

доказываемой ниже леммы стабилизируются к определенным числам, которые обозначаются соответственно через ab , $a - b$, a/b . Надо иметь в виду, что $a^{(n)}$ не убывает при неограниченном возрастании n , а $b^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает; кроме того, имеют место неравенства

$$(a^{(n)} b^{(n)})^{(n)} \leq (\alpha_0 + 1)(\beta_0 + 1), \quad a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \leq (\alpha_0 + 1),$$

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} \right)^{(n)} \leq \frac{\alpha_0 + 1}{\beta_0, \beta_1 \dots \beta_s}$$

(где s такое, что $\beta_s > 0$), показывающие, что левые их части ограничены.

Положим еще

$$0 + a = a \pm 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = a - a = \frac{0}{b} = 0 \quad (a \geq 0, b > 0). \quad (9)$$

Мы определили для неотрицательных чисел a , b их сумму, разность, произведение и частное, предполагая в случае разности, что $a \geq b$, и частного, что $b > 0$. Эти определения распространяются обычными способами на числа a и b произвольных знаков. Например, если $a, b \leq 0$, то полагаем $a + b = b + a = -(|a| + |b|)$. Если же a и b — числа разных знаков и $|a| \geq |b|$, то полагаем $a + b = b + a = \pm ||a| - |b||$, где выбирается знак, одинаковый со знаком a . В частности, имеет место

$$a + (-a) = 0 \quad (10)$$

для любого a .

Подобные правила можно было бы привести для остальных арифметических действий, но в этом нет необходимости — они хорошо известны из школьного курса алгебры.

Но, чтобы обосновать сказанное, нам предстоит доказать лемму:

Лемма 1. *Если неубывающая последовательность (2) конечных десятичных дробей (см. § 2.2, (4) и (5)) ограничена сверху целым числом M , то она стабилизируется к некоторому числу a , удовлетворяющему неравенствам*

$$a_n \leq a \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

В самом деле, в условиях леммы целые числа нулевого столбца матрицы (2) также не убывают и ограничены сверху числом M , поэтому они стабилизируются на некотором целом неотрицательном числе $\gamma_0 \leq M$. Рассуждая теперь по индукции, допустим, что уже доказано, что столбцы матрицы (2) с номерами, не превышающими k , стабилизируются соответственно к $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ и

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k \leq M \quad (\gamma_1, \dots, \gamma_k — цифры). \quad (12)$$

Докажем, что $(k+1)$ -й столбец в (2) также стабилизируется к некоторой цифре γ_{k+1} и имеет место неравенство

$$\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k \gamma_{k+1} \leq M. \quad (13)$$

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n при $n > n_1$ при достаточно большом n_1 имеют вид

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k \alpha_{n, k+1} \alpha_{n, k+2} \dots \leq M,$$

и, кроме того, a_n не убывает, то для указанных n цифры $\alpha_{n, k+1}$ (≤ 9) не убывают, и следовательно, стабилизируются при $n \geq n_2$, где n_2 достаточно велико, к некоторой цифре γ_{k+1} . При этом $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_{k+1} \leq a_n \leq M$ ($n \geq n_2$), и мы доказали (13) и тот факт, что $a_n \rightarrow a$. Так как a_n конечная десятичная дробь, то при некотором k для всех $s > k$ цифры $\alpha_{ns} = 0$ и $\alpha_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1} \dots \alpha_{nk} \leq \leq \gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k \leq \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \dots = a$. Не может быть $a > M$. Иначе для некоторого k было бы $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k > M$, что противоречит (12).

§ 2.4. Основные свойства действительных чисел

I. Свойства порядка.

I₁. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

I₂. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (транзитивное свойство знака « $<$ »).

I₃. Если $a < b$, то найдется такое число c , что $a < c < b$.

Свойства I₁ и I₂ вытекают непосредственно из определений знаков « $=$ » и « $<$ ». Если положительные, не имеющие периода 9, числа $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots$ записаны в виде бесконечных дробей и $a < b$, то при некотором s_0

$$\alpha_k = \beta_k, \quad k \leq s_0 - 1 \quad (\text{если } s_0 = 0, \text{ то эти равенства опускаются}), \\ \alpha_{s_0} < \beta_{s_0}.$$

Найдется также $s_1 > s_0$ такое, что $\alpha_{s_1} < \beta_{s_1}$. Если положить $c = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{s_1-1} (\alpha_{s_1} + 1)$, то, очевидно, c — конечная десятичная дробь, удовлетворяющая неравенствам $a < c < b$.

Распространение доказательства I₃ на случай любых a и b не представляет труда.

II. Свойства действий сложения и вычитания*).

II₁. $a + b = b + a$ (переместительное или коммутативное свойство).

*). При аксиоматическом подходе надо еще добавить: каждой паре чисел a, b в силу некоторого закона соответствует число $a + b$, называемое их суммой; при этом выполняются II₁ — II₅. II₃ и II₄ тогда надо видоизменить: существует число 0 (пурль) такое, что $a + 0 = a$ для всех a , так же как существует для каждого a число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$. Единствен-

Π_2 . $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

Π_3 . $a + 0 = a$.

Π_4 . $a + (-a) = 0$.

Π_5 . Из $a < b$ следует, что $a + c < b + c$ для любого c .

Доказательство этих свойств достаточно привести для положительных чисел a , b , c . Тогда эти свойства автоматически переносятся на числа любого знака, как это хорошо известно из элементарной алгебры. Итак, пусть $a, b, c > 0$.

Свойство Π_1 следует на основании § 2.3, (5) из того, что оно верно для конечных дробей: $a^{(n)} + b^{(n)} = b^{(n)} + a^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Свойства Π_3 и Π_4 непосредственно вытекают из сделанных выше определений (см. § 2.3, (9) и (10)).

Доказательство Π_2 см. в § 2.8. Свойство Π_5 очевидно, когда a и b — конечные десятичные дроби. Пусть теперь a и b произвольны. Выберем конечную десятичную дробь d такую, что $a < d < b$. Тогда при достаточно больших n имеем $a^{(n)} < d < b^{(n)}$, и, так как все это конечные дроби, то $a^{(n)} + c < d + c < b^{(n)} + c$. С ростом n срезки $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ не убывают, поэтому $a + c \leq d + c < b + c$, откуда $a + c < b + c$.

Равенство Π_1 тривиально, если a или b равно нулю (см. § 2.3 (9)).

III . Свойства действий умножения и деления*).

III_1 . $ab = ba$ (переместительное или коммутативное свойство).

III_2 . $ab(c) = a(bc)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

III_3 . $a \cdot 1 = a$.

III_4 . $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$),

III_5 . $(a + b)c = ac + bc$ (распределительный или дистрибутивный закон).

Ноль нуля может быть выведена логически из рассматриваемых аксиом: допущение существования другого нуля $0'$ влечет, что $0' = 0' + 0 = 0 + +0' = 0$. Выводится также из аксиом существование разности $a - b$, т. е. числа, которое надо добавить к b , чтобы получить a . Это число есть $a + (-b)$, потому что $a + (-b) + b = a + 0 = a$. Оно единственное, потому что если $b + c = b + c'$, то $c = (-b) + b + c = (-b) + b + c' = c'$.

*). При аксиоматическом подходе надо добавить: каждой паре a, b в силу определенного закона соответствует число ab , называемое произведением a и b . При этом выполняются свойства $\text{III}_1 - \text{III}_6$. Надо еще видоизменить III_3 и III_4 : существует число 1 (единица), отличное от 0 и такое, что $a \cdot 1 = a$ для всех a ; существует для любого $a \neq 0$ число $1/a$ такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Единственность единицы выводится логически из рассматриваемых аксиом так же, как существование и единственность частного a/b ($b \neq 0$), т. е. числа, которое надо умножить на b , чтобы получить a .

Выход вполне аналогичен выводу в сноске к II, где 0 надо заменить на 1 и действие сложения на умножение. При этом автоматически $1 > 0$; ведь если допустить, что $1 < 0$, то (см. II_4, II_5) $0 = 1 + (-1) < -1$ и (см. II_6) $1(-1) < 0(-1)$, т. е. (см. III_3) $-1 < 0$, и мы получим противоречие: $-1 < 0 < -1$. Надо учесть, что

$$0 \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0(-1 + 1 + 1) = 0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 1 = 0.$$

III₆. Из $a < b$, $c > 0$ следует $ac < bc$.

По тем же соображениям, что и для свойств II, существенно проверить III в случае только положительных a , b , c (см. § 2.8).

IV. Архimedово свойство.

Каково бы ни было число $c > 0$, существует натуральное $n > \frac{c}{\epsilon}$. В самом деле, если $c = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$, то можно взять $n = \alpha_0 + 2$.

Из архimedова свойства и некоторых предыдущих свойств следует, что, каково бы ни было положительное число ϵ , всегда можно указать такое натуральное n , что выполняется неравенство $1/n < \epsilon$.

В самом деле, согласно IV для числа $1/\epsilon$ можно указать натуральное n такое, что $1/\epsilon < n$, что в силу III₆ влечет нужное неравенство.

Заметим, что для данного числа $c \geq 0$ в ряду $0, 1, 2, \dots$ целых неотрицательных чисел, очевидно, имеется единственное m , для которого выполняются неравенства $m \leq c < m + 1$.

V. Свойство существования предела у неубывающей ограниченной последовательности действительных чисел.

Если последовательность положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (1)$$

не убывает и ограничена сверху числом M , то существует действительное число a , не превышающее M , к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \leq M. \quad (2)$$

Это значит, что для всякого $\epsilon > 0$ найдется натуральное число n_0 такое, что $|a - a_n| = a - a_n < \epsilon$ для всех $n > n_0$.

Доказательство. Каждый элемент a_n последовательности (1) разложим в бесконечную десятичную дробь:

$$a_n = a_{n,0}, a_{n,1} a_{n,2} a_{n,3} \dots . \quad (3)$$

Последовательность чисел (3) ограничена сверху числом M ($a_n \leq M$) и не убывает, поэтому на основании леммы 1 из § 2.3 последовательность десятичных дробей (3) стабилизируется к некоторому числу $a \leq M$:

$$a_n \rightharpoonup a = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \dots .$$

Но тогда a_n стремится к a как к своему пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

В самом деле, для любого $\epsilon > 0$ найдется натуральное m такое, что $10^{-m} < \epsilon$. Так как a_n стабилизируется к a , то найдется

n_0 такое, что при $n > n_0$ первые m компонент чисел a_n уже стабилизированы:

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_m \alpha_{n, m+1} \alpha_{n, m+2} \dots,$$

т. е. равны соответственно первым m компонентам числа a . Но тогда

$$|a - a_n| = a - a_n = 0, 0 \dots 0 \alpha_{n, m+1} \alpha_{n, m+2} \dots \leq 10^{-m} < \varepsilon \quad (n > n_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из I—V следует более общее чем V свойство, утверждающее, что всякая монотонная, т. е. неубывающая или невозрастающая, ограниченная последовательность не обязательно положительных чисел имеет предел (конечный; см. далее § 3.4). Пусть R есть множество всех рациональных чисел. В R свойства I—IV выполняются, однако свойство V не всегда выполняется, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ есть произвольное положительное иррациональное число, а

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

его n -е срезки. Числа $a^{(n)}$ рациональные и образуют ограниченную сверху числом a последовательность. При этом их десятичные разложения стабилизируются к десятичному разложению числа a . Но тогда, как мы знаем,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a.$$

Таким образом, числа $a^{(n)}$ принадлежат R , но предел их последовательности не принадлежит R , а если учесть, что предел у последовательности может быть только один (см. далее § 3.1), то получим: для R свойство V, вообще говоря, не выполняется.

§ 2.5. Изоморфизм различных представлений действительных чисел.

Длина отрезка, физические величины

В предыдущих параграфах были определены действительные числа a, b, c, \dots в виде бесконечных десятичных разложений и было установлено, что они удовлетворяют свойствам, составляющим указанные выше группы I—V (коротко, свойствам I—V).

Но мы могли бы, рассуждая аналогично, определить бесконечные двоичные или троичные (вообще n -ичные) разложения a', b', c', \dots и ввести для них понятия « $>$ » и операции сложения « $+$ » и умножения « \cdot ». При проверке оказалось бы, что эти новые объекты тоже удовлетворяют свойствам I—V.

Отметим еще так называемые дедекиндовы сечения во множестве рациональных чисел. Во многих учебниках именно на их основе определяют действительные числа (см. Н. С. Александров и А. И. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, ГТТИ, 1938, а также Г. М. Фихтен-

гольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, «Наука», 1970).

Всевозможные дедекиндовы сечения a' , b' , c' , ... предста-
вляют собой не что иное, как разложения всего множества рацио-
нальных чисел на два непустых класса \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , где любое число
класса \mathfrak{A} меньше любого числа класса \mathfrak{B} . Оказывается, что для
дедекиндовских сечений можно определить понятия « $>$ », « $+$ », « \cdot »
и установить, что с этими определениями они удовлетворяют
свойствам I—V.

