Вторая теорема Абеля. *Если степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{14}$$

имеет радиус сходимости $R < \infty$ и ряд (14) сходится при $x = R$, то функция $f(x)$ непрерывна не только на интервале $(-R, R)$, но и на полуинтервале $(-R, R]$.

В самом деле, общий член ряда (14) можно записать в виде

$$a_n x^n = a_n R^n (x/R)^n,$$

где (постоянные) числа $a_n R^n$ можно рассматривать как члены сходящегося ряда, а функции $(x/R)^n$ образуют невозрастающую на $[0, R]$ ограниченную последовательность $(1 \geqslant (x/R)^n \geqslant (x/R)^{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots)$. Поэтому согласно признаку Абеля (см. § 11.7, теорема 4) ряд (14) непрерывных на отрезке $[0, R]$ функций сходится на нем равномерно, и следовательно, его сумма $f(x)$ есть непрерывная функция на $[0, R]$.

§ 11.13. Степенные ряды функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы рядов:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \tag{3}$$

Эти ряды сходятся для любого комплексного z, потому что радиус сходимости каждого из них равен ∞. Таким образом, функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ определены на всей комплексной плоскости. Для действительных

$$z = x$$

это определение приводит к известным действительным функциям e^x, $\cos x$, $\sin x$ (см. § 5.11).

Функция e^z обладает важным функциональным свойством:

$$e^{z+u} = e^z e^u \tag{4}$$

для любых комплексных z, u (см. пример в § 11.9).

Очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \tag{6}$$

для любого комплексного z.

Равенства (6) называются *формулами Эйлера*. Из (6) и (4) следуют обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z+u) = \sin z \cos u + \cos z \sin u,$$

$$\cos(z+u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u,$$

теперь уже справедливых для произвольных z и u.

Наконец, из (4) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

Функция $z = \ln w$ от комплексной переменной w определяется как обратная функция к функции

$$w = e^z. \tag{8}$$

Если записать $w \neq 0$ в показательной форме

$$w = \rho e^{i\theta} \qquad (\rho = |w| > 0),$$

то равенство (8) запишется в виде

$$\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy).$$

Поэтому

$$z = \ln w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w = \ln|w| + i \arg w + i\,2k\pi \tag{9}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где $\ln|w|$ ($|w| > 0$) понимается в обычном смысле. Из (9) видно, что $\ln w$ ($w \neq 0$) есть многозначная функция от w вместе с $\operatorname{Arg} w$, независимо от того, будет ли w действительным или комплексным.

Например, с точки зрения этой теории (функций комплексного переменного) $\ln 1$ равен одному из чисел

$$2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирают среди этих чисел единственное действительное число 0.

Но мы не будем углубляться дальше в теорию функций комплексного переменного — это не наша задача. Сделаем только замечание по поводу формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (-1 < x \leqslant 1), \tag{10}$$

которая была выведена в § 5.11 для действительных x. Если подставить в ряд в правой части (10) вместо x комплексное z с

$$|z| < 1,$$

то ряд останется сходящимся. Можно сказать, что его сумма равна $\ln(1+z)$, так как мы его определили выше, точнее, равна одной из однозначных ветвей многозначной функции

$$\ln(1+z).$$

Функции комплексного переменного, разлагающиеся в степенные ряды (ряды Тейлора), называются *аналитическими функциями*. Они изучаются в разделе математики, называемом теорией аналитических функций или теорией функций комплексного переменного.

В заключение отметим, что если в степенном ряде (по степеням u)

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots \tag{11}$$

с кругом сходимости $|u| < R$ положить $u = z - z_0$, где z_0 — фиксированное число (вообще говоря, комплексное), то получим ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{12}$$

называемый *степенным рядом по степеням* $z - z_0$. Он сходится в круге (сходимости) $|z - z_0| < R$ и расходится для z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > R$.

