С.М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

I

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Издание третье,
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.16
Н 64
УДК 517

Никольский С. М. **Курс математического анализа.** Т. 1. — 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 464 с.

Учебник для студентов физических и механико-математических специальностей вузов написан на основе курса лекций, читаемого автором в Московском физико-техническом институте. Фактически принят как учебное пособие в некоторых втузах с повышенной программой по математике.

Первый том содержит дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных, ряды и интегральное исчисление для функций одной переменной.

Для третьего издания учебник существенно переработан и дополнен.

Илл.— 83.

Н $\frac{1702050000-105}{053(02)-83}$ 78-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Этот учебник, выходящий в двух томах, соответствует, если не считать некоторых добавлений, программе курса математического анализа, читаемого мною уже много лет в Московском физико-техническом институте.

Первая глава носит вводный характер. В ней на основе интуитивных представлений о пределе вводятся основные понятия математического анализа и даже на основании наглядных и физических соображений устанавливается связь между производной и интегралом и даются элементы техники дифференцирования и интегрирования, нужные читателю, изучающему параллельно физику.

Вторая глава посвящена действительному числу. В основу понятия числа взято его представление в виде бесконечной десятичной дроби. Только часть этой главы — крупный шрифт,— рассматривается как обязательная. При желании она может быть еще уменьшена.

Я придерживаюсь точки зрения, впрочем, традиционной, что основные факты математического анализа сначала должны быть изложены для функций одной переменной, а затем уже для многих переменных. Здесь неизбежны повторения, но они незначительны. С другой стороны, для такой аудитории, какой являются студенты наших мехматов, физматов и физтехов, вполне возможно переходить от одной не к двум и не к трем, а сразу же к n переменным. Весь вопрос тут только в удачных обозначениях. Но они уже выработаны в журнальной и монографической литературе, целесообразность их уже проверена и теперь они должны становиться достоянием наших учебников. Такой подход обеспечивает правильную перспективу. Ведь во второй половине курса,— в таких разделах как ряды Фурье, интеграл Фурье,— читателю придется овладевать представлением о бесконечномерности функциональных пространств.

В своем изложении я достаточно рано ввожу понятие n-мерного евклидова пространства, пространства со скалярным произведением, банахова пространства и широко пользуюсь этими понятиями, однако, в меру необходимости выполнения программы.

Как требуется программами, изложение курса ведется на основе интеграла Римана. Я старался аналогичные теоремы в одномерном и многомерном случаях доказывать аналогично, чтобы сэкономить силы читателя для других вопросов.

Очень деликатный вопрос — как быть с полнотой пространств L и L_2? Чтобы решить этот вопрос, я не строю абстрактные элементы, заменяющие функции, интегрируемые по Лебегу, и в основном тексте ограничиваюсь только разъяснениями о том, как соответствующий факт выглядел бы в терминах интеграла Лебега.

Впрочем, учебник снабжен добавочной главой 19 (том II), посвященной интегралу Лебега. Я уверен, что многие мои читатели по собственной инициативе будут заглядывать в нее. Они от этого ничего не потеряют. Современная математическая физика, которую им придется изучать, нуждается в интеграле Лебега. Например, прямые вариационные методы математической физики немыслимы без употребления интеграла Лебега. К чтению главы 19 читатель будет вполне подготовлен после того как он познакомится с понятием меры Жордана.

Главы 17 и 18 (том II) тоже дополнительные. В главе 18 уделено место таким важным понятиям современного анализа, как усреднение функции по Соболеву и разбиение единицы. По-настоящему они должны входить в обязательные программы повышенных курсов анализа.

Глава 17 посвящена дифференцируемым многообразиям и дифференциальным формам. Кульминационным ее пунктом является доказательство теоремы Стокса в n-мерном пространстве. Эта глава может служить проверкой того, насколько оказался подготовленным читатель, освоивший эту книгу.

Я желал, чтобы мой читатель, освоив курс, легче ориентировался в методах математической физики. Ряд добавлений сделан именно исходя из интересов математической физики. Большое поле деятельности здесь возникает при изложении вопросов, связанных с функциями многих переменных. Здесь наша педагогическая мысль должна еще поработать. Я надеюсь, что и моя книга вносит некоторую лепту в это трудное дело.

Я хочу отметить книги, оказавшие на меня большое влияние.

Во-первых, это «Курс анализа бесконечно малых» Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена. Двухтомник Валле-Пуссена, память которого я хочу здесь почтить, я старательно изучал будучи студентом, а теперь он служит моей настольной книгой.

Во-вторых, это книга «Введение в теорию функций действительного переменного» П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, которую я тоже в свое время старательно изучил и, следуя ей, читал свои курсы в Днепропетровском университете. Но я, кроме того, неоднократно слушал лекции этих двух выдающихся авторов, один из них — А. Н. Колмогоров — мой научный учитель. Выражаю им здесь свою глубокую благодарность.

Я хочу выразить свою признательность коллективу кафедры математики Московского физико-технического института, в котором я работаю двадцать пять лет, в течение которых много

раз обсуждались вопросы преподавания математического анализа. Конечно, при этом я должен особо выделить моих коллег проф. Л. Д. Кудрявцева, заведующего кафедрой, и проф. О. В. Бесова, беседы с которыми были особенно интенсивными.

С первыми главами рукописи книги детально ознакомились мои коллеги проф. Е. А. Волков и проф. Н. И. Лизоркин, отметив имеющиеся там недочеты, которые я устранил. Главу 17, посвященную дифференциальным формам, внимательно прочитал проф. Р. В. Гамкрелидзе; многие его советы я учел. Мне были очень полезны также советы проф. А. А. Дезина, с которым я беседовал по этому вопросу.

Мои официальные рецензенты академик И. Н. Векуа и кафедра математики Московского института электронного машиностроения весьма благожелательно отнеслись к моей книге; они дали ряд полезных советов, которыми я воспользовался.

Я учел, конечно, и советы моего коллеги, редактора книги А. А. Вашарина, тщательно прочитавшего текст рукописи и проверившего его во всех деталях.

Всем указанным лицам я приношу свою глубокую благодарность.

С. М. Никольский

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Для 2-го издания сделаны изменения, носящие чисто педагогический характер (см., в частности, §§ 3.7, 3.8, 5.8, 5.11, 6.2, 6.11, 7.5, 7.12, 7.22, 8.5, 10.10). Иногда они свелись к перераспределению материала внутри параграфа. Менее нужные факты по возможности относились в конец параграфа, чтобы в случае необходимости можно было их опустить без ущерба для понимания дальнейшего текста.

Автор считает существенными следующие недочеты, замеченные в 1-м издании тома I:

стр. 223, строки 5, 6 снизу, следует читать так:

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh}f = \Delta_{yh}[f(x+h, y) - f(x, y)] =$$
$$= h\left[f'_y(x+h, y+\theta h) - f'_y(x, y+\theta h)\right] =$$
$$= h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2\left[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon\right]$$

стр. 173, строки 5, 6 снизу, следует читать так:

α неотрицательное число.

Я благодарю А. А. Вашарина, Ю. С. Никольского, А. М. Полосуева и С. А. Теляковского, обративших мое внимание на некоторые недочеты в 1-м издании.

С. М. Никольский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

3-е издание несколько дополнено. Сравнительно существенным изменениям подверглись § 2.3 (лемма 1), 2.4, 3.4, 3.6, 3.7 (теоремы 2, 3, 6), 3.8, 5.14 (теоремы 1, 2), 7.16 (теорема 1), 7.17 (теорема 1), 7.19, 11.3, 11.6 (теорема 2), 11.7, 11.8, 11.11, 11.12.

Я благодарю О. В. Бесова, Я. С. Бугрова, А. Н. Вейсенберга, Р. В. Гамкрелидзе, В. Т. Лозовика, Ю. С. Никольского, М. С. Никулина, С. А. Теляковского, В. П. Шанькова, сделавших полезные замечания, а иногда обративших мое внимание на недочеты во 2-м издании I и II томов. Есть еще один квалифицированный математик, которого я благодарю за присланные замечания, но его подпись оказалась неразборчивой.

Я благодарю также многих слушателей — студентов Московского физико-технического института, которым я читал из года в год математический анализ, следуя этой книге. К их замечаниям я прислушиваюсь особенно.

2-е издание переведено на другие языки: латышский — издательством Zvaigzne (Riga, 1979), английский — издательством Мир (1975), испанский (первый том) — издательством URMO S. A. de edicional (Bilbao, 1979).

К тому же издательство Мир готовит 2-е издание своего перевода. Переводчики тоже делали замечания. Я благодарю переводчиков на латышский язык У. Гринфельда, Г. Энгелиса и Е. Энгелиса, на английский язык — В. М. Волосова и на испанский язык — Апарисио Бернардо.

1982 *С. М. Никольский*

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Вступление

Название «Математический анализ» представляет собой сокращенное видоизменение старого названия «Анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «Анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин.