Наконец, отметим, что при определении действительных чисел
иногда считают удобным вводить (см. В. В. Немыцкий,
М. И. Слудская и А. Н. Черкасов, Курс математического
анализа, т. I, Физматгиз, 1957) так называемые фундаментальные
последовательности рациональных чисел. Существенно разные
(в известном смысле) такие последовательности обозначают сим-
волами a' , b' , c' ..., вводят для них понятия « $>$ », « $+$ », « \cdot » и до-
казывают, что они удовлетворяют свойствам I—V.

Важно отметить, что все указанные определения действитель-
ных чисел с формальной точки зрения не отличаются друг от
друга. Это следует из формулируемой ниже теоремы, которую
можно назвать *теоремой об изоморфизме множеств, удовлетворя-
ющих условиям I—V*.

Понятие *изоморфизм*, точнее, *изоморфизм относительно свойств*
« $>$ », « $+$ », « \cdot », \lim (предел) будет разъяснено ниже попутно.

Теорема 1. Пусть E есть множество десятичных дробей a ,
 b , c , ... и E' есть множество элементов a' , b' , c' , ..., для кото-
рых определены понятия больше (« $>$ ») и операции сложения
(« $+$ ») и умножения (« \cdot ») так, что выполняются свойства I—V.

Тогда между элементами $a \in E$ и $a' \in E'$ можно указать вза-
имно однозначное соответствие

$$a \sim a',$$

являющееся изоморфизмом по отношению к понятию « $>$ », ариф-
метическим действиям и понятию предела.

Это значит, что, если

$$\left. \begin{aligned} &a \sim a', \quad b \sim b', \\ &a \pm b \sim a' \pm b', \\ &ab \sim a'b' \\ &\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad (b \neq 0), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

если при этом $a < b$, то $a' < b'$.

Наконец, для ограниченной сверху неубывающей последова-
тельности элементов $a_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$) имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sim \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n. \quad (2)$$

Таким образом, будем ли мы оперировать десятичными разложениями a, b, c, \dots или им соответствующими элементами a', b', c', \dots , если это оперирование сводится к арифметическим действиям, взятым в конечном числе, или к нахождению предела неубывающей последовательности, мы каждый раз будем приходить к элементам d и d' , находящимся в указанном выше соответствии $d \sim d'$.

Таким образом, все определенные выше конкретные множества (дедекиндовых сечений, фундаментальных последовательностей, бесконечных двоичных разложений и т. д.) изоморфны между собой в указанном смысле.

Это указывает на возможность корректно определить понятие действительного числа аксиоматически в том смысле, как это уже было определено в конце § 2.1.

Из сказанного следует, что с формальной точки зрения все равно, исходим ли мы при определении действительных чисел из бесконечных десятичных дробей или из аксиоматического подхода к понятию числа. Конечно, с философской точки зрения второй подход более приемлем: числа суть абстракции, выраждающие количественные отношения в природе, а десятичные дроби — их представляющие формальные символы.

Приведем основные факты, связанные с доказательством теоремы об изоморфизме.

Пусть E есть множество всех действительных чисел и E' — множество, вообще говоря, любых других объектов, удовлетворяющих свойствам I—V.

Тогда в E' имеются нуль $0'$ и единица $1'$ ($0' < 1'$) и имеют смысл элементы $2' = 1' + 1', 3' = 2' + 1', \dots$ и элементы $-1', -2', -3', \dots$ В результате получим последовательность с двойным входом *) (различных между собой) элементов E' :

$$\dots -2', -1', 0', 1', 2', \dots$$

соответствующих целым числам

$$\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Элементы (3) можно делить друг на друга, исключая деление на $0'$. Поэтому в E' имеются (рациональные) элементы вида $\pm p'/q' = \pm n'p'/n'q' = \pm a'$ ($q' > 0, p' \geq 0$), находящиеся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами $\pm p/q = a$, что мы кратко запишем так: $a \sim a'$. Здесь n' соответствует натуральному числу n . Это соответствие является изоморфизмом по отношению к знаку « $>$ » и арифметическим операциям, т. е. выполняются соотношения (1) пока для рациональных элементов.

На самом деле указанный изоморфизм $a \sim a'$ распространяется на все элементы множеств E и E' . Убедимся в этом. В силу уже установленного изоморфизма между рациональными элементами имеет место соответствие

$$\pm \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \sim \pm \alpha'_0, \alpha'_1 \dots \alpha'_n = \pm (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n)' / 10^{n'}$$

*) Про элементы a_k , зависящие от целого k и расположенные так:

$$\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots,$$

говорят, что они образуют последовательность с двойным входом.

между конечными десятичными дробями E и E' , где в скобках справа находится целое число $\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n = \alpha_010^n + \alpha_110^{n-1} + \dots + \alpha_n$. Это соответствие изоморфно по отношению к знаку « $>$ » и арифметическим операциям. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots$ есть произвольное положительное число, представленное бесконечной десятичной дробью.

Легко видеть, что оно является пределом неубывающей последовательности его срезок: $a = \lim a^{(n)}$. Так как $a^{(n)} \leq \alpha_0 + 1$ для любого числа $n = 1, 2, \dots$, то также $a^{(n)} \leq (\alpha_0 + 1)'$. Кроме того, элементы $a^{(n)}$ не убывают, потому что числа $a^{(n)}$ не убывают. Поэтому на основании свойства V, которое предположено верным в E' , существует в E' элемент a' , являющийся пределом: $a' = \lim a^{(n)'}.$

Естественно a' записать в виде выражения $a' = \alpha'_0, \alpha'_1 \alpha'_2 \dots$, называя его бесконечной десятичной дробью в E' , а $a^{(n)'}$ — его n -ми срезками. Тогда каждому действительному числу a приведен в соответствие элемент $a' \in E'$ ($a \rightarrow a'$). Это соответствие не противоречит соответствию

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_h \rightarrow \alpha'_0, \alpha'_1 \dots \alpha'_h,$$

потому что наряду с равенством

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_h = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{h-1} (\alpha_h - 1)99\dots \quad (\alpha_h > 0)$$

имеет место равенство

$$\alpha'_0 \alpha'_1 \dots \alpha'_h = \alpha'_0 \alpha'_1 \dots \alpha'_{h-1} (\alpha'_h - 1)9'9' \dots \quad (4)$$

Ведь бесконечная дробь справа по определению есть предел ее срезок (в E'), но число $\alpha'_0, \alpha'_1 \dots \alpha'_h$, как нетрудно видеть, уже является этим пределом, но тогда они равны, потому что последовательность может иметь единственный предел.

Но мы еще покажем, что всякий элемент $\lambda \in E'$ обязательно соответствует некоторому числу $a \in E$ и притом единственному.

Зададим произвольный положительный элемент $\lambda \in E'$. Согласно архimedову свойству (верному в E') существует натуральный элемент $n' > \lambda$. Таким образом, $0' < \lambda < n'$ и, так как $0' < 1' < 2' < \dots < n'$. В этой цепи, очевидно, существует единственный (целый неотрицательный) элемент α'_0 такой, что $\alpha'_0 \leq \lambda < \alpha'_0 + 1'$. Пересматривая теперь элементы конечной цепи $\alpha'_0, 0' < \alpha'_0, 1' < \dots < \alpha'_0, 9' < \alpha'_0 + 1'$, найдем среди них единственный α'_1, α'_2 такой, что

$$(\alpha'_0, \alpha'_1)' \leq \lambda < (\alpha'_0, \alpha'_1 + 1)'$$

(если $\alpha'_1 = 9$, то $(\alpha'_0, \alpha'_1 + 1)' = \alpha'_0 + 1'$). Продолжив этот процесс, по индукции получим последовательность цифр $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$ такую, что

$$(\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_h)' \leq \lambda < (\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{h-1} (\alpha_h + 1))'$$

при любом k . Так как к тому же правая часть в этих соотношениях отличается от левой на $(10^{-k})' \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), то

$$\lambda = \lim_{h \rightarrow \infty} (\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_h)'.$$
 (5)

Итак, каждый положительный элемент $\lambda \in E'$ соответствует некоторому очевидно положительному числу a ($a = \lambda$). Единственность этого числа вытекает из следующих соображений.

Пусть $0 < a < b$. Найдутся конечная десятичная дробь r , и натуральное l такие, что $0 < a^{(n)} \leq a < r \leq b^{(l)} \leq b$ для всех натуральных n . Поэтому $a' = \lim a^{(n)'} \leq r' < b^{(l)'} \leq b'$, т. е. $a' < b'$.

Этим доказано (пока в случае положительных a, a'), что соответствие $a \rightarrow a'$ изоморфно по отношению к знаку « $>$ ». В частности, установлено, что разным положительным a соответствуют разные положительные a' . Таким образом, соответствие $a \rightarrow a'$ есть на самом деле взаимно однозначное соответствие $a \rightleftarrows a'$ (или $a \sim a'$) между положительными элементами E и E' .

Отметим, что для положительных $a, b \in E$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (a^{(n)} + b^{(n)})' &= a^{(n)'} + b^{(n)'}, \\ [a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})]' &= a^{(n)'} - (b^{(n)'} + 10^{-n'}) \quad (a > b), \\ (a^{(n)} b^{(n)})^{(n)'} &= (a^{(n)'} b^{(n)'})^{(n)'}, \\ \left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} \right)' &= \frac{a^{(n)'}}{b^{(n)'} + 10^{-n'}}. \end{aligned} \quad (6)$$

И так как из того, что последовательность десятичных дробей

$$c_n = \alpha_{0n}, \alpha_{1n}\alpha_{2n} \dots \quad (n = 1, 2, \dots)$$

стабилизируется к дроби $c = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\dots$ ($c_n \rightleftarrows c$), следует, что c_n' стабилизируется к c' ($c_n' \rightleftarrows c'$), то равенства (6) влечут соответствия (4). Верно также соотношение (2).

Для отрицательных чисел a полагаем $a' = -(-a')$. В результате вместе с соответствием $0 \sim 0'$ получим взаимно однозначное соответствие $a \sim a'$ между действительными числами и всеми элементами E' . Оно, очевидно, изоморфно относительно знака « $>$ », а также относительно арифметических операций. Не приводя все детали рассуждений, поясняющих это последнее утверждение, ограничимся доказательством равенства $(a + b)' = a' + b'$, когда $a > 0, b < 0, a > |b|$.

В этом случае

$$(a + b)' = (a - |b|)' = a' - |b'| = a' + b'.$$

Первое равенство в этой цепи верно в силу известных свойств чисел, второе уже доказано для $a > |b|$, третье — в силу того, что $a' - |b'|$ есть такой элемент E' , который надо прибавить к $|b'|$, чтобы получить a' . Этот элемент (единственный) есть $a' + (-|b'|) = a' + (-(-b)) = a' + b'$ (см. сноску к свойствам II в § 2.4).

Особое внимание занимает представление чисел точками прямой, являющееся общепринятой удобной геометрической интерпретацией чисел. Становимся на нем подробнее.

Предупредим читатели, что приводимые ниже рассуждения носят не очень формальный характер, скорее, они представляют собой схему, следуя которой можно провести аккуратные рассуждения.

Будем рассматривать всевозможные отрезки прямых, лежащих в двумерной плоскости. Среди них выберем один произвольный, о котором будем говорить, что он имеет длину, равную единице. Равновеликие отрезки, совпадающие при наложении, обладают некоторым общим свойством, которое обозначают буквой a (или b, c, \dots) и называют *длиной* любого из этих отрезков. Пусть σ и δ — отрезки длины соответственно a и b . Если при наложении их друг на друга σ окажется *существенной* частью δ , т. е. если при этом окажется, что σ есть часть δ и σ не совпадает с δ , то считают, что их длины находятся в отношении $a < b$.

Отрезок, полученный из единичного отрезка делением последнего на q равных частей и взятием геометрической суммы p таких частей, называется *рациональным* (соизмеримым с единицей).

Ясно, что длины отрезков удовлетворяют аксиомам I.

По определению, сумма $a+b$ и разность $a-b$ ($a > b$) суть соответственно длины геометрической суммы и разности отрезков. Легко видеть, что свойства II (за исключением пока Π_3 , Π_4) для длин удовлетворяются.

На рис. 2.1 изображен произвольный угол, на одной стороне которого отложены от вершины последовательно отрезки OA и AC длины 1 и b , а на другой — отрезок OB длины a . Кроме того, проведена прямая CD , параллельная прямой AB . Она отсекает отрезок BD , длину которого, по определению, назовем произведением ab . Это определение корректно, потому что, если бы мы подобную конструкцию создали для другого угла O' (рис. 2.2), то получили бы отрезок $B'D'$, равновеликий отрезку BD .

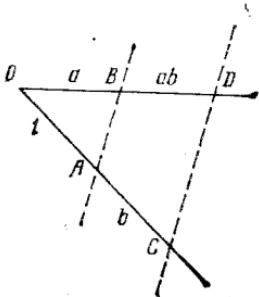


Рис. 2.1.