Дополнение

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ разлагаются в ряд Тейлора по степеням x для любых значений x $(-\infty < x < \infty)$. Эти ряды весьма быстро сходятся к порождающим их функциям.

Например, остаточный член ряда Тейлора функции e^x оценивается, как мы знаем (см. § 5.10), следующим образом:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n!} e^{\theta x}\right| \leqslant M(x) \frac{|x|^n}{n!},$$

$$M(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то остаток $R_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю очень быстро. В случае, когда $|x| > 1$, убывание к нулю остатка хотя и имеет место, но много медленнее.

Остаточный член ряда Тейлора функции $\sin x$ по степеням x оценивается следующим образом (см. § 5.10):

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}.$$

Снова, если $|x| < 1$, остаток при $\nu \to \infty$ стремится к нулю очень быстро. Если же нам понадобится вычислить $\sin x$ для $1 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то можно воспользоваться разложением

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \frac{(\pi - x)^2}{2!} + \frac{(\pi - x)^4}{4!} - \ldots$$

по степеням $\pi/2 - x$, сходящимся для $|\pi/2 - x| < 1$ весьма быстро.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении логарифмов и корней.

Функция $\ln x$. Зададим число $A > 1$. Если $1 < A < 2$, то представим A в виде

$$A = 1 + u \qquad (0 < u < 1)$$

и вычислим $\ln A$, воспользовавшись рядом Тейлора функции $\ln(1+u)$ по степеням u:

$$\ln A = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \tag{1}$$

Если считать приближенно

$$\ln(1+u) \sim u - \frac{u^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{u^{n-1}}{n-1}, \tag{2}$$

то ошибка приближения будет равна

$$R_n(u) = (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{u^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

и так как в правой части этого равенства стоит ряд Лейбница (с точностью до знака), то

$$|R_n(u)| \leqslant \frac{u^n}{n}. \tag{3}$$

Правая часть этого неравенства быстро стремится к нулю при $n \to \infty$, например, если $u < 0{,}1$. Чтобы получить при этом условии ошибку, меньшую, чем 10^{-k}, достаточно в приближенном равенстве (2) положить $n = k$. Однако, если бы мы пожелали достигнуть точности, равной 10^{-4} при $u = 1/2$, надо было бы взять $n = 10$:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{(1/2)^{10}}{10} = \frac{1}{10240} < 10^{-4}.$$

Получается много вычислений. А ведь каждый их этап сопровождается еще ошибками другого рода — ошибками вычисления.

Ниже дается способ вычисления натурального логарифма любого числа $A > 1$. Этот способ, даже когда $A < 2$, имеет преимущество перед способом (2).

Имеем

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\right) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x| < 1),$$

откуда следует приближенное равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \sim 2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (0 < x < 1) \tag{4}$$

с ошибкой

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{1-x}\right)x^n, \tag{5}$$

которая выводится следующим образом.

Приближенные равенства

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

имеют место с ошибками, не превышающими соответственно

$$\frac{x^{2n+2}}{2n+2}, \quad \frac{x^{2n+2}}{1-x}$$

(см. § 5.10, функция $\ln(1+x)$). Сложив эти ошибки, получим неравенство (5).

Заметим, что функция

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

строго монотонно возрастает на полуинтервале $[0, 1)$ и при этом

$$\psi(0) = 1, \qquad \lim_{x \to 1-0}\psi(x) = +\infty.$$

Приближенный метод (4) можно порекомендовать и в случае $1 < A < 2$. Например, чтобы вычислить $\ln(3/2)$, решаем уравнение

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}$$

на полуинтервале [0, 1). Получим

$$x = \frac{1}{5} \quad \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{5}\ !\right).$$

На основании (4) запишем для примера два приближенных равенства

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3, \tag{6}$$

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \tag{7}$$

с ошибками соответственно

$$(n=1) \qquad \left|R_3\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{935}, \tag{6'}$$

$$(n=2) \qquad \left|R_5\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{11025}. \tag{7'}$$

