют условиям (i, $m+1$), (ii, $m+1$), (iii, $m+1$). Итак, мы по индукции построили отображения f_m: $V \to \mathbb{R}^q$, $m \geqslant 0$, удовлетворяющие (i, m), (ii, m), (iii, m) для всех $m \geqslant 0$. Полагая

$$g = \lim_{m \to \infty} f_m,$$

мы получаем регулярное отображение $g\colon V \to \mathbb{R}^q$, такое, что $|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| \leqslant \varepsilon_\nu$, $|\alpha| \leqslant n_\nu$, для $x \in K_\nu$. ▶

2.15.8. Теорема Уитни о вложениях. *Для любого C^k-многообразия ($k \geqslant 1$) V размерности n и любого $q \geqslant 2n+1$ множество вложений V в $\mathbb{R}^q$ всюду плотно в $\mathfrak{C}^k(V, q)$.*

◀ Пусть f — произвольное погружение V в $\mathbb{R}^q$. Пусть $\mathfrak{U} = \{(U_\nu, \varphi_\nu)\}$ — последовательность координатных окрестностей, такая, что $\{U_\nu\}$ есть локально конечное покрытие V, $U_\nu \Subset V$ и $f|U_\nu$ — инъективные отображения (такая последовательность существует). Пусть компакты $K_\nu \subset U_\nu$ таковы, что $\bigcup K_\nu = V$, и пусть еще заданы $\varepsilon_\nu > 0$ и целые числа $n_\nu > 0$, $n_\nu \leqslant k$. Положим $f_0 = f$ и построим по индукции отображения $f_0, \ldots, f_m$ многообразия V в $\mathbb{R}^q$ со следующими свойствами:

(i, m) $f_m|U_\nu$ инъективно для всех ν; $f_m \mid \bigcup_{\nu \leqslant m} K_\nu$ инъективно;

(ii, m) $\operatorname{supp}(f_{p+1} - f_p) \subset U_{p+1}$ для $p = 0, 1, \ldots, m-1$;

(iii, m) $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \varepsilon_\nu$ для $x \in K_\nu$ и $|\alpha| \leqslant n_\nu$, $\nu \geqslant 1$.

Предположим, что $f_0, \ldots, f_m$ уже заданы. Возьмем C^k-функцию α_m на V с компактным носителем в U_{m+1}, равную 1 в окрестности K_{m+1}, и рассмотрим множество

$$\Omega = \{(x, y) \in V \times V\colon \alpha_m(x) \neq \alpha_m(y)\};$$

Ω — многообразие класса C^k размерности $2n$. Пусть $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ — отображение

$$\varphi(x, y) = -\frac{f_m(x) - f_m(y)}{\alpha_m(x) - \alpha_m(y)}.$$

Так как $q \geqslant 2n+1$, то $\varphi(\Omega)$ имеет меру нуль; значит, для любого $\delta > 0$ найдется

$$v \in \mathbb{R}^q, \|v\| < \delta, \ v \notin \varphi(\Omega).$$

Положим

$$f_{m+1} = f_m + \alpha_m v.$$

Мы утверждаем, что f_{m+1} обладает свойствами (i, $m+1$) и (ii, $m+1$). Последнее очевидно. Если

$$f_{m+1}(x) = f_{m+1}(y),$$

то

$$f_m(x) - f_m(y) = -v(\alpha_m(x) - \alpha_m(y)),$$

откуда, поскольку $v \notin \varphi(\Omega)$, мы должны получить, что $\alpha_m(x) - \alpha_m(y) = 0$ и $f_m(x) - f_m(y) = 0$. Из последнего вытекает инъективность отображений $f_{m+1}|U_\nu$ для всех ν и $f_{m+1} \mid \bigcup_{\nu \leqslant m} K_\nu$. Предположим, что $f_{m+1}(x) = f_{m+1}(y)$ для некоторых $x \in K_{m+1}$ и $y \in \bigcup_{\nu \leqslant m+1} K_\nu$. Тогда из равенства $\alpha_m(x) = \alpha_m(y)$ вытекает, что $y \in U_{m+1}$ (ибо $\alpha_m(x) = 1$ для $x \in K_{m+1}$ и $\alpha_m = 0$ на $V \setminus U_{m+1}$). Но так как отображение $f_m|U_{m+1}$ инъективно, то отсюда следует, что $x = y$.

