◀ Пусть $h \neq 0$ достаточно мало. Мы будем использовать обозначение $O(|u|_m)$ для всякой комплексной функции G от u, h, удовлетворяющей неравенству

$$|G| \leqslant \text{const} \cdot |u|_m,$$

где константа может зависеть от G, но не от u или h. Имеем

$$H\langle f^h, u\rangle = \sum_{\nu=1}^{N} \langle Q_\nu f^h, R_\nu u\rangle.$$

Так как $D^\alpha(f^h) = (D^\alpha f)^h$, то из предложения 3.7.1 следует, что величина $|Q_\nu f^h - (Q_\nu f)^h|_0$, рассматриваемая как функция от h, ограничена. Следовательно,

$$H\langle f^h, u\rangle = \sum_\nu \langle (Q_\nu f)^h, R_\nu u\rangle + O(|u|_m).$$

С другой стороны,

$$\langle (Q_\nu f)^h, R_\nu u\rangle = -\langle Q_\nu f, (R_\nu u)^{-h}\rangle = -\langle Q_\nu f, R_\nu u^{-h}\rangle + O(|u|_m),$$

так что

$$H\langle f^h, u\rangle = -H\langle f, u^{-h}\rangle + O(|u|_m).$$

Далее, по условию,

$$|H\langle f, u^{-h}\rangle| \leqslant C|u^{-h}|_{m-1} \leqslant C'|u|_m$$

(предложение 3.7.1). Поэтому найдется константа $C_1 > 0$, такая, что

$$|H\langle f^h, u\rangle| \leqslant C_1|u|_m \quad \text{для всех} \quad u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Пусть $\{u_\nu\}$ — последовательность элементов $C_0^\infty(\Omega, r)$, сходящаяся в $H_m(\Omega)$ к f^h. Тогда

$$|H\langle f^h, f^h\rangle| = \lim|H\langle f^h, u_\nu\rangle| \leqslant C_1 \lim|u_\nu|_m = C_1|f^h|_m.$$

По неравенству Гординга 3.6.3 найдется константа $C_2 > 0$, такая, что

$$|u_\nu|_m^2 \leqslant C_2\{|\langle Pu_\nu, u_\nu\rangle| + |u_\nu|_0^2\} = C_2\{|H\langle u_\nu, u_\nu\rangle| + |u_\nu|_0^2\};$$

устремляя $\nu \to \infty$, мы получаем

$$|f^h|_m^2 \leqslant C_2\{|H\langle f^h, f^h\rangle| + |f^h|_0^2\} \leqslant C_3\{|f^h|_m + |f^h|_0^2\}.$$

Так как $m \geqslant 1$, то, по предложению 3.7.1, $|f^h|_0$ ограничена при $h \to 0$. Значит, при $h \to 0$ мы имеем

$$|f^h|_m^2 \leqslant C_3|f^h|_m + C_4,$$

откуда следует, что $|f^h|_m$ ограничена при $h \to 0$. Таким образом, множество $\{f^h\}$ ограничено в гильбертовом пространстве $H_m(\Omega)$.

Поэтому найдется последовательность $\{h_\mu\}$, $h_\mu \to 0$, такая, что f^{h_μ} слабо стремятся к некоторому элементу $g \in H_m(\Omega)$, т. е.

$$[f^{h_\mu}, v]_m \to [g, v]_m$$

для всех $v \in H_m(\Omega)$ (см. определение 3.4.6). Более того, так как $m \geqslant 1$, то

$$f^h \to \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

в $H_0(\Omega)$. Отсюда следует, что $\partial f/\partial x_1 = g \in H_m(\Omega)$. Совершенно аналогично мы покажем, что все $\partial f/\partial x_j \in H_m(\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$. Значит, по теореме 3.4.12 вектор-функция f строго дифференцируема $m+1$ раз. Так как f имеет компактный носитель, то $f \in \overset{\circ}{H}_{m+1}(\Omega)$. ▶

3.7.3. Предложение. *Пусть $f \in H_k(\Omega)$ и L — линейный дифференциальный оператор в окрестности $\overline{\Omega}$ из ϑ_r в себя. Если порядок L не превосходит p, $p \geqslant k$, то для всех $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$*

$$|\langle f, Lu\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_{p-k}.$$

◀ Если мы напишем $L = \sum B_\nu^* \circ A_\nu$, где порядок A_ν не превосходит $p-k$, а порядок B_ν не выше k, то получим

$$\langle f, Lu\rangle = \sum \langle B_\nu f, A_\nu u\rangle,$$

откуда следует наш результат, так как $B_\nu f \in H_0(\Omega)$. ▶

3.7.4. Предложение. *Пусть $f \in H_m(\Omega)$. Предположим, что для некоторого целого μ, $0 < \mu \leqslant m$, существует константа $C > 0$, такая, что*

$$|H\langle f, u\rangle| \leqslant C|u|_{m-\mu} \quad \textit{для всех} \quad u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Тогда f строго дифференцируема $m+\mu$ раз.

◀ Доказательство проведем индукцией по μ.

Случай $\mu = 1$. Предположим, что

$$|H\langle f, u\rangle| \leqslant C|u|_{m-1}.$$

Пусть $\eta \in C_0^\infty(\Omega, 1)$. Как и выше, считая что $P = \sum R_\nu^* \circ Q_\nu$, мы имеем

$$\sum \langle \eta Q_\nu f, R_\nu u\rangle - \sum \langle Q_\nu(\eta f), R_\nu u\rangle = \langle f, L'u\rangle,$$

где порядок L' не превосходит $2m-1$ (так как $\eta Q_\nu f - Q_\nu(\eta f) = Qf$ — линейный дифференциальный оператор порядка не выше $m-1$). Далее,

$$\sum \langle \eta Q_\nu f, R_\nu u\rangle - \sum \langle Q_\nu f, R_\nu(\bar{\eta} u)\rangle = \langle f, L''u\rangle,$$

где L'' тоже имеет порядок $\leqslant 2m-1$. Следовательно,

$$H\langle \eta f,\ u\rangle - H\langle f,\ \bar{\eta} u\rangle = \langle f,\ Lu\rangle,$$

где L имеет порядок $\leqslant 2m-1$. Так как $f \in H_m(\Omega)$, то из предложения 3.7.3 вытекает, что

$$|H\langle \eta f,\ u\rangle - H\langle f,\ \bar{\eta} u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{m-1}.$$

Так как по предположению, $|H\langle f,\ \bar{\eta} u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |\bar{\eta} u|_{m-1}$, это дает

$$|H\langle \eta f,\ u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{m-1},$$

откуда, по предложению 3.7.2, $\eta f \in \overset{\circ}{H}_{m+1}(\Omega)$. Так как функция η произвольна, то отсюда следует, что f строго дифференцируема $m+1$ раз.

Общий случай. Предположим теперь, что результат доказан для $\mu = \mu_0 - 1$, $0 < \mu_0 \leqslant m$, и что

$$|H\langle f,\ u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{m-\mu_0}.$$

По индукции, f строго дифференцируема $m+\mu_0-1$ раз. Так как предложение достаточно доказать для любого открытого множества $\Omega' \Subset \Omega$, то мы можем считать, что $f \in H_{m+\mu_0-1}(\Omega)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор из n неотрицательных целых чисел, $|\alpha| = 1$. Очевидно,

$$H\langle D^\alpha f,\ u\rangle + H\langle f,\ D^\alpha u\rangle = \langle f,\ Lu\rangle,$$

где L — дифференциальный оператор порядка $\leqslant 2m$. Снова по теореме 3.7.2 и ввиду того, что $f \in H_{m+\mu_0-1}(\Omega)$, отсюда следует неравенство

$$|H\langle D^\alpha f,\ u\rangle + H\langle f,\ D^\alpha u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{m-\mu_0+1}.$$

Так как

$$|H\langle f,\ D^\alpha u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |D^\alpha u|_{m-\mu_0} \leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{m-\mu_0+1},$$

то

$$|H\langle D^\alpha f,\ u\rangle| \leqslant \mathrm{const}\cdot |u|_{m-\mu_0+1} = \mathrm{const}\cdot |u|_{m-\mu}.$$

По индуктивному предположению отсюда следует, что $D^\alpha f$ строго дифференцируема $m+\mu_0-1$ раз, и нам остается применить теорему 3.4.12. ▶

3.7.5. Предложение. *Если $f \in H_m(\Omega)$ и Pf строго дифференцируема μ раз, $\mu \geqslant 0$, то f строго дифференцируема $2m+\mu$ раз.*

◀ Сначала докажем теорему для $\mu = 0$. Если $Pf \in H_0(\Omega)$, то существует вектор-функция $g \in H_0(\Omega)$, такая, что

$$\langle f,\ P^* u\rangle = \langle g,\ u\rangle \quad \text{для всех} \quad u \in C_0^\infty(\Omega,\ r).$$

Так как $f \in H_m(\Omega)$, отсюда следует, что

$$H\langle f,\ u\rangle = \langle g,\ u\rangle,$$

и потому $|H\langle f, u\rangle| \leqslant \text{const} \cdot |u|_0$. По предложению 3.7.4, f строго дифференцируема $2m$ раз.