Мы говорим «прежде всего», потому что дальнейшее развитие математического анализа привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функции (функционалов, операторов и т. д.). Но об этом говорить пока рано. Ближайшей нашей задачей является изучение достаточно общих, встречающихся на практике функций методами бесконечно малых или, что все равно, методами пределов. В чем заключаются эти методы — это постепенно будет разворачиваться перед читателем в дальнейшем. Скажем пока, что эти методы, в частности, приводят к очень важным операциям над функциями — дифференцирования и интегрирования.

Параграфы 1.2, 1.3 посвящены понятиям множества и функции.

Следующие три параграфа, 1.4 — 1.6, носят чисто вводный характер. Из них читатель получит представление об основных понятиях математического анализа, которые будут подробно в развернутом виде изучаться в этой книге,— непрерывности, производной, неопределенного и определенного интегралов. Понятием предела мы, конечно, здесь пользуемся, но вовсе его пока не определяем и не разъясняем, всецело пока полагаясь на интуицию читателя. Возможен и такой способ чтения книги, при котором параграфы 1.4 — 1.6 выпускаются, с тем чтобы впоследствии возвратиться к ним по мере ссылок на них.

§ 1.2. Множество. Интервал, отрезок

Любое собрание или совокупность каких-либо предметов называют в математике *множеством*. Например, можно говорить о множестве всех деревьев, находящихся на данной поляне, или

о множестве гусей, пасущихся на ней, или о множестве всех целых чисел. Если A обозначает некоторое заданное множество предметов, а x — один из этих предметов, то говорят, что x есть *элемент* множества A и записывают этот факт так: $x \in A$.

Если y не есть элемент A, то это записывают так: $y \overline{\in} A$ или $y \notin A$.

Если одно и то же множество оказалось обозначенным двумя буквами, A и B, пишут $A = B$, подчеркивая в случае необходимости, что здесь идет речь о теоретико-множественном равенстве, которое не надо смешивать с равенством между числами.

Если из того, что $x \in A$, всякий раз следует, что $x \in B$, то пишут $A \subset B$ и говорят, что A *входит* в B или A *есть подмножество или часть* B. Отдадим себе отчет в том, что при таком определении случай $A = B$ есть частный случай $A \subset B$. Ведь если не только $A \subset B$, но и $B \subset A$, то $A = B$, и наоборот.

Если множество состоит только из одного элемента x, то лучше его обозначить другой буквой, например, A, потому, что надо отличать логически множество, состоящее из одного элемента, от самого этого элемента. Необходимо еще формально ввести *пустое множество*, не содержащее в себе никаких элементов, которое обозначают так: $\varnothing$ (или O). По определению $O \subset A$, каково бы ни было множество A.

Из школьного курса математики мы знаем, что между действительными числами и точками прямой можно ввести взаимно однозначное соответствие*) при помощи следующего правила. Числу 0 приводится во взаимно однозначное соответствие произвольно выбранная на прямой точка O — нулевая точка. Длина некоторого определенного отрезка принимается за единицу. Каждому действительному числу $\pm a$ $(a > 0)$ приводится в соответствие точка прямой, отстоящая от нулевой точки на расстоянии, равном a, и лежащая правее или левее O, в зависимости от того, стоит ли перед a знак «+» или «−». Наоборот, если A есть какая-либо точка нашей прямой, отстоящая от 0 на расстоянии a, то ей приводится в соответствие число $+a$ или $-a$, в зависимости от того, лежит ли A правее или левее 0.

Прямая, все точки которой описанным выше образом приведены в соответствие со всеми действительными числами, называется *числовой прямой* или *действительной осью*. Точки ее называются числами, которые они представляют. Таким образом, можно говорить о точке 0, 1, 1,2, $\sqrt{2}$ и т. д. Мы будем позволять себе числа называть *точками* (*числовой прямой*) и, наоборот, точки числами.

Пусть числа (точки) a и b удовлетворяют неравенству $a < b$.

---

*) По этому поводу см. дальше § 2.7.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (с концами a, b) или *сегментом* и обозначается так: $[a, b]$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* (с концами a, b) или *открытым отрезком* и обозначается так: (a, b).

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, обозначаются соответственно $[a, b)$, $(a, b]$ и называются *полуоткрытыми отрезками* или *полуинтервалами*. Первый, например, *закрыт* слева и *открыт* справа.

Часто рассматривают еще множества, называемые *бесконечными интервалами* или *полуинтервалами*: 1) $(-\infty, \infty)$, 2) $(-\infty, a]$, 3) $(-\infty, a)$, 4) (a, ∞), 5) $[a, \infty)$.

Первое из них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая); остальные состоят из всех чисел, для которых соответственно: 2) $x \leqslant a$, 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leqslant x$.

В связи с этой терминологией удобно употреблять слова *конечное* или *бесконечное число*. Конечное число — это просто число. Бесконечное же число на самом деле не есть число — это символ $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что у отрезка $[a, b]$ концы всегда конечны. У интервала же (a, b) «концы» могут быть конечными и бесконечными числами.

Пишут еще

$$[a, b] = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) = \{x\colon a < x < b\}.$$

Например, правая часть первого из этих множественных равенств читается так: множество всех чисел (точек) x, для которых выполняются неравенства $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть A и B — два множества любой природы. *Суммой* или *объединением* A и B называется множество, обозначаемое через $A + B$ или $A \cup B$, представляющее собой совокупность всех элементов A и B.

Разностью A и B называется множество, обозначаемое через $A \setminus B$ (или $A - B$), представляющее собой совокупность всех элементов A, не принадлежащих B.

Пересечением A и B называется множество, обозначаемое через AB или $A \cap B$, представляющее собой совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит как A, так и B.

Справедливо теоретико-множественное равенство

$$(A \pm B)C = AC \pm BC, \tag{1}$$

где A, B, C — произвольные множества. Например, в случае «+» оно доказывается так. Если элемент x принадлежит левой части (1), то он принадлежит одновременно как $A + B$, так и C. Но тогда x обязательно принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Пусть для определенности $x \in A$; тогда $x \in AC$, а сле-

довательно, и правой части (1). Наоборот, пусть x принадлежит правой части равенства; тогда x принадлежит одному из множеств AC или BC. Пусть для определенности $x \in AC$; тогда x принадлежит как A, так и C, следовательно, x принадлежит как $A+B$, так и C, т. е. левой части (1).

Понятие суммы множеств естественно распространяется на любое конечное и даже бесконечное число слагаемых (множеств).

Выражения

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 + \ldots + A_N, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \ldots$$

обозначают объединения всех элементов множеств $A_1, \ldots, A_N$, соответственно $A_1, A_2, \ldots$, и называются *суммами* или *объединениями* указанных множеств.

Справедливы равенства

$$C \bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{N} CA_k, \quad C \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k$$

(аналогичные (1) в случае «+»), где C — произвольное множество.

Примеры.

1) $[0, 2] + [1, 3] = [0, 3]$; 2) $[0, 2] - [1, 3] = [0, 1)$; 3) $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1] = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1) = R$, где R — множество всех действительных чисел.

§ 1.3. Функция

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана *функция* (однозначная), которую записывают так:

$$y = f(x) \qquad (x \in E). \tag{1}$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле*). Множество E называют областью задания или определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому $x \in E$ в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной*. Независимую переменную называют *аргументом*.

---

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Л. Дирихле (1805—1859) немецкий математик.

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество E точек x действительной прямой — *область определения* или *задания функции*, и закон, в силу которого каждой точке $x \in E$ приводится в соответствие число $y = f(x)$.

Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому числу $x \in E$ некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует значению $x \in E$. Если, например, число 1 принадлежит области E задания функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x = 1$. Если 1 не принадлежит E $(1 \overline{\in} E)$, то говорят, что функция f *не определена* в точке $x = 1$.

Множество E_1 всех значений $y = f(x)$, где $x \in E$, называется *образом* множества E при помощи функции f. Иногда пишут в таком случае $E_1 = f(E)$. Но это обозначение надо употреблять с осторожностью, по возможности разъясняя его всякий раз, когда оно употребляется, чтобы не было путаницы с обозначением $y = f(x)$, где x есть произвольная точка (число), принадлежащая множеству E, а y — соответствующая ей при помощи функции (закона f) точка множества E_1. Говорят еще, что функция f *отображает* множество E *на* множество E_1.

Если образ $E_1 = f(E) \subset A$, где A — множество чисел, вообще не совпадающее с E_1, то говорят, что функция f *отображает* E *в* A.

Для функций f и φ, заданных на одном и том же множестве E, определяются *сумма* $f + \varphi$, *разность* $f - \varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* $\frac{f}{\varphi}$. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x) + \varphi(x),\ f(x) - \varphi(x),\ f(x)\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)},\ x \in E, \tag{2}$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляют и любые другие буквы, F, Φ, Ψ, ..., так же как вместо x, y можно писать z, u, v, w, ...