Кроме того, $f_{m+1} \to f_m$ в $\mathfrak{C}^k(V, q)$ при $\delta \to 0$, и отсюда уже легко следует существование последовательности отображений f_m, удовлетворяющих (i, m), (ii, m), (iii, m) для всех $m \geqslant 0$.

Отображение

$$g = \lim_{m \to \infty} f_m$$

инъективно на всем V и $|D^\alpha(f-g)| \leqslant \varepsilon_\nu$ при $|\alpha| \leqslant n_\nu$ на K_ν для всех ν. Отсюда видно, что для произвольного погружения существует сколь угодно близкие к нему C^k-вложения V в $\mathbb{R}^q$. Наша теорема следует теперь из теоремы 2.15.7. ▶

Из этих теорем и предложения 2.15.4 мы сразу получаем следующее утверждение.

2.15.9. Теорема. *Для любого C^k-многообразия V размерности n и любого $q \geqslant 2n$ множество замкнутых погружений V в $\mathbb{R}^q$ есть открытое плотное подмножество открытого множества $\mathfrak{P}$ всех собственных C^k-отображений V в $\mathbb{R}^q$. Если $q \geqslant 2n+1$, то множество замкнутых вложений V в $\mathbb{R}^q$ открыто и плотно в $\mathfrak{P}$.*

2.15.10. Замечание. Множество $\mathfrak{P}$ собственных C^k-отображений V в $\mathbb{R}^q$ $(q \geqslant 1)$ непусто.

◀ Так как существуют собственные C^k-отображения $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^q$ $(q \geqslant 1)$, то мы можем считать, что $q = 1$. Пусть $\{U_\nu\}$ — последовательность относительно компактных подмножеств V, $\bigcup U_\nu = V$, и предположим, что семейство $\{U_\nu\}$ локально конечно. Пусть K_ν — компактное подмножество U_ν и $\bigcup K_\nu = V$. Пусть η_ν — функция класса C^k на V с компактным носителем в U_ν, такая, что $0 \leqslant \eta_\nu(x) \leqslant 1$ для всех x, $\eta_\nu(x) = 1$ для $x \in K_\nu$. Тогда отображение

$$\varphi\colon V \to \mathbb{R},$$

задаваемое формулой

$$\varphi(x) = \sum_{\nu \geqslant 1} \nu \eta_\nu(x),$$

есть собственное отображение класса C^k. ▶

2.15.11. Следствие. *Для любого C^k-многообразия V размерности n существует замкнутое погружение V в $\mathbb{R}^{2n}$ и замкнутое вложение V в $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

2.15.12. Замечания. Сделаем несколько дополнительных замечаний о теоремах Уитни. Прежде всего то, что мы отображаем V в евклидово пространство, совсем не существенно. Можно доказать следующую теорему (см., например, Картан [3]):

Пусть даны два C^k-многообразия V и V' (со счетной базой), причем V' связно. Предположим, что $\dim V' \geqslant 2\dim V + 1$. *Тогда существует замкнутое C^k-вложение V в V', за исключением случая, когда многообразие V некомпактно, а V' компактно.* [В последнем случае, конечно, вообще не существует ни одного собственного отображения V в V'.]

Далее, если $\mathbb{R}$-аналитическое многообразие V допускает $\mathbb{R}$-аналитическое замкнутое вложение в $\mathbb{R}^q$ для некоторого q, то из предложения 2.5.14 и теоремы 1.6.5 следует, что *$\mathbb{R}$-аналитические функции на V плотны в $\mathfrak{C}^k(V, 1)$*. Поэтому из доказанных выше результатов Уитни и предложения 2.15.4 следует, что такое многообразие имеет $\mathbb{R}$-аналитическое замкнутое погружение в $\mathbb{R}^{2n}$ и замкнутое аналитическое вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Эти результаты были дополнены Грауэртом [1], который показал, что любое $\mathbb{R}$-аналитическое многообразие со счетной базой (размерности n) можно аналитически вложить в некоторое $\mathbb{R}^q$ как замкнутое подмногообразие.