Предположим теперь, что мы уже доказали $(2m+\mu-1)$-кратную строгую дифференцируемость f. Заменяя Ω его относительно компактным открытым подмножеством, мы можем считать, что $f \in H_{2m+\mu-1}(\Omega)$ и что существует $g \in H_\mu(\Omega)$, такая, что

$$\langle f, P^*u\rangle = \langle g, u\rangle, \quad u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Рассмотрим оператор

$$L = P \circ D^\alpha - D^\alpha \circ P,$$

где $|\alpha| \leqslant \mu$ и D^α — обычный оператор дифференцирования из ϑ_r в себя, задаваемый условием

$$(u_1, \ldots, u_r) \longmapsto (D^\alpha u_1, \ldots, D^\alpha u_r).$$

Очевидно, L имеет порядок $\leqslant 2m+\mu-1$. Следовательно,

$$P(D^\alpha f) = D^\alpha g + Lf,$$

где $g = Pf \in H_\mu(\Omega)$. Так как $f \in H_{2m+\mu-1}(\Omega)$ по предположению индукции, то отсюда следует, что

$$P(D^\alpha f) \in H_0(\Omega).$$

Ввиду доказанного выше частного случая это означает, что $D^\alpha f$ строго дифференцируема $2m$ раз, а α, $|\alpha| \leqslant \mu$, произвольно. ▶

3.7.6. Предложение. *Пусть Δ — оператор Лапласа из ϑ_r в ϑ_r на $\mathbb{R}^n$ (пример 3.3.15 (c)). Если $f \in H_0(\mathbb{R}^n)$ и $\rho \geqslant 1$ — целое число, то существует $F \in H_{2\rho}(\mathbb{R}^n)$, такая, что $(I-\Delta)^\rho F = f$; здесь $(I-\Delta)$ — оператор*

$$u \longmapsto u - \Delta u$$

и

$$(I-\Delta)^\rho = (I-\Delta) \circ \ldots \circ (I-\Delta) \ (\rho \text{ раз}).$$

◀ По теореме Планшереля 3.2.8, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть

$$\psi(\xi) = \hat{f}(\xi)(1+\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)^{-\rho}.$$

Так как $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то существует $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$, такая, что $\hat{F} = \psi$. Более того,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{2\rho} |\hat{F}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Поэтому, ввиду (3.4.9), $F \in H_{2\rho}(\mathbb{R}^n)$. Непосредственно проверяется, что $(I-\Delta)^\rho F = f$. ▶

Теперь рассмотрим произвольный эллиптический оператор P из ϑ_r в ϑ_s на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.7.7. Теорема о регулярности. *Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор из ϑ_r в ϑ_s на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что $f \in H_0(\Omega)$ и $Pf \in C^\infty(\Omega, s)$. Тогда $f \in C^\infty(\Omega, r)$.*

◀ Рассмотрим оператор

$$L = (-1)^m P^* \circ P, \quad m - \text{порядок } P.$$

Тогда L — эллиптический оператор из ϑ_r в ϑ_s, равномерно строго эллиптический на любом $\Omega' \Subset \Omega$ (следствие 3.6.2). Далее,

$$Lf = (-1)^m P^* g, \quad g = Pf,$$

так что если $Pf \in C^\infty(\Omega, s)$, то $Lf \in C^\infty(\Omega, r)$. Следовательно, мы можем считать, что P — равномерно строго эллиптический оператор из ϑ_r в ϑ_r порядка $2m$.

Если $f \in H_0(\Omega)$, определим $f_0 \in H_0(\mathbb{R}^n)$, полагая

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases}$$

По предложению 3.7.6 существует вектор-функция $F_0 \in H_{2m}(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$(I - \Delta)^m F_0 = f_0.$$

Пусть

$$P_0 = (-1)^m P \circ (I - \Delta)^m.$$

Тогда P_0 — тоже равномерно строго эллиптический оператор порядка $4m$. Кроме того, если $F_0 | \Omega = F$, то

$$F \in H_{2m}(\Omega), \quad P_0 F = (-1)^m Pf \in C^\infty(\Omega, r).$$

Значит, по предложению 3.7.5, F строго дифференцируема $4m + \mu$ раз для любого $\mu \geqslant 0$, а тогда, по предложению 3.15.13, $F \in C^\infty(\Omega, r)$. Поэтому

$$f = (-1)^m (I - \Delta)^m F \in C^\infty(\Omega, r). \ ▶$$

Приведенное здесь доказательство теоремы о регулярности по существу совпадает с доказательством Ниренберга [1]. Сейчас известно несколько других доказательств этой теоремы. Самое старое из них, оперирующее фундаментальными решениями, было предложено Л. Шварцем [1]. Сильные теоремы, которые можно получить этим методом, можно найти у Хёрмандера [1]. Первое доказательство, использующее только априорные оценки (типа неравенств Гординга и Фридрихса), принадлежит Фридрихсу [1] (который, однако, доказал несколько более слабый результат). Другие доказательства принадлежат Йону [1] и Лаксу [1]. Доказательство Лакса кратко и элегантно, но в нем используются пространства, сопряженные к $H_m(\Omega)$. Другое весьма общее и элегантное доказательство, использующее так называемые сингу-

лярные интегральные операторы, можно найти у Л. Шварца [2]. Имеется обширная литература, посвященная этой теореме и ее обобщениям, например, в связи с проблемой регулярности на границе или в связи с соответствующими результатами для параболических и других операторов.

§ 3.8. Эллиптические операторы с аналитическими коэффициентами

3.8.1. Предложение. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и*

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ d(x,\ K) < \delta\},$$

то существует функция $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1, \quad \varphi_\delta(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in K,$$
$$\operatorname{supp} \varphi_\delta \subset K_\delta \quad \text{и} \quad |D^\alpha \varphi_\delta(x)| \leqslant C_\alpha \delta^{-|\alpha|}$$

для всех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; константы C_α не зависят от K и δ.

◀ Пусть ψ — функция класса C^∞ в $\mathbb{R}^n$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1, \quad \psi \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} \psi \subset \{x\colon \|x\| < 1\}.$$

Пусть χ_δ — характеристическая функция K_δ, т. е.

$$\chi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_\delta, \\ 0, & \text{если } x \notin K_\delta. \end{cases}$$

Положим

$$\psi_\delta(x) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \chi_\delta(y)\,dy.$$

Тогда $\psi_\delta(x) = 1$, если $x \in K$, и $\operatorname{supp} \psi_\delta \subset K_{2\delta}$. Кроме того,

$$D^\alpha \psi_\delta(x) = \delta^{-n-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \psi)\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \chi_\delta(y)\,dy,$$

откуда

$$|D^\alpha \psi_\delta(x)| \leqslant \delta^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \psi(y)|\,dy;$$

нам остается взять $\varphi_\delta = \psi_{\delta/2}$. ▶

3.8.2. Замечание. В дальнейшем R и ρ будут обозначать действительные числа, такие, что $0 < \rho \leqslant \min(1,\ R)$, и $\Omega_0 = \{x\colon \|x\| \leqslant R\}$,

Для $f \in L^2(\Omega, r)$ положим

$$M_\rho(f)^2 = \int\limits_{\|x\| < R-\rho} |f(x)|^2\, dx.$$

Пусть $\delta > 0$ и $\Omega = \{x\colon \|x\| < R + \delta\}$.

3.8.3. Предложение. *Пусть P — эллиптический оператор на Ω порядка m из ϑ_r в себя. Тогда найдется константа $C > 0$, такая, что*

$$\rho^m M_{\rho+\rho'}(D^\alpha u) \leqslant C\left\{\rho^m M_{\rho'}(Pu) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{|\beta|} M_{\rho'}(D^\beta u)\right\} \quad \text{при} \quad |\alpha| = m$$

для всех $u \in C^\infty(\Omega, r)$ и любых положительных ρ, ρ', $\rho + \rho' < R$.

◀ Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\varphi(x) = 1$ при $\|x\| < R - \rho - \rho'$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x\colon \|x\| < R - \rho'\}$; подберем еще φ так, чтобы

$$|D^\alpha \varphi| \leqslant C_\alpha \rho^{-|\alpha|},$$

где константа C_α зависит только от α и n (предложение 3.8.1). Согласно (3.6.11), найдется константа $A > 0$, такая, что

$$|D^\alpha(\varphi u)|_0 \leqslant A\{|P(\varphi u)|_0 + |\varphi u|_0\}.$$

Пусть
$$Pu(x) = \sum_{|\lambda| \leqslant m} a_\lambda(x) D^\lambda u(x),$$

где a_λ принадлежит классу C^∞ в Ω. Мы имеем

$$P(\varphi u) - \varphi(Pu) = \sum_{\beta < \lambda,\ |\lambda| \leqslant m} a_\lambda \binom{\lambda}{\beta} (D^{\lambda-\beta}\varphi)(D^\beta u).$$

Очевидно, существуют константы $c_{\lambda,\beta}$, не зависящие от ρ, такие, что $\left|a_\lambda(x)\binom{\lambda}{\beta} D^{\lambda-\beta}\varphi(x)\right| \leqslant c_{\lambda,\beta}\rho^{-|\lambda-\beta|}$ при $\|x\| \leqslant R$.

Следовательно,

$$|D^\alpha(\varphi u)|_0 \leqslant \text{const} \cdot \left\{M_{\rho'}(Pu) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{-m+|\beta|} M_{\rho'}(D^\beta u)\right\}. \ ▶$$

3.8.4. Теорема. *Пусть P — эллиптический оператор порядка m из ϑ_r в себя на открытом множестве U в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что P имеет аналитические коэффициенты и что $0 \in U$. Тогда если числа $R > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малы, то существует константа $A \geqslant 1$, такая, что*

$$\rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u) \leqslant A^{|\alpha|+1}\left\{\sum_{\nu=1}^{k} \rho^{(\nu-1)m} M(P^\nu u) + M(u)\right\} \tag{3.8.5}$$

для $|\alpha| \leqslant km$, $k = 1, 2, \ldots$, для всех ρ, $0 < \rho < \min\{1, R\}$, и всех $u \in C^\infty(\Omega, r)$.