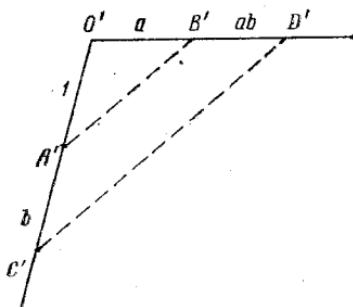


Рис. 2.2.

Ясно, как определить a/b — результат деления a на b . Надо (рис. 2.3) на одной стороне угла отложить последовательно от вершины отрезки длины b и a , а на другой — единичный отрезок, провести CD параллельно AB , и тогда длина AC , по определению, есть a/b . Это определение также корректно, и при этом действие деления оказывается обратным к умножению: $b(a/b) = a$.

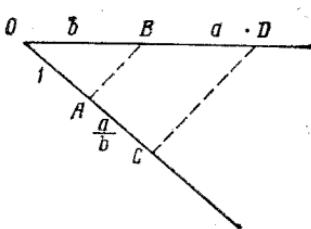


Рис. 2.3.

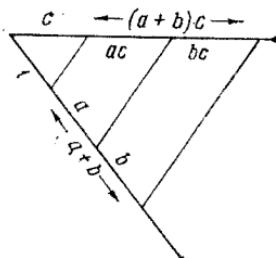


Рис. 2.4.

Легко проверяется геометрически, что свойства III для длин удовлетворяются. Например, дистрибутивный закон III_5 проверяется с помощью рис. 2.4. Подобным образом проверяется, что $(a-b)c = ac - bc$ ($a > b$).

Рассмотрим теперь прямую с отмеченной на ней точкой 0. Точкам прямой, лежащим правее 0, взаимно однозначно соответствуют длины отрезков, соединяющих эти точки с нулевой точкой. Эти длины будем называть положительными длинами. Вводим формально отрицательную длину $-a$, соответствующую точке прямой, симметричной относительно 0 точке a (т. е. точке, соответствующей длине a). Точки 0 чисто формально приводим в соответствие длину нуль. В результате между точками всей прямой и новыми символами a , b , ..., которые могут теперь быть положительными, от-

рицательными и нулем, установлено взаимно однозначное соответствие. По известным правилам, которые незачем повторять, для новых символов определяются арифметические операции и знак « $>$ ». Они удовлетворяют, как это доказывается в курсе элементарной алгебры, свойствам I—III, поскольку положительные a, b, \dots им удовлетворяют. На прямой мы можем мысленно отметить рациональные точки $\pm p/q$, соответствующие положительным и отрицательным длинам отрезков, соизмеримых с выбранной единицей. Они сами по себе удовлетворяют свойствам I—II.

Свойства IV, V для новых объектов также удовлетворяются. Свойство V выражает на математическом языке тот факт, что прямую мы мыслим как некоторый непрерывный геометрический образ. Таким образом, снабженные знаком (как указано выше) длины отрезков удовлетворяют свойствам I—V и, следовательно, они изоморфны действительным числам. Это обстоятельство позволяет в практике смешивать понятие длины отрезка и понятие соответствующего этому отрезку в силу указанного изоморфизма числа.

В заключение отметим, что физика доставляет нам много примеров понятий, изоморфных действительным числам; их называют физическими величинами. Температура, масса, скорость, если она направлена вдоль определенной прямой,— это все физические величины. Впрочем, они могут оказаться изоморфными не всем действительным числам, а только принадлежащим некоторому интервалу. Например, в случае массы этим интервалом является $(0, \infty)$.

§ 2.6. Дополнение

Этот параграф содержит доказательства и схемы доказательств отдельных утверждений § 2.4. Мы думаем, что читатель, желающий с ними ознакомиться, легче их воспримет после того, как усвоит следующую далее гл. 3. Это не значит, что § 2.6 базируется на гл. 3, но в идейном отношении излагаемые как тут, так и там вопросы схожи, и в то же время изложение в § 2.6 носит достаточно сжатый характер.

Справедливо свойство:

Пусть для бесконечных дробей $a = a_0, a_1 a_2 \dots, b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots$, не имеющих периода 9, верно равенство

$$b^{(n)} = a^{(n)} + \lambda_n, \quad (1)$$

где λ_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ ($a^{(n)}$, $b^{(n)}$ — срезки a , b). Тогда $a = b$, следовательно, $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Пусть обе десятичные дроби a и b не имеют периода 9. Допустим, что они не равны, для определенности $a < b$. Тогда при некотором натуральном k

$$a = a_0, a_1 \dots a_{k-1} \alpha_k a_{k+1} \dots,$$

$$b = a_0, a_1 \dots a_{k-1} \beta_k \beta_{k+1} \dots \quad (\alpha_k < \beta_k),$$

и, кроме того, $\alpha_s < 9$ при некотором $s > k$. Поэтому при любом $n > s$

$$b^{(n)} - a^{(n)} = a_0, a_1 \dots a_{k-1} \beta_k \beta_{k+1} \dots \beta_n - a_0, a_1 \dots a_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n \geqslant$$

$$\geqslant a_0, a_1 \dots a_{k-1} \beta_k - a_0, a_1 \dots a_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{s-1} (\alpha_s + 1) = \delta > 0.$$

Но это невозможно, потому что по условию $b^{(n)} - a^{(n)} = \lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что равенство

$$c = \gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k 99 \dots = \gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} (\gamma_k + 1) 000 \dots$$

показывает, что n -е срезки входящих в него десятичных дробей отличают-

ся на величину 10^{-n} , стремящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Но тогда данное свойство, доказанное уже для десятичных дробей a и b , не имеющих периода 9, верно также, если одна из них или обе имеют 9 своим периодом.

Докажем теперь, что, если $a > b > 0$, то

$$(a - b) + b = a. \quad (2)$$

В самом деле,

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \xrightarrow{n} a - b, \quad (a - b)^{(n)} + b^{(n)} \xrightarrow{n} (a - b) + b.$$

Поэтому для каждого n найдется такое $s > n$, что

$$(a - b)^{(n)} = [a^{(s)} - (b^{(s)} + 10^{-s})]^{(n)} = a^{(n)} - b^{(n)} + \lambda_n, \quad (3)$$

$$[(a - b) + b]^{(n)} = [(a - b)^{(s)} + b^{(s)}]^{(n)} = (a - b)^{(n)} + b^{(n)} + \mu_n,$$

где $\lambda_n \rightarrow 0$ и $\mu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Но тогда

$$\begin{aligned} [(a - b) + b]^{(n)} &= (a - b)^{(n)} + b^{(n)} + \mu_n = \\ &= a^{(n)} - b^{(n)} + \lambda_n + b^{(n)} + \mu_n = a^{(n)} + v_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где $v_n = \lambda_n + \mu_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Из соотношения (4) на основании доказанного свойства следует (2).

Величину (бесконечно малую) $\lambda_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) принято еще записывать так: $o(1)$ ($n \rightarrow \infty$). Надо иметь в виду, что если паряду с λ_n рассматривается тут же другая бесконечно малая величина, ее обозначают тем же символом $o(1)$.

Покажем, что

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \quad (5)$$

В самом деле, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} [a + (b + c)]^{(n)} &= a^{(n)} + (b + c)^{(n)} + o(1) = \\ &= a^{(n)} + b^{(n)} + c^{(n)} + o(1) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [(a + b) + c]^{(n)} &= (a + b)^{(n)} + c^{(n)} + o(1) = \\ &= a^{(n)} + b^{(n)} + c^{(n)} + o(1). \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому на основании доказанного свойства имеет место (5).

Свойства III₁ — III₅ суть непосредственные следствия нижеследующих равенств:

$$(a^{(n)} b^{(n)})^{(n)} = (b^{(n)} a^{(n)})^{(n)}, \quad (8)$$

$$((ab)^{(n)} c^{(n)})^{(n)} = (ab)^{(n)} c^{(n)} + o(1) = a^{(n)} b^{(n)} c^{(n)} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9)$$

$$(a^{(n)} (bc)^{(n)})^{(n)} = a^{(n)} b^{(n)} c^{(n)} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (10)$$

$$(a^{(n)} \cdot (1)^{(n)})^{(n)} = a^{(n)} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (11)$$

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{(n)} a^{(n)}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{(n)} a^{(n)} + o(1) = \frac{1}{a^{(n)} + 10^{-n}} a^{(n)} + o(1) = 1 + o(1), \quad (12)$$

$$((a + b)^{(n)} c^{(n)})^{(n)} = (a + b)^{(n)} c^{(n)} + o(1) = a^{(n)} c^{(n)} + b^{(n)} c^{(n)} + o(1), \quad (13)$$

$$(ac)^{(n)} + (bc)^{(n)} = a^{(n)} c^{(n)} + b^{(n)} c^{(n)} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (14)$$

Свойство (8) очевидно. Для примера поясним доказательство свойства (9). Первое его равенство верно потому, что снятие внешнего значка n влечет увеличение первого члена (9) на величину (конечную десятичную дробь), не превышающую $10^{-n} = o(1)$.

Далее, ab есть число, к которому стабилизируется

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \rightrightarrows ab.$$

Но тогда для любого n найдется зависящее от него $s > n$ такое, что $(\mu_n, v_n = o(1), n \rightarrow \infty)$

$$\begin{aligned} (ab)^{(n)} &= (a^{(s)}b^{(s)})^{(n)} = \{(a^{(n)} + \mu_n)(b^{(n)} + v_n)\}^{(n)} = \\ &= \{a^{(n)}b^{(n)} + (a^{(n)}v_n + b^{(n)}\mu_n + \mu_nv_n)\}^{(n)} = \{a^{(n)}b^{(n)} + o(1)\}^{(n)} = \\ &= (a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} + o(1) = a^{(n)}b^{(n)} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

В третьем равенстве надо принять во внимание, что $a^{(n)} \leq a$ и $b^{(n)} \leq b$, поэтому $a^{(n)}v_n = o(1)$, $b^{(n)}\mu_n = o(1)$, кроме того, $o(1) + o(1) = o(1)$. Из (9) — (14) следует соответственно III₁ — III₅ в силу доказанного выше утверждения (2). Проверку этого факта, что действия над бесконечными дробями согласованы с соответствующими действиями над рациональными дробями, предоставляем читателю.

В случае, например, сложения требуется проверить, что бесконечное десятичное разложение суммы

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

в точности равно сумме бесконечных десятичных разложений слагаемых.

§ 2.7. Неравенства для абсолютных величин

Неравенство

$$|a| < \epsilon \tag{1}$$

эквивалентно двум неравенствам

$$-\epsilon < a < \epsilon. \tag{1'}$$

Отсюда неравенство

$$|a - b| < \epsilon \tag{2}$$

эквивалентно неравенствам

$$b - \epsilon < a < b + \epsilon. \tag{2'}$$

Аналогично, неравенство

$$|a - b| \leq \epsilon \tag{3}$$

эквивалентно неравенствам $b - \epsilon \leq a \leq b + \epsilon$.

Справедливы также неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{4}$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно получить, рассмотрев отдельно четыре случая: 1) $a, b \geq 0$, 2) $a, b \leq 0$, 3) $a \leq 0 \leq b$, 4) $b \leq 0 \leq a$.

Например, в случае 2)

$$a + b \leq b \leq 0, \quad |a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$

а в случае 3), если допустить что $|b| \geq |a|$,

$$|a+b| = b+a \leq |a| + |b|.$$

Случай 3) при допущении $|b| \leq |a|$ читатель разберет сам, так же как случай 1). Случай 4) сводится к 3).

Далее, в силу (4)

$$|a| \leq |b| + |a-b|, \quad |b| \leq |a| + |a-b|,$$

т. е.

$$|a| - |a-b| \leq |b| \leq |a| + |a-b|,$$

по тогда верно (5).

§ 2.8. Точные верхняя и нижняя грани множества

Множество E действительных чисел x называется *ограниченным*, если существует положительное число M такое, что выполняется неравенство $|x| < M$ для всех $x \in E$ или, что все равно, $-M < x < M$.

Если E не удовлетворяет указанному свойству, т. е. каково бы ни было положительное число M (как бы оно ни было велико), найдется такое $x_0 \in E$, что $|x_0| > M$, то E называется *неограниченным*.

Множество E называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует число K (соответственно k) такое, что $x \leq K$ (соответственно $k \leq x$) для всех $x \in E$. Число K (соответственно k) называется *верхней (нижней) гранью* E .

Очевидно, что *ограниченное множество является одновременно ограниченным сверху и снизу*. Множество R всех действительных чисел, очевидно, неограничено как снизу, так и сверху; множество R_+ положительных чисел ограничено снизу, но не ограничено сверху; отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) при конечных a и b являются примерами ограниченных множеств.

Число M (соответственно m) называется *точной верхней (соответственно нижней) гранью* множества чисел A , если выполняются следующие свойства:

- 1) $x \leq M$ (соответственно $x \geq m$) для всех $x \in A$.
- 2) Как бы ни было малое $\epsilon > 0$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M - \epsilon < x_0$ ($x_0 < m + \epsilon$).