Вернемся к C^k-многообразиям. Уитни [5] уточнил теорему о погружениях, показав, что любое C^k-многообразие размерности $n \geqslant 2$ допускает замкнутое C^k-погружение в $\mathbb{R}^{2n-1}$. [Для $n = 1$ это, очевидно, неверно: окружность нельзя погрузить в $\mathbb{R}^1$.] Он доказал, кроме того, что всякое C^k-многообразие размерности n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$; в частности, компактные C^k-многообразия размерности n допускают замкнутые вложения в $\mathbb{R}^{2n}$. (Уитни [4]). Эти результаты были дополнены Хиршем [1], который показал, что *всякое некомпактное многообразие размерности n допускает вложение в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и, значит, замкнутое вложение в $\mathbb{R}^{2n}$* [1]).

Объединяя эти замечания, можно, в частности, утверждать следующее:

Теорема. *Для любого C^k- ($\mathbb{R}$-аналитического) многообразия размерности n существует замкнутое C^k- ($\mathbb{R}$-аналитическое) погружение V в $\mathbb{R}^{2n-1}$ (если $n \geqslant 2$) и замкнутое C^k- ($\mathbb{R}$-аналитическое) вложение V в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Известно немало очень интересных более тонких теорем вложения для более узких классов многообразий. Эти теоремы о вложимости и невложимости породили обширную литературу. Мы остановимся только на двух из этих теорем; дальнейшие ссылки можно найти в статьях Атья [1] и Хефлигера [1].

Теорема Уолла [1]. *Всякое замкнутое компактное ориентируемое многообразие размерности 3 можно вложить в $\mathbb{R}^5$.*

---

[1]) Заметим, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ (компактное многообразие размерности n) нельзя замкнуто вложить в $\mathbb{R}^{2n-1}$. — *Прим. ред.*

Многообразие V называется k-связным, если для любого m, $0 \leqslant m \leqslant k$, и любого непрерывного отображения f сферы

$$S^m = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}: x_1^2 + \ldots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

в V существует отображение F шара

$$D^{m+1} = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}: x_1^2 + \ldots + x_{m+1}^2 \leqslant 1\}$$

в V, такое, что $F \mid S^m = f$.

Теорема Хефлигера [1]. *Любое компактное k-связное многообразие V можно вложить в $\mathbb{R}^{2n-k}$, если $n = \dim V \geqslant 2k+3$.*

Проблема голоморфного вложения комплексных многообразий в некоторое $\mathbb{C}^q$ имеет совсем другую природу. Многообразия, которые можно вложить в $\mathbb{C}^q$ в виде замкнутых подмногообразий, — это так называемые *многообразия Штейна*. Для них имеет место утверждение, аналогичное следствию 2.15.11; см. Бишоп [1] и Р. Нарасимхан [1].

Замечание. Приведенные здесь доказательства теорем 2.15.7, 8 по существу принадлежат Уитни [1].

§ 2.16. Теорема Тома о трансверсальности

В этом параграфе мы докажем один частный случай теоремы Тома [1]. Приводимое нами доказательство совпадает по существу с доказательством Абрахама [1]. Для подробного изучения теоремы и некоторых ее приложений см. Картан [3].

Пусть V — многообразие класса C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, размерности n со счетной базой. В пространстве $C^k(V)$ всех C^k-функций (с действительными значениями) на V определим топологию следующим образом. Пусть K — произвольное компактное подмножество V, $X_1, \ldots, X_m$ $(0 \leqslant m \leqslant k,\ m \in \mathbb{Z})$—векторные поля на V и $\varepsilon > 0$. Множества

$$\mathscr{B} = \{f \in C^k(V): |X_1 \ldots X_m(f)(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in K\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей функции $0 \in C^k(V)$. (Эта топология сходимости на компактных подмножествах вместе с производными порядка $\leqslant k$ слабее, чем топология $\mathfrak{C}^k$, введенная в § 2.15.) Пусть V' — еще одно C^k-многообразие размерности m со счетной базой и $C^k(V, V')$—множество C^k-отображений V в V'. Введем в $C^k(V, V')$ следующую топологию:

Фильтр $\{f_\alpha\}$ C^k-отображений f_α: $V \to V'$ сходится к C^k-отображению f: $V \to V'$ в том и только в том случае, когда для всякой C^k-фун-

кции φ на V' фильтр $\{\varphi \circ f_a\}$ C^k-функций на V сходится в $C^k(V)$ к функции $\varphi \circ f$.