Здесь мы положили

$$P^{\nu} = P \circ \ldots \circ P \ (\nu \text{ раз})$$

и

$$M(f)^2 = M_{-\delta}(f)^2 = \int\limits_{\|x\| \leqslant R+\delta} |f(x)|^2 \, dx.$$

◀ Если
$$(Pu)(x) = \sum_{|\lambda| \leqslant m} a_{\lambda}(x) D^{\lambda} u(x),$$

a_{λ} все $\mathbb{R}$-аналитичны на U, и если $R_1 > 0$ достаточно мало, то a_{λ} являются сужениями на $\|x\| \leqslant R_1$ голоморфных отображений множества $\{z \in \mathbb{C}^n\colon \|z\| \leqslant R_1\}$ в пространство комплексных $(r \times r)$-матриц; эти отображения мы будем обозначать тоже через a_{λ}. Пусть

$$B = \sum_{|\lambda| \leqslant m} \sup_{\|z\| \leqslant R_1} |a_{\lambda}(z)|.$$

По неравенствам Коши 1.1.4,

$$\sum_{|\lambda| \leqslant m} |D^{\alpha} a_{\lambda}(x)| \leqslant B \alpha! \, \rho^{-|\alpha|}, \quad \text{если} \quad \|x\| \leqslant R_1 - \rho. \tag{3.8.6}$$

Пусть $0 < R < R_1$, $\delta = R_1 - R$ и

$$S_k(u) = S_k(u, \rho) = \sum_{\nu=1}^{k} \rho^{(\nu-1)m} M(P^{\nu} u) + M(u).$$

Тогда

$$\rho^m S_k(Pu) \leqslant S_{k+1}(u). \tag{3.8.7}$$

Неравенство (3.8.5) мы докажем индукцией по k. При $k = 1$, т. е. когда $|\alpha| \leqslant m$,

$$M_0(D^{\alpha} u) \leqslant C_2 \{M(Pu) + M(u)\}$$

ввиду (3.6.11), и неравенства (3.8.5) выполняются (при $\rho < 1$), как только $A > C_2$. Предположим теперь, что $km < |\alpha| \leqslant (k+1)m$ и что (3.8.5) доказано для всех β с $|\beta| < |\alpha|$. Пусть $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, где $|\alpha_0| = m$. Применим предложение 3.8.3 с $\rho' = (|\alpha| - 1)\rho$, α_0 вместо α и $D^{\alpha'} u$ вместо u. Это даст нам неравенство

$$\rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|\rho}(D^{\alpha} u) \leqslant C \Big\{ \rho^{|\alpha|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(PD^{\alpha'} u) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{|\beta| + |\alpha'|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(D^{\beta+\alpha'} u) \Big\}. \tag{3.8.8}$$

Далее,
$$D^{\alpha'} Pu - PD^{\alpha'} u = \sum_{|\lambda| \leqslant m} \sum_{\gamma < \alpha'} \binom{\alpha'}{\gamma} (D^{\alpha'-\gamma} a_{\lambda})(D^{\gamma+\lambda} u).$$

Теперь, если $\|x\| \leqslant R - mk\rho$, то

$$|D^{\alpha'-\gamma} a_{\lambda}(x)| \leqslant B(\alpha' - \gamma)! \, (mk\rho)^{-|\alpha'-\gamma|} \qquad (\text{см. } (3.8.6))$$

и

$$\binom{\alpha'}{\gamma}\frac{(\alpha'-\gamma)!}{(mk)^{|\alpha'-\gamma|}}\leqslant\left(\frac{|\alpha'|}{mk}\right)^{|\alpha'-\gamma|}\leqslant 1,$$

так как $|\alpha'|=|\alpha|-m\leqslant km$. Значит, при $\|x\|\leqslant R-mk\rho$, а следовательно, и при $\|x\|\leqslant R-(|\alpha|-1)\rho$ мы имеем

$$(3.8.8')\quad |D^{\alpha'}Pu(x)-PD^{\alpha'}u(x)|\leqslant B\sum_{|\lambda|\leqslant m}\sum_{\gamma<\alpha'}\rho^{-|\alpha'-\gamma|}|D^{\gamma+\lambda}u(x)|.$$

Вместе с (3.8.8) это дает следующее утверждение:

При $km<|\alpha|\leqslant(k+1)m$ имеет место оценка

$$\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha|\rho}(D^{\alpha}u)\leqslant C\Big\{\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha'|\rho}(D^{\alpha'}Pu)+\sum_{|\beta|<m}\rho^{|\beta|+|\alpha'|}M_{|\beta+\alpha'|\rho}(D^{\beta+\alpha'}u)+$$
$$+B\sum_{|\lambda|\leqslant m}\sum_{\gamma<\alpha'}\rho^{m+|\gamma|}M_{(m+|\gamma|)\rho}(D^{\gamma+\lambda}u)\Big\}.$$

Теперь мы можем применить предположение индукции к каждому из трех членов в фигурных скобках. Первый член не превосходит

$$\rho^{m}A^{|\alpha'|+1}S_k(Pu)\leqslant A^{|\alpha'|+1}S_{k+1}(u)\ \text{(см. (3.8.7))}.$$

Второй не больше, чем

$$\sum_{|\beta|<m}A^{|\beta+\alpha'|+1}S_{k+1}(u),$$

а третий не превосходит

$$B'\sum_{\gamma<\alpha'}A^{m+|\gamma|+1}S_{k+1}(u).$$

Отсюда

$$\rho^{|\alpha|}M_{|\alpha|\rho}(D^{\alpha}u)\leqslant A^{|\alpha|+1}S_{k+1}(u)\left\{CA^{-m}+C\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{A}+CB'\sum_{\gamma<\alpha'}A^{-|\alpha'-\gamma|}\right\}$$

(так как $|\alpha|=m+|\alpha'|$). Далее,

$$\sum_{\gamma<\alpha'}A^{-|\alpha'-\gamma|}\leqslant A^{-1}\sum_{|\beta|\geqslant 0}A^{-|\beta|}\to 0\quad\text{при}\quad A\to\infty.$$

Поэтому мы можем подобрать $A\geqslant C_2$ настолько большим, что

$$CA^{-m}+C\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{A}+CB'\sum_{\gamma<\alpha'}A^{-|\alpha'-\gamma|}<1,$$

а это нам даст (3.8.5). ▶

3.8.9. Теорема. (Котаке, М. Нарасимхан [1].) *Пусть P — эллиптический оператор порядка m из ϑ_r в себя на открытом множестве $U\subset\mathbb{R}^n$ с аналитическими коэффициентами и $u\in C^{\infty}(U, r)$. Предположим, что для всякого множества $U'\Subset U$ найдется $M>0$, такое, что*

$$|P^k u|_0^{\Omega'}\leqslant M^{k+1}(km)!,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

Тогда вектор-функция u аналитична в Ω.

◀ Мы можем считать, что $0 \in U$, и нам достаточно доказать, что u аналитична в окрестности 0. Подберем R, δ так, чтобы выполнялось (3.8.5). Тогда

$$M(P^\nu u) \leqslant M^{\nu+1}(\nu m)!, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

так что для любого $\rho > 0$

$$S_k(u) \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} M^{\nu+1} \rho^{(\nu-1)m} (\nu m)! + M.$$

Если мы возьмем $\rho = c/km$, где c мало, то получим, что

$$(\nu m)!\, \rho^{(\nu-1)m} \leqslant (km)^m$$

при $\nu \leqslant k$, и потому найдется константа $B_1 > 0$, такая, что

$$S_k(u) \leqslant B_1^{k+1} \quad \text{при} \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно, ввиду (3.8.5),

$$M_c(D^\alpha u) \leqslant B_2^{k+1} k^k \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant k.$$

Если K — компактное подмножество шара $\{x\colon \|x\| < R - c\}$, то из предложения 3.5.12 мы получаем неравенство

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leqslant B_3^{k+n+1} (k+n)^{k+n} \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant k.$$

По формуле Стирлинга отсюда следует, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leqslant B_4^{k+1} k! \quad \text{при } |\alpha| \leqslant k,$$

и вектор-функция u аналитична ввиду 1.1.15, 16. ▶

3.8.10. Теорема. *Пусть P — линейный дифференциальный оператор порядка m из ϑ_r в ϑ_r с коэффициентами, голоморфными в поликруге*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |z_j| < r_j \leqslant 1\}.$$

Пусть u — ограниченное голоморфное отображение $D \to \mathbb{C}^r$. Тогда найдется константа $A > 0$ (зависящая от D), такая, что

$$|P^\nu u(z)| \leqslant \frac{(3A)^{\nu+1} (m\nu)!}{\prod_j (r_j - |z_j|)^{m\nu}} \quad \textit{для всех} \quad z \in D.$$

Докажем сначала следующее утверждение.

3.8.11. Предложение. *Если функция h голоморфна в круге $\{w \in \mathbb{C}\colon |w| < R\}$ и*

$$|h(w)| < M(R - |w|)^{-\mu}, \quad |w| < R,$$

то

$$|h'(w)| < 3(\mu+1) M (R - |w|)^{-(\mu+1)}, \quad |w| < R,$$

где $h'(w)$ — производная h.