Если функция f отображает множество E в E_1, а функция F отображает множество E_1 во множество E_2, то функцию $z = F(f(x))$ называют *функцией от функции*, или *сложной функцией*, или *суперпозицией* f и F. Она определена на множестве E и отображает E в E_2.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций: $z = F_1(F_2(F_3 \ldots (F_n(x)) \ldots))$.

Практика доставляет нам много примеров функций. Например, площадь S круга есть функция его радиуса r, выражаемая формулой $S = \pi r^2$. Эта функция определена, очевидно, на множестве всех положительных чисел r.

Можно, не связывая вопрос с площадью круга, говорить о зависимости между переменными S и r, выраженной формулой

$S = \pi r^2$. Функция $S = \varphi(r)$, заданная этой формулой, определена на всей действительной оси, т. е. для всех действительных чисел r — не обязательно только положительных.

Ниже приводятся примеры функций, заданных формулами:

$$1)\ y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 4)\ y = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$
$$2)\ y = \lg(1 + x), \quad 5)\ y = \arcsin x.$$
$$3)\ y = x - 1,$$

Мы имеем в виду действительные функции, принимающие действительные значения y для действительных значений аргумента x. Нетрудно видеть, что областями определения приведенных функций являются соответственно:

1) отрезок $[-1, 1] = \{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$;
2) множество $x > -1$;
3) вся действительная ось;
4) вся действительная ось, из которой исключена точка $x = 1$;
5) отрезок $[-1, +1]$.

Функции, определяемые в примерах 1) и 2), можно рассматривать как функции от функции: 1) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - v$, $v = x^2$; 2) $y = \lg u$, $u = 1 + x$.

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную систему координат x, y (рис. 1.1), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобразим любую кривую Γ, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка $x \in [a, b]$, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекает кривую Γ в одной точке A. Такую заданную в прямоугольной (декартовой) системе координат кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1.1). Следовательно, при помощи графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

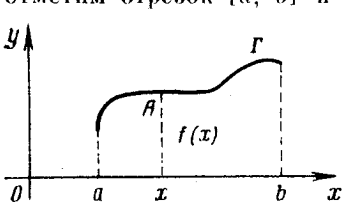

Рис. 1.1.

Мы задали функцию при помощи графика на множестве E, являющемся отрезком $[a, b]$. В других случаях E может быть интервалом, полуинтервалом, всей действительной осью, множеством рациональных точек, принадлежащих к данному интервалу, и т. д.

Зададим на некотором интервале (a, b) функцию $f(x)$ и произвольное (постоянное) число $\alpha \neq 0$. С помощью α и f можно сконструировать ряд других функций: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x) + \alpha$;

3) $f(x-\alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Функции 1) и 2) определены на том же интервале (a, b). Ординаты графика функции 1) увеличены в α раз сравнительно с соответствующими ординатами $f(x)$. График функции 2) получается из графика f поднятием последнего на величину α*); график же функции 3) получается из графика f путем сдвига последнего вправо на величину α. Наконец, функция 4) при $\alpha > 0$ определена, очевидно, на интервале $(a/\alpha, b/\alpha)$; график ее получается из графика f путем равномерного его сжатия в α раз.

Функцию f называют *четной* или *нечетной*, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством $f(-x) = f(x)$ или свойством $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции, очевидно, симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, x^{2k} (k — натуральное), $\cos x$, $\ln|x|$, $\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$ — четные функции, а x^{2k+1} ($k \geqslant 0$ — целое), $\sin x$, $x\sqrt{1+x^2}$, $xf(|kx|)$ — нечетные функции.

Нетрудно видеть, что *произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.*

Конечно, большинство функций не четны и не нечетны.

Функция на различных частях области ее определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t=0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 *км* в час и, прибыв в пункт B, стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 *км* в час. Тогда функция $s = f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t, очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 100t & (0 \leqslant t \leqslant 2), \\ 200 & (2 \leqslant t \leqslant 3), \\ 200 + 80(t-3) & (3 \leqslant t \leqslant 6). \end{cases}$$

Функция может быть задана в виде таблицы. Например, мы могли бы измерять температуру T воздуха через каждый час. Тогда каждому моменту времени $t = 0, 1, 2, \ldots, 24$ соответствовало бы определенное число T в виде таблицы:

t	0	1	2	3	...
T	T_0	T_1	T_2	T_3	...

*) Конечно, при $\alpha < 0$ поднятие или сдвиг вправо на величину α надо понимать как соответственно опускание или сдвиг влево на величину $|\alpha|$.

Таким образом, мы получили бы функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 24, заданную таблицей.

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве E формулой, то всегда можно считать, что ей соответствует вполне определенный график, определяющий геометрически эту функцию. Обратное совсем не ясно: если функция задана произвольным графиком, то может ли она быть выраженной некоторой формулой? Это очень сложный вопрос. Чтобы ответить на него, надо отдать себе отчет в том, какой смысл мы вкладываем в слово формула. Выше, когда мы говорили, что данная функция $y = f(x)$ выражается формулой, мы молчаливо считали, что при этом y получается из x при помощи конечного числа таких операций, как сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня той или иной степени, логарифмирование, взятие операции sin, cos, arcsin и других алгебраических и тригонометрических операций.

Математический анализ дает средства для значительного расширения понятия формулы. Весьма важным таким средством является разложение функции в бесконечный ряд по элементарным функциям.

Многие, а может быть и все, встречающиеся на практике функции могут быть изображены формулой, представляющей собой некоторый бесконечный ряд, членами которого являются элементарные функции, которые будут определены ниже. Но сейчас об этом говорить не время. Мы еще не готовы к этому.

Так или иначе, задана ли функция $f(x)$ формулой или же она задана другим каким-либо способом, например, при помощи графика, она уже может служить объектом изучения средствами математического анализа, если она удовлетворяет некоторым дополнительным общим свойством, таким как непрерывность, монотонность, выпуклость, дифференцируемость и др. Но об этом будет идти речь впереди.

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела, являющееся основным понятием математического анализа. Следующая глава посвящена этому понятию.

Если каждому числу x, принадлежащему данному множеству E чисел, в силу некоторого закона соответствует определенное множество e_x чисел y, то говорят, что этим законом определена *многозначная функция* $y = f(x)$. Если окажется, что e_x для каждого $x \in E$ состоит только из одного числа y, то мы получим однозначную функцию.

Однозначную функцию называют просто «функцией» без добавления прилагательного «однозначная», если только это не приводит к недоразумениям.

Алгебра и тригонометрия доставляют нам примеры многозначных функций; такими являются функции $\sqrt{x}$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$, ...

Функция $\sqrt{x}$ определена для $x \geqslant 0$. Она двузначна*) для $x > 0$: каждому положительному x соответствуют два действительных числа, отличающихся между собой знаками, квадраты которых равны x. Что же касается функции $\operatorname{Arcsin} x$, то она бесконечнозначна. Она приводит в соответствие каждому значению x из отрезка $[-1, +1]$ бесконечное множество значений y, которые могут быть записаны по формуле

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi \qquad (k = 0, 2, \ldots).$$

Выше мы говорили о функциях от одной переменной. Но можно говорить также о функциях двух, трех и вообще n переменных.

Функция от двух переменных определяется следующим образом. Рассматривается множество E пар чисел (x, y). При этом имеются в виду *упорядоченные* пары. Это значит, что две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными (совпадающими) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Если в силу некоторого закона каждой паре $(x, y) \in E$ приведено в соответствие число z, то говорят, что этим определена на множестве E *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных*, x и y.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости, где введена декартова система координат, точка с абсциссой x и ординатой y, и, наоборот, каждой точке таким образом соответствует пара (x, y), то можно говорить, что наша функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Функции $z = f(x, y)$ от двух переменных изображают в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), в виде геометрического места точек $(x, y, f(x, y))$, проекции которых принадлежат множеству E определения f.

Например, таким геометрическим местом для функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

является верхняя половина шаровой поверхности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

В этом же духе можно определить функцию трех переменных. Областью ее определения может теперь служить некоторое множество E упорядоченных троек чисел (x, y, z) или, что все равно, им соответствующих точек трехмерного пространства, где введена декартова система координат.

Если каждой тройке чисел (точке трехмерного пространства) $(x, y, z) \in E$ в силу некоторого закона соответствует число u, то говорят, что этим определена на E функция $u = F(x, y, z)$.

---

*) Впрочем, символ $\sqrt[k]{x}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ мы будем понимать всюду, если это не оговорено особо, как арифметическое значение корня k-й степени из $x \geqslant 0$, т. е. как неотрицательное число, k-я степень которого равна x.

