

Вторая теорема Абеля. Если степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (14)$$

имеет радиус сходимости $R < \infty$ и ряд (14) сходится при $x = R$, то функция $f(x)$ непрерывна не только на интервале $(-R, R)$, но и на полуинтервале $(-R, R]$.

В самом деле, общий член ряда (14) можно записать в виде

$$a_n x^n = a_n R^n (x/R)^n,$$

где (постоянные) числа $a_n R^n$ можно рассматривать как члены сходящегося ряда, а функции $(x/R)^n$ образуют невозрастающую на $[0, R]$ ограниченную последовательность ($1 \geq (x/R)^n \geq (x/R)^{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$). Поэтому согласно признаку Абеля (см. § 11.7, теорема 4) ряд (14) непрерывных на отрезке $[0, R]$ функций сходится на нем равномерно, и следовательно, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, R]$.

§ 11.13. Степенные ряды функций e^z , $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной

Функции e^z , $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы рядов:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad (1)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad (2)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (3)$$

Эти ряды сходятся для любого комплексного z , потому что радиус сходимости каждого из них равен ∞ . Таким образом, функции e^z , $\cos z$, $\sin z$ определены на всей комплексной плоскости. Для действительных

$$z = x$$

это определение приводит к известным действительным функциям e^x , $\cos x$, $\sin x$ (см. § 5.11).

Функция e^z обладает важным функциональным свойством:

$$e^{z+u} = e^z e^u \quad (4)$$

для любых комплексных z , u (см. пример в § 11.9).

Очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (5)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad (6)$$

для любого комплексного z .

Равенства (6) называются *формулами Эйлера*. Из (6) и (4) следуют обобщения известных тригонометрических формул:

$$\begin{aligned}\sin(z + u) &= \sin z \cos u + \cos z \sin u, \\ \cos(z + u) &= \cos z \cos u - \sin z \sin u,\end{aligned}$$

теперь уже справедливых для произвольных z и u .

Наконец, из (4) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (7)$$

Функция $z = \ln w$ от комплексной переменной w определяется как обратная функция к функции

$$w = e^z. \quad (8)$$

Если записать $w \neq 0$ в показательной форме

$$w = \rho e^{i\theta} \quad (\rho = |w| > 0),$$

то равенство (8) запишется в виде

$$\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}z = \ln w &= \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i \arg w + i 2k\pi \\ &(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),\end{aligned} \quad (9)$$

где $\ln |w|$ ($|w| > 0$) понимается в обычном смысле. Из (9) видно, что $\ln w$ ($w \neq 0$) есть многозначная функция от w вместе с $\operatorname{Arg} w$, независимо от того, будет ли w действительным или комплексным.

Например, с точки зрения этой теории (функций комплексного переменного) $\ln 1$ равен одному из чисел

$$2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирают среди этих чисел единственное действительное число 0.

Но мы не будем углубляться дальше в теорию функций комплексного переменного — это не наша задача. Сделаем только замечание по поводу формулы

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (-1 < x \leq 1), \quad (10)$$

которая была выведена в § 5.11, для действительных x . Если подставить в ряд в правой части (10) вместо x комплексное z с

$$|z| < 1,$$

то ряд останется сходящимся. Можно сказать, что его сумма равна $\ln(1 + z)$, так как мы его определили выше, точнее, равна

одной из однозначных ветвей многозначной функции

$$\ln(1+z).$$

Функции комплексного переменного, разлагающиеся в степенные ряды (ряды Тейлора), называются *аналитическими функциями*. Они изучаются в разделе математики, называемом теорией аналитических функций или теорией функций комплексного переменного.

В заключение отметим, что если в степенном ряде (по степеням u)

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots \quad (11)$$

с кругом сходимости $|u| < R$ положить $u = z - z_0$, где z_0 — фиксированное число (вообще говоря, комплексное), то получим ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad (12)$$

называемый *степенным рядом по степеням $z - z_0$* . Он сходится в круге (сходимости) $|z - z_0| < R$ и расходится для z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > R$.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функции e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ разлагаются в ряд Тейлора по степеням x для любых значений x ($-\infty < x < \infty$). Эти ряды весьма быстро сходятся к порождающим их функциям.