Ряд (3), как мы видим, на этом примере сходится весьма быстро. Для сравнения применим метод (2), где надо положить $u = 1/2$. Имеем, например,

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{60}$$

с ошибкой, не превышающей (см. (3))

$$(n=6) \qquad \left|R_6\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(1/2)^6}{6} = \frac{1}{384}.$$

Здесь при вычислении $\ln(3/2)$ было использовано 6 членов ряда Тейлора и при этом получена ошибка, не превышающая 1/384, что в 3 раза хуже ошибки (6), полученной с использованием только двух членов.

Заметим, что $u > x$. Ведь

$$u = \frac{1+x}{1-x} - 1 > 1 + x - 1 = x.$$

Число $\sqrt[k]{A}$. Пусть надо вычислить $\sqrt[k]{A}$ $(A > 0)$ для некоторого натурального числа k. Пусть пока

$$A = 1 + x,$$

где $0 < x < 1$. Тогда мы можем для вычисления данного корня

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{1+x}$$

воспользоваться рядом Тейлора

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{1/k\,(1/k-1)}{2!}x^2 + \ldots \qquad (0 < x < 1). \tag{8}$$

Заметим, что n-й член этого ряда получается из $(n-1)$-го члена умножением последнего на

$$\frac{(1/k) - n + 1}{n}x < 0 \qquad (n > 1).$$

Это число отрицательное, и модуль его меньше 1:

$$\frac{|(1/k) - n + 1|}{n}x = \frac{n - 1 - (1/k)}{n} < 1.$$

Поэтому ряд (8) есть ряд Лейбница и его n-й остаточный член

$$R_n(x) = \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{n!}x^n + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-n\right)}{(n+1)!}x^{n+1} + \ldots$$

оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{n!}\right| x^n = \frac{\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(2-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(n-1-\frac{1}{k}\right)}{n!} x^n \leqslant x^n.$$

Таким образом, если считать приближенно, что

$$\sqrt[k]{1+x} \approx 1+\frac{1}{k}x+\frac{(1/k)((1/k)-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{(1/k)((1/k)-1)\ldots((1/k)-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} \quad (|x|<1), \tag{9}$$

то ошибка приближения будет удовлетворять неравенству

$$|R_n(x)| \leqslant x^n.$$

Если x достаточно мало, например $x < 0{,}1$, то полученный результат вполне удовлетворительный. Если, например, надо вычислить $\sqrt[k]{1+x}$ с точностью до 10^{-5}, можно воспользоваться для этой цели приближенной формулой (9), положив в ней $n=5$. Мы, таким образом, должны взять сумму первых 5 членов разложения (8).

Однако, если $x = 1/2$, то для получения точности 10^{-5} пришлось бы оставить в ряду (8) 15 членов, потому что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{14} > 10^{-5}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{15} < 10^{-5}.$$

Это очень много. Не надо еще забывать, что с каждым отдельным этапом вычислений накапливается еще ошибка другого рода — ошибка вычислений.

Ниже дается метод решения поставленной задачи, годный для любого положительного числа A. Этот метод заключается в том, что число A записывается в виде произведения

$$A = (1+x)B^k \quad (0 < x < 1),$$

где B подбирается так, чтобы число x было меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{(1+x)B^k} = B\sqrt[k]{1+x}$$

и вопрос сведется к приближенному вычислению $\sqrt[k]{1+x}$ при $0 < x < \varepsilon$.