Аналогично можно рассматривать множество E упорядоченных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ из n чисел, где n — заданное натуральное число. Опять, если каждой такой системе, принадлежащей E, соответствует в силу некоторого закона число z, то говорят, что z есть *функция от переменных* $x_1, \ldots, x_n$, определенная на множестве E, и записывают эту функцию в виде $z = F(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае $n > 3$ в нашем распоряжении уже нет реального n-мерного пространства, чтобы использовать его для изображения систем $(x_1, \ldots, x_n)$ в виде принадлежащих ему точек. Но математики выдумали n-мерное пространство, и оно им благополучно служит, и притом не хуже чем реальное трехмерное пространство. Именно, n-мерным пространством называется множество всевозможных систем n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 6.1).

Если две функции, f и φ, от n переменных заданы на одном и том же множестве E систем $(x_1, \ldots, x_n)$ — точек n-мерного пространства,— то можно определить сумму $f + \varphi$, разность $f - \varphi$, произведение $f\varphi$ и частное f/φ как функции, определенные на E при помощи равенств, аналогичных равенствам (2), где надо только числа x заменить системами $(x_1, \ldots, x_n)$. Естественным образом определяются также сложные функции, такие как $f(\varphi(x, y), \psi(x, y, z)) = F(x, y, z)$, где (x, y, z) — тройки чисел, принадлежащих некоторому множеству троек.

Ниже приводится несколько примеров функций многих переменных, заданных посредством элементарных формул.

Пример 1. $u = Ax + By + Cz + D$, где A, B, C, D — заданные постоянные действительные числа, есть линейная функция от трех переменных (x, y, z). Она задана на всем трехмерном пространстве. Более общая линейная функция от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, где $a_1, \ldots, a_n, b$ — заданные постоянные числа. Эта формула определена в любой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, или, как еще говорят, на всем n-мерном пространстве.

Пример 2. $z = \lg \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта действительная функция задана на области, представляющей собой круг радиуса 1 с центром в (0, 0), из которого удалены все граничные точки, т. е. точки окружности радиуса 1 с центром (0, 0). Для этих точек наша функция не определена, потому что $\lg 0$ не имеет смысла.

Пример 3. Функция

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ для } y \geqslant 0, \\ 1 \text{ для } y < 0 \end{cases}$$

геометрически изображается двумя параллельными полуплоскостями, не связанными между собой. Расположение их по отношению к системе координат (x, y, z) очевидно.

Функция от одной переменной может быть задана неявным образом при помощи равенства

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

где F есть функция от двух переменных x и y.

Пусть на некотором множестве G точек (x, y) задана функция F. Равенство (3) определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Конечно, в частности Ω может быть пустым множеством. Пусть Ω — непустое множество, и пусть E есть множество (очевидно, непустое) таких значений x (чисел), которым соответствует хотя бы один y так, что пара x, y принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех чисел x, каждому из которых соответствует непустое множество e_x чисел y так, что $(x, y) \in \Omega$, или, что все равно, так, что для указанной пары (x, y) выполняется равенство (3). Этим определена на множестве E некоторая функция $y = \varphi(x)$ от x, вообще говоря, многозначная. В этом случае говорят, что функция φ *определена неявно* при помощи равенства (3). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \text{ для всех } x \in E.$$

По аналогии можно также определить функцию $x = \psi(y)$ от переменной y, определяемую неявно при помощи равенства (3). Для нее выполняется тождество

$$F(\psi(y), y) \equiv 0 \text{ для всех } y \in E_1,$$

где E_1 есть некоторое множество чисел. Говорят еще, что функция $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) удовлетворяет уравнению (3).

Функцию $x = \psi(y)$ называют *обратной* по отношению к функции $y = \varphi(x)$.

Пример 4. Уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

где $r > 0$ неявно определяет двузначную функцию от одной переменной

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leqslant x \leqslant r);$$

впрочем, при $x = \pm r$ она однозначна.

Естественно считать, что эта двузначная функция распадается на две непрерывные однозначные функции $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$. Графики их (полуокружности) в совокупности дают окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению (4).

Перейдем к более общему n-мерному случаю. Пусть на некотором множестве G точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства задана функция $F(x_1, \ldots, x_n)$. Равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{5}$$

определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Пусть Ω — непустое множество и пусть E — множество (непустое!) таких систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, которым соответствует хотя бы одно значение x_n такое, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, каждой из которых соответствует непустое множе-

ство $e_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$ чисел x_n таких, что $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, или, что все равно, таких, что для $(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется равенство (5) Этим определена на множестве E некоторая функция $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ от $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, вообще говоря, многозначная. Говорят, что функция φ определена неявно при помощи равенства (5). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \equiv 0 \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E.$$

Элементарные функции

1. *Постоянная функция* C. Каждому действительному числу x соответствует y, равный одному и тому же числу C. График этой функции (в прямоугольной системе координат) есть прямая, параллельная оси x, находящаяся на расстоянии $|C|$ от оси x и расположенная выше оси x, если $C > 0$, и ниже оси x, если $C < 0$.

2. *Степенная функция* x^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При n положительном целом функция x^n определена на всей действительной оси. При n отрицательных целых она определена на всей действительной оси, за исключением точки $x = 0$. Неудобно во всех случаях считать 0^0 вполне определенным числом (см. далее § 5.14). Конечно, например, при рассмотрении функции $y = x^0$, может оказаться удобным формально считать, что $0^0 = 1$. Ведь тогда эта функция будет иметь непрерывный график (прямую, параллельную оси x) для всех значений x.

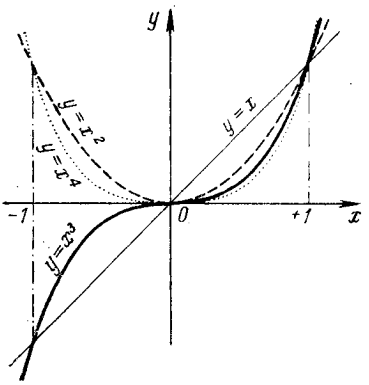

Рис. 1.2.

На рис. 1.2 приведены графики функций $y = x$, x^2, x^3, x^4.

3. *Многочленом степени* n называется функция вида

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — *постоянные коэффициенты* и n есть заданное натуральное число. Многочлен степени n получается из постоянных a_k $(k = 0, \ldots, n)$ и функций $x, x^2, \ldots, x^n$ при помощи конечного числа арифметических действий: сложения, вычитания и умножения.

Многочлен называют также *целой рациональной функцией* (*степени* n). Областью его определения является вся действительная ось.

4. *Рациональной функцией* называется функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ и $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ — некоторые многочлены $(b_m \neq 0)$.

Рациональная функция определена для всех x действительной оси, кроме нулей многочлена Q, т. е. точек x, для которых $Q(x) = 0$. Количество таких точек не превышает m.

Рациональная функция получается из некоторых постоянных и функций вида x^k (k натуральное) путем применения к ним арифметических действий (в конечном числе): сложения, вычитания, умножения и деления.

5. *Степенна́я функция* x^a (a — постоянное число) изучается в школьном курсе алгебры. Однако не все, связанное с этой функцией, полностью обосновывается в обычных школьных курсах алгебры. Например, определение x^a, когда a есть иррациональное число, основано на достаточно тонких понятиях из теории пределов. После того как будет изложена теория пределов, мы вернемся к функции x^a, дадим ее исчерпывающее определение и докажем ее свойства.

6. *Показательная функция* a^x ($a > 0$). Эта функция также известна из школьного курса алгебры. Однако про нее, так же как и про степенну́ю функцию, можно сказать, что связанные с нею определения и свойства обычно не полностью получают обоснование в школьном курсе. Поэтому к функции a^x мы еще вернемся. Обратная к a^x есть функция $\lg_a x$.

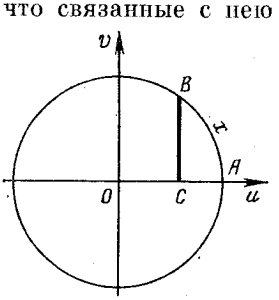

Рис. 1.3.

7. *Функция* $\sin x$ известна читателю из курса тригонометрии. Она определяется там из геометрических соображений. Напомним определение $\sin x$. Зададим число x. Отложим на окружности радиуса 1 от начальной точки A (рис. 1.3) дугу длины $|x|$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если $x > 0$, или в направлении движения часовой стрелки, если $x < 0$. Длина дуги исчисляется в радианах. Пусть B есть конец дуги. Тогда длина перпендикуляра BC к прямой OA, взятая со знаком «+», если B будет выше OA, и со знаком «−», если B будет ниже OA, есть $y = \sin x$.

В этом же известном читателю духе определяются функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{ctg} x$ и устанавливаются их свойства.

Затем определяются обратные *тригонометрические функции* $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, ...

Все перечисленные в пп. 1—7 функции могут быть названы *простейшими элементарными функциями*. Всякая функция, составленная из простейших элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, если количество примененных при этом указанных операций конечно, называется *элементарной функцией*. Такую функцию мы и называем функцией, заданной формулой.