Например, остаточный член ряда Тейлора функции e^x оценивается, как мы знаем (см. § 5.10), следующим образом:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \right| \leq M(x) \frac{|x|^n}{n!},$$

$$M(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leq 1$, то остаток $R_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю очень быстро. В случае, когда $|x| > 1$, убывание к нулю остатка хотя и имеет место, но много медленнее.

Остаточный член ряда Тейлора функции $\sin x$ по степеням x оценивается следующим образом (см. § 5.10):

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}.$$

Снова, если $|x| < 1$, остаток при $\nu \rightarrow \infty$ стремится к нулю очень быстро. Если же нам понадобится вычислить $\sin x$ для $1 \leq x \leq \pi/2$, то можно воспользоваться разложением

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \frac{(\pi - x)^2}{2!} + \frac{(\pi - x)^4}{4!} - \dots$$

по степеням $\pi/2 - x$, сходящимся для $|\pi/2 - x| < 1$ весьма быстро.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении логарифмов и корней.

Функция $\ln x$. Зададим число $A > 1$. Если $1 < A < 2$, то представим A в виде

$$A = 1 + u \quad (0 < u < 1)$$

и вычислим $\ln A$, воспользовавшись рядом Тейлора функции $\ln(1+u)$ по степеням u :

$$\ln A = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots \quad (1)$$

Если считать приближенно

$$\ln(1+u) \sim u - \frac{u^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{u^{n-1}}{n-1}, \quad (2)$$

то ошибка приближения будет равна

$$R_n(u) = (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{u^{n+1}}{n+1} + \dots,$$

и так как в правой части этого равенства стоит ряд Лейбница (с точностью до знака), то

$$|R_n(u)| \leq \frac{u^n}{n}. \quad (3)$$

Правая часть этого неравенства быстро стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, например, если $u < 0,1$. Чтобы получить при этом условии ошибку, меньшую, чем 10^{-k} , достаточно в приближенном равенстве (2) положить $n = k$. Однако, если бы мы пожелали достигнуть точности, равной 10^{-4} при $u = 1/2$, надо было бы взять $n = 10$:

$$\left| R_n \left(\frac{1}{2} \right) \right| < \frac{(1/2)^{10}}{10} = \frac{1}{10240} < 10^{-4}.$$

Получается много вычислений. А ведь каждый их этап сопровождается еще ошибками другого рода — ошибками вычисления.

Ниже дается способ вычисления натурального логарифма любого числа $A > 1$. Этот способ, даже когда $A < 2$, имеет преимущество перед способом (2).

Имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x| < 1), \end{aligned}$$

откуда следует приближенное равенство

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \sim 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (0 < x < 1) \quad (4)$$

с ошибкой

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{1-x} \right) x^n, \quad (5)$$

которая выводится следующим образом.

Приближенные равенства

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

имеют место с ошибками, не превышающими соответственно

$$\frac{x^{2n+2}}{2n+2}, \quad \frac{x^{2n+2}}{1-x}$$

(см. § 5.10, функция $\ln(1+x)$). Сложив эти ошибки, получим неравенство (5).

Заметим, что функция

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad (0 \leq x < 1)$$

строго монотонно возрастает на полуинтервале $[0, 1)$ и при этом

$$\psi(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \psi(x) = +\infty.$$

Приближенный метод (4) можно порекомендовать и в случае $1 < A < 2$. Например, чтобы вычислить $\ln(3/2)$, решаем уравнение

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}$$

на полуинтервале $[0, 1)$. Получим

$$x = \frac{1}{5} \quad \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{5} ! \right).$$

На основании (4) запишем для примера два приближенных равенства

$$\ln \frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3, \quad (6)$$

$$\ln \frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^5 \quad (7)$$

с ошибками соответственно

$$(n=1) \quad \left| R_3 \left(\frac{1}{5} \right) \right| \leq \frac{1}{935}, \quad (6')$$

$$(n=2) \quad \left| R_5 \left(\frac{1}{5} \right) \right| \leq \frac{1}{11025}. \quad (7')$$

Ряд (3), как мы видим, на этом примере сходится весьма быстро. Для сравнения применим метод (2), где надо положить $u = 1/2$. Имеем, например,

$$\ln \frac{3}{2} \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{60}$$

с ошибкой, не превышающей (см. (3))

$$(n=6) \quad \left| R_6 \left(\frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{(1/2)^6}{6} = \frac{1}{384}.$$

Здесь при вычислении $\ln(3/2)$ было использовано 6 членов ряда Тейлора и при этом получена ошибка, не превышающая $1/384$, что в 3 раза хуже ошибки (6), полученной с использованием только двух членов.