◀ Пусть $|w_0|<R$ и $0<\varepsilon<R-|w_0|$. По неравенству Коши,

$$|h'(w_0)|\leqslant\varepsilon^{-1}\sup_{|w-w_0|=\varepsilon}|h(w)|\leqslant M\varepsilon^{-1}(R-|w_0|-\varepsilon)^{-\mu}.$$

Если мы возьмем

$$\varepsilon=\frac{R-|w_0|}{\mu+1},$$

то получим, что

$$|h'(w_0)|\leqslant M(\mu+1)(R-|w_0|)^{-(\mu+1)}\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{\mu}.$$

Так как $(1+1/\mu)^{\mu}<e<3$, то отсюда следует наше неравенство. ▶

◀ Доказательство теоремы 3.8.10. Предположим по индукции, что

$$|P^{\nu-1}u(z)|\leqslant\frac{(3A)^{\nu}(m(\nu-1))!}{\prod(r_j-|z_j|)^{m(\nu-1)}},\quad z\in D,$$

где

$$A\geqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}|a_\alpha(z)|,$$

$$Pu(z)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(z)D^{\alpha}u(z).$$

Тогда, по предложению 3.8.11, мы имеем

$$|D^{\alpha}P^{\nu-1}u(z)|\leqslant\frac{3(3A)^{\nu}(m\nu)!}{\prod(r_j-|z_j|)^{m(\nu-1)+|\alpha|}},$$

и наш результат следует из того, что $\sum_{|\alpha|\leqslant m}|a_\alpha(z)|\leqslant A$. ▶

3.8.12. Теорема Петровского. *Если P — эллиптический оператор порядка m с аналитическими коэффициентами из ϑ_r в ϑ_s на открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и если $u\in C^{\infty}(\Omega, r)$ такова, что Pu — аналитическая вектор-функция, то сама u тоже аналитична.*

◀ Заменяя, если надо, P на $P^*\circ P$, мы можем считать, что P — оператор из ϑ_r в себя. Пусть $f=Pu$ — аналитическая вектор-функция. Из теоремы 3.8.10 следует существование константы $M>0$, такой, что

$$|P^{\nu}f(x)|\leqslant M^{\nu+1}(\nu m)!,\quad\text{если}\quad x\in\Omega'\Subset\Omega,$$

и наше утверждение вытекает из теоремы 3.8.9. ▶

3.8.13. Замечания. Укажем вкратце, как упростить доказательство теоремы 3.8.9 в частном случае, необходимом для доказательства теоремы 3.8.12. Воспользуемся опять оценками (3.8.8) и (3.8.8′).

Применяя неравенства Коши к голоморфному продолжению $f = Pu$ в комплексную область, мы получим, что

$$|D^\alpha Pu| \leqslant \text{const} \cdot \alpha! \, (mk\rho)^{-|\alpha|} \quad \text{при} \quad \|x\| \leqslant R - mk\rho,$$

откуда

$$\rho^{|\alpha'|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(D^{\alpha'} Pu) \leqslant \text{const} \quad \text{для} \quad \rho > 0 \quad \text{и всех } \alpha.$$

Это приводит к оценке

$$\rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u) \leqslant A^{|\alpha|+1}, \quad A = A(u),$$

и доказательство завершается, как выше.

Основная теорема 3.8.12 является частным случаем результатов И. Г. Петровского [1], который рассматривал также нелинейные системы дифференциальных уравнений. Однако его доказательство очень трудно. Главная идея приведенного здесь доказательства содержится в работе Морри и Ниренберга [1]. Изложение основано на работе Хёрмандера [1].

§ 3.9. Теорема конечности

Пусть V — ориентированное C^∞-многообразие, ξ и η — векторные расслоения класса C^∞ над V, $\xi = (E, p, V)$, $\eta = (F, q, V)$. Пусть P — линейный дифференциальный оператор из ξ в η порядка m.

Мы будем рассматривать не только непрерывные сечения расслоений ξ, η, ... (напомним, что сечением расслоения ξ мы условились называть отображение s: $V \to E$, такое, что $p \circ s$ — тождественное отображение). Будем называть сечение s *измеримым*, если у каждой точки $a \in V$ есть окрестность U и изоморфизм τ: $\xi | U \to U \times \mathbb{C}^r$, такие, что сечение $\tau \circ s$ тривиального расслоения $U \times \mathbb{C}^r$, рассматриваемое как набор из r функций, измеримо. Мы скажем, что s локально принадлежит H_m, если указанную окрестность U можно взять диффеоморфной некоторому открытому множеству Ω в $\mathbb{R}^n$ и сечение $\tau \circ s$, рассматриваемое как набор из r функций на Ω, принадлежит $H_m(\Omega)$. Аналогично мы будем понимать локальную интегрируемость сечений и т. д.

Если P — дифференциальный оператор из ξ в η и s — локально интегрируемое сечение ξ, то мы определим Ps как линейный функционал λ на $C_0^\infty(V, \eta')$ равенством[1])

$$\lambda(t') = \langle s, P't' \rangle_{\xi'},$$

[1]) Заметим, что если s — локально квадратично интегрируемое сечение ξ, то s' — локально квадратично интегрируемое сечение ξ', а если одно из них равно нулю вне компактного подмножества V, то мы можем определить $\langle s', s \rangle_\xi = \int_V B(s', s)$, как в § 3.3.

где P' — транспонированный к P оператор. Будем говорить, что Ps локально интегрируем (класса C^∞, ...), если найдется локально интегрируемое (класса C^∞, ...) сечение t расслоения η, такое, что

$$\lambda(t') = \langle s, P't' \rangle_{\xi'} = \langle t, t' \rangle_{\eta'} \quad \text{для всех} \quad t' \in C_0^\infty(V, \eta').$$

Элемент t, если он существует, определен однозначно (с точностью до значений на множествах меры нуль), и тогда мы можем отождествить Ps и t.

Непосредственно из теорем 3.7.7 и 3.8.12 получаются следующие два утверждения.

3.9.1. Теорема о регулярности. *Пусть ξ, η — произвольные C^∞-расслоения на ориентируемом C^∞-многообразии V и P — эллиптический оператор из ξ в η. Если s — локально квадратично интегрируемое сечение ξ, такое, что Ps есть C^∞-сечение η, то s (почти всюду) совпадает с C^∞-сечением ξ.*

3.9.2. Теорема об аналитичности. *Пусть V — произвольное $\mathbb{R}$-аналитическое многообразие, ξ, η — аналитические векторные расслоения над V. Пусть P — эллиптический оператор из ξ в η с аналитическими коэффициентами. Тогда если s — локально квадратично интегрируемое сечение ξ, для которого Ps — аналитическое сечение η, то s равно (почти всюду) аналитическому сечению ξ.*

Если s — сечение расслоения ξ, то мы определим носитель $\operatorname{supp} s$ как замыкание в V множества $\{x \in V\colon s(x) \neq 0_x\}$, где 0_x — нулевой элемент векторного пространства E_x.

Пусть K — компактное подмножество V. Обозначим через $H_m(K, \xi)$ множество сечений s расслоения ξ, локально принадлежащих H_m, носители которых $\operatorname{supp} s \subset K$. Пусть $U_1', \ldots, U_n'$ — конечное число координатных окрестностей, покрывающих K, $K \subset \bigcup U_j'$, на каждой из которых расслоение $\xi | U_j'$ тривиально. Пусть $U_j \Subset U_j'$ и $K \subset \bigcup U_j$. Пусть $\tau_j\colon \xi | U_j' \to U_j' \times \mathbb{C}^r$ — изоморфизм класса C^∞ и $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\sum \varphi_j(x) = 1$ для всех x из некоторой окрестности K. Тогда если $s \in H_m(K, \xi)$, то $\tau_j(\varphi_j s)$ можно рассматривать как набор из r функций на U_j. Предположим, что U_j' изоморфна открытому множеству Ω_j' в $\mathbb{R}^n$. Если $\psi_j\colon U_j' \to \Omega_j'$ — изоморфизм, мы положим $\psi_j(U_j) = \Omega_j$. Тогда $\tau_j(\varphi_j s)$ можно рассматривать как наборы $s_j = \tau_j(\varphi_j s) \circ \psi_j^{-1}$ из r функций на Ω_j, причем

$$s_j \in H_m(\Omega_j).$$

Положим $\mathfrak{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ и

$$|s|^2_{m,\mathfrak{U}} = \sum_j |s_j|^2_m.$$

Относительно этой нормы $H_m(K, \xi)$ является гильбертовым пространством. Пусть

$$\mathscr{H} = \bigoplus H_m(\Omega_j).$$

Отображение

$$\eta\colon H_m(K, \xi) \to \mathscr{H},$$

задаваемое условием $\eta(s) = \bigoplus s_j$, будет изометрией $H_m(K, \xi)$ на замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$. Кроме того,

$$\tau_j(s \mid U_j) \circ \psi_j^{-1} = s_j' \in H_m(\Omega_j).$$

Если мы положим

$$\| s \|^2_{m,\,\mathfrak{U}} = \sum_j | s_j' |^2_m,$$

то $H_m(K, \xi)$ тоже будет гильбертовым пространством относительно нормы $\| s \|_{m,\,\mathfrak{U}}$. Легко видеть, что $| s |_{m,\,\mathfrak{U}}$ и $\| s \|_{m,\,\mathfrak{U}}$ — эквивалентные нормы на $H_m(K, \xi)$ и что различные покрытия $\mathfrak{U}$ и различные разбиения единицы $\{\varphi_j\}$ с перечисленными выше свойствами порождают эквивалентные нормы $| \cdot |_{m,\,\mathfrak{U}}$.

Как и в предложении 3.4.3, определено *вложение*

$$i_m\colon H_m(K, \xi) \to H_{m-1}(K, \xi), \qquad m \geqslant 1.$$

Далее, из леммы 3.5.4 вытекает

3.9.3. Лемма Реллиха. *Вложение*

$$i_m\colon H_m(K, \xi) \to H_{m-1}(K, \xi)$$

вполне непрерывно.