Точная верхняя грань A обозначается так:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x,$$

а точная нижняя грань так:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x,$$

(\sup , \inf — сокращения латинских слов *supremum* — наивысший, *infimum* — наименьший). В следующем параграфе будет доказано

существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества, так же как точной нижней грани у ограниченного снизу множества. Единственность их очевидна.

Для неограниченного сверху множества A будем писать:

$$\sup A = \sup_{x \in A} x = +\infty,$$

а для неограниченного снизу:

$$\inf A = \inf_{x \in A} x = -\infty;$$

будем называть в этом случае $+\infty$, $-\infty$ соответственно точной верхней и точной нижней гранью A .

Отрезок $[a, b]$ и интеграл (a, b) , очевидно, имеют в качестве своей точной верхней грани точку (число) b . В случае отрезка точная верхняя грань (число b) принадлежит ему, а в случае интервала — не принадлежит. Множество $(-\infty, 0)$, очевидно, имеет в качестве своей точной верхней грани число 0 и в качестве нижней символ $-\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\inf_{x \in A} x = -\sup_{x \in A} (-x).$$

Выше мы определили понятие точной верхней грани отдельно для ограниченного и для неограниченного сверху множества. Ниже дается общее определение, годное для обоих случаев.

Число M (конечное или $+\infty$) называется *точной верхней гранью множества действительных чисел A* , если выполняются следующие свойства:

- 1) $x \leq M$ для всех $x \in A$;
- 2) каково бы ни было конечное число $M' < M$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M' < x_0 \leq M$.

Подобное определение можно дать и для точной нижней грани неограниченного снизу множества чисел. Теперь m может быть либо конечным числом, либо $-\infty$.

Возникает вопрос, имеет ли произвольное множество действительных чисел точную верхнюю (нижнюю) грань. Для неограниченного сверху (снизу) множества, как мы видели, имеет — по определению. Она равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Для ограниченного множества тоже имеет. Это будет доказано далее в § 3.6.

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 3.1. Понятие предела последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ.

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \dots$, приведено в соответствие в силу некоторого закона число *) x_n . Тогда говорят, что этим определена *последовательность* чисел x_1, x_2, x_3, \dots или, короче, *последовательность* $\{x_n\}$.

Отдельные снабженные номерами n (индексами) числа x_n называют *элементами последовательности* $\{x_n\}$. Они могут быть действительными или комплексными. Мы здесь рассматриваем случай, когда они действительны.

Для разных n_1, n_2 отдельные элементы x_{n_1}, x_{n_2} последовательности могут оказаться равными как числа ($x_{n_1} = x_{n_2}$). Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как разные элементы последовательности.

Ниже приводятся примеры последовательностей:

$$1) \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$2) \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\},$$

$$3) \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \right\},$$

$$4) \left\{ \frac{n-1}{n} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots \right\},$$

$$5) \left\{ 1 + \frac{1}{10^n} \right\} = \{1, 1; 1, 01; 1, 001; \dots\},$$

$$6) \{(-1)^n\} = \{-1, +1, -1, \dots\},$$

$$7) \{1; 2; \dots; 10; 0,1; 0,01; 0,001; \dots\}.$$

В случае 7) не видно, как написать общую формулу для произвольного элемента x_n , однако закон образования чисел x_n ясен:

$$x_n = \begin{cases} n & (n = 1, \dots, 10), \\ \frac{1}{10^{n-10}} & (n = 11, 12, \dots). \end{cases}$$

*) То есть x_n — функция на множестве натуральных чисел.

Мы еще будем употреблять следующую терминологию: *переменная* x_n *пробегает последовательность* $\{x_n\}$ или *последовательность значений* x_n .

Переменную x_n , все значения которой равны одному и тому же числу a , называют *постоянной* и обычно обозначают просто через a .

По определению, число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется (зависящее от него) натуральное число N такое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (n > N).$$

При этом мы будем писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim x_n = a$$

или

$$x_n \rightarrow a$$

и говорить, что *переменная* x_n *стремится к* a или что *последовательность* $\{x_n\}$ *стремится (сходится) к* числу a .

Покажем, что переменная 2) имеет предел, равный нулю. В самом деле, зададим ε и составим неравенство

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Оно верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или для всех $n > N$, где N есть какое-либо натуральное число $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что $|x_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

В частности также доказывается, что и последовательность 3) имеет предел 0. Переменная 4) стремится к 1, потому что в этом случае

$$|1 - x_n| = \left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

для всех $n > N$, где N — натуральное число, большее, чем $1/\varepsilon$.

Нетрудно показать, что и переменная 5) стремится к 1. Переменная 7), очевидно, стремится к нулю. Не имеет значения тот факт, что она сначала имеет тенденцию возрастать: в этом вопросе важно, какие значения она имеет для достаточно больших n .

Если x_n удовлетворяет неравенству

$$|a - x_n| < \varepsilon,$$

то это все равно, что x_n удовлетворяет неравенствам

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

или, употребляя геометрический язык, что точка (число) x_n принадлежит интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Поэтому, употребляя геометрический язык, можно дать такое определение предела: *переменная x_n имеет пределом число (точку) a , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что для всех $n > N$ точки $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.*

Произвольный интервал (c, d) , содержащий в себе точку a , т. е. такой, что $c < a < d$, называется *окрестностью точки a* . Очевидно, какова бы ни была окрестность (c, d) точки a , найдется такое $\varepsilon > 0$, что интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ содержитя в (c, d) , т. е. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (c, d)$.

Поэтому тот факт, что $x_n \rightarrow a$, можно выразить еще и так: какова бы ни была окрестность (c, d) точки a , все точки x_n , начиная с некоторого номера n , должны попасть в эту окрестность, т. е. должно существовать натуральное N такое, что $x_n \in (c, d)$ ($n > N$). Что касается точек x_1, \dots, x_N с индексами $n \leq N$, то они могут принадлежать или не принадлежать (c, d) . Таким образом, если вне (c, d) имеются точки x_n , то их конечное число.

С другой стороны, если известно, что вне (c, d) имеется только конечное число точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_s}$, то, положив

$$N = \max \{n_1, n_2, \dots, n_s\},$$

мы можем сказать, что для всех $n > N$ точки $x_n \in (c, d)$. Поэтому можно дать еще такое определение предела: *переменная x_n имеет своим пределом a , если вне любой окрестности точки a имеется конечное или пустое множество точек x_n .*

Переменная 6) ни к какому пределу не стремится, потому что если предположить, что эта переменная имеет предел, равный a , то любая как угодно малая по длине окрестность точки a должна была бы содержать все элементы x_n , за исключением конечного числа их. Но вне интервала длины $1/2$, как бы он ни был расположен на действительной оси, имеется, очевидно, бесконечное число элементов x_n нашей последовательности.

Нетрудно видеть, что и последовательность 1) не стремится ни к какому пределу. Впрочем, в дальнейшем мы будем говорить, что она стремится к бесконечности, вкладывая в это понятие несколько иной смысл.

Легко видеть, что если переменная x_n имеет предел, то он единственный. Ведь если бы она имела два предела, a и b , где $a < b$, то интервалы $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, где $\varepsilon = (b - a)/3$, должны были бы содержать каждый все точки последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного их числа. Но это, очевидно, невозможно, потому что эти интервалы не имеют общих точек (не пересекаются).

Пример 6) показывает, что для разных n_1, n_2 отдельные значения последовательности $\{x_n\}$ могут быть равными: $x_{n_1} = x_{n_2}$. Од-

нако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как *разные элементы* последовательности.

Легко видеть, что если две последовательности $\{x_n\}, \{x'_n\}$ имеют только конечное число различных соответствующих элементов (имеющих одинаковый индекс n), то они одновременно либо не имеют пределов, либо имеют пределы и при этом равные.

Докажем несколько теорем, выражающих свойства переменных, стремящихся к пределам.

Теорема 1. Если переменная x_n имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$. Тогда для $\varepsilon = 1$ должно найтись натуральное число N такое, что

$$1 > |x_n - a| \text{ для } n > N.$$

Отсюда $1 > |x_n - a| \geq |x_n| - |a|$ или

$$|x_n| < |a| + 1 \text{ для } n > N.$$

Положим $M = \max \{|a| + 1, |x_1|, \dots, |x_N|\}$. Тогда очевидно, что

$$|x_n| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

т. е. переменная x_n ограничена.

Теорема 2. Если переменная x_n имеет не равный нулю предел a , то найдется такое N , что

$$|x_n| > \frac{|a|}{2} \quad \text{для } n > N.$$

Больше того, для указанных n , если $a > 0$, то $x_n > a/2$, если же $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a .

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$. Тогда для $\varepsilon = |a|/2$ должно найтись натуральное N такое, что

$$\frac{|a|}{2} > |a - x_n| \geq |a| - |x_n| \quad (n > N),$$

откуда $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, и первое утверждение теоремы доказано. С другой стороны, неравенство $|a|/2 > |a - x_n|$ эквивалентно следующим двум:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \quad (n > N).$$

Тогда, если $a > 0$, то

$$\frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} < x_n \quad (n > N),$$

а если $a < 0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad (n > N),$$

и этим доказано второе утверждение теоремы.

Теорема 3. *Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$ и $x_n \leq y_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то $a \leq b$.*

Доказательство. Допустим, что $b < a$. Зададим $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$ и подберем натуральные N_1 и N_2 такие, чтобы

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1), \quad y_n < b + \varepsilon \quad (n > N_2),$$

что возможно, потому что $x_n \rightarrow a$, а $y_n \rightarrow b$.

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$, то, очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ ($n > N$), и мы пришли к противоречию, так как по условию $x_n \leq y_n$ для всех n .

Если бы в условии теоремы 3 было бы $x_n < y_n$ (вместо $x_n \leq y_n$), то все равно можно утверждать только, что $a \leq b$ (например: $x_n = 1 - 3^{-n}$, $y_n = 1 - 2^{-n}$).

Теорема 4. *Если переменные x_n и y_n стремятся к одному и тому же пределу a и $x_n \leq z_n \leq y_n$ ($n = 1, 2, \dots$), то переменная z_n также стремится к a .*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1), \quad y_n < a + \varepsilon \quad (n > N_2),$$

откуда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon,$$

и

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если $x_n \rightarrow a$, то $|x_n| \rightarrow |a|$.*

Доказательство теоремы следует из неравенства

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

§ 3.2. Арифметические действия с пределами

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. По определению, сумма $x_n + y_n$, разность $x_n - y_n$, произведение $x_n y_n$ и частное x_n/y_n суть переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$

Если $x_n = c$ для $n = 1, 2, \dots$, то в этом случае пишут $c \pm y_n$, $c y_n$, c/y_n вместо $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n/y_n .

Справедливы следующие утверждения:

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \quad (1)$$

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n, \quad (2)$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ если } \lim y_n \neq 0. \quad (3)$$

Эти утверждения надо понимать в том смысле, что если существуют пределы x_n и y_n , то существуют также и пределы их суммы, разности, произведения и частного (с указанной оговоркой) и выполняются равенства (1)–(3).

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$ и $y_n \rightarrow b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N).$$

Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > N),$$

и мы доказали (1).

Чтобы доказать (2), заметим, что

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leq \\ &\leq |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| \leq |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b|. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как y_n имеет предел, то (по теореме 1 предыдущего параграфа) существует положительное число M такое, что

$$|y_n| < M \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

При этом можно считать, что M выбрано так, чтобы выполнялось также неравенство

$$|a| < M. \quad (6)$$

Подберем натуральное N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n > N). \quad (7)$$

Тогда из (4) — (7) следует, что

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad (n > N).$$

Этим доказано равенство (2).

Пусть теперь к условию, что $x_n \rightarrow a$ и $y_n \rightarrow b$, добавляется условие, что $b \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} \right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n||b|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n||b|}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь уже удобно использовать теорему 2 предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \quad (n > N_1) \quad (9)$$

для достаточно большого N_1 . Зададим $\epsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon |b|}{4} \quad (n > N_2), \quad (10)$$

$$|a| |y_n - b| < \frac{\epsilon b^2}{4} \quad (n > N_3). \quad (11)$$

Тогда, положив $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будем в силу (8)–(11) иметь

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\epsilon |b|}{4} \frac{2}{|b|} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad (n > N),$$

что доказывает равенство (3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (1)–(3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n . Например, если $x_n = y_n = n$, то x_n и y_n не имеют (конечных) пределов, в то время как $\lim(x_n - y_n) = 0$, $\lim x_n/y_n = 1$.

Теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного во многих случаях дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими переменными, существование и величина пределов которых известны.

Однако часто встречаются случаи, выходящие за границы применимости доказанных теорем, и здесь остается большое поле для инициативы математика.

§ 3.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная α_n , имеющая предел, равный нулю, называется *бесконечно малой величиной* или, короче *бесконечно малой*.

Таким образом, переменная α_n есть бесконечно малая, если для любого $\epsilon > 0$ найдется N такое, что $|\alpha_n| < \epsilon$ ($n > N$).