Легко проверить, что $C^k(V, V')$ — полное метрическое пространство со счетной базой.

Пусть теперь V, V' — два C^k-многообразия, счетных в бесконечности, и пусть (W, i) — замкнутое подмногообразие V'. Отождествим W с $i(W)$ и касательное пространство $T_a(W)$ в точке $a \in W$ с подпространством $i_{*,a}(T_a(W)) \subset T_{i(a)}(V')$.

2.16.1. Определение. Отображение $f\colon V \to V'$ класса C^k называется *трансверсальным* к W в точке $a \in V$, если либо $f(a) \notin W$, либо

$$f_{*,a}(T_a(V)) + T_{f(a)}(W) = T_{f(a)}(V'),$$

т.е. если $f_{*,a}(T_a(V))$ и $T_{f(a)}(W)$ порождают $T_{f(a)}(V')$. Отображение f называется трансверсальным к W, если оно трансверсально к W в каждой точке V.

Всюду в дальнейшем $\dim V = n$, $\dim V' = m$ и $\dim W = m - q$, $q \geqslant 1$, так что W имеет коразмерность q.

2.16.2. Предложение. *Если $f\colon V \to V'$ — некоторое C^k-отображение и $f(a) \in W$, $a \in V$, то f трансверсально к W в точке a тогда и только тогда, когда в $T_a(V)$ имеется подпространство E размерности q, такое, что $f_{*,a}|E$ инъективно и*

$$f_{*,a}(E) \cap T_{f(a)}(W) = \{0\}.$$

◀ Если это условие выполняется, то из равенства $\dim f_{*,a}(E) + \dim T_{f(a)}(W) = \dim T_{f(a)}(V')$ мы получаем, что $f_{*,a}(E) + T_{f(a)}(W) = T_{f(a)}(V')$, в частности, f трансверсально к W в точке a. Обратно, если f трансверсально к W в a, то в $f_{*,a}(T_a(V))$ имеется подпространство E' размерности q, такое, что $E' \cap T_{f(a)}(W) = \{0\}$. А тогда в $T_a(V)$ имеется подпространство E размерности q, такое, что $f_{*,a}(E) = E'$. ▶

2.16.3. Предложение. *Если C^k-отображение $f\colon V \to V'$ трансверсально к W, то множество $f^{-1}(W)$ либо пусто, либо является подмногообразием V коразмерности q, т. е. размерности $n - q$ (естественное вложение $f^{-1}(W)$ в V превращает его в подмногообразие).*

◀ Пусть $a \in f^{-1}(W)$ и $b = f(a) \in W$. Пусть E есть q-мерное подпространство $T_a(V)$, такое, что отображение $f_{*,a}|E$ инъективно и $E' \cap T_b(W) = \{0\}$, где $E' = f_{*,a}(E)$. Пусть $g_1, \ldots, g_q$ — функции класса C^k в окрестности U' точки b на V', такие, что $dg_1, \ldots, dg_q$ $\mathbb{R}$-независимы и

$$U' \cap W = \{y \in U'\colon\ g_1(y) = \ldots = g_q(y) = 0\}.$$

Так как $(dg_j)_b | T_b(W) = 0$, то отсюда следует, что $(dg_1)_b | E', \ldots, (dg_q)_b | E', \ldots$ $\mathbb{R}$-независимы. Так как $f_{*,a}\colon E \to E'$ — изомор-

физм, то ковекторы $d(g_1 \circ f)_a | E, \ldots, d(g_q \circ f)_a | E$ $\mathbb{R}$-независимы, в частности, независимы и $d(g_1 \circ f)_a, \ldots, d(g_q \circ f_a)$. Так как

$$f^{-1}(W) \cap f^{-1}(U') = \{x \in f^{-1}(U'): g_1 \circ f(x) = \ldots = g_q \circ f(x) = 0\},$$

то из следствия 2.5.5 вытекает, что $f^{-1}(W)$ — подмногообразие V коразмерности q. ▶

2.16.4. Лемма. *Пусть K — компакт из V. Тогда множество C^k-отображений V в V', трансверсальных к W в каждой точке K, открыто в $C^k(V, V')$.*

Это следует непосредственно из определения.