3.9.4. Предложение. *Для любого непрерывного линейного функционала l на $H_0(K, \xi)$ найдется единственное сечение $s' \in H_0(K, \xi')$, такое, что*

$$l(s) = \langle s', s \rangle_\xi \quad \textit{для всех} \quad s \in H_0(K, \xi).$$

◀ Ясно, что если сечение s' существует, то оно единственно. Поэтому достаточно доказать следующее:

Пусть U — координатная окрестность, такая, что расслоение $\xi \mid U$ тривиально, и пусть L — компактное подмножество U. Тогда найдется сечение $s' \in H_0(L, \xi')$, такое, что

$$l(s) = \langle s', s \rangle_\xi \quad \text{для всех} \quad s \in H_0(L, \xi).$$

Пусть $h\colon \xi \mid U \to U \times \mathbb{C}^r$ — изоморфизм и $h^*\colon \xi^* \mid U \to U \times \mathbb{C}^r$ — соответствующий изоморфизм сопряженных расслоений. Пусть $\psi\colon U \to \Omega$ — изоморфизм U на открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и

$$(s_1, \ldots, s_r) = h(s) \circ \psi^{-1}, \quad s \in H_0(L, \xi).$$

Тогда все $s_j \in L^2(\Omega)$ и равны нулю вне $\psi(L)$. По известной теореме Рисса существуют элементы $t_1, \ldots, t_r \in L^2(\Omega)$, равные нулю вне $\psi(L)$ и такие, что

$$l(s) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{r} s_j t_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \qquad s \in H_0(L, \xi).$$

Если мы положим

$$s' = (h^*)^{-1} (t_1 \circ \psi, \ldots, t_r \circ \psi) \otimes \psi^* (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n),$$

то получим, что $s' \in H_0(L, \xi')$ и

$$l(s) = \langle s', s \rangle_\xi \quad \text{для всех} \quad s \in H_0(L, \xi). \blacktriangleright$$

3.9.5. Замечание. Если P — линейный дифференциальный оператор порядка m из ξ в η, то P определяет непрерывное линейное отображение

$$P_K\colon H_m(K, \xi) \to H_0(K, \eta);$$

здесь K — компактное подмножество V.

3.9.6. Предложение. *Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор из ξ в η и*

$$\mathscr{P} = \{s \in C^\infty(V, \xi)\colon Ps = 0\}.$$

Последовательность $\{s_\nu\}$ элементов $\mathscr{P}$ сходится вместе со всеми частными производными равномерно на компактных подмножествах V (см. замечания после 3.3.10) тогда и только тогда, когда $\{s_\nu\}$ сходится в $H_0(K, \xi)$ для любого компактного множества $K \subset V$, т. е. когда последовательность $\{s'_\nu\}$, определяемая условием

$$s'_\nu(x) = \begin{cases} s_\nu(x), & \text{если} \quad x \in K, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin K, \end{cases}$$

сходится в $H_0(K, \xi)$.

Это следует из теоремы 3.6.12.

3.9.7. Предложение. *Пусть $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ — гильбертовы пространства, A_1 и A_2 — непрерывные линейные отображения $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$, причем*

(a) *A_1 инъективно и $A_1(\mathscr{H}_1)$ замкнуто в $\mathscr{H}_2$,*

(b) *A_2 вполне непрерывно.*

Тогда ядро $\ker(A_1 + A_2)$ имеет конечную размерность и подпространство $(A_1 + A_2)(\mathscr{H}_1)$ замкнуто в $\mathscr{H}_2$.

◀ По теореме о замкнутом графике, отображение

$$A_1^{-1} = B\colon A_1(\mathscr{H}_1) \to \mathscr{H}_1$$

непрерывно. Предположим, что $\ker(A_1 + A_2)$ бесконечномерно. Тогда существует бесконечная ортонормированная последовательность $\{x_\nu\}$, $x_\nu \in \mathscr{H}_1$, такая, что

$$A_1(x_\nu) = -A_2(x_\nu).$$

Так как $\|x_\nu\| = 1$ и A_2 вполне непрерывно, мы можем считать, переходя к подпоследовательности, что элементы $A_2(x_\nu)$ стремятся к некоторому y_0. Поэтому

$$A_1(x_\nu) \to -y_0$$

и, значит,

$$x_\nu = B(A_1(x_\nu)) \to -B(y_0) \quad \text{при} \quad \nu \to \infty,$$

что противоречит нашему предположению об ортонормированности $\{x_\nu\}$. Следовательно, $\ker(A_1 + A_2)$ имеет конечную размерность.

Пусть $N = \ker(A_1 + A_2)$ и M — ортогональное дополнение N в $\mathscr{H}_1$. Пусть T — сужение $A_1 + A_2$ на M. Тогда T — непрерывное инъективное отображение и $T(M) = (A_1 + A_2)(\mathscr{H}_1)$. Для доказательства замкнутости этого пространства достаточно доказать, что отображение $T^{-1} | T(M)$ непрерывно. Пусть

$$y_\nu \in T(M), \quad y_\nu \to 0,$$
$$x_\nu \in M, \quad T(x_\nu) = y_\nu.$$

Если $\{x_\nu\}$ не сходится к 0, то можно считать, что $\|x_\nu\| \geqslant \rho > 0$. Тогда если $x'_\nu = x_\nu / \|x_\nu\|$, то

$$T(x'_\nu) = A_1(x'_\nu) + A_2(x'_\nu) \to 0,$$

и потому, опять ввиду вполне непрерывности A_2, мы можем считать, что $A_2(x'_\nu)$, а значит, и $A_1(x'_\nu)$, образуют сходящиеся последовательности. Так как B непрерывно, то $x'_\nu = BA_1(x'_\nu)$ стремится, скажем, к x'_0. Тогда, очевидно, $\|x'_0\| = 1$. С другой стороны,

$$T(x'_0) = \lim T(x'_\nu) = 0$$

и, значит, $x'_0 \in N$. Так как $x'_\nu \in M$, то и $x'_0 \in M$. Отсюда следует, что $x'_0 = 0$, и мы получили противоречие. ▶

3.9.8. Теорема конечности. *Пусть V — ориентированное C^∞-многообразие и ξ, η — два C^∞-векторных расслоения на V. Пусть P — эллиптический оператор из ξ в η порядка $m \geqslant 1$ и K — компактное подмножество V. Тогда отображение*

$$P_K\colon H_m(K, \xi) \to H_0(K, \eta)$$

имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

◀ Пусть

$$i_m\colon H_m(K, \xi) \to H_{m-1}(K, \xi)$$

— естественное вложение. Пусть

$$\mathscr{H}_1 = H_m(K, \xi), \quad \mathscr{H}_2 = H_0(K, \eta) \oplus H_{m-1}(K, \xi).$$

Определим отображения A_1, A_2: $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ следующим образом:

$$A_1(s) = P_K s \oplus i_m(s), \quad A_2(s) = 0 \oplus -i_m(s).$$

Очевидно, A_1 — вложение и отображение A_2 вполне непрерывно (лемма 3.9.3). Кроме того, если U — координатная окрестность на V и $\varphi \in C_0^\infty(U)$, то из (3.6.11) следует, что

$$|\varphi s|_{m,\,\mathfrak{U}} \leqslant \text{const} \cdot \{|P(\varphi s)|_{0,\,\mathfrak{U}} + |\varphi s|_{0,\,\mathfrak{U}}\} \leqslant \text{const} \cdot \{|\varphi P s|_{0,\,\mathfrak{U}} + |s|_{m-1,\,\mathfrak{U}}\}$$

относительно любого фиксированного покрытия $\mathfrak{U}$ компакта K. Отсюда

$$|s|_{m,\,\mathfrak{U}} \leqslant \text{const} \cdot \{|Ps|_{0,\,\mathfrak{U}} + |s|_{m-1,\,\mathfrak{U}}\}$$

и, значит,

$$\text{const} \cdot \|A_1(s)\|_{\mathscr{H}_2} \geqslant \|s\|_{\mathscr{H}_1}, \quad s \in \mathscr{H}_1,$$

так что $A_1(\mathscr{H}_1)$ — замкнутое подпространство $\mathscr{H}_2$. По предложению 3.9.7, ядро

$$\ker(A_1 + A_2) = \ker P_K$$

имеет конечную размерность и $(A_1 + A_2)(\mathscr{H}_1) = P_K(H_m(K, \xi)) \oplus \{0\}$ замкнуто. ▶

3.9.9. Предложение. *Пусть V — ориентированное C^∞-многообразие ξ, η — векторные расслоения и P — эллиптический оператор порядка m из ξ в η. Пусть K — компактное подмножество V. Тогда если сечение $t_0 \in H_0(K, \eta)$ таково, что $\langle t', t_0\rangle_\eta = 0$ для всех $t' \in H_0(K, \eta')$, для которых $P't' = 0$ на $\mathring{K}$, то существует сечение $s_0 \in H_m(K, \xi)$, такое, что $Ps_0 = t_0$.*

◀ Пусть

$$N = \{t \in H_0(K, \eta)\colon \langle t', t\rangle_\eta = 0 \quad \text{для всех} \quad t' \in H_0(K, \eta'), \\ \text{таких, что } P't' = 0 \text{ на } \mathring{K}\}.$$

Уравнение $P't' = 0$ на $\mathring{K}$ означает, что $\langle Ps, t'\rangle_{\eta'} = 0$ для всех $s \in C_0^\infty(\mathring{K}, \xi)$. Пусть l — непрерывный линейный функционал на $H_0(K, \eta)$, равный нулю на $P_K(H_m(K, \xi))$. Так как подпространство $P_K(H_m(K, \xi))$ замкнуто, нам надо показать, что $l(t_0) = 0$. По предложению 3.9.4, найдется сечение $t_0' \in H_0(K, \eta')$, такое, что

$$l(t) = \langle t_0', t\rangle_\eta$$

для всех $t \in H_0(K, \eta)$. Так как l равен нулю на $P_K(H_m(K, \xi))$, то

$$l(Ps) = \langle t_0', Ps \rangle_\eta = 0$$

для всех $s \in C_0^\infty(\mathring{K}, \xi)$, и потому $P't_0' = 0$ на $\mathring{K}$. А по определению N

$$\langle t_0', t \rangle_\eta = l(t) = 0 \quad \text{для} \quad t \in N. \blacktriangleright$$