Нетрудно видеть, что для того, чтобы переменная x_n имела предел a , необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть *бесконечно малая*.

Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной* или просто *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ найдется такое N , что $|\beta_n| > M$ ($n > N$). При этом пишут

$$\lim \beta_n = \infty \text{ или } \beta_n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

и говорят, что β_n стремится к бесконечности. Такая терминология считается удобной, несмотря на то, что знак ∞ не обозначает никакого числа и бесконечно большая заведомо ни к какому конечному пределу (числу) не стремится.

Если бесконечно большая β_n начиная с некоторого N принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то пишут

$$\lim \beta_n = +\infty \text{ или } \beta_n \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

соответственно

$$\lim \beta_n = -\infty \text{ или } \beta_n \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Таким образом, из (2), так же как и из (3), следует (1). Пример переменной $\{(-1)^n n\}$ показывает, что может иметь место соотношение (1), в то время как не имеет места ни (2) ни (3).

Отметим следующие очевидные свойства:

1. Если переменная x_n ограничена, а y_n — бесконечно большая, то $x_n/y_n \rightarrow 0$.

2. Если абсолютная величина x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n — неравная нулю бесконечно малая, то $x_n/y_n \rightarrow \infty$.

Докажем только второе свойство.

Дано, что для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство $|x_n| > a$, $n = 1, 2, \dots$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|y_n| < \varepsilon \quad (n > N). \quad (4)$$

Тогда

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > \frac{a}{\varepsilon} = M \quad (n > N).$$

Зададим произвольное положительное число M и подберем по нему ε так, чтобы $M = a/\varepsilon$, а по ε подберем такое N , чтобы имело место свойство (4). Тогда

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > M \quad (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Из высказанных двух утверждений получаются следующие следствия:

$$\lim_{y_n \rightarrow \infty} \frac{c}{y_n} = 0, \quad \lim_{y_n \rightarrow 0} \frac{c}{y_n} = \infty \quad (c \neq 0).$$

Множества (M, ∞) , $(-\infty, M)$, $\{x : |x| > M\}$, где M — произвольное число, называются соответственно *окрестностями «точек» $-\infty, +\infty, \infty$* .

Пусть $a \geq 0$ и k — натуральное число. Под выражением $\sqrt[k]{a}$ мы будем понимать, если это не будет оговорено особо *), арифметическое значение корня k -й степени из a , т. е. неотрицательное число, k -я степень которого равна a . Оно существует и единственно. Это нам будет удобно доказать позже (в конце § 4.5). Но уже сейчас мы будем этим фактом пользоваться. Так поступают в элементарной математике — не обосновывая логически существование корней, но доказывают их свойства **).

Примеры.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n} = \infty$ ($k = 1, 2, 3 \dots$), потому что неравенства $\sqrt[k]{n} > N$ и $n > N^k$, где $N > 0$, вытекают одно из другого, и поэтому для любого N можно указать такое n_0 (именно, $n_0 > N^k$), что для всех $n > n_0$ будет $\sqrt[k]{n} > N$.

2. Однако $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Действительно, $\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$.

Поэтому *** $n = (1 + \varepsilon_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varepsilon_n^2$, откуда $\varepsilon_n^2 < \frac{2}{n-1}$ и (см. пример 1) $\varepsilon_n < \sqrt[2]{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

3. При $a > 1$ и натуральном k $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k/a^n) = 0$, потому что, если положить $a = 1 + \varepsilon$, то $\varepsilon > 0$ и при $n > k$

$$\begin{aligned} \frac{n^k}{a^n} &= \frac{n^k}{(1 + \varepsilon)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1} \varepsilon^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}} \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k)} = \\ &= \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

§ 3.4. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности

Не всякая переменная имеет предел. Часто бывает важно знать, существует ли у данной переменной предел? Следующая теорема дает очень простой признак существования предела переменной.

Теорема 1. Пусть переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$) не убывает (не возрастает), т. е. удовлетворяет условию $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \dots$. Если она ограничена сверху (снизу) числом B (соответственно A), то существует предел $\lim x_n$, равный некоторому числу M (соответственно m), удовлетворяющему неравенству $M \leq B$ (соответственно $A \leq m$). Если же она не ограничена сверху (снизу), то $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$).

*) При $k \geq 2$ есть и комплексные корни k -й степени из a .

**) Имеются в виду свойства, перечисленные в § 4.6 (до § 4.6 (1)).

***) Мы здесь воспользовались формулой Ньютона. Ее элементарный вывод теперь не входит в нашу школьную программу, но его можно найти во всех старых учебниках алгебры. Этот вывод, основанный на понятии производной от x^n , см. в § 5.9, пример 1.

Доказательство. Пусть переменная x_n ограничена сверху числом B и не убывает.

Если $x_1 > 0$, то и $x_n > 0$ для $n = 1, 2, \dots$. В этом случае теорема уже была доказана (см. § 2.4, свойство V). Ее утверждение было выбрано в качестве одного из основных свойств действительных чисел. При аксиоматическом подходе это утверждение может быть принято как аксиома V действительного числа наряду с аксиомами I—IV (см. конец § 2.4).

Пусть теперь $x_1 \leq 0$ и $c > |x_1|$. Переменная $y_n = x_n + c$ ($n = 1, 2, \dots$) очевидно принимает положительные значения ($y_n > 0$), не убывает ($y_n \leq y_{n+1}$) и ограничена сверху числом $B + c$ ($y_n \leq B + c$). Поэтому на основании уже доказанного существует предел

$$\lim y_n = y_0 \leq B + c.$$

Но тогда существует также предел

$$M = \lim x_n = \lim (y_n - c) = y_0 - c \leq B.$$

Пусть теперь неубывающая переменная x_n не ограничена сверху. Тогда, как бы ни было велико положительное число N , найдется такое n_0 , что $N < x_{n_0}$. Но в силу того, что x_n не убывает,

$$x_{n_0} \leq x_n \text{ для } n > n_0.$$

Таким образом, каково бы ни было положительное число N , найдется такое n_0 , что

$$N < x_n \text{ для } n > n_0,$$

а это и значит, что $\lim x_n = +\infty$.

Для невозрастающей переменной x_n теорема доказывается аналогично. Но можно свести вопрос к уже доказанному. Так как x_n не возрастает и ограничена снизу, то $-x_n$ не убывает и ограничена сверху числом $-A$, поэтому существует $\lim (-x_n) \leq -A$, а с ним и предел $\lim x_n$, равный

$$m = \lim x_n = -\lim (-x_n) \geq A.$$

Пример 1. Переменная q^n ($n = 1, 2, \dots$), где $0 < q < 1$, удовлетворяет условию $q^{n+1} < q^n$, т. е. она монотонно убывает, кроме того, она ограничена снизу, потому что $0 < q^n$ для любого n . Поэтому согласно теореме 1 существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = A$.

Очевидно, что q^{n+1} должна иметь тот же предел A , но

$$\lim q^{n+1} = q \lim q^n = qA \quad \text{и} \quad A = qA.$$

Так как $q \neq 1$, то это может быть лишь если $A = 0$. Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (0 < q < 1).$$

Отсюда следует, что для $a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/a)^n} = +\infty.$$

Пример 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

В силу равенства $|a^n/n!| = |a|^n/n!$ достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Пусть m — натуральное число такое, что $m+1 > a$. Тогда (см. пример 1)

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^m}{m!} \left(\frac{a}{m+1} \right)^{n-m} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

§ 3.5. Число e

Рассмотрим переменную

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \dots = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\alpha(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

Члены $\alpha(n)$ меньше соответствующих членов $\alpha(n+1)$ и, кроме того, $\alpha(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше, чем $\alpha(n)$. Поэтому $\alpha(n) < \alpha(n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$) и переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает.

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha(n) &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Это показывает, что переменная $\alpha(n)$ ограничена сверху.

Таким образом, переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме 1 она имеет предел, который не превышает 3.

Этот предел — вполне определенное число, которое называют *числом e* . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (1)$$

Число e имеет большое значение в математическом анализе. Мы убедимся в этом скоро. В известном смысле оно является естественным основанием для логарифмов. Число e называется еще *неперовым числом* по имени шотландского математика Д. Непера.

пера (1550—1617). Это — иррациональное число. Ниже приводится его значение с первыми шестью точными десятичными знаками:

$$e = 2,718281\dots$$

В § 5.10 показано, как вычислить число e с наперед заданной точностью.

В дальнейшем, когда будет введено понятие предела функции, мы увидим, что указанный предел существует и равен e , когда n стремится к бесконечности любого знака, изменяясь непрерывно.

§ 3.6. Леммы о вложенных отрезках, существовании точных граней множества и сечения во множестве действительных чисел

Лемма 1. Пусть задана последовательность отрезков (множеств чисел x , для которых $a_n \leq x \leq b_n$)

$$\sigma_n = [a_n, b_n] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

вложенных друг в друга, т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ ($n = 1, 2, \dots$), с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тогда существует, и притом единственная, точка (число), одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n .

Доказательство. Очевидно, что $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_m$ при любом заданном m . Это показывает, что числа a_n не убывают и ограничены сверху числом b_m при любом m , и согласно теореме 1 § 3.4 существует число c , к которому стремится последовательность a_n , при этом $a_n \leq c \leq b_m$. Так как в этих неравенствах n и m произвольны, то, в частности,

$$a_n \leq c \leq b_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

следовательно, $c \in \sigma_n$, каково бы ни было n .

Найденная точка c — единственная, удовлетворяющая сформулированному свойству. Ведь если допустить существование другой такой точки c_1 , то выполнялись бы неравенства $a_n \leq c \leq b_n$, $a_n \leq c_1 \leq b_n$, откуда $b_n - a_n \geq |c_1 - c| = \varepsilon > 0$ для любого n . Но это противоречило бы тому, что $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Лемма 2. У ограниченного сверху (снизу) числом M (числом m) множества действительных чисел существует точная верхняя (нижняя) грань, не превышающая (не меньшая) $M(m)$.

Доказательство. Пусть E есть произвольное ограниченное сверху числом M множество действительных чисел (точек) и пусть x_0 — какая-либо точка E .

Зададим отрезок $[a, M]$, где $a < x_0$, который обозначим через σ_0 . Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 правый из них, если он содержит в себе точки E , в противном слу-

чае обозначим через σ_1 левый отрезок. Разделим σ_1 на два равных отрезка и обозначим через σ_2 правый из них, если он содержит точки E , в противном случае берем в качестве σ_2 левый отрезок. Продолжив этот процесс по индукции, получим последовательность вложенных отрезков $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots$ таких, что их длины стремятся к нулю и при любом n отрезок σ_n содержит в себе точки E , но правее σ_n нет точек E . Согласно лемме 1 существует, и притом единственная, точка c , принадлежащая всем σ_n . Очевидно, что $c \leq M$. Докажем, что

$$\sup E = c.$$

Для этого покажем, что выполняются два условия:

- 1) $x \leq c$ для всех $x \in E$;
- 2) для любого $\epsilon > 0$ существует $x_1 \in E$ такое, что

$$c - \epsilon < x_1 \leq c. \quad (1)$$

Если бы утверждение 1) не было верно, то существовала бы точка $y \in E$ такая, что $c < y$. Так как отрезки σ_n содержат в себе c и длины их стремятся к нулю, то найдется n такое, что точка y будет правее σ_n . Но этого не может быть, потому, что по построению правее σ_n нет точек E . Этим доказано условие 1).

Зададим теперь $\epsilon > 0$. Очевидно найдется n такое, что σ_n окажется правее точки $c - \epsilon$. При этом в σ_n имеется по крайней мере одна точка, которую обозначим через x_1 , принадлежащая E . Для нее выполняются неравенства (1).

Если теперь E есть ограниченное снизу числом m множество точек x , то соответствующее множество точек $-x$ ограничено сверху числом $-m$, и так как последнее имеет точную верхнюю грань, которая не превышает $-m$, то существует

$$\inf_{x \in E} x = -\sup_{x \in E} (-x) \geq m.$$

Лемма 3. Если множество R всех действительных чисел разбито на два непересекающихся непустых множества,

$$R = A + B,$$

так, что всякое $a \in A$ меньше всякого $b \in B$, то либо существует число c , наибольшее в A , и тогда в B нет наименьшего числа, либо существует число c , наименьшее в B , и тогда в A нет наибольшего числа.

Доказательство. Пусть множество R всех действительных чисел разбито на два класса A и B , как это сказано в формулировке леммы. Пусть b — число, принадлежащее B . Тогда $a < b$ для всех $a \in A$, и в силу леммы 2 существует точная верхняя грань

$$\sup_{a \in A} a = c \leq b. \quad (2)$$

Число c по условию принадлежит одному из классов A или B .

Если $c \in A$, то очевидно, что c есть наибольшее число в классе A . Допустим, что наряду с этим в B есть наименьшее число, которое обозначим через b_0 . Тогда среднее арифметическое

$$(c + b_0)/2 = d < b_0,$$

и потому $d \in A$ (ведь b_0 — наименьшее число в классе B). С другой стороны, $c < d$ и вследствие (2) d не может принадлежать A , и мы пришли к противоречию.