Рассуждения можно расположить следующим образом. Задано произвольное натуральное число N. Рассматривая последовательно числа

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ 4^k,\ \ldots, \tag{10}$$

находим среди них число M_N^k такое, что

$$M_N^k \leqslant AN^k < (M_N+1)^k.$$

Если в левом неравенстве этого соотношения на самом деле $M_N^k = AN^k$, то поставленная задача решена:

$$A = \frac{M_N}{N}.$$

Будем считать далее, что

$$M_N^k < AN^k < (M_N+1)^k \tag{11}$$

или

$$1 < A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k < \left(\frac{M_N+1}{M_N}\right)^k.$$

Так как $M_N^k < AN^k < A(N+1)^k$ и M_{N+1}^k есть наибольшее число в последовательности (10), не превышающее $A(N+1)^k$, то

$$M_N^k \leqslant M_{N+1}^k \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Далее из второго неравенства (11) следует

$$N\sqrt[k]{A} < M_N + 1, \quad N\sqrt[k]{A} - 1 < M_N,$$

откуда $\lim\limits_{N\to\infty} M_N = \infty$. Но тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M_N + 1}{M_N} = 1. \tag{12}$$

Имеем

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k \left(\frac{M_N}{N}\right)^k} = \frac{M_N}{N}\sqrt[k]{A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k} = \frac{M_N}{N}\sqrt[k]{1+x}, \tag{13}$$

где мы положили

$$1 + x = A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k. \tag{14}$$

Вопрос свелся к вычислению $\sqrt[k]{1+x}$.

В наших рассуждениях N есть произвольное натуральное число. Неравенства (11) можно записать следующим образом:

$$1 < 1 + x < \left(\frac{M_N + 1}{M_N}\right)^k,$$

где $x = x_N$ зависит от N. Из свойства (12) следует, что при достаточно большом N всегда можно $x = x_N$ сделать меньшим наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 0{,}1$.

Пример. Надо вычислить $\sqrt[3]{17}$ с точностью до 4-го знака.

Возьмем $N = 10$. Очевидно,

$$8000 < 17N^3 = 1700 < 27\,000.$$

Ясно, что число M_N надо искать, перебирая кубы натуральных чисел, находящиеся между 8000 и 27 000. Произведя эту переборку, получим

$$M_N^3 = 25^3 = 15625, \quad (M_N + 1)^3 = 17578,$$

$$M_N^3 < 17N^3 < (M_N + 1)^3.$$

Имеем

$$\sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{17\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^3\left(\frac{25}{10}\right)^3} = 2{,}5\sqrt[3]{17\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^3} \sim 2{,}5\sqrt[3]{1 + 0{,}1}.$$

Полагая в формуле (9) $n = 5$, получим приближенное равенство

$$\sqrt[3]{17} \approx 1 + \frac{1}{3}(0{,}1) + \frac{(1/3)((1/3)-1)}{2!}(0{,}1)^2 +$$

$$+ \frac{(1/3)((1/3)-1)((1/3)-2)}{3!}(0{,}1)^3 + \frac{(1/3)((1/3)-1)((1/3)-2)((1/3)-3)}{4!}(0{,}1)^4$$

с ошибкой

$$R_5 < 10^{-5}.$$

Замечание. В § 5.10 мы исследовали сходимости ряда Тейлора функции $(1+x)^m$ на интервале $(-1, +1)$. Но при некоторых m ряд Тейлора

$$(1+x)^m = 1 + mx^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-1} + \ldots \tag{15}$$

может сходиться также на том или ином конце этого интервала -1 или $+1$.

На основании 2-й теоремы Абеля, если степенной ряд (15) сходится при $x = 1$, то обязательно к 2^m.

Сходимость же ряда (14) при $x = -1$ указывает на тот факт, что функция $(1+x)^m$ должна быть непрерывна при $x = -1$. Это может быть лишь если $m \geqslant 0$, и тогда сумма ряда (14) при $x = -1$ равна нулю.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сергей Михайлович Никольский

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

Редактор *М. М. Горячая*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11783

Сдано в набор 15.12.82. Подписано к печати 20.06.83. Формат 60×90[1]/16. Бумага тип. № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 30,22. Тираж 40 000 экз. Заказ № 438. Цена 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25