Примеры элементарных функций: $\sin x^2$, $(\sin x)^2$, $\operatorname{tg} \lg \sqrt{1-x^2}$, $\cos n \arccos x$, $x^x = a^{x \lg a^x}$ $(a > 0)$.

Полярная система координат. В плоскости зададим луч OL (*полярную ось*), выходящий из точки O — *полюса полярной системы координат* (рис. 1.4).

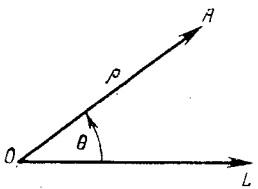

Рис. 1.4.

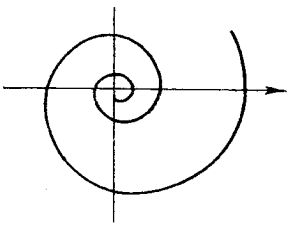

Рис. 1.5.

Произвольная точка A плоскости определяется парой чисел (ρ, θ) — ее *полярными координатами*, где ρ — расстояние A до O, а θ — выраженный в радианах угол между OL и OA. Точка O исключительная. Она определяется парой $(0, \theta)$, где θ — произвольное число. Угол θ отсчитывается против часовой стрелки. Функцию $\rho = f(\theta)$, заданную на интервале (отрезке или произвольном множестве E значений θ) можно интерпретировать как множество точек (ρ, θ) плоскости, где $\theta \in E$, $\rho = f(\theta)$. Многие

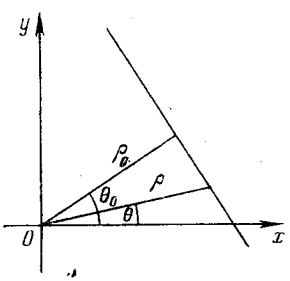

Рис. 1.6.

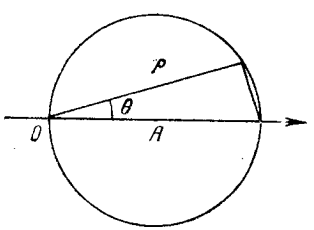

Рис. 1.7.

кривые на плоскости могут быть описаны в полярных координатах соответствующими функциями $\rho = f(\theta)$ (многозначными или однозначными). Например, 1) функция $\rho = a^\theta$ $(a > 0, -\infty < \theta < \infty)$ описывает в полярных координатах спираль Архимеда (рис. 1.5); 2) функция

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \in \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \rho_0 > 0$$

описывает такую прямую, что опущенный на нее из полюса O

перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол θ_0 (рис. 1.6); функция $\rho = 2\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $A(1, 0)$ (рис. 1.7).

§ 1.4. Понятие непрерывности функции

На рис. 1.8 изображен график функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Его естественно назвать непрерывным графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) $x \in [a, b]$. Близкая к ней другая точка $x' \in [a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное

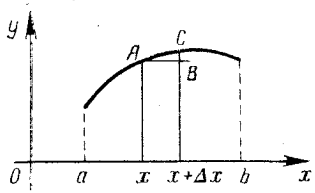

Рис. 1.8.

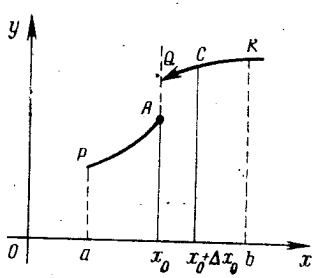

Рис. 1.9.

или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 1.8 Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь график, изображенный на рис. 1.9. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно и потому график естественно назвать разрывным. Чтобы график изображал однозначную функцию $y = F(x)$ в точке x_0, условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение (принадлежащее Коши). Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке x этого отрезка, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx*), стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю.* Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (1) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его.

Если определенная на $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке $x \in [a, b]$, т. е. если для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной* в точке x.

Функция, изображенная на рис. 1.8, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, функция же, изображенная на рис. 1.9, очевидно, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (2) не выполняется, когда $\Delta x_0 \to 0$, оставаясь положительным.

Данное определение непрерывности функции в точке, само по себе совершенно корректное, базируется пока на интуитивном понимании понятия предела. После того как будет изложена теория пределов, это определение, которое может быть расширено и на случай функций многих переменных, получит полное обоснование.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной* на нем.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

---

*) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$.

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например, металлы, воду, воздух. На самом деле, всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например, гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности естественно играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

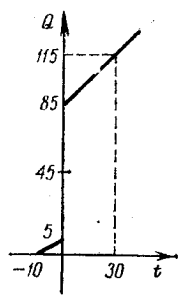

Рис. 1.10.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которым оперирует математический анализ.

Примерами непрерывных функций могут служить элементарные функции, определенные в § 1.3. Они непрерывны на интервалах изменения x, где они определены.

Разрывные функции в математике отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками. Например, зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий, находящегося в ней тепла, когда t изменяется между $-10°$ и $+10°$, если принять условно, что при $-10°$ величина $Q = 0$ выражается следующими формулами:

$$Q(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85, & 0 < t < 30. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной — многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например, $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 1.10.

§ 1.5. Производная

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения. Подобные задачи и задача о вычислении площади криволинейной фигуры интересовали математиков с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

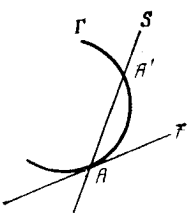

Рис. 1.11.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно — в первой половине прошлого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши.

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

Мгновенная скорость. Пусть точка движется по прямой и функция $s=f(t)$ выражает зависимость от времени $t \in (a, b)$ ее расстояния (с учетом знака*)) s до некоторой начальной точки O прямой. В момент времени $t \in (a, b)$ точка находится на расстоянии $s=f(t)$ от O. В момент же времени $t+\Delta t \in (a, b)(\Delta t \neq 0)$ она находится на расстоянии $s+\Delta s = f(t+\Delta t)$ от O. Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t+\Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную или истинную скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

*) Точнее, s есть координата точки прямой, где заданы начальная точка O, единичный отрезок и положительное направление.

Касательная к кривой. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую*) Г в плоскости или пространстве (рис. 1.11). Пусть A — лежащая на ней точка, и A' — другая лежащая на Г точка. Прямую S, проходящую через A и A', будем называть *секущей* (кривую Г). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Г, неограниченно приближая к A. Тогда секущая S будет вращаться относительно A. Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение вполне определенной (проходящей, очевидно, через A) прямой, которую мы обозначили через T. Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Г имеет в точке A *касательную*. Именно, прямую T называют *касательной* к Г в точке A.

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 1.12. Она состоит из двух гладких**) кусков Γ_1 и Γ_2, соединенных в точке A «под углом». На рисунке на

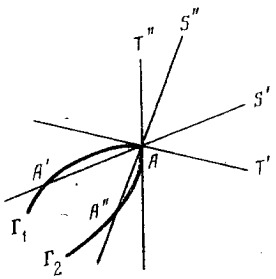

Рис. 1.12.

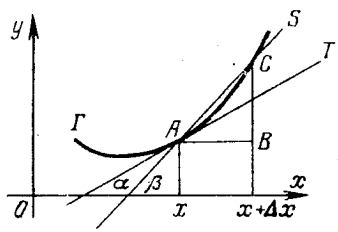

Рис. 1.13.

Г отмечены две другие точки, A', A'', соответственно лежащие на Γ_1, Γ_2; через S' и S'' обозначены проходящие через A', A'' и и A секущие.

Очевидно, что если A', A'', двигаясь соответственно по Γ_1, Γ_2, будут приближаться к A, то секущие S', S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T''. Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A. Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

---

*) Строгое определение непрерывной кривой будет дано в § 6.5. Согласно этому определению произвольная точка $A \in \Gamma$ непрерывно зависит от параметра (числа) t, пробегающего интервал или отрезок. Если точки A, $A' \in \Gamma$ определяются соответственно значениями t, t' параметра и если t' стремится к t, то говорят, что A' стремится (неограниченно приближается) к A, двигаясь по Г.

**) Строгое описание гладкого куска кривой дано в § 6.5.

Пусть теперь кривая Г есть график непрерывной на (a, b) функции (рис. 1.13) $y = f(x)$.

Зададим на Г точку A, имеющую абсциссу x, и другую точку, C, имеющую абсциссу $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$. Секущая S, проходящая через A и C, очевидно, образует с положительным направлением оси x угол β, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Будем Δx стремить к нулю; тогда, вследствие непрерывности f, будет также Δy стремиться к нулю, и точка C, двигаясь по Г, будет стремиться к точке A. Если окажется (этого может и не быть!), что при этом отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \qquad (\Delta x \to 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α. Вместе с β и секущая S, вращаясь около точки A, будет стремиться занять в пределе положение прямой T, проходящей через A под углом α с положительным направлением оси x. Но тогда T есть касательная к Г в точке A и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$

Мы установили, что, *если отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$ *стремится к конечному пределу, то кривая* Г *имеет в точке* A *касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси* x *равен этому пределу.*

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t - \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Производная. Все три рассмотренные задачи, несмотря на то, что они относятся к различным областям человеческого знания — механике, геометрии, теории электричества,— привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над некоторой функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводит задача о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется операцией *дифференцирования функции*. Результат ее называется *производной*.