Если теперь допустить, что $c \in B$, то аналогичными рассуждениями легко устанавливается, что c есть наименьшее число в классе B , и тогда в A нет наибольшего числа. Этим лемма 3 доказана.

Замечание. В нашем распоряжении имеется четыре вполне отличных, но по существу весьма близких утверждения:

- 1) Лемма 1 — о вложенных отрезках.
- 2) Лемма 2 — о существовании точной верхней грани у ограниченного множества.
- 3) Лемма 3 — о сечении во множестве действительных чисел.
- 4) Теорема 1, § 3.4 — о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

В нашем изложении утверждение 4) представляет собой одно из основных свойств действительных чисел — свойство V. С помощью этого свойства (и свойств I—IV) мы доказали утверждения 1), 2), 3).

На самом деле утверждения 1), 2), 3), 4) (при наличии I—IV) эквивалентны. Любое из них влечет за собой, как нетрудно проверить, верность остальных.

§ 3.7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Из нее можно выделить бесконечным числом способов новую последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots\},$$

где индекс n_k пробегает возрастающую последовательность (бесконечную!) натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью* *последовательности* $\{x_n\}$.

Нас здесь будут интересовать только подпоследовательности, которые сходятся либо к конечному числу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ (т. е. имеют предел конечный, $+\infty$ или $-\infty$). Их мы будем называть *сходящимися*, а их пределы — *числами* (конечными или бесконечными), распространяя, таким образом, название «число» и на символы $-\infty$ и $+\infty$. Мы считаем, что $-\infty < \alpha < +\infty$, где α — любое действительное (конечное) число. В силу этого соглашения $+\infty$ есть *наибольшее число*, а $-\infty$ *наименьшее число*.

шее. Для расширенного таким образом множества чисел, очевидно, выполняются аксиомы числа группы I (см. § 2.4).

Предупредим читателя, что в наших рассуждениях весьма существенно, что элементы x_n (не числа x_n !) последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным индексам n . Надо различать числа (точки), которые пробегаются последовательностью, от ее элементов.

Например, последовательность

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots \quad (1)$$

(как и всякая последовательность) состоит из бесконечного числа элементов x_1, x_2, x_3, \dots , но она пробегает весьма бедное множество чисел $\{1, 2, 3\}$, состоящее только из трех чисел (точек).

Легко видеть, что если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность тоже сходится и притом к тому же числу (конечному, $+\infty$, $-\infty$). Но из того, что последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность не следует, что сама она сходится.

Но справедлива теорема, имеющая большое применение. Ее часто называют теоремой Вейерштрасса:

Теорема 1. *Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу (конечному).*

Доказательство. Пусть значения x_n нашей последовательности принадлежат отрезку $\Delta_0 = [c, d]$. Разделим его на две половинки и обозначим через Δ_1 самую правую из них, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n .

Это надо понимать в том смысле, что если обе указанные половинки содержат в себе бесконечное число элементов, то Δ_1 есть правая из них, а если только одна из них содержит бесконечное число элементов x_n , то именно она и обозначается через Δ_1 .

Пусть x_{n_1} — один из элементов отрезка Δ_1 . Обозначим далее через Δ_2 самую правую половину отрезка Δ_1 , содержащую в себе бесконечное число элементов x_n . Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_2} с $n_2 > n_1$. Вообще, если отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_{k-1}$ и принадлежащие соответственно им элементы $x_{n_1}, \dots, x_{n_{k-1}}$ уже определены, то обозначим через Δ_k самую правую половину отрезка Δ_{k-1} , содержащую в себе бесконечное множество элементов x_n . Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_k} с $n_k > n_{k-1}$. Обозначим через a точку, принадлежащую всем Δ_k ($k = 1, 2, \dots$). Очевидно, определенная нами подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к a .

Теорема доказана.

Теорема 2. *Из любой последовательности действительных чисел (ограниченной или неограниченной) можно выделить под-*

последовательность, сходящуюся к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$.

В самом деле, это утверждение для ограниченной последовательности уже доказано в теореме 1 и тогда соответствующая подпоследовательность сходится к конечному числу. Если же последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то для любого натурального k найдется очевидно натуральное n_k такое, что $k < x_{n_k}$ ($x_{n_k} < -k$) и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к $+\infty$ ($-\infty$).

Докажем часто употребляемую в анализе теорему.

Теорема 3. *Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что ее любая подпоследовательность содержит в свою очередь подпоследовательность, сходящуюся к одному и тому же числу A (конечному, $+\infty$ или $-\infty$), то существует предел $\lim x_n = A$.*

В самом деле, если бы последовательность $\{x_n\}$ не стремилась к A , то существовала бы окрестность A , вне которой имелось бы бесконечное число элементов x_n . Перенумеровав эти элементы в порядке возрастания n , получаем некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Из последней на основании предыдущей теоремы можно выделить ее подпоследовательность $\{x_{n_k'}\}$, стремящуюся к некоторому числу B (конечному, $+\infty$ или $-\infty$), очевидно, заведомо не равному A . Мы получили противоречие, потому что последовательность $\{x_{n_k'}\}$ является подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}$ и по условию стремится к A .

3.7.1 *). Введем теперь определение: число α (конечное, $+\infty$ или $-\infty$) называется *верхним (нижним) пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ (или переменной x_n)*, если существует подпоследовательность x_{n_k} , сходящаяся к нему, и при этом всякая другая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу не большему (не меньшему) чем α .

Например, последовательность (1), очевидно, имеет верхний предел, равный 3, и нижний предел, равный 1, а последовательность 1, -2, 3, -4, ... имеет верхний предел $+\infty$ и нижний, равный $-\infty$.

Верхний и нижний пределы последовательности обозначаются соответственно через $\overline{\lim} x_n$, $\underline{\lim} x_n$ или еще так: $\limsup x_n$, $\liminf x_n$ (см. в конце параграфа упражнение).

Последовательность x_n может иметь только один верхний (нижний) предел, потому что если допустить, что a_1 и a_2 — два

*) Пункт 3.7.1 посвящен верхним и нижним пределам, которые в этой книге используются только в теории рядов (§ 11.3, теоремы 2, 3, § 11.11, теоремы 1—3).

такие предела и $a_1 < a_2$, то существовала бы подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к a_2 , что противоречит тому факту, что a_1 есть верхний предел.

Отметим, что метод вложенных друг в друга отрезков, который мы применили при доказательстве теоремы 1, привел нас к подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к числу a , которое равно верхнему пределу последовательности $\{x_n\}$:

$$a = \overline{\lim} x_n.$$

В самом деле, пусть $a' > a$. Подберем n настолько большим, что a' оказывается правее Δ_n . Но правее Δ_n может быть только конечное число элементов x_n и, следовательно, не существует подпоследовательности $\{x_n\}$, которая бы сходилась к числу a' .

Таким образом, указанный процесс доказывает существование верхнего предела у ограниченной последовательности.

Если бы мы наш процесс видоизменили, обозначая через Δ_n для каждого n не самую правую, а самую левую половину Δ_{n-1} , содержащую бесконечное число элементов x_n , то в результате получили бы число a (точку), равное нижнему пределу последовательности $\{x_n\}$.

Покажем, что верхний (нижний) предел ограниченной последовательности $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ содержит в себе бесконечное число элементов x_n , при этом справа (слева) от этого интервала имеется не более, чем конечное число элементов x_n .

В самом деле, можно указать такое n , что $\Delta_n \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, но в Δ_n , имеется бесконечное число элементов x_n — тем более в $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; правее (левее) же Δ_n имеется не более чем конечное число элементов x_n — тем более правее (левее) интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Для ограниченной последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел это свойство верхнего (нижнего) предела может служить другим эквивалентным его определением.

Действительно, в случае, например, верхнего предела, если число a обладает этим свойством и $a' > a$, то взяв ε так, чтобы было $a < a - \varepsilon < a'$, получим, что правее $a + \varepsilon$ имеется не более чем конечное число элементов x_n и, следовательно, не может существовать подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к a' . Но подпоследовательность, сходящаяся к a , существует; чтобы получить ее, фиксируем $\varepsilon > 0$ и подбираем n_1 так, чтобы $x_{n_1} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Затем подбираем $n_2 > n_1$ так, чтобы $x_{n_2} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, что возможно, так как интервал $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ содержит бесконечное число элементов x_n . Затем

подбираем $n_3 > n_2$ так, чтобы $x_{n_3} \in \left(a - \frac{\epsilon}{3}, a + \frac{\epsilon}{3}\right)$ и т. д. Очевидно, $x_{n_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$).

Если последовательность не ограничена сверху, то, очевидно, можно выделить из нее подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$, и так как $+\infty$ больше любого числа, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

Если последовательность ограничена сверху конечным числом, которое обозначим через b , но не ограничена снизу, то возможны два случая:

1-й случай. Найдется такое конечное число $a < b$, что неравенства $a \leq x_n \leq b$ удовлетворяются для бесконечного числа индексов n . Таким образом, из этих индексов, если их расположить в возрастающем порядке, образуется бесконечная подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\} = \{n_1 < n_2 < \dots\}$. Последней соответствует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ нашей последовательности, очевидно, ограниченная. Существование ее верхнего предела уже доказано. Легко видеть, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k},$$

и мы доказали существование $\overline{\lim} x_n$ и в этом случае.

2-й случай. Для любого $a \leq b$ неравенство $a \leq x_n \leq b$ или, что в данном случае все равно, неравенство $a \leq x_n$, выполняется для конечного числа индексов n . Это значит, очевидно, что

$$\lim x_n = -\infty.$$

Но тогда и верхний предел $\overline{\lim} x_n = -\infty$ (так же как нижний!), т. е. он и в этом последнем случае существует.

Объединяя эти результаты с установленными выше результатами для ограниченной последовательности, получим:

Теорема 4. Любая последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имеет верхний (нижний) предел (равный конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$).

Если последовательность ограничена, то ее верхний и нижний пределы конечны.

Теорема 5. Всегда $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$, и равенство в этом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда существует предел x_n (конечный, $+\infty$ или $-\infty$), и тогда

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim x_n. \quad (2)$$

В самом деле, если существует предел x_n , то все подпоследовательности $\{x_n\}$ сходятся к нему, и поэтому имеет место (2).

Наоборот, пусть

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = A. \quad (3)$$

Если A — конечное число, то из (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенства

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

соблюдаются для всех индексов n , за исключением конечного их числа, а это значит, что $x_n \rightarrow A$. Если теперь $A = +\infty$, то неравенству $x_n \leq M$ может при любом конечном M удовлетворять только конечное число элементов x_n , но тогда $\underline{\lim} x_n = +\infty$. Аналогично рассматривается случай $A = -\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\underline{\lim} x_n = -\overline{\lim} (-x_n). \quad (4)$$

Справедливы неравенства (правые части конечны)

$$\overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n, \quad (5)$$

$$\underline{\lim} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n, \quad (6)$$

где переменные x_n и y_n ограничены. Неравенство (5) доказывается так: найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ такая, что

$$\overline{\lim} (x_n + y_n) = \lim (x_{n_k} + y_{n_k}); \quad (7)$$

можно далее из $\{n_k\}$ выбрать подпоследовательность $\{n'_k\}$ такую, что существует предел $\lim x_{n'_k}$. Далее, из подпоследовательности $\{n'_k\}$ можно выбрать в свою очередь ее подпоследовательность $\{n''_k\}$ такую, что $\lim y_{n''_k}$ существует, но тогда, очевидно, и $\lim x_{n''_k}$ будет существовать. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim (x_{n_k} + y_{n_k}) &= \lim (x_{n''_k} + y_{n''_k}) = \\ &= \lim x_{n''_k} + \lim y_{n''_k} \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует (5).

В силу (4) и (5)

$$\begin{aligned} \underline{\lim} (x_n + y_n) &= -\overline{\lim} (-x_n + (-y_n)) \geq \\ &\geq -(\overline{\lim} (-x_n) + \overline{\lim} (-y_n)) = \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n, \end{aligned}$$

т. е. справедливо (6).

Теорема 6. Пусть A — конечное положительное число и существует предел $\lim x_n = A$ и $\{y_n\}$ — любая последовательность,

Тогда

$$\overline{\lim} (x_n y_n) = A \overline{\lim} y_n. \quad (9)$$

В частности,

$$\overline{\lim} (A y_n) = A \overline{\lim} y_n. \quad (10)$$

Здесь считается $A \cdot (+\infty) = +\infty$ и $A \cdot (-\infty) = -\infty$.

Доказательство. Будем считать, что $\{y_{n_k}\}$ есть произвольная сходящаяся (к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$) подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$. Тогда $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ автоматически будет произвольной сходящейся подпоследовательностью последовательности $\{x_n y_n\}$. Поэтому

$$A \lim y_{n_k} = \lim (x_{n_k} y_{n_k}) \leq \overline{\lim} (x_n y_n),$$

следовательно,

$$A \overline{\lim} y_n \leq \overline{\lim} (x_n y_n). \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\lim (x_{n_k} y_{n_k}) = A \lim y_{n_k} \leq A \overline{\lim} y_n,$$

следовательно,

$$\overline{\lim} (x_n y_n) \leq A \overline{\lim} y_n. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует (9).