Пусть теперь V, V', W — многообразия класса C^∞ и $K \subset V$ — компакт.

2.16.5. Предложение. *Множество C^∞-отображений V в V', трансверсальных к W в каждой точке компакта K, всюду плотно в $C^\infty(V, V')$ (и даже в $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$).*

◀ Пусть $f: V \to V'$ — произвольное C^∞-отображение. Ввиду леммы 2.16.4 достаточно доказать, что у любой точки $a \in V$ есть окрестность U, такая, что множество C^∞-отображений V в V', трансверсальных к W в каждой точке U, содержит f в своем замыкании. [Пересечение конечного числа открытых плотных подмножеств есть плотное подмножество.]

Пусть (U_0, φ_0) — система координат $a \in U_0$, $U_0 \Subset V$, $f(a) = b \in W$, и пусть (U', φ') — система координат на V', такая, что $f(U_0)$ относительно компактно в U'. Пусть U_1 — относительно компактное подмножество U_0 и λ — функция класса C^∞ на V, такая, что $\operatorname{supp} \lambda \subset U_0$ и $\lambda(x) = 1$, когда x лежит в окрестности $\bar{U}_1$. Предположим, что $0 \in \varphi'(U')$. Если $u_1, \ldots, u_p$ — произвольные C^k-отображения V в $\mathbb{R}^m$, а $\xi_1, \ldots, \xi_p$ — действительные числа, $|\xi_j| < \delta$, то для достаточно малых δ выражение

$$g(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) = \begin{cases} \lambda(x)(\xi_1 u_1(x) + \ldots + \xi_p u_p(x)) & \text{для } x \in U_0, \\ 0 & \text{для } x \notin U_0 \end{cases}$$

определяет C^k-отображение V в $\varphi'(U')$, а по нему мы построим отображение F_ξ: $V \to V'$, полагая

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \varphi'^{-1} \circ (g(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) + \varphi' \circ f(x)) & \text{для } x \in U_0, \\ f(x) & \text{для } x \notin U_0. \end{cases}$$

Это отображение определено и принадлежит классу C^∞ на V, если δ достаточно мало. Пусть $Q = \{\xi \in \mathbb{R}^p: |\xi_j| < \delta\}$. Мы получили отображение

$$F: Q \times V \to V', \quad F(\xi, x) = F_\xi(x).$$

Легко проверить, что если векторы $u_1(a), \ldots, u_p(a)$ порождают $\mathbb{R}^m$, то отображение

$$F_{*,(0,a)}\colon T_{(0,a)}(Q\times V)\to T_b(V')$$

сюръективно. Значит, если δ достаточно мало и U — достаточно малая окрестность точки a, то отображение

$$F_{*,(\xi,a')}\colon T_{(\xi,a')}(Q\times V)\to T_{f(\xi,a')}(V')$$

сюръективно для всех $\xi\in Q$ и $a'\in U$. В частности, отображение $F\colon Q\times U\to V'$ трансверсально к W. Следовательно (см. предложение 2.16.3), $F^{-1}(W)=W_0$ есть подмногообразие $Q\times U$ коразмерности q (заметим, что W_0 непусто, так как $F(0,a)=b\in W$).