Заметим, что $u > x$. Ведь

$$u = \frac{1+x}{1-x} - 1 > 1 + x - 1 = x.$$

Число $\sqrt[k]{A}$. Пусть надо вычислить $\sqrt[k]{A}$ ($A > 0$) для некоторого натурального числа k . Пусть пока

$$A = 1 + x,$$

где $0 < x < 1$. Тогда мы можем для вычисления данного корня

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{1+x}$$

воспользоваться рядом Тейлора

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{1/k(1/k-1)}{2!}x^2 + \dots \quad (0 < x < 1). \quad (8)$$

Заметим, что n -й член этого ряда получается из $(n-1)$ -го члена умножением последнего на

$$\frac{(1/k) - n + 1}{n} x < 0 \quad (n > 1).$$

Это число отрицательное, и модуль его меньше 1:

$$\frac{|(1/k) - n + 1|}{n} x = \frac{n-1-(1/k)}{n} < 1.$$

Поэтому ряд (8) есть ряд Лейбница и его n -й остаточный член

$$R_n(x) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{k} - n + 1 \right) \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{k} - n \right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| \leq \frac{\left| \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{k} - n + 1 \right) \right|}{n!} x^n = \frac{\frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \left(2 - \frac{1}{k} \right) \dots \left(n - 1 - \frac{1}{k} \right)}{n!} x^n \leq x^n.$$

Таким образом, если считать приближенно, что

$$\sqrt[h]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{k} x + \frac{(1/k)((1/k) - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{(1/k)((1/k) - 1) \dots ((1/k) - n + 2)}{(n-1)!} x^{n-1} \quad (|x| < 1), \quad (9)$$

то ошибка приближения будет удовлетворять неравенству

$$|R_n(x)| \leq x^n.$$

Если x достаточно мало, например $x < 0,1$, то полученный результат вполне удовлетворительный. Если, например, надо вычислить $\sqrt[h]{1+x}$ с точностью до 10^{-5} , можно воспользоваться для этой цели приближенной формулой (9), положив в ней $n = 5$. Мы, таким образом, должны взять сумму первых 5 членов разложения (8).

Однако, если $x = 1/2$, то для получения точности 10^{-5} пришлось бы оставить в ряду (8) 15 членов, потому что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{14} > 10^{-5}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{15} < 10^{-5}.$$

Это очень много. Не надо еще забывать, что с каждым отдельным этапом вычислений накапливается еще ошибка другого рода — ошибка вычислений.

Ниже дается метод решения поставленной задачи, годный для любого положительного числа A . Этот метод заключается в том, что число A записывается в виде произведения

$$A = (1+x)B^h \quad (0 < x < 1),$$

где B подбирается так, чтобы число x было меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sqrt[h]{A} = \sqrt[h]{(1+x)B^h} = B \sqrt[h]{1+x}$$

и вопрос сведется к приближенному вычислению $\sqrt[h]{1+x}$ при $0 < x < \varepsilon$.

Рассуждения можно расположить следующим образом. Задано произвольное натуральное число N . Рассматривая последовательно числа

$$1^h, 2^h, 3^h, 4^h, \dots, \quad (10)$$

находим среди них число M_N^h такое, что

$$M_N^h \leq AN^h < (M_N + 1)^h.$$

Если в левом неравенстве этого соотношения на самом деле $M_N^h = AN^h$, то поставленная задача решена:

$$A = \frac{M_N}{N}.$$

Будем считать далее, что

$$M_N^h < AN^h < (M_N + 1)^h \quad (11)$$

или

$$1 < A \left(\frac{N}{M_N} \right)^h < \left(\frac{M_N + 1}{M_N} \right)^h.$$

Так как $M_N^h < AN^h < A(N+1)^h$ и M_{N+1}^h есть наибольшее число в последовательности (10), не превышающее $A(N+1)^h$, то

$$M_N^h \leq M_{N+1}^h \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Далее из второго неравенства (11) следует

$$N \sqrt[h]{A} < M_N + 1, \quad N \sqrt[h]{A} - 1 < M_N,$$

откуда $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N = \infty$. Но тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N + 1}{M_N} = 1. \quad (12)$$