Итак, *производной от функции f, заданной на некотором интервале (a, b), в точке x этого интервала, называется предел, к которому стремится отношение приращения функции f в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.* Производную принято обозначать так*):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Удобство того или иного из них читатель впоследствии оценит сам.

Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

Скорость в момент t движущейся по числовой прямой точки, координата которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t, равна производной от этой функции $s' = f'(t)$.

Тангенс угла α между касательной к кривой, описываемой функцией $y = f(x)$, в точке, имеющей абсциссу x, и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$.

Сила тока I в проводе в момент t, если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

Некоторые формулы. При натуральном $n = 1, 2, \ldots$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

---

*) Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой* производной от f в точке x. Про функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b.

В самом деле, считая $\Delta x = h$, будем иметь

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1} + \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-2}x + \ldots + \lim_{h\to 0}x^{n-1} = nx^{n-1},$$

где мы снова пользуемся элементарными свойствами пределов, которые будут обоснованы в дальнейшем (см. ниже замечание).

Справедливы также формулы:

$$(\sin ax)' = a\cos ax, \tag{2}$$

$$(\cos ax)' = -a\sin ax, \tag{3}$$

где a — константа. Докажем первое равенство, доказательство второго предоставляем читателю. При $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin a(x+h) - \sin ax}{h} = \lim_{h\to 0}\left[a\,\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\cos\left(ax + \frac{h}{2}\right)\right] =$$

$$= a\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(ax + \frac{h}{2}\right) = a\cdot 1\cdot\cos ax = a\cos ax.$$

Мы воспользовались свойством $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна. Оба эти утверждения будут обоснованы далее (см. § 4.2 и 4.9). При $a = 0$ равенства (2) и (3) выражают, что производная от постоянной равна нулю (см. ниже (4)).

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$.

Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n, где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t.

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике. Это будет видно из дальнейшего.

Отметим, что *постоянное число* C, рассматриваемое как функция от x (см. § 1.3), *имеет производную, равную нулю тождественно* (т. е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C,\ f(x+\Delta x) = C,\ C' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0. \tag{4}$$

Обратное утверждение также верно: *если про функцию известно, что ее производная равна нулю тождественно, $f'(x) \equiv 0$, то она есть постоянная.* Это простое утверждение, чтобы его доказать строго математически, требует уже достаточно серьезного аппарата, с которым мы познакомимся позднее (см. § 5.8). С другой стороны, из механических соображений оно совершенно очевидно. В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) \equiv 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки O равно постоянной при любом t. Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t, не имеет значения — время тоже можно обозначить через x.

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \tag{5}$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \tag{6}$$

В самом деле,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Au(x+h) + Bv(x+h) - [Au(x) + Bv(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(A\,\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(B\,\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right) =$$
$$= A\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + B\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = Au'(x) + Bv'(x). \tag{7}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем,— что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции можно доказать более общее утверждение *):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j'(x),$$

где a_j — постоянные числа, а про функции $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

---

*) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{1}^{n} \alpha_j.$$

Замечание. Формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно доказать по индукции. При $n = 1$ имеем

$$x' = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 = x^0.$$

Если теперь допустить, что формула $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ верна, то получим (см. § 5.1 (5))

$$(x^n)' = (xx^{n-1})' = x'x^{n-1} + x(x^{n-1})' = nx^{n-1}.$$

Отметим формулы (4)—(9) § 5.1 и таблицу § 5.5, которые могут оказаться полезными читателю еще до того как он дойдет до них, изучая предмет систематически.

§ 1.6. Первообразная. Неопределенный интеграл

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная функция f. По определению функция F называется *первообразной функцией* для f на интервале (a, b) *), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Очевидно, что если функция F есть первооразная для f на (a, b), а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b), то они необходимо отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, существует такое (постоянное) число C, что $F_1(x) - F(x) = C$, на (a, b). Отсюда следует (1).

Итак, мы установили, правда, пользуясь механическими соображениями, важный факт: если F есть *какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная

---

*) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$. Надо принять во внимание только сноску на стр. 33.

функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

Из сказанного следует, что если F *есть некоторая определенная первообразная функция для* f *на интервале* (a, b), *то неопределенный интеграл от* f *на этом интервале равен*

$$\int f\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

где C — *соответствующим образом подобранная постоянная.*

Если f_1, f_2 — непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, A_2 — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x))dx = A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + C, \tag{3}$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций от $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$(A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx)' =$$
$$= A_1 (\int f_1(x)dx)' + A_2 (\int f_2(x)dx)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x), \tag{4}$$

потому что интегралы $\int f_1\,dx$, $\int f_2\,dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2. Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \ldots, f_n$ и постоянных $A_1, \ldots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \int f_j(x)\,dx + C. \tag{5}$$

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ вытекает равенство

$$\int (f_1 \pm f_2)\,dx = \int f_1\,dx \pm \int f_2\,dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int Af\,dx = A \int f\,dx + C.$$

Примеры.

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \quad a \neq 0, \tag{7}$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \quad a \neq 0. \tag{8}$$

В самом деле (см. 1.5 (1), (2), (3)),

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}\, a\cos ax = \cos ax,$$

$$-\left(\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \sin ax.$$

Из (5) и (6) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x)\,dx = \sum_0^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

§ 1.7. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной фигуры

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изобразим на рис. 1.14. Поставим задачу: требуется разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$ и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

выберем на каждом из полученных частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей затушеванных прямоугольников (см. рис. 1.14).

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то естественно величину S называть *площадью нашей криволинейной фигуры.*

Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \tag{4}$$

Итак, мы дали определение площади нашей криволинейной фигуры. Возникает вопрос, имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$? В дальнейшем будет доказано, что этот вопрос решается положительно: каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле сделанного определения, выражаемую, таким образом, зависящим от этой фигуры числом S.

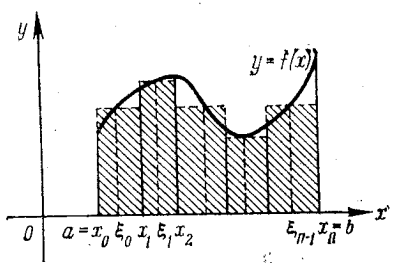

Рис. 1.14.

Другой возникающий здесь вопрос, насколько естественно данное определение площади, как всегда в таких случаях, решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение. У нас будет много случаев убедиться в правильности сделанного определения.

Но обратим внимание на выражение (4). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f, заданной на $[a, b]$, определяется число S. Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Итак, по определению *определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы* (4), *когда максимальный частичный отрезок разбиения* (1) *стремится к нулю.*

В этом определении, которое теперь уже не связано с задачей о нахождении площади, функция f не обязательно непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Надо отметить, что это определение не утверждает существования определенного интеграла для всякой функции f, заданной на $[a, b]$, т. е. существования предела (5). Оно только говорит, что если этот предел существует

для заданной на $[a, b]$ функции f, то он называется определенным интегралом от f на $[a, b]$.

Следует иметь в виду также, что когда говорят, что указанный предел S существует, то подразумевают, что он не зависит от способов разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора на полученных частичных отрезках точек ξ_j. Например, если известно, что определенный интеграл $S = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ от некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$ существует, то он может быть получен, например, при помощи отыскания предела $S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)$ интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_j = j/n$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и выбору в качестве ξ_j левых концов частичных отрезков разбиения.

Но число S может быть получено так же как предел

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\left(\frac{j+1}{n}\right)^2\right)\left[\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]$$

интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ точками $x_j = (j/n)^2$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и выбору в качестве ξ_j правых концов частичных отрезков разбиения. В этом случае длина j-го частичного отрезка удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{2j+1}{n^2} \leqslant \frac{2(n-1)+1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$$
$$(n\to\infty),$$

показывающим, что максимальный из них (самый правый) имеет длину, стремящуюся к нулю вместе с неограниченным возрастанием n.

В теории определенного интеграла доказывается, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т. е. для нее предел (5) существует. Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа имеет площадь.

Пример. Площадь S (рис. 1.15), ограниченная параболой $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$, равна

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{0}^{n-1} k^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Мы показали, что интегральная сумма функции $y = x^2$, соответствующая разбиению $[0, 1]$ на равные части, стремится к числу $1/3$.

Тот факт, что сумма $\sum_{0}^{n-1} (x_j)^2 \Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению [0, 1], стремится к 1/3, когда $\max \Delta x_j \to 0$ непосредственно доказать элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма этих произведений близка к истинной работе на $[a, b]$ и притом тем ближе, чем меньше $\max_j \Delta x_j$.