3.9.10. Предложение. *Если, кроме того, V — компактное многообразие и $K = V$, то*

$$P_V(H_m(V, \xi)) = \{t \in H_0(V, \eta): \langle t', t \rangle_\eta = 0$$
$$\textit{для всех } t' \in H_0(V, \eta'), \textit{ таких, что } P't' = 0\}.$$

◀ Пространство справа обозначим через N; из теоремы 3.9.9 следует, что

$$P_V(H_m(V, \xi)) \supset N.$$

С другой стороны, $\langle Ps, t' \rangle_{\eta'} = 0$ всякий раз, когда $P't' = 0$, и, значит, $N \supset P_V(H_m(V, \xi))$. ▶

3.9.11. Предложение. *Пусть V — компактное ориентированное C^∞-многообразие, ξ, η — два C^∞-векторных расслоения над V, причем* $\operatorname{rank}\xi = \operatorname{rank}\eta$. *Пусть P — эллиптический оператор из ξ в η. Тогда факторпространство $C^\infty(V, \eta)/P(C^\infty(V, \xi))$ имеет конечную размерность.*

◀ Рассмотрим оператор

$$P_V: H_m(V, \xi) \to H_0(V, \eta);$$

пусть M — его образ. По предложению 3.9.10,

$$M = \{t \in H_0(V, \eta): \langle t', t \rangle_\eta = 0$$
$$\text{для всех } t' \in H_0(V, \eta'), \text{ таких, что } P't' = 0\}.$$

Поэтому, если

$$P_V': H_m(V, \eta') \to H_0(V, \xi')$$

— оператор, соответствующий формально транспонированному к P оператору P' из η' в ξ', то

$$\operatorname{coker} P_V \simeq \ker P_V'.$$

Так как $\operatorname{rank}\xi = \operatorname{rank}\eta$, то P' — тоже эллиптический оператор (замечание 3.3.22), так что, по предложению 3.9.8, $\operatorname{coker} P_V$ имеет конечную размерность. Далее,

$$M \cap C^\infty(V, \eta) = P(H_m(V, \xi)) \cap C^\infty(V, \eta) = P(C^\infty(V, \xi))$$

по теореме 3.9.1. Так как M имеет конечную коразмерность в $H_0(V, \eta)$, то отсюда следует, что $P(C^\infty(V, \xi))$ имеет конечную коразмерность в $C^\infty(V, \eta)$. ▶

§ 3.10. Теорема о приближении и ее применение к открытым римановым поверхностям

3.10.1. Обозначение. Пусть V — произвольное C^∞-многообразие со счетной базой и S—подмножество V. Обозначим через $\mathcal{J}(S)$ объединение S и всех относительно компактных связных компонент множества $V \setminus S$.

Нам понадобятся некоторые свойства множеств $\mathcal{J}(S)$.

3.10.2. Предложение. *Если* $S_1 \subset S_2$, *то*

$$\mathcal{J}(S_1) \subset \mathcal{J}(S_2);$$

кроме того,

$$\mathcal{J}(\mathcal{J}(S)) = \mathcal{J}(S).$$

◀ Если C — относительно компактная связная компонента $V \setminus S_1$, то множество $C \setminus S_2$ является объединением связных компонент $V \setminus S_2$. В самом деле, если C' — связная компонента $V \setminus S_2$, не содержащаяся в C, и $C \cap C' \neq \varnothing$, то $C \cup C'$ — связное подмножество $V \setminus S_1$, содержащее C и не совпадающее с ним, а это невозможно, так как C — компонента. Значит, $C \setminus S_2$ есть объединение компонент $V \setminus S_2$; так как C — относительно компактное множество, то отсюда следует, что $C \subset \mathcal{J}(S_2)$ ▶

3.10.3. Предложение. *Если множество S замкнуто, то $\mathcal{J}(S)$ тоже замкнуто. Если K — компакт, то $\mathcal{J}(K)$ — тоже компакт.*

◀ Если S замкнуто, то любая компонента множества $V \setminus S$ открыта. Поэтому $V \setminus \mathcal{J}(S)$, будучи объединением компонент $V \setminus S$, не являющихся относительно компактными, есть открытое множество.

Пусть U — относительно компактное открытое множество, содержащее K, и $U_1, \ldots, U_n$ — связные открытые множества, покрывающие ∂U и такие, что $U_j \cap K = \varnothing$. Очевидно, любая связная компонента $V \setminus K$, не принадлежащая U, должна содержать по крайней мере одну из U_j. Поэтому имеется не более конечного числа относительно компактных компонент $V \setminus K$, не содержащихся в U, а отсюда следует, что $\mathcal{J}(K)$ — относительно компактное множество. ▶

В дальнейшем нам понадобится

3.10.4. Предложение. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство и K_0 — связная компактная компонента X. Тогда K_0 имеет фундаментальную систему окрестностей, одновременно открытых и замкнутых в X.*

◀ Заменяя X некоторой компактной окрестностью K_0, если это необходимо, мы можем считать, что X — компакт.

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство окрестностей $N \supset K_0$, одновременно открытых и замкнутых ($\mathcal{F} \neq \varnothing$, так как $X \in \mathcal{F}$). Пусть

$$K = \bigcap_{N \in \mathcal{F}} N.$$

Очевидно, K — замкнутое, а значит, и компактное множество. Так как $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, то K обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из элементов $\mathcal{F}$, и нам достаточно показать, что $K = K_0$. Так как $K_0 \subset K$ и K_0 — связная компонента X, то достаточно показать, что множество K связно.

Предположим, что K несвязно. Тогда

$$K = A_0 \cup A_1,$$

где A_0, A_1 — замкнутые подмножества K (и значит, компакты), $A_0 \cap A_1 = \varnothing$, но ни A_0, ни A_1 не пусто. Так как компакты A_0 и A_1 не пересекаются, то существуют открытые множества U_0, U_1, такие, что $A_j \subset U_j$, $U_0 \cap U_1 = \varnothing$. Пусть $U = U_0 \cup U_1$. Так как

$$\bigcap_{N \in \mathcal{F}} (N \cap (X \setminus U)) = \varnothing$$

и так как $X \setminus U$ — компакт, а семейство $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, то отсюда следует, что существует

$$N \in \mathcal{F}, \quad N \cap (X \setminus U) = \varnothing,$$

т. е. $N \subset U$. Очевидно, K_0 содержится либо в U_0, либо в U_1, скажем $K_0 \subset U_0$. Но тогда множество

$$N \cap U_0 = N \cap (X \setminus U_1)$$

одновременно открыто и замкнуто, откуда

$$K \subset N \cap U_0 \subset U_0,$$

вопреки тому, что

$$K \cap U_1 \supset A_1 \neq \varnothing. \blacktriangleright$$

3.10.5. Предложение. *Если S — открытое подмножество V, то $\mathcal{J}(S)$ тоже открыто.*

◀ Пусть K_0 — относительно компактная компонента $V \setminus S$. Тогда K_0 — компакт. Пусть N — окрестность K_0, компактная и открытая в $V \setminus S$. Тогда множество $(V \setminus S) \setminus N$ замкнуто в $V \setminus S$, а значит, и в V, так что $S \cup N$ открыто в V. Очевидно, $N \subset \mathcal{J}(S)$, а отсюда следует, что $\mathcal{J}(S)$ открыто. ▶

3.10.6. Предложение. *Пусть K — компакт и $K = \mathcal{J}(K)$. Тогда K обладает фундаментальной системой открытых (и компактных) окрестностей S, таких, что $S = \mathcal{J}(S)$.*

◀ Мы можем считать, что многообразие V связно. Легко показать, что K обладает фундаментальной системой открытых окрестностей U, таких, что $V \setminus U$ имеет не более конечного числа связных компонент. Пусть $U' = \mathcal{J}(U)$ и C_0 — компактная компонента $V \setminus U$.

Тогда $C_0 \in V \setminus K$ и, таким образом, $C_0 \subset U_0$, где U_0 — (открытая) связная компонента $V \setminus K$. Так как $K = \mathcal{J}(K)$, то U_0 не является относительно компактной, и потому $\partial U' \cap U_0 \neq \varnothing$. Пусть γ_0 — кривая, соединяющая точку из C_0 с точкой из $\partial U'$ и целиком принадлежащая U_0. Построим такую кривую γ_j для каждой компоненты C_j множества $V \setminus U$. Тогда очевидно, что множество

$$S = U \setminus \bigcup_j \gamma_j$$

открыто и $S = \mathcal{J}(S)$. Если S — открытая окрестность K, такая, что $S = \mathcal{J}(S)$, а L — компактная окрестность K и $L \subset S$, то, по предложению 3.10.2, $L' = \mathcal{J}(L) \subset S$, а по предложению 3.10.3, L' — компактная окрестность K. ▶

3.10.7. Теорема Мальгранжа — Лакса о приближении. *Пусть V — ориентированное $\mathbb{R}$-аналитическое многообразие, ξ и η — два $\mathbb{R}$-аналитических векторных расслоения над V, таких, что* $\operatorname{rank}\xi = \operatorname{rank}\eta$. *Пусть P — эллиптический оператор порядка m из ξ в η с аналитическими коэффициентами. Пусть U — открытое подмножество V, такое, что у $V \setminus U$ нет компактных связных компонент. Тогда всякое сечение $u \in C^\infty(U, \xi)$, удовлетворяющее на U уравнению $Pu = 0$, приближается вместе со всеми частными производными равномерно на компактных подмножествах U глобальными сечениями $u_\nu \in C^\infty(V, \xi)$, такими, что $Pu_\nu = 0$ на всем V.*

◀ Пусть K — компактное подмножество U. Заменяя K на $\mathcal{J}(K)$, мы можем считать, что $K = \mathcal{J}(K)$, так как, по предложениям 3.10.2, 3, $\mathcal{J}(K)$ — компакт, принадлежащий U.