Имеем

$$\sqrt[h]{A} = \sqrt[h]{A \left(\frac{N}{M_N}\right)^h \left(\frac{M_N}{N}\right)^h} = \frac{M_N}{N} \sqrt[h]{A \left(\frac{N}{M_N}\right)^h} = \frac{M_N}{N} \sqrt[h]{1+x}, \quad (13)$$

где мы положили

$$1+x = A \left(\frac{N}{M_N}\right)^h. \quad (14)$$

Вопрос свелся к вычислению $\sqrt[h]{1+x}$.

В наших рассуждениях N есть произвольное натуральное число. Неравенства (11) можно записать следующим образом:

$$1 < 1+x < \left(\frac{M_N+1}{M_N}\right)^h,$$

где $x = x_N$ зависит от N . Из свойства (12) следует, что при достаточно большом N всегда можно $x = x_N$ сделать меньшим наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 0,1$.

Пример. Надо вычислить $\sqrt[3]{17}$ с точностью до 4-го знака. Возьмем $N = 10$. Очевидно,

$$8000 < 17N^3 = 1700 < 27000.$$

Ясно, что число M_N надо искать, перебирая кубы натуральных чисел, находящиеся между 8000 и 27000. Произведя эту переборку, получим

$$M_N^3 = 25^3 = 15625, \quad (M_N + 1)^3 = 17578,$$

$$M_N^3 < 17N^3 < (M_N + 1)^3.$$

Имеем

$$\sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{17 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^3 \left(\frac{25}{10}\right)^3} = 2,5 \sqrt[3]{17 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^3} \sim 2,5 \sqrt[3]{1+0,1}.$$

Полагая в формуле (9) $n=5$, получим приближенное равенство

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{17} &\approx 1 + \frac{1}{3} (0,1) + \frac{(1/3) ((1/3) - 1)}{2!} (0,1)^2 + \\ &+ \frac{(1/3) ((1/3) - 1) ((1/3) - 2)}{3!} (0,1)^3 + \frac{(1/3) ((1/3) - 1) ((1/3) - 2) ((1/3) - 3)}{4!} (0,1)^4 \end{aligned}$$

с ошибкой

$$R_5 < 10^{-5}.$$

З а м е ч а н и е. В § 5.10 мы исследовали сходимости ряда Тейлора функции $(1+x)^m$ на интервале $(-1, +1)$. Но при некоторых m ряд Тейлора

$$(1+x)^m = 1 + mx^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-1} + \dots \quad (15)$$

может сходиться также на том или ином конце этого интервала -1 или $+1$.

На основании 2-й теоремы Абеля, если степенной ряд (15) сходится при $x=1$, то обязательно к 2^m .