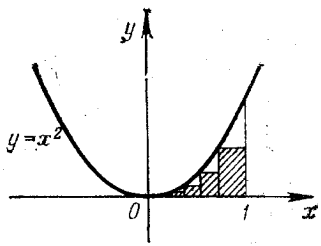

Рис. 1.15.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка равна интегралу

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\,dx, \tag{6}$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j.$$

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (5) связано с трудностями — интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую не легко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они пока-

зали, что вычисление определенного итеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Пусть задана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ есть ее первообразная. Теорема Ньютона и Лейбница утверждает справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{7}$$

показывающего, что если для функции f известна ее первообразная F, то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F.

Эта теорема будет доказана в § 9.9, а сейчас мы дадим ее простое механическое толкование. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения по прямой точки, т. е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leqslant x \leqslant b$, очевидно, равен *)

$$\Lambda = F(b) - F(a). \tag{8}$$

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Lambda = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{9}$$

Ведь произведение $f(x_j)\Delta x_j$ приближенно выражает путь, пройденный точкой на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$, где x_j определены как в (1). Но тогда из (8) и (9) следует (7).

Примеры.

$$\int_a^b x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}\Big|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n) \qquad (n \neq 0),$$

$$\int_a^b \cos \alpha x\,dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}\Big|_a^b = \frac{1}{\alpha}(\sin \alpha b - \sin \alpha a), \qquad \alpha \neq 0.$$

При этом мы считаем, что $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Количество подобных примеров можно значительно увеличить после того, как читатель познакомится с §§ 5.1—5.5, где изложены основы техники дифференцирования элементарных функций.

---

*) Впрочем, термин «путь, пройденный точкой», не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Λ_1, а затем влево, пройдя путь Λ_2, то $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$.

Глава 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 2.1. Рациональные и иррациональные числа

В этой главе мы даем обзор основных свойств (аксиом) действительного числа. Это уместно, потому что среди этих свойств имеются такие, с которыми мы не имели дела в арифметике и школьном курсе алгебры, где рассматриваются операции над постоянными числами. Между тем эти свойства обнаруживаются при рассмотрении *переменных чисел* или, как говорят по традиции,— *переменных величин*.

При изучении функций приходится привлекать свойства чисел во всей их полноте помимо тех свойств, с которыми мы хорошо знакомы из школьной математики.

Целые числа:

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

можно складывать, вычитать и умножать друг на друга, получая снова целые числа.

Рациональные числа будем записывать в виде $\pm p/q$ ($+p/q = p/q$), где p и q целые, $p \geqslant 0$ (p больше или равно нулю) и $q > 0$. Таким образом, если это не оговорено, в выражении p/q мы считаем p и q неотрицательными. Два рациональных числа $\pm p_1/q_1$ и $\pm p_2/q_2$ считаются равными в том и только в том случае, если они имеют одинаковый знак и если $p_1q_2 = q_1p_2$. Выражение $\pm 0/q$ определяет одно и то же число 0 независимо от знака («+» или «−») и числа q. Два неотрицательных числа, p_1/q_1 и p_2/q_2, находятся в отношении

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2},$$

если $p_1q_2 < q_1p_2$. Хорошо известно, как сравниваются рациональные числа с произвольными знаками и как определяются четыре арифметических действия над ними. Нет необходимости это напоминать *).

В практических вычислениях вполне достаточно оперировать только рациональными числами. Однако числа нужны еще для

*) Мы считаем, что читателю известны из школьного курса основные свойства рациональных чисел и только повторяем некоторые из них без доказательства.

целей измерения геометрических и физических величин (длин отрезков, площадей, объемов, температур и т. д.). Мы здесь имеем в виду не практическое приближенное измерение этих величин, а точное (теоретическое) выражение их числами. Для этих целей рациональных чисел уже недостаточно. Рассмотрим, например, отрезок, представляющий собой гипотенузу прямоугольного треугольника с равными катетами длины единица. Если допустить, что длина этого отрезка выражается положительной рациональной дробью p/q, которую будем считать несократимой, то площадь построенного на нем квадрата равна p^2/q^2, а площадь каждого из квадратов, построенных на катетах, равна 1. Тогда в силу теоремы Пифагора получим равенство $p^2=2q^2$. Правая его часть есть целое число, делящееся на 2, но тогда левая должна быть четной, а вместе с ней и p. Отсюда следует, что левая часть делится на 4, но тогда q^2 делится на 2, откуда также q делится на 2. Итак, p и q имеют общий множитель 2, что противоречит предположению, что дробь p/q взята несократимой. Таким образом, имеются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Их называют *несоизмеримыми с единицей*. Чтобы выразить их длины *), появилась необходимость в новых числах, называемых *иррациональными*. Так возникло число $\sqrt{2}$, выражающее длину гипотенузы рассмотренного треугольника.

Существуют различные способы введения иррациональных чисел. Покажем, как можно ввести их при помощи бесконечных десятичных дробей.

Зададим произвольное положительное рациональное число p/q. Превратим его по известным правилам арифметики в десятичную дробь. В результате получим

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \hline \beta_0 & \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots \\ \beta_1 & \\ \ldots & \end{array} \tag{2}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k $(k=1, 2, \ldots)$ — цифры.

Будем писать

$$p/q=\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots=+\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots \tag{3}$$

и называть десятичную дробь в правой части (3) *десятичным разложением числа* p/q.

Легко показать, что десятичное разложение положительного рационального числа не зависит от способа задания последнего, иначе говоря, при замене в (2) p и q соответственно на p_1, q_1,

*) A priori длина и положительное число — разные понятия, но между ними имеется тесная связь, называемая изоморфизмом (см. далее § 2.7).

где $pq_1 = p_1q$, получается в точности то же десятичное разложение $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$.

Будем считать, что дробь p/q несократимая.

Хорошо известно, что если знаменатель дроби p/q имеет вид $q = 2^s5^l$, где s и l — неотрицательные целые числа, то ее десятичное разложение есть *конечная десятичная дробь*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \tag{4}$$

которая, в частности, может оказаться натуральным числом ($p/q = \alpha_0$). Если формально приписать справа к этой десятичной дроби бесконечно много нулей, то она превращается в бесконечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m 000 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (0). \tag{5}$$

Мы называем ее периодической десятичной дробью с периодом 0, потому что в ней цифра 0 периодически повторяется.

Пользуются также и другим представлением конечной десятичной дроби (4) в виде периодической десятичной дроби с периодом 9:

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)99 \ldots =$$
$$= \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)(9) \qquad (\alpha_m > 0), \tag{6}$$

хотя оно и не возникает в процессе (2).

Пусть теперь знаменатель положительной дроби p/q не имеет вид 2^s5^l. Тогда процесс (2) бесконечный — на любом его шаге возникает положительный остаток. Каждый остаток меньше q, и потому после того, как цифры числа p снесены, среди первых q остатков окажется по крайней мере два равных между собой. Но как только возникает остаток, который уже был прежде, процесс становится повторяющимся — *периодическим*. Поэтому десятичное разложение произвольного положительного рационального числа p/q имеет вид

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m\gamma_1 \ldots \gamma_s\gamma_1 \ldots \gamma_s \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (\gamma_1 \ldots \gamma_s). \tag{7}$$

Разложения (5) или (6) можно рассматривать как частные случаи (7). Разложение вида (7) называется положительной десятичной периодической дробью с периодом, представляющим собой группу цифр $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_s$.

Ниже приводятся частные примеры положительных бесконечных десятичных периодических дробей:

$$\frac{1}{6} = 0{,}166\ldots = 0{,}1\,(6), \qquad \frac{1}{7} = 0{,}(142857),$$

$$\frac{2}{9} = 0{,}22\ldots = 0{,}(2), \qquad \frac{7}{99} = 0{,}0707\ldots = 0{,}(07),$$

$$\frac{17}{999} = 0{,}017017\ldots = 0{,}(017), \qquad \frac{7}{990} = 0{,}0070707\ldots = 0{,}0\,(07).$$

В первом примере периодом является цифра 6, во втором — группа цифр 142857, в четвертом — группа цифр 07.

У положительной десятичной дроби хотя бы одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\ldots$ не равно нулю.

Итак, *каждому положительному рациональному числу p/q при помощи процесса* (2) *ставится в соответствие положительная десятичная периодическая дробь с периодом, отличным от* 9 *).

При других вычислениях могут получаться десятичные дроби с периодом 9, но при желании их затем можно записать через соответствующие им конечные десятичные дроби или, что все равно, десятичные дроби с периодом 0.