Пример. Последовательность

$$E = \{\sin n\alpha\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

в случае, если $\alpha = \lambda\pi$, где $\lambda = p/q$ рационально ($p, q > 0$), носит периодический характер:

$$\sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots, \sin 2q\alpha, \sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots \quad (13)$$

Пределы различных сходящихся ее подпоследовательностей могут быть равны только одному из первых $2q$ чисел (13). Наибольшее из них, очевидно, есть $\overline{\lim} \sin n\alpha$, а наименьшее есть $\underline{\lim} \sin n\alpha$.

Пусть теперь $\lambda > 0$ иррационально. Будем отмечать числа $n\alpha$ на единичной окружности γ , как это принято в тригонометрии. Тогда, каковы бы ни были различные натуральные числа n_1 и n_2 , точки $n_1\alpha$ и $n_2\alpha$ геометрически различны, так как в противном случае имело бы место равенство

$$n_2\alpha = n_1\alpha + 2k\pi, \quad \alpha = \lambda\pi,$$

где k — целое, т. е. $(n_2 - n_1)\lambda = 2k$ и λ было бы рациональным. Следовательно, точки $n\alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) образуют бесконечное множество, которое мы обозначим через \mathfrak{M} . Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара точек $n_1\alpha, n_2\alpha$, геометрически отстоящих друг от друга (вдоль γ) на расстоянии меньшем, чем ε . Это значит, что

$$(n_2 - n_1)\alpha = 2k\pi + \omega = \beta \quad (n_1 < n_2),$$

где $|\omega| < \varepsilon$, а k — целое.

Точки $0, \beta, 2\beta, 3\beta, \dots$ принадлежат, очевидно, \mathfrak{M} . Кроме того, любые рядом стоящие точки этой последовательности находятся на равном рас-

стоянии, меньшем, чем ε . Отсюда следует, что какова бы ни была точка $t \in \gamma$, на γ существует на расстоянии (вдоль γ) меньшем, чем ε , точка множества \mathfrak{M} . Это показывает, что любая точка $t \in \gamma$ есть предельная точка множества \mathfrak{M} .

Из сказанного следует, что каково бы ни было t , всегда можно подобрать подпоследовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin n_k \alpha = \sin t.$$

Но $\sin t$ пробегает все значения отрезка $[-1, +1]$; отсюда следует, что

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \sin n \alpha = -1, \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \sin n \alpha = 1.$$

Упражнение. Доказать, что для любой переменной x_n

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k > n} x_k.$$

Указание. Для неограниченной сверху (снизу) переменной $\sup_{k > n} x_k = +\infty$ ($\inf_{k > n} x_k = -\infty$), и тогда надо считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (+\infty) = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} (-\infty) = -\infty$).

§ 3.8. Критерий Коши *) существования предела

Пусть переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$) стремится к конечному пределу a . Тогда для произвольного положительного числа ε найдется такое N , что

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad (n > N).$$

Пусть n и m будут любыми натуральными числами, большими, чем N . Тогда

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad |x_m - a| < \varepsilon/2 \quad (n, m > N).$$

Отсюда

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получим утверждение:

Если переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$) имеет конечный предел, то она удовлетворяет следующему условию, называемому условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для всех $n, m > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Верно и обратное утверждение:

*) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.

Если переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяет условию Коши, то она стремится к конечному пределу, т. е. существует число a такое, что

$$\lim x_n = a.$$

Докажем это утверждение. Пусть задана переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$), удовлетворяющая условию Коши. Положим $\epsilon = 1$ и подберем N такое, чтобы

$$|x_n - x_m| < 1 \quad (n, m > N).$$

Зафиксируем какое-либо $m > N$. Из написанного неравенства следует

$$1 > |x_n - x_m| \geq |x_n| - |x_m|,$$

или

$$|x_n| < 1 + |x_m| \quad (n > N),$$

и переменная x_n ограничена.

По из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (1)$$

Покажем, что тогда последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

В самом деле, зададим $\epsilon > 0$ и подберем N такое, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2 \quad (n, m > N). \quad (2)$$

Подберем также k_0 настолько большое, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon/2,$$

$n_k > N$ для всех $k > k_0$. Это возможно в силу того, что $n_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), и в силу (1). Но тогда в неравенстве (2) можно при $k > k_0$ положить $m = n_k$ и будем иметь

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (n > N).$$

Это доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a .

Если соединить вместе доказанные прямое и обратное утверждения, то получим следующую теорему, о которой говорят, что она дает критерий Коши существования (конечного) предела.

Теорема. Для того чтобы переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$) стремилась к (конечному) пределу; необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

Отметим, что условие Коши можно сформулировать и в следующей форме: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ и любых натуральных p .

§ 3.9. Теорема Вейерштрасса *)

Пусть E есть множество чисел (точек действительной прямой). По определению, точка a называется *пределной точкой* E , если любая ее окрестность, т. е. интервал (c, d) , где $c < a < d$, содержит в себе хотя бы одну точку x , принадлежащую E и отличную от a .

На самом деле любая окрестность (c, d) предельной точки a содержит в себе бесконечное число точек множества E и из них можно выделить бесконечную последовательность различных точек x_1, x_2, x_3, \dots ($x_n \neq x_k, n \neq k$), сходящуюся к a . Действительно, по определению, на (c, d) имеется точка $x_1 \in E, x_1 \neq a$. Но можно указать интервал (c_1, d_1) длины $d_1 - c_1 < 1$, содержащий a , но не содержащий x_1 . На нем, по определению a , должна найтись точка $x_2 \in E, x_2 \neq a$. Но снова можно указать интервал (c_2, d_2) длины $d_2 - c_2 < 1/2$, содержащий a , но не содержащий x_1 и x_2 , и на нем найти точку $x_3 \in E, x_3 \neq a$ и т. д. В результате мы получим нужную последовательность.

Итак, можно дать второе (эквивалентное) определение предельной точки: точка a есть предельная точка множества E , если любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек E .

Множество E' всех предельных точек множества E называется *производным множеством* от E .

Пример 1. Множество E точек последовательности $\{1/n\}$ имеет предельную точку 0.

Действительно, любая окрестность точки 0 содержит в себе бесконечное множество точек нашей последовательности. С другой стороны, если $a \neq 0$, то интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < |a|$, содержит конечное число точек множества E или вовсе не содержит их. Таким образом, единственная предельная точка множества E есть 0.

Таким образом, в данном примере производное множество E' состоит из одной точки 0. При этом она не принадлежит E . Множество E_1 , состоящее из 0 и точек вида $1/n$ ($n = 1, 2, \dots$), очевидно, также имеет 0 своей предельной точкой. Она принадлежит E_1 . Таким образом, предельная точка множества E может принадлежать и не принадлежать E .

Пример 2. Множество R всех рациональных чисел имеет в качестве своих предельных точек любую точку действительной оси — рациональную и иррациональную, потому что в любом интервале имеются точки R . Сово-

*) К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

кучность предельных точек множества, иррациональных точек x , удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, есть, очевидно, отрезок $[0, 1]$.

Множество A , состоящее из конечного числа точек, очевидно, не может иметь предельную точку, т. е. в данном случае A' — пустое множество. Бесконечное неограниченное множество также может не иметь предельной точки, как показывает пример множества натуральных чисел $1, 2, 3\dots$. Однако, имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Бесконечное ограниченное множество E точек имеет по крайней мере одну предельную точку, т. е. E' — не пустое множество.*

Эта теорема доказана в § 7.9 (теорема 2) в n -мерном случае. Но и сейчас читатель при желании может ее прочитать, имея в виду пока одномерный случай.

§ 3.10. Счетное множество.

Счетность множества рациональных чисел.

Несчетность множества действительных чисел

Множество E элементов x любой природы называется *бесконечным*, если, каково бы ни было натуральное число n , в нем имеется больше, чем n элементов.

E называется *счетным*, если оно бесконечно и его элементы можно *перенумеровать*. Это значит, что между (всеми) элементами $x \in E$ и числами натурального ряда

$$\{1, 2, 3, \dots\} \quad (1)$$

можно установить взаимно однозначное соответствие. Если при этом элементу $x \in E$ соответствует натуральное число n , то естественно обозначить его через x_n . В результате множество E можно записать в виде *последовательности* элементов:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}. \quad (2)$$

В частности, множество (1) натуральных чисел тривиальным образом счетно. Очевидно также, что множество четных натуральных чисел счетно, потому что оно бесконечно и его элементы x можно занумеровать, положив $x_n = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Нельзя сказать, что множество (2), и A — непустая его часть. Тогда в A имеется элемент с наименьшим номером. В самом деле, в (2) имеется элемент $x_n \in A$ с некоторым номером n_1 . Элементов $x_n \in A$ с номерами $n \leqslant n_1$ имеется только конечное число; среди них можно выбрать элемент x_{n_0} с наименьшим номером — это и будет, очевидно, элемент A , имеющий самый малый номер в A .

Если E — счетное множество и A — его бесконечная часть, то A — счетное множество, которое можно занумеровать следующим образом: обозначим через z_1 элемент A с наименьшим номером в E ; выкидываем из A этот элемент и в оставшемся

бесконечном множестве A_1 выбираем элемент с наименьшим номером в E , который обозначаем через z_1 ; выкидываем z_1 из A_1 и т. д.

Счетная (теоретико-множественная) сумма

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E^1 + E^2 + \dots$$

счетных множеств E^k есть счетное множество. В самом деле, запишем элементы $x_j^k \in E^k$ ($j = 1, 2, \dots$) в виде таблицы:

$$\begin{aligned} E^1 &= \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots\}, \\ E^2 &= \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots\}, \\ E^3 &= \{x_1^3, x_2^3, x_3^3, \dots\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Перенумеруем их в следующем порядке:

$$x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_4^1, \dots,$$

выбрасывая, однако, на каждом этапе нумерации те элементы, которые уже были запрограммированы на предыдущем этапе: ведь может случиться, что E^k и E^l имеют общие элементы. В результате получим бесконечную последовательность элементов $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$, очевидно, исчерпывающую множество E . Это доказывает, что E — счетное множество.

Аналогично доказывается, что *континуальная сумма $E = E^1 + \dots + E^N$ счетных или конечных множеств, среди которых есть хотя бы одно счетное, счетна.*

Докажем, что *множество положительных (отрицательных) рациональных чисел, а следовательно, множество всех рациональных чисел, счетно.*

Чисел p/q ($p > 0, q > 0$ — целые) с $p+q=1$ нет, среди же чисел p/q с $p+q=2$ имеется одно: $1=1/1$; обозначим его через y_1 . Среди не занумерованных еще чисел p/q с $p+q=3$ имеется два: $1/2$ и $2=2/1$; обозначим их соответственно через y_2 и y_3 ; этот процесс продолжаем по индукции. В результате все положительные рациональные числа будут, очевидно, перенумерованы.

С другой стороны, *множество всех действительных чисел не счетно (несчетно).*

Докажем, что уже единичный интервал $(0, 1)$ есть несчетное множество, откуда и будет следовать высказанное утверждение, потому что мы знаем, что часть счетного множества может быть только конечной или счетной. Точки x (числа) интервала $(0, 1)$ будем записывать в виде бесконечных десятичных дробей. Допустим, что интервал $(0, 1)$ есть счетное множество, тогда все

его точки можно было бы перенумеровать

$$\begin{aligned}x^1 &= 0, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 \dots, \\x^2 &= 0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots, \\x^3 &= 0, \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 \dots, \\&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\end{aligned}\tag{3}$$

Однако это заключение, как мы сейчас увидим, противоречиво. Для каждого натурального n определим цифру α_n так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \alpha_n < 9$, $\alpha_n \neq \alpha_n^n$, что, очевидно, возможно. Сконструируем число $a = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$. Оно принадлежит интервалу $(0, 1)$ и должно, таким образом, значиться под некоторым номером n_0 в таблице (3): $a = x^{n_0}$. Но тогда должно было бы быть $\alpha_{n_0} = \alpha_{n_0}^{n_0}$, что невозможно.

Упражнения.

1. Доказать, что множество точек плоскости с рациональными координатами (x, y) счетно.
2. То же доказать для множества точек (x_1, \dots, x_n) n -мерного пространства с рациональными координатами x_j .

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Понятие предела функции

Число A называется *пределом функции f в точке a* , если функция f определена на некоторой окрестности a , т. е. на некотором интервале (c, d) , где $c < a < d$, за исключением, быть может, самой точки a , и если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать зависящее от него $\delta > 0$ такое, что для всех x , для которых $0 < |x - a| < \delta$, имеет место

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел f в точке a , принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a).$$

Другое определение предела функции в точке может быть высказано в терминах пределов последовательностей.