Сходимость же ряда (14) при $x=-1$ указывает на тот факт, что функция $(1+x)^m$ должна быть непрерывна при $x=-1$. Это может быть лишь если $m \geq 0$, и тогда сумма ряда (14) при $x=-1$ равна нулю.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля преобразование 431
— теорема о сходимости степенного ряда 446, 451
— теоремы о рядах 432
Абсолютная величина числа 49, 63
Абсолютно сходящийся интеграл 374
— — ряд 421, 438
Аддитивность интеграла 360
Алгоритм Евклида 328
Аналитическая функция 164, 453
Аргумент (независимая переменная) 16
— комплексного числа 320
Арифметические действия над числами 49, 319
Архимедово свойство чисел 54
Асимптота 207
Асимптотическое равенство 124
Ассоциативный закон сложения чисел 53
— — умножения чисел 53
Астроида 190, 201
- Бескопечная десятичная дробь 44
Бесконечно большая величина (последовательность) 72
— малая величина (последовательность) 72
Бесконечный интервал 15
— полуинтервал 15
— предел 72
Биномиальный дифференциал 343
Бином Ньютона 151, 161
Бинормаль кривой 203
Бореля лемма (о покрытии) 251
Буяковского неравенство 179
- Валлиса формула 389
Вейерштрасса признак равномерной сходимости 429
— теорема 88
— — об ограниченности непрерывной функции 110
— — об экстремальных значениях непрерывной функции 110
Вектор n -мерный 177
Вектор-функция 182
Величина физическая 61
- Верхняя грань точная 64
— сумма Дарбу 352
Винтовая линия 205
Вложенных отрезков лемма 77, 251
Внутренняя точка множества 212
Вышуклость кривой в точке 166
— — на отрезке 168
- Гамильтона оператор (набла) 232
Гармонический ряд 419
Гиперболическая точка 299
Главная нормаль кривой 203
Главное значение интеграла по Коши 387
Главные радиусы кривизны 298
Главный линейный член приращения 132, 224, 236
— степенной член функции 126
Годограф вектор-функции 185
Градиент функции 229
Граница множества 244
График функции 18
- Даламбера признак сходимости ряда 416
Дарбу интегральные суммы 352
Дедекинда сечение 77
Действительная часть комплексного числа 318
Десятичная дробь 44
Дирихле признак 379, 431
— функция 357
— ядро 322
Дифференциал функции 131, 235
Дифференциалы высших порядков 139, 235
Дифференциальный бином 343
Дифференцирование рядов 433
Дифференцируемое многообразие 190
Длина дуги кривой 192, 395, 406
Допустимые параметры гладкой кривой 186
— — поверхности 281
- Евклида алгоритм 328
Евклидово n -мерное пространство 178
 e (число) 76, 120, 158

- Зависимая переменная 16, 140, 236
 Замена переменных 209, 304
 Замкнутое множество 242
 Значение интеграла по Коши 387
 Изолированная точка множества 245
 Изоморфизм 55, 319
 Инвариантность формы первого дифференциала 141, 238
 Интеграл неопределенный 36, 312
 — несобственный 371
 — определенный 38, 350
 — от монотонной функции 357
 — от непрерывной функции 357
 — с переменным верхним пределом 364
 — эллиптический 349
 Интегральная сумма Римана 350
 — теорема о среднем 362
 Интегральные суммы Дарбу 353
 Интегральный признак сходимости рядов 381
 Интегрирование подстановкой 313
 — по частям 316, 378
 — рядов 433
 — тригонометрических выражений 344
 Интервал 13
 Интерполяционный многочлен Лагранжа 398
 Иррациональное число 43
 Касательная 31, 203
 Колебание функции в точке 248
 — — на множестве 353
 Коммутативный закон сложения чисел 53
 — — умножения чисел 53
 Комплексное число 318
 Комплекснозначная функция 324
 Координаты криволинейные 302
 — полярные 26
 Корень (нуль) многочлена 327
 Коши вид остаточного члена формулы Тейлора 155
 — критерий для несобственных интегралов 372
 — — для последовательностей 86
 — — для рядов 413
 — — для функций 97, 214
 — — равномерной сходимости 428
 — неравенство 181
 — признак сходимости ряда 417
 — теорема о среднем 146
 Край поверхности 278
 Кратный ряд 438
 Кривая гладкая 174, 186
 — Жордана 188
 — замкнутая 189
 — Кривая кусочно непрерывная 188
 — непрерывная 188
 — ориентированная 186
 — плоская 188
 — самонепересекающаяся 189
 — спрямляемая 192
 Кривизна кривой 196
 Круг сходимости степенного ряда 443
 Кручение кривой 204
 Куб 211, 213
 Кусочно гладкая функция 174
 Лагранжа вид остаточного члена формулы Тейлора 153, 155, 254
 — теорема о среднем 146
 Лапласа оператор 306
 Лейбница формула 140
 Линейное множество 177
 — нормированное пространство 181
 Лист Мёбиуса 284
 Локальный экстремум 143, 258
 Лопитала правило 169
 Мгновенная скорость 30
 Мнимая часть комплексного числа 319
 Многообразие одномерное 190
 Многочлен 150, 219, 326
 — Тейлора 150
 Множество 13
 — замкнутое 242
 — неограниченное 64
 — ограниченное 64
 —, — сверху 64
 —, — снизу 64
 — открытое 212
 — счетное 89
 Множителей Лагранжа метод 285
 Модуль комплексного числа 319
 — непрерывности 247
 Набла (оператор Гамильтона) 232
 Независимая переменная 16, 140, 236
 Необходимое условие интегрируемости функции 351
 — — сходимости ряда 413
 Неопределенностей раскрытие 169
 Непрерывная вектор-функция 183
 — кривая 185
 — функция 27, 100
 — — комплексного переменного 322
 Неравенство Бернулли 117
 — Коши 180
 — Минковского 181
 — треугольника 181
 — чисел 48
 Несчетность действительных чисел 89