Верно и обратное утверждение: *каждая положительная десятичная периодическая дробь, если она не имеет период* 9, *может быть получена при помощи процесса* (2) *из некоторой обыкновенной положительной дроби p/q (единственной).*

Например, если дробь 103/330 подвергнуть процессу (2), то получим десятичную периодическую дробь $\frac{103}{330} = 0{,}3\,(12)$. Обратно, эта последняя превращается в исходную дробь при помощи равенств

$$0{,}3\,(12) = \frac{3{,}(12)}{10} = \frac{3 + 0{,}(12)}{10} = \frac{3}{10} + \frac{12}{99\cdot 10} = \frac{309}{990} = \frac{103}{330}.$$

Отрицательному рациональному числу $-p/q$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение числа p/q, взятое со знаком «—».

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие **) $\pm p/q = \pm\,\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ между не равными нулю рациональными числами и бесконечными десятичными не равными нулю периодическими дробями. Каждому не равному нулю рациональному

*) Если допустить, что процесс (2) привел к десятичной дроби с периодом 9, то, начиная с некоторого этапа процесса, остатки γ_k, γ_{k+1} равны между собой, а в частном получаются цифры 9. Но тогда $10\gamma_k = 9q + \gamma_{k+1}$, и так как $\gamma_k = \gamma_{k+1}$, то $\gamma_k = q$. Но этого не может быть, так как $\gamma_k < q$.

**) Если каждому элементу x множества A соответствует определенный элемент y множества B так, что любой элемент $y \in B$ соответствует одному и только одному $x \in A$, то говорят, что этим установлено одно-однозначное или взаимно однозначное соответствие ($x \rightleftarrows y$).

числу соответствует при помощи указанного выше процесса одно и только одно его десятичное бесконечное периодическое разложение, не имеющее периода 9. Обратно, любое такое разложение соответствует при помощи указанного процесса некоторому не равному нулю рациональному числу (единственному).

Числу нуль (оно тоже рациональное) *естественно привести в соответствие разложение* $0 = \pm 0{,}00\ldots = 0{,}00\ldots$

Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например, $0{,}1010010001\ldots$; $0{,}121122111222\ldots$

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим определенную бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k-го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π, с любой наперед заданной точностью. Это приводит к вполне определенному бесконечному десятичному разложению π, которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая дробь*

$$a = \pm\, \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{8}$$

где α_0 — *целое неотрицательное число, а* α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — *цифры, знак же равенства «=» выражает, что мы обозначили правую часть* (8) *через* a. Впрочем, удобно говорить, что правая часть (8) есть десятичное разложение числа a.

Рациональное и иррациональные числа называются действительными (или вещественными) числами.

Из сказанного следует, что *всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби* (8). *Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае согласно нашему определению выражение* (8) *само определяет иррациональное число.*

Число a, *где не все* α_k *равны нулю, называется положительным или отрицательным* в зависимости от того, будет ли в (8) фигурировать «+» или «−»; при этом, как обычно, «+» будем позволять себе опускать.

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «>» и проверить, что эти операции и понятие «>» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «>» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

Определение понятия «>» дается в § 2.2, а определения арифметических операций в § 2.3. В § 2.4 формулируются и доказываются основные свойства числа, распределенные на пять групп I—V. Первые три группы содержат известные свойства, которыми мы руководствуемся при арифметических вычислениях и решениях неравенств. Группа IV составляет одно свойство (*Архимеда*). Наконец, группа V также состоит из одного свойства: существования предела у неубывающей ограниченной последовательности. В сущности, для дальнейшего нам будет важно только знать, что действительные числа (десятичные дроби) суть объекты, для которых определены понятие «>» и арифметические операции, удовлетворяющие свойствам I—V. Поэтому может быть и такой способ чтения книги, когда читатель систематически читает крупный шрифт, только более или менее ознакомившись с мелким шрифтом, где даются доказательства свойств I—V.

Из свойств I—V можно получить логически все остальные свойства числа.

Существует аксиоматический подход к определению действительного числа, заключающийся в том, что числами называются некоторые объекты (вещи) a, b, c, ..., *удовлетворяющие свойствам* I—V. *При таком подходе свойства* I—V *называются аксиомами числа.*

Аксиоматическое построение понятия числа на первый взгляд может показаться более простым. Однако здесь возникает вопрос, совместны ли аксиомы I—V? Чтобы доказать их совместность, появляется необходимость построить формальные символы, для которых можно определить арифметические операции и понятие «>» и проверить, что они удовлетворяют аксиомам I—V. Такими символами как раз и могут служить бесконечные десятичные дроби.

§ 2.2. Определение неравенства

Зададим два числа $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots$, $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, определяемых бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода 9 *). Будем считать, что они равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для положительных a и b по определению, $a < b$ или, что все равно, $b > a$, если $\alpha_0 < \beta_0$, или, если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, l)$ и $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.

---

*) Если число задано десятичной дробью с периодом 9, то его всегда можно записать также в виде десятичной дроби с периодом 0.

По определению, $a > 0$ или $a < 0$ — в зависимости от того, будет ли a положительным или отрицательным, далее по определению, $a < b$, если $a < 0$, $b > 0$, или если a, $b < 0$ и $|a| > |b|$.

Если $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то, по определению, $-a = \mp\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ и абсолютная величина $|a| = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$. Таким образом,

$$|-a| = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a \leqslant 0). \end{cases}$$

Приведенные определения согласованы с соответствующими определениями для рациональных чисел.

§ 2.3. Определение арифметических действий

Пусть каждому неотрицательному целому числу (индексу) n в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. Совокупность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots \tag{1}$$

называется *последовательностью* (чисел). Отдельные числа x_n последовательности (1) называются ее *элементами*. Элементы x_n и x_m при $m \neq n$ считаются отличными как элементы данной последовательности, хотя как числа они могут быть равны между собой, т. е. может быть $x_n = x_m$. *Последовательность* называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_k \leqslant x_{k+1}$ ($x_k \geqslant x_{k+1}$) для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Будем говорить, что *последовательность* (1) *ограничена сверху* (*числом* M), если существует целое число M такое, что $x_k \leqslant M$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Если числа x_k последовательности (1) целые, то будем говорить, что она *стабилизируется* к числу ξ, если найдется такое k_0, что $x_k = \xi$ для всех $k > k_0$.

Очевидно, что *если последовательность целых чисел не убывает и ограничена сверху числом* M, *то она стабилизируется к некоторому целому числу* $\xi \leqslant M$.

Рассмотрим теперь последовательность неотрицательных десятичных дробей

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\ a_2 &= \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\ a_3 &= \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Правые части в (2) образуют таблицу (*бесконечную матрицу*).

Будем говорить, что *последовательность* (2) *стабилизируется к числу* $a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, *и писать*

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

если k-й столбец таблицы (2) *стабилизируется к* γ_k, *каково бы ни было* $k = 0, 1, 2, \ldots$. При этом, очевидно, автоматически оказывается, что γ_0 — целое неотрицательное, а γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — цифры.

Замечание. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots$, где

$$a_{2k} = 1, \underbrace{0 \ldots 0}_{k\text{раз}} 11 \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$a_{2k+1} = 0, \underbrace{9 \ldots 9}_{k\text{раз}} \ldots \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

не стабилизируется. Из § 3.1, где вводится понятие предела, будет ясно, что данная последовательность имеет предел, равный 1 $(a_n \to 1)$. Итак, последовательность десятичных дробей может иметь предел и в то же время не стабилизироваться. Однако из того, что $a_n \rightrightarrows a$, следует, что $a_n \to a$ (см. § 3.1).

Для произвольного числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ введем его *n-ю срезку* $a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, представляющую собой конечную десятичную дробь. Мы считаем, что операции с конечными десятичными дробями читателю известны из курса арифметики.

Зададим положительные числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$, разложенные в бесконечные десятичные дроби.

Введем последовательность чисел

$$a^{(n)} + b^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n = \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_n^{(n)} \qquad (4)$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ниже будет доказана лемма, из которой будет следовать, что эта последовательность стабилизируется к некоторому определенному числу $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$. Его естественно назвать *суммой чисел* a и b и писать $a + b = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots$

Итак, мы определяем сумму $a + b$ как число, для которого

$$a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows a + b. \qquad (5)$$

Произведение, разность и частное чисел a *и* b *определяем следующим образом:*

$$\left(a^{(n)} b^{(n)}\right)^{(n)} \rightrightarrows ab, \qquad (6)$$

$$a^{(n)} - \left(b^{(n)} + 10^{-n}\right) \rightrightarrows a - b \quad (a > b > 0)^{*)}, \qquad (7)$$

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}. \qquad (8)$$

Выражения слева в (5) — (8) не убывают при возрастании n: благодаря этому и ограниченности их сверху они на основании

---

*) $n > n_0$, где n_0 настолько велико, что разность слева в (7) положительна. Отметим, что равенство $(a - b) + b = a (a > b > 0)$ доказывается в § 2.8 после (4), а равенство $a \cdot \frac{1}{a} = 1 (a > 0)$ доказывается на основании § 2.8 (12).