Пусть L — компакт в V, такой, что $K \subset \mathring{L}$, и пусть

$$\mathcal{P}(L) = \{s \in H_0(L, \xi)\colon\ Ps = 0 \text{ на } \mathring{L}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}(K)$ множество сужений на K сечений $s \in C^\infty(N, \xi)$, таких, что $Ps = 0$ на N, где N — окрестность K, вообще говоря, зависящая от s; $\mathcal{P}(K)$ мы будем рассматривать как подмножество $H_0(K, \xi)$. Пусть отображение

$$\rho\colon \mathcal{P}(L) \to H_0(K, \xi)$$

задается равенством

$$\rho(s)(x) = \begin{cases} s(x), & \text{если } x \in K, \\ 0, & \text{если } x \notin K, \end{cases}$$

и пусть $M = \rho(\mathscr{P}(L))$. Очевидно, $M \subset \mathscr{P}(K)$. Сначала мы докажем такой факт:

3.10.8. Теорема. *Подмножество M плотно в $\mathscr{P}(K)$.*

◀ Пусть l — непрерывный линейный функционал на $H_0(K, \xi)$, такой, что $l \mid M = 0$. Нам надо показать, что $l \mid \mathscr{P}(K) = 0$. По предложению 3.9.4, существует сечение $s_0' \in H_0(K, \xi')$, такое, что

$$l(s) = \langle s_0', s\rangle_\xi, \qquad s \in H_0(K, \xi).$$

Определим сечение $s' \in H_0(L, \xi')$, полагая

$$s'(x) = \begin{cases} s_0'(x), & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что

$$\langle s', u\rangle_\xi = 0,$$

если $u \in H_0(L, \xi)$ и $Pu = 0$ на $\overset{\circ}{L}$. В самом деле, так как $l \mid M = 0$, то

$$\langle s', u\rangle_\xi = \langle s_0', \rho(u)\rangle_\xi = l(\rho(u)) = 0.$$

По предложению 3.9.9 существует сечение $t' \in H_m(L, \eta')$, такое, что $P't' = s'$. Так как $s'(x) = 0$, если $x \notin K$, то $P't' = 0$ на $V \setminus K$. Так как P' — эллиптический оператор с аналитическими коэффициентами (замечание 3.3.22), то из теоремы 3.9.2 следует, что t' аналитично на $V \setminus K$. Далее, $t'(x) = 0$, если $x \notin L$, и, кроме того, никакая связная компонента $V \setminus K$ не содержится в L, так как $K = \mathscr{J}(K)$. Следовательно, t' равно нулю на непустом открытом подмножестве любой компоненты $V \setminus K$, откуда ввиду аналитичности t' на $V \setminus K$ мы получаем, что $t'(x) = 0$ для любого $x \in V \setminus K$.

Если $s \in \mathscr{P}(K)$ и N — окрестность K, в которой s определено и $Ps = 0$, то

$$l(s) = \langle s_0', s\rangle_\xi = \langle P't', s\rangle_\xi = \int_N B(P't', s) = \int_N B(t', Ps)$$

(так как $P't' = 0$ на $N \setminus K$ и $\operatorname{supp} t'$ — компакт в N), а это равно нулю, так как $Ps = 0$. Таким образом, $l \mid \mathscr{P}(K) = 0$. ▶

Продолжим доказательство теоремы 3.10.7. По теореме 3.9.1 существует последовательность сечений $u_\nu \in C^\infty(\overset{\circ}{L}, \xi)$, таких, что $Pu_\nu = 0$ и $u_\nu \to u$ в $H_0(K, \xi)$. По предложению 3.9.6, u_ν стремятся к u равномерно на K вместе со всеми производными.

Пусть $\{K_\nu\}$ — последовательность компактных подмножеств V, такая, что

$$K \subset \overset{\circ}{K}_1, \qquad K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}, \qquad K_\nu = \mathscr{J}(\overset{\circ}{K}_\nu)$$

(легко показать, что такая последовательность существует). Если $\varepsilon > 0$ задано и $s \in \mathscr{P}(K)$, то из теоремы 3.10.8 следует суще-

ствование сечений $s_\nu \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_{\nu+1}, \xi)$, таких, что

$$Ps_\nu = 0, \quad |s_1 - s|^K < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |s_{\nu+1} - s_\nu|^{K_\nu} < \frac{\varepsilon}{2^\nu};$$

здесь $|\ldots|^{K_\nu}$ означает норму, определяющую топологию в пространстве $H_0(K_\nu, \xi)$, и $|s|^{K_\nu} \leqslant |s|^{K_{\nu+1}}$, если $s \in H_0(K_{\nu+1}, \xi)$. Ряд

$$u = s_\nu + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} (s_\mu - s_{\mu-1})$$

сходится в $H_0(K_\nu, \xi)$, и его сумма не зависит от ν. Более того, по предложению 3.9.6, $u \in C^\infty(V, \xi)$ и $Pu = 0$. Очевидно, $|u - s|^K < \varepsilon$. Таким образом, мы можем найти последовательность $\{u_N\}$ в $C^\infty(V, \xi)$, $Pu_N = 0$, сходящуюся к s в $H_0(K, \xi)$. Остальное следует из предложения 3.9.6. ▶

Из этой теоремы и предложения 3.10.6 мы получаем

3.10.9. Следствие. *Пусть K — компактное подмножество V и $K = \mathcal{J}(K)$. В обозначениях теоремы 3.10.7 всякое решение и уравнения $Pu = 0$ в окрестности K можно равномерно на K вместе со всеми производными аппроксимировать решениями уравнения $Ps = 0$ на всем V.*

3.10.10. Замечание. Можно доказать, что условие $U = \mathcal{J}(U)$ в теореме 3.10.7 также и необходимо для того, чтобы выполнялась эта теорема о приближении. Однако в доказательстве этого факта используется теория существования решений уравнения $Pu = f$, которой мы не касались: см. Мальгранж [1].

Пусть теперь V — комплексное многообразие размерности n и $\mathscr{E}^{p,q}$ — расслоение форм типа (p, q) на V. Мы уже отмечали в примере 3.3.15 (b), что дифференциальный оператор $\bar\partial$ из $\mathscr{E}^{p,0}$ в $\mathscr{E}^{p,1}$ эллиптический; в частности, оператор $\bar\partial$ из ϑ_1 в $\mathscr{E}^{0,1}$ эллиптический. Далее, $\operatorname{rank}\vartheta_1 = 1$, а $\operatorname{rank}\mathscr{E}^{0,1} = n$. Поэтому при $n = 1$ мы можем применить теорему 3.10.7 и тогда получим следующее утверждение.

3.10.11. Теорема Рунге для открытых римановых поверхностей. (Бенке — Штейн.) *Пусть V — связное комплексное многообразие размерности 1 со счетной базой, т. е. открытая риманова поверхность. Пусть U — открытое подмножество V, такое, что в $V \setminus U$ нет компактных связных компонент. Тогда любая голоморфная на U функция равномерно на компактных подмножествах U приближается функциями, голоморфными на V.*

Одним из следствий этой теоремы, имеющим далеко идущие применения, является приводимая ниже теорема 3.10.13. Она до-

казывает, в частности, гипотезу Каратеодори о том, что на любой открытой римановой поверхности существуют непостоянные голоморфные функции.

3.10.12. Определение. Пусть V — комплексное многообразие размерности n и $\mathscr{H} = \mathscr{H}(V)$ — кольцо голоморфных на V функций. Говорят, что V — *многообразие Штейна*, если выполнены следующие три условия:

(a) $\mathscr{H}$ разделяет точки V, т. е. для любых $a, b \in V$, $a \neq b$, найдется $f \in \mathscr{H}$, такая, что $f(a) \neq f(b)$;

(b) если $a \in V$, то существуют функции $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{H}$, такие, что отображение $f\colon V \to \mathbb{C}^n$, определяемое функциями $f_1, \ldots, f_n$, является изоморфизмом некоторой окрестности a на открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, т. е. $f_1, \ldots, f_n$ задают локальные координаты в окрестности a;

(c) для любого компакта $K \subset V$ множество

$$\hat{K} = \hat{K}_{\mathscr{H}} = \{x \in V\colon |f(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ для всех } f \in \mathscr{H}\}$$

— тоже компакт.

3.10.13. Теорема. (Бенке — Штейн.) *Всякая открытая риманова поверхность является многообразием Штейна.*

◀ Пусть V — открытая риманова поверхность и $a, a' \in V$. Пусть (U, φ), (U', φ') — системы координат, $U \cap U' = \varnothing$ и

$$\varphi(U) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} = \varphi'(U'), \quad \varphi(a) = \varphi(a') = 0.$$

Если

$$D = \{x \in U\colon |\varphi(x)| < r < 1\},$$
$$D' = \{x \in U'\colon |\varphi'(x)| < r < 1\},$$

то сразу видно, что $V \setminus D$, $V \setminus D'$ и $(V \setminus D) \setminus D'$ — связные множества, и потому множество $V \setminus \Omega$, где $\Omega = D \cup D'$, не имеет компактных связных компонент. По теореме 3.10.11, функция u на Ω, такая, что

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ 1, & x \in D', \end{cases}$$

равномерно на компакте $K' = \{a\} \cup \{a'\}$ приближается элементами $f \in \mathscr{H}$. В частности, существует $f \in \mathscr{H}$, такая, что $|f(a)| < 1/2$, $|f(a')| > 1/2$. Следовательно, $\mathscr{H}$ разделяет точки V.