Пусть π — сужение на W_0 естественной проекции $Q\times U$ на Q. Пусть A_π — множество критических точек π (т. е. множество точек $(\xi, x)\in W_0$, таких, что $\operatorname{rank}\pi_{*,(\xi,x)}<p=\dim Q$). Тогда, по теореме Сарда 2.2.13, множество $\pi(A_\pi)$ нигде не плотно в Q. Теперь предложение 2.16.5 является прямым следствием такого утверждения:

2.16.6. Предложение. *Для любого $\xi\notin\pi(A_\pi)$ отображение $F_\xi\colon V\to V'$ трансверсально к W во всех точках V.*

◀ Пусть $x\in V$. Если $(\xi, x)\notin W_0$, то $F_\xi(x)\notin W$, так что нам нечего доказывать. Поэтому предположим, что $(\xi, x)\in W_0$. Тогда отображение $\pi_{*,(\xi,x)}\colon T_{(\xi,x)}(W_0)\to T_\xi(Q)$ сюръективно, так как $\xi\notin\pi(A_\pi)$. Отождествим $T_{(\xi,x)}(Q\times V)$ с $T_\xi(Q)\oplus T_x(V)$ и $T_{(\xi,x)}(W_0)$ с подпространством $T_0\subset T_\xi(Q)\oplus T_x(V)$. Тогда проекция T_0 на первое слагаемое $T_\xi(Q)$ сюръективна. Так как F трансверсально к W в точке (ξ, x), то существует (предложение 2.16.2) q-мерное подпространство $E_0\subset T_\xi(Q)\oplus T_x(V)$, такое, что

$$F_{*,(\xi,x)}(E_0)=E'$$

есть q-мерное подпространство $T_{F(\xi,x)}(V')$, для которого

$$E'\cap T_{F(\xi,x)}(W)=\{0\}.$$

Мы утверждаем, что если $\Phi=F_{*,(\xi,x)}$, то $\Phi^{-1}(T_{F(\xi,x)}(W))\subset\subset T_{(\xi,x)}(W_0)$. В самом деле, если $\Phi(v)\in T_{F(\xi,x)}(W)$, мы можем написать $v=w_0+v_0$, $w_0\in T_{(\xi,x)}(W_0)$, $v_0\in E_0$, и тогда ясно, что $\Phi(v_0)\in T_{F(\xi,x)}(W)$. Ясно также, что $\Phi(v_0)\in E'$, и поэтому $\Phi(v_0)=0$. Так как $\Phi\,|\,E_0$ — инъективное отображение, то $v_0=0$ и $v\in T_{(\xi,x)}(W_0)$.

Отсюда сразу следует, что проекция E множества E_0 на $T_x(V)$ имеет размерность q и что $\Phi(E)$ является q-мерным подпространством $T_{F(\xi,x)}$, так что $\Phi(E)\cap T_{F(\xi,x)}(W)=\{0\}$. Снова по предложению 2.16.2 мы получаем, что F_ξ трансверсально к W в точке x. ▶

2.16.7. Теорема Тома о трансверсальности. *Пусть V, V' — многообразия класса C^∞ со счетной базой и W — замкнутое подмногообразие V'. Тогда множество C^∞-отображений V в V', трансверсальных к W, всюду плотно в $C^\infty(V, V')$.*

◀ Многообразие V является счетным объединением компактов. Следовательно, по лемме 2.16.4 и предложению 2.16.5, множество всех C^∞-отображений V в V', трансверсальных к W, является пересечением счетного числа открытых плотных подмножеств $C^\infty(V, V')$. Так как $C^\infty(V, V')$ — полное метрическое пространство, то наше утверждение следует из теоремы Бэра о том, что пересечение счетного числа открытых плотных подмножеств полного метрического пространства всюду плотно; см. Бурбаки [3]. ▶

2.16.8. Замечание. На самом деле C^∞-отображения, трансверсальные к W, образуют подмножество $C^\infty(V, V')$, плотное в топологии $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$. Это следует из доказательства предложения 2.16.5 и из того факта, что теорема Бэра верна и в $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$, несмотря на то, что оно не является полным метрическим пространством; см. Картан [3].

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 3.1. *Векторные расслоения*

3.1.1. Определение. Пусть X и E — хаусдорфовы пространства и p: $E \to X$ — непрерывное отображение. Тройка $\xi = (E, p, X)$ называется *комплексным векторным расслоением* ранга q над пространством X (или просто расслоением над X), если выполнены следующие два условия:

(a) для каждой точки $a \in X$ множество $p^{-1}(a) = E_a$ снабжено структурой комплексного векторного пространства размерности q;

(b) для каждой точки $a \in X$ существуют окрестность $U \ni a$ и гомеоморфизм $h = h_U$ множества $p^{-1}(U) = E_U$ на $U \times \mathbb{C}^q$, такой, что $p = \pi \circ h$ в E_U, где π — проекция $U \times \mathbb{C}^q$ на U (т. е. $\pi(h(y)) = x$, если $y \in E_x$, $x \in U$), и $h | E_x$ есть $\mathbb{C}$-изоморфизм пространства E_x на $\{x\} \times \mathbb{C}^q$ для всех $x \in U$.