- Неявная функция 23, 262
 Нижний интеграл Дарбу 352
 — предел последовательности 74
 Нижняя грань точная 64
 — сумма Дарбу 352
 Норма элемента 182
 Нормаль (к кривой) 194, 203
 — главная 203
 Пьютона — Лейбница теорема 42, 366

 Область определения функции 17
 Обобщенная производная 250
 Образ посредством функции 17
 Обратная функция 113
 Обратные тригонометрические функции 25, 114
 Объединение (сумма) множеств 15
 Объем тела вращения 394
 Однозначная функция 20
 Односторонние окрестности 105
 — пределы 105
 Окрестность символов ∞ , $+\infty$, $-\infty$ 105
 — точки 95, 212
 Операция дифференцирования 33
 — интегрирования 39
 Ориентированная кривая 186
 Ориентируемая поверхность 279, 282
 Особая точка кривой 292
 Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме 388, 256
 — — — — в форме Коши 154
 — — — — — Лагранжа 154 256
 — — — — — Пеано 156, 256, 257
 Остроградского метод 336
 Отображение 272
 Отрезок (числовой) 13, 59

 Параметр кривой допустимый 186
 Первообразная 36, 312
 Переменная (величина) 16
 — зависимая 16, 140, 236
 — независимая 16, 140, 236
 Переместительный (коммутативный) закон сложения 52
 — (—) — умножения 53
 Пересечение множеств 15
 Плоскость касательная 223
 — соприкасающаяся 202
 Площадь в полярных координатах 393
 — криволинейной фигуры 38
 Поверхность гладкая 275
 — ориентированная 282
 — ориентируемая 282
 —, параметрически заданная 279
 — самопересекающаяся 280
 Подпоследовательность 79

 Подстановки Эйлера 341
 Полином (многочлен) 24, 219, 326
 Полярные координаты 26
 Порядок дифференцирования 139, 222
 — переменной 123
 Последовательность 66
 — бесконечно большая 72
 — — малая 72
 — монотонная 74
 — убывающая 74
 — ограниченная 64
 —, — сверху 49
 — равномерно сходящаяся 427
 — стабилизирующая 49
 — функций (функциональная) 427
 Правило Лопитала 169
 Предел вектор-функции 183
 — по направлению 215, 227
 — последовательности 66
 — — верхний 79
 — — комплексных чисел 322
 — — нижний 79
 — — слева 105
 — — справа 105
 — функции 92, 214
 Предельная точка множества 239
 Преобразование Абеля 431
 Признак равномерной сходимости Абеля 432
 — — — Вейерштрасса 429
 — — — Дирихле 379, 431
 — сходимости Даламбера 416
 — — Коши 417
 — — ряда (интегральный) 380
 Приращение аргумента 27
 — функции 27
 Произведение комплексных чисел 318
 Производная 30, 127
 — бесконечно большая 128
 — в параметрическом виде 187
 — вектор-функции 184
 — высшего порядка 139, 184
 — левая 128
 — обратной функции 135
 — по направлению 228
 — правая 30, 128
 — суперпозиции (функции от функций) 17, 133, 227
 — частная 221
 Производное множество 240
 Пространство евклидово (n -мерное) 178
 — со скалярным произведением 178
 Прямоугольник 211

 Равномерная непрерывность 247
 Равномерно сходящаяся последовательность 427
 — сходящийся ряд 427