Если $a \in V$, (U, φ) — координатная окрестность, указанная выше, и

$$D = \{x \in U\colon |\varphi(x)| < r < 1\}, \quad K = \{x \in U\colon |\varphi(x)| \leqslant r' < r\},$$

то множество $V \setminus D$ связно. Опять по теореме 3.10.11, существует функция $f \in \mathscr{H}$, такая, что

$$\sup_{y \in K} |f(y) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Если ε достаточно мало, то $(df)(a) \neq 0$, откуда следует, что f — локальный гомеоморфизм в окрестности a, т. е. функция f задает локальные координаты в точке a. Что касается условия (c) в определении 3.10.12, то нам достаточно доказать равенство

$$\hat{K}_{\mathcal{H}} = \mathcal{J}(K).$$

Прежде всего, если U — относительно компактная компонента $V \setminus K$, то $\partial U \subset K$. Поэтому из принципа максимума следует, что $U \subset \hat{K}_{\mathcal{H}}$, откуда

$$\mathcal{J}(K) \subset \hat{K}_{\mathcal{H}}.$$

Пусть теперь $a \notin \mathcal{J}(K)$ и $L = \{a\} \cup \mathcal{J}(K)$. Непосредственно видно, что $L = \mathcal{J}(L)$. Поэтому мы применим следствие 3.10.9 к оператору $\bar{\partial}$ из ϑ_1 в $\mathcal{E}^{0,1}$ и получим функцию $f \in \mathcal{H}$, такую, что

$$\sup_{y \in L} |f(y) - u(y)| < 1/2,$$

где

$$u(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ из окрестности } a, \\ 0, & \text{если } y \text{ из окрестности } \mathcal{J}(K). \end{cases}$$

Тогда

$$|f(a)| > \sup_{y \in K} |f(y)|$$

и, значит, $a \notin \hat{K}_{\mathcal{H}}$. Следовательно,

$$\hat{K}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{J}(K). \blacktriangleright$$

Основной результат этого раздела — теорема 3.10.7, принадлежащая Мальгранжу [1] и Лаксу [2]. Применение к открытым римановым поверхностям дано, как у Мальгранжа [1]. Первоначальная трактовка Бенке — Штейна [1] совсем иная, чем эта. Метод Бенке — Штейна намного труднее и существенно использует теорию компактных римановых поверхностей. Однако он имеет то преимущество, что одновременно дает решения так называемых первой и второй проблем Кузена (теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса).

ЛИТЕРАТУРА

Абрахам (Abranam R.)

1. Transversality in manifolds of mappings, *Bull. Am. Math. Soc.*, **69** (1963), 470—474.

Атья (Atiyah M. F.)

1. Immersions and imbeddings of manifolds, *Topology*, **1** (1962), 125—132.

Бенке, Штейн (Behnke H., Stein K.)

1. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Math. Ann.*, **120** (1948), 430—461.

Бишоп (Bishop E.)

1. Mappings of partially analytic spaces, *Am. J. Math.*, **83** (1961), 209—242.

Бурбаки (Bourbaki N.)

1. Алгебра. Модули, кольца, формы, М., 1966. [Гл. VII. Модули над кольцами главных идеалов.]
2. Общая топология. Основные структуры, М., 1958. [Гл. I. Топологические структуры.]
3. Topologie générale, Ch. IX, Utilisation des nombres réels en topologie générale, Hermann, Paris, 1958.

Вейль А. (Weil A.)

1. Sur les théorèmes de deRham, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 119—145.

Вейль Г. (Weyl H.)

1. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math. Ann.*, **77** (1916), 313—352.

Глезер (Glaeser G.)

1. Etudes de quelques algèbres Tayloriennes, *J. d'Analyse* (Jerusalem), **6** (1958), 1—124.

Гординг (Gårding L.)

1. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72.

Грауэрт (Grauert H.)

1. On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, *Ann. Math.*, **68** (1958), 460—472. [Перевод в сб. *Математика,* **4** : **3** (1960), 29—40.]

Гуревич В., Волмэн Г. (Hurewicz W., Wallman H.)

1. Теория размерности, М., 1948.

Дьедонне Ж. (Dieudonné J.)

1. Une généralisation des espaces compacts, *J. Math. Pure Appl.*, **23** (1944), 65—76.

Йон (John F.)
1. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, М., 1958.

Картан А. (Cartan H.)
1. Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 77—79.
2. Séminaire E. N. S.: Topologie différentielle, 1961—1962.

Картан Э. (Cartan E.)
1. Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, Paris, 1958.

Кервер (Kervaire M.)
1. A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 257—270.

Кодаира, Спенсер (Kodaira K., Spencer D. C.)
1. On deformations of complex analytic structures, Part I and II, *Ann. Math.*, **67** (1958), 328—466.

Кон (Kohn J. J.)
1. Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I, *Ann. Math.*, 78 (1963), 206—213.

Котаке, Нарасимхан М. (Kotaké T., Narasimhan M. S.)
1. Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 449—471.

Кошуль (Koszul J. L.)
1. Lectures on fibre bundles and differential geometry, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

Лакс (Lax P.)
1. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 615—633.
2. A stability theorem for abstract differential equations and its application to the study of the local behaviour of solutions of elliptic equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), 747—766.

Мальгранж (Malgrange B.)
1. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1955—1956), 271—355.
2. Идеалы дифференцируемых функций, М., 1968.

Милнор (Milnor J.)
1. On manifolds which are homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.*, **64** (1956), 399—405. [Перевод в сб. *Математика*, **1** : **3** (1957), 35—42.]

Морри, Ниренберг (Morrey C. B., Nirenberg L.)
1. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **10** (1957), 271—290.

Морс (Morse A. P.)
1. The behaviour of a function on its critical set, *Ann. Math.*, **40** (1939), 62—70.

Нарасимхан Р. (Narasimhan R.)
1. Imbedding of holomorphically complete complex spaces, *Amer. J. Math.*, **82** (1960), 917—934. [Перевод в сб. *Математика*, **8** : **6** (1964), 141—156.]

Ниренберг (Nirenberg L.)
1. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 648—674.

Номидзу (Nomizu K.)
1. Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., 1960.

Ньюлендер, Ниренберг (Newlander A., Nirenberg L.)
1. Complex analytic co-ordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.*, **65** (1957), 391—404. [Перевод в сб. *Математика*, **3**:**6** (1959), 131—144.]

Ока (Oka K.)
1. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles, *J. Sci., Hiroshima Univ.*, **6** (1936), 245—255.

Папи (Papy G.)
1. Sur la définition intrinsèque des vecteurs tangents à une variété de classe C^r lorsque $1 \leqslant r < \infty$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **242** (1956), 1573—1575.

Петре (Peetre J.)
1. Rectifications à l'article «Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels», *Math. Scand.*, 8 (1960), 116—120.

Петровский И. Г.
1. Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'equations différentielles, *Матем. сб.*, **5**, № 1 (1939), 3—70.

Реллих (Rellich F.)
1. Ein Satz über mittlere Konvergenz, *Göttingen Nachr.*, (1930), 30—35.

Сард (Sard A.)
1. The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Am. Math. Soc.*, **45** (1942), 883—890.

Серр (Serre J. P.)
1. Exposé 18 in Séminaire H. Cartan, 1953—1954.

Соболев С. Л.
1. Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб., н. с.*, **4**, № 3 (1938), 471—497.

Том (Thom R.)
1. Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (1956), 59—71.

Уитни (Whitney H.)
1. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Am. Math. Soc.*, **36** (1934), 63—89.
2. A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 514—517.
3. Differentiable manifolds, *Ann. Math.*, **37** (1936), 645—680.
4. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, *Ann. Math.*, **45** (1944), 220—246.
5. The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space, *Ann. Math.*, **45** (1944), 247—293.
6. Геометрическая теория интегрирования, М., 1960.

Уолл (Wall C. T. C.)
1. All 3-manifolds imbed in 5-space, *Bull. Amer. Soc.*, **71** (1965), 564—567.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
1. On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 299—325.

Фукс (Fuchs W. H. J.)
1. On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band limited signals, *J. Math. Anal. Appl.*, **9** (1964), 317—330.

Хёрмандер (Hörmander L.)
1. Линейные дифференциальные операторы, М., 1965.
2. The Frobenius Nirenberg theorem, *Arkiv Math.*, **5** (1964), 425—432.
3. Псевдодифференциальные операторы, в сб. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967.
4. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968.

Хефлигер (Haefliger A.)
1. Plongements differentiables de variétés dans variétés, *Comment. Math. Helv.*, **36** (1961), 47—82.

Хирш (Hirsch M. W.)
1. On imbedding differentiable manifolds in Euclidean space, *Ann. Math.*, **73** (1961), 566—571.

Хопф (Hopf H.)
1. Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays presented to R. Courant (Interscience N. Y.), 1948, pp. 167—185.

Шевалле (Chevalley C.)
1. Теория групп Ли, т. 1—3, М., 1948.

Шварц Дж. (Schwartz J.)
1. The formula for change in variables in a multiple integral, *Am. Math. Month.*, **61** (1954), 81—85.

Шварц Л. (Schwartz L.)
1. Théorie des distributions, vol. 1, 2, Hermann, Paris, 1950—1951.
2. Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété, Séminaire Bourbaki, 1963—1964, Exposé 269.

Эрве (Herve M.)
1. Функции многих комплексных переменных, М., 1965.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