Множество $E_a = p^{-1}(a)$ называется *слоем* расслоения ξ в точке a. Расслоение ранга 1 называется *линейным расслоением*. Мы можем заменить комплексные векторные пространства E_x действительными векторными пространствами и таким же способом определить действительные векторные расслоения.

Если E и X являются C^k-многообразиями ($1 \leqslant k \leqslant \infty$), проекция p есть отображение класса C^k, а гомеоморфизмы h_U: $E_U \to U \times \mathbb{C}^q$ являются C^k-диффеоморфизмами, то тройку (E, p, X) мы назовем C^k-векторным расслоением (или векторным расслоением класса C^k).

Если X есть $\mathbb{R}$- или $\mathbb{C}$-аналитическое многообразие, то совершенно аналогично можно определить $\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-аналитические векторные расслоения. Комплексно-аналитические векторные расслоения называются также голоморфными векторными расслоениями.

3.1.2. Определение. Пусть $\xi = (E, p, X)$ и $\xi' = (E', p', X)$ — два комплексных векторных расслоения над X. Отображением расслоений (или *морфизмом*) u: $\xi \to \xi'$ называется непрерывное отображение u: $E \to E'$, такое, что $p' \circ u = p$ и для любой точки $a \in X$ отображение $u | E_a$ является $\mathbb{C}$-линейным отображением E_a в E'_a

Обозначение $u\colon \xi \to \xi'$ мы будем использовать также для любого (не обязательно непрерывного) отображения $u\colon E \to E'$, такого, что $p' \circ u = p$.

Аналогично можно определить C^k- ($\mathbb{R}$- и $\mathbb{C}$-аналитические) отображения расслоений.

Векторные расслоения ξ и ξ' называются изоморфными, если существуют морфизмы $u\colon \xi \to \xi'$ и $u'\colon \xi' \to \xi$, такие, что отображение $u' \circ u$ тождественно на E, а $u \circ u'$ — на E'; здесь $\xi = (E, p, X)$, $\xi' = (E', p', X)$.

В качестве примера векторного расслоения ранга q возьмем $E = X \times \mathbb{C}^q$, и пусть $p\colon E \to X$ — естественная проекция. Тройка $\vartheta_q = (E, p, X)$ представляет собой векторное расслоение $\vartheta_q = \vartheta_q(X)$, которое называется *тривиальным расслоением* ранга q над X. Тривиальными называются также расслоения, изоморфные ϑ_q.

По определению, всякое векторное расслоение $\xi = (E, p, X)$ ранга q локально изоморфно тривиальному расслоению ранга q. Поэтому существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ пространства X и гомеоморфизмы

$$\varphi_i\colon E_{U_i} = p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^q,$$

такие, что если

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing,$$

то отображение

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\colon U_{ij} \times \mathbb{C}^q \to U_{ij} \times \mathbb{C}^q$$

является гомеоморфизмом и имеет вид

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ji}(x, v)),$$

где $g_{ji}(x, v)$ при каждом фиксированном x есть $\mathbb{C}$-линейный автоморфизм $\mathbb{C}^q$. Следовательно,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ji}(x)v),$$

где для всех $x \in U_{ij}$

$$g_{ji}(x) \in GL(q, \mathbb{C}).$$

Для $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ непосредственно проверяется равенство

$$g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) = g_{ik}(x).$$

Из него, в частности, следует, что

$$g_{ii}(x) = I$$

(I — единичная матрица из $GL(q, \mathbb{C})$) и что

$$g_{ij}(x)^{-1} = g_{ji}(x).$$

Очевидно,

$$g_{ij}\colon x \mapsto g_{ij}(x)$$

есть непрерывное отображение U_{ij} в $GL(q, \mathbb{C})$.