- Радиус кривизны 196
 — сходимости степенного ряда 443
 Разность комплексных чисел 318
 — множеств 15
 Разрыв второго рода 109
 — первого рода 109
 Рациональная функция 24, 330
 Рациональное число 43
 Римана интегральная сумма 350
 Ролля теорема о среднем 145
 Ряд 413
 — гармонический 419
 — кратный 438
 — Лейбница 421
 — равномерно сходящийся 427
 — с неотрицательными членами 415
 — степенной 162, 443
 — сходящийся 413
 — — абсолютно 421
 — — безусловно 425
 — — условно 425
 — Тейлора 162, 453
 — функций 427
 Свойство Архимеда вещественных чисел 54
 Система зависимых функций 308
 Скалярное произведение 178
 Скорость мгновенная 30
 Сочетательный (коммутативный) закон сложения 53
 — (—) — умножения 53
 Спрямолинейная кривая 192
 Средняя скорость 30
 Степенная функция 24, 120
 Степенной ряд 162, 443
 Стирлинга формула 389
 Строго возрастающая функция 143
 — убывающая функция 143
 Сумма Дарбу интегральная 352
 — (объединение) множеств 15
 — Римана интегральная 350
 — ряда 413
 — — частичная 413
 Суммирование рядов 442
 Суперпозиция функций 17, 219
 Существование $\sqrt[n]{a}$ 115
 — решения системы уравнений 267
 Счетное множество 89
 Таблица интегралов 313
 — производных 138
 Тейлора многочлен 150
 — ряд 162
 — формула 150
 Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости 429
 Теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции 112
 — — о среднем 146
 — Лагранжа о среднем 146
 — Лебега 358
 — о среднем интегральная 362
 — — Ролля 145
 — Ферма 144
 — Чебышева 343
 Точка возврата кривой 295
 — выпуклости кверху 166
 — — книзу 166
 — гиперболическая 299
 — изолированная 245
 — множества внутренняя 212
 — — граничная 244
 — параболическая 299
 — перегиба 166
 — разрыва 29, 101
 — — второго рода 109
 — — первого рода 108
 — стационарная 286
 — устранимого разрыва 108
 — эллиптическая 299
 — n -мерного пространства 177
 Тригонометрическая форма комплексного числа 320
 Формула Валлиса 389
 — квадратурная 399
 — Лейбница 140
 — Менье 297
 — Ньютона — Лейбница 42, 366
 — Остроградского 336
 — прямоугольников 399
 — Симпсона 402
 — Стирлинга 389
 — Тейлора 150 252
 — трапеций 399
 — Френе 204
 Фундаментальное решение уравнения теплопроводности 235
 Функции эквивалентные 124
 Функционал 401
 — линейный 401
 Функция 16
 — аналитическая 164
 — бесконечно дифференцируемая 164
 — гладкая 174
 — Дирихле 357
 — дифференцируемая 131, 223
 — комплексного переменного 322
 — комплекснозначная от действительного переменного 324
 — кусочно гладкая 174
 — — непрерывная 174
 — логарифмическая 116
 — многих переменных 21

Функция многозначная 20
 — монотонная 106
 — на множестве 245
 —, непрерывная в точке 27, 217
 —, — — — слева 108
 —, — — — справа 108
 —, — на замкнутом ограниченном множестве 245
 — нечетная 19
 — неявная 23, 262
 — обратная 113
 — — тригонометрическая 25
 — показательная 116, 158, 451
 — постоянная 24
 —, разрывная в точке 27
 — рациональная 24
 — сложная 102, 219
 — степенная 24, 120
 — тригонометрическая 25, 158, 409, 451
 — четная 19
 — элементарная 24

Центр кривизны 196
 Циклоида 201

Чисел аксиомы 52
 — свойства 52
 Число действительное 43
 — иррациональное 43
 — комплексное 318
 — рациональное 43, 47
 — e 76, 121, 158
 — π 409

Шар 211, 277, 283

Эвольвента 198
 Эволюта кривой 198
 Эйлера подстановки 341
 Эквивалентные функции 124
 Экстремум локальный 143, 258
 Элемент последовательности 66
 Эллипс 190, 201
 Эллиптические интегралы в форме Лежандра 349

Ядро Дирихле 322
 — Пуассона 337
 Якобиан 267

Сергей Михайлович Никольский

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Редактор *М. М. Горячая*
 Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
 Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11783

Сдано в набор 15.12.82. Подписано к печати 20.06.83.
 Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 30,22.
 Тираж 40 000 экз. Заказ № 438. Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25