Число A называется *пределом функции f в точке a* , если она определена на некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a и если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A , какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к a и такая, что $x_n \neq a$ для всех n . Таким образом,

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A.$$

Здесь считается, как и в других подобных случаях, само собой разумеющимся, что сходящаяся к a переменная x_n пробегает значения, для которых $f(x)$ определена.

Высказанные определения эквивалентны. В самом деле, пусть функция f имеет предел в смысле первого определения и пусть задана переменная x_n , не равная ни при каком n числу a и стремящаяся к a . Зададим ε и подберем δ так, как это сказано в первом определении. Затем подберем натуральное N так, чтобы $|x_n - a| < \delta$ для $n > N$. Но тогда

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ для } n > N,$$

это значит, что последовательность чисел $\{f(x_n)\}$ стремится к A , и так как это свойство верно для любой сходящейся к a после-

довательности $\{x_n\}$, лишь бы $x_n \neq a$ и все x_n принадлежали к области определения функции, то доказано, что из первого определения предела следует второе.

Обратно, пусть функция $f(x)$ имеет предел в смысле второго определения. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле первого определения. Это значит, что существует хотя бы одно ε_0 , которое мы обозначим через ε_0 , для которого нельзя подобрать нужное δ , т. е. для любого δ среди x , удовлетворяющих соотношениям $0 < |x - a| < \delta$, должен найтись хотя бы один $x = x^{(\delta)}$ такой, что для него $|f(x^{(\delta)}) - A| \geq \varepsilon_0$.

В качестве δ мы берем все числа вида $\delta = 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$) и для каждого из них найдем точку $x_k = x^{(\delta)}$, для которой

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \quad (x_k \neq a)$$

$$|f(x_k) - A| \geq \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Из этих соотношений видно, что $x_k \rightarrow a$ ($x_k \neq a$), в то время как $f(x_k)$ заведомо не стремится к числу A . Таким образом, доказано, что из второго определения предела не следует первое, приводит к противоречию.

Эквивалентность двух определений доказана.

Выражение *предел функции в точке a* часто заменяют выражением *предел функции при x , стремящемся к a* , или, короче, *предел функции при $x \rightarrow a$* . Если угодно, это выражение больше соответствует духу понятия предела потому, что число $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ничего не говорит о значении f в самой точке $x = a$.

Функция может не быть определенной в $x = a$. Число A говорит о поведении функции в малой окрестности точки a , из которой выбрасывается точка a . Оно говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a , то соответствующее значение $f(x)$ в свою очередь приближается к A , т. е. делается как угодно близким к A .

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Она определена для всех $x \neq 2$. Попробуем найти ее предел при $x \rightarrow 2$. Для любого $x \neq 2$ $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, а так как при определении предела при $x \rightarrow 2$ совсем не принимаются во внимание значения f в точке $x = 2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2).$$

Это равенство пока написано в том смысле, что если один из пределов существует, то существует и второй и равен ему. Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $(x^2 - 4)/(x - 2)$, достаточно вычислить предел более простой функции $x + 2$. Этот последний при $x \rightarrow 2$, очевидно, равен 4. Ведь если подставить в $x + 2$ вместо x произвольную переменную x_n , стремящуюся к 2, то независимо от способа стремле-

ния ее к 2

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} (x_n + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ и $\varphi(x) = x + 2$ являются разными функциями. Первая из них определена для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x . Однако при вычислении предела функций при $x \rightarrow 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x = 2$, и так как $f(x) = \varphi(x)$ для $x \neq 2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Пример 2. Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$, потому что, если $x_n \rightarrow 1$, $x_n \neq 1$, то $\lim x_n^2 = \lim x_n \lim x_n = 1 \cdot 1 = 1$. С другой стороны, этот факт можно доказать на языке ϵ и δ .

Определим какой-либо интервал, содержащий точку 1, например $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Для любого x , принадлежащего ему, очевидно, выполняются неравенства

$$|x^2 - 1| = |x + 1||x - 1| \leqslant \frac{5}{2}|x - 1|.$$

Зададим теперь произвольное $\epsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\epsilon\right\}$. Тогда для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, будет иметь место соотношение

$$|x^2 - 1| \leqslant \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} \epsilon = \epsilon.$$

Пример 3. Функция $\sin(1/x)$ (график ее изображен на рис. 4.1) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x = 0$, за исключением самой точки $x = 0$. Эта функция не имеет предела при $x \rightarrow 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений

$$x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ стремится к нулю и в то же время

$$f(x_k) = (-1)^k$$

не стремится при $k \rightarrow \infty$ ни к какому пределу.

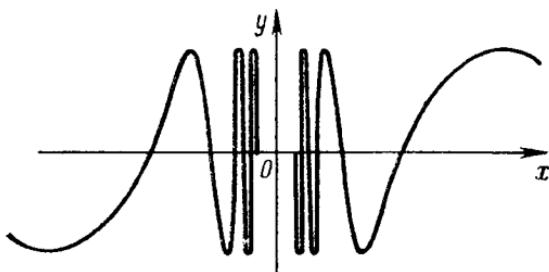


Рис. 4.1.

Введем еще следующее определение. Будем писать

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

и говорить, что число A есть предел функции $f(x)$ при x , стрем-

маящемся к бесконечности, если f определена для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > K$ при некотором $K > 0$, и для любого $\epsilon > 0$ можно найти число $M > K$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$ для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$.

Можно доказать, что это определение эквивалентно следующему:

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если функция $f(x)$ определена для всех x с $|x| > M$ при некотором M и

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство эквивалентности этих двух определений проводится по той же схеме, что и в разобранном выше случае предела f в конечной точке a .

Вообще, многие свойства пределов $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a — конечное число, и при $x \rightarrow \infty$ являются аналогичными. Можно изложить эти свойства единым образом, так что изложение будет одновременно относиться как к случаю, когда $x \rightarrow a$, где a — конечное число, так и к случаю $x \rightarrow \infty$. Для этого под буквой a надо понимать либо число (конечное *) либо символ ∞ . Если a есть число, то под окрестностью точки a понимается любой интервал (c, d) , содержащий в себе точку a . Таким образом, *окрестность (конечной) точки a* есть множество всех точек x , удовлетворяющих неравенствам $c < x < d$. Если же $a = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то под окрестностью a мы условимся понимать множество всех x , удовлетворяющих неравенству

$$|x| > M \text{ (или } x > M, \text{ или } x < -M, M > 0).$$

Мы будем писать

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

где a может быть конечным числом или ∞ (или $+\infty$, или $-\infty$), если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a , за исключением **), быть может, самой точки a , и если для любого $\epsilon > 0$ найдется такая окрестность точки a , что для всех x , принадлежащих к ней и отличных от a , имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

Это определение объединяет в себе, очевидно, разобранные выше случаи предела f : когда x стремится к конечному числу a и когда x стремится к $\infty, +\infty, -\infty$.

*) Символы ∞ , $+\infty$, $-\infty$ называют *бесконечными числами*; в таких случаях обычные числа называют *конечными числами*.

**) Эта оговорка нужна только в случае конечной точки (числа) a ,

Приступим к изложению свойств функции $f(x)$, имеющей пределы при $x \rightarrow a$, где a есть число или $\infty, +\infty, -\infty$. Условимся произвольную окрестность a называть символом $U(a)$. Легко проверить, что пересечение двух окрестностей, $U_1(a)$ и $U_2(a)$, есть снова некоторая окрестность $U(a)$.

Теорема 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A — конечное число, то на некоторой окрестности $U(a)$ функция $f(x)$ ограничена, т. е. существует положительное число M такое, что

$$|f(x)| \leq M \quad \text{для всех } x \in U(a), x \neq a.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование окрестности $U(a)$ такой, что

$$1 > |f(x) - A| \geq |f(x)| - |A| \quad (x \in U(a), x \neq a).$$

Отсюда для указанных x

$$|f(x)| \leq 1 + |A|,$$

где надо считать $M = 1 + |A|$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $A \neq 0$ — конечное число, то существует окрестность $U(a)$ такая, что

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \quad (x \in U(a), x \neq a).$$

Больше того, для указанных x

$$f(x) > \frac{A}{2}, \quad \text{если } A > 0,$$

и

$$f(x) < \frac{A}{2}, \quad \text{если } A < 0.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование для $\varepsilon = |A|/2$ окрестности $U(a)$ такой, что

$$\frac{|A|}{2} > |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)| \quad (x \in U(a), x \neq a),$$

откуда $|f(x)| > |A|/2$ для указанных x . Первое из этих неравенств можно заменить следующими:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

При $A > 0$ отсюда следует

$$\frac{A}{2} = A - \frac{|A|}{2} < f(x),$$

а при $A < 0$ следует

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x \neq a$

$$f_1(x) \leq f_2(x),$$

то $A_1 \leq A_2$.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$; тогда для достаточно большого n_0 имеет место неравенство

$$f_1(x_n) \leq f_2(x_n) \quad (n > n_0)$$

и после перехода к пределу неравенство $A_1 \leq A_2$.

Теорема 4. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A \tag{1}$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x \neq a$

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x), \tag{2}$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$; тогда при достаточно большом n_0 для $n > n_0$

$$f_1(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq f_2(x_n),$$

и в силу (1) существует предел $\varphi(x_n)$, равный A , а так как $\{x_n\}$ есть произвольная сходящаяся к a последовательность, то имеет место (3).

Теорема 5 (Критерий Коши существования предела). Для того чтобы существовал предел (конечный) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была определена в окрестности a , за исключением, быть может, самой точки a , и для всякого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(a)$, что каковы бы ни были точки x' , $x'' \in U(a)$, $x' \neq x''$,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A — конечное число; тогда существует окрестность a , где $f(x)$ определена, за исключением, быть может, самой точки a . Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(a)$, что если $x \in U(a)$, $x \neq a$, то $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Пусть x' , $x'' \in U(a)$ и $x' \neq x''$; тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получили, что условие теоремы необходимо.

Докажем достаточность этого условия. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности a , за исключением, быть может, самой точки a , и пусть для любого $\epsilon > 0$ можно указать окрестность $U(a)$ такую, что $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ для всех $x', x'' \in U(a)$, $x' \neq x''$. Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ ($n = 1, 2, \dots$), стремящуюся к a . Тогда согласно критерию Коши для последовательности, стремящейся к пределу, найдется натуральное N такое, что для $n, m > N$ будет $x_n, x_m \in U(a)$. Но тогда

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon \quad (n, m > N),$$

и последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Мы доказали следующее свойство рассматриваемой функции f : для любой сходящейся к a последовательности чисел $x_n \neq a$ существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x_n)$. Из этого свойства автоматически следует, что пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x_n)$, соответствующие разным сходящимся к a последовательностям, равны между собой. Но тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. В самом деле пусть $x_n \rightarrow a$, $x'_n \rightarrow a$; $x_n, x'_n \neq a$, $n = 1, 2, \dots$

Тогда по доказанному, существуют числа A и A' такие, что $f(x_n) \rightarrow A$ и $f(x'_n) \rightarrow A'$. Составим новую последовательность: $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, \dots\}$. Она сходится к a . Но доказанному выше, должна сходиться к некоторому числу и соответствующая последовательность $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), f(x_3), \dots\}$. Но это возможно, только если $A = A'$. Таким образом, $A = A'$.

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B,$$

где A и B — конечные числа. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = AB$$

и при условии, что $B \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Докажем для примера второе равенство. Пусть $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ ($n = 1, 2, \dots$); тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_n) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x_n) = B,$$

но так как предел произведения двух переменных, пробегающих последовательности, равен произведению их пределов, то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_n) \varphi(x_n)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_n) \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x_n) = AB.$$

Это равенство доказано для любой переменной $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, поэтому $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)\varphi(x)] = AB$.

По определению, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a , за исключением, быть может, самой точки a , и если для всякого положительного числа M найдется такая окрестность $U(a)$ точки a , что

$$|f(x)| > M \quad (x \in U(a), x \neq a).$$

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и в некоторой окрестности точки a функция $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$), то еще пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

(соответственно $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

Легко доказать следующие теоремы:

Теорема 7. Если функция $f(x)$ удовлетворяет на некоторой окрестности a неравенству

$$|f(x)| > M > 0,$$

а для функции $\varphi(x)$ имеет место

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \quad (\varphi(x) \neq 0 \text{ для } x \neq a),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Теорема 8. Если $|f(x)| < M$ в некоторой окрестности точки a и если $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Следствие. Если $\varphi(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$, $\varphi(x) \neq 0$), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty,$$

и если $\varphi(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow a$, $\varphi(x) \neq 0$), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

Теорема 9. Пусть для функции f , определенной в окрестности точки a (конечной или бесконечной), выполняется условие: из всякой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow a$. Согласно условию любая подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$ содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к A . Но тогда по теореме 3 § 3.7 $f(x_n) \rightarrow A$.

§ 4.2. Непрерывность функции в точке

По определению, функция f называется *непрерывной в точке* (конечной) a , если она определена в некоторой окрестности точки a (в том числе и в самой точке a) и если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

На основании сказанного в § 4.1 о пределе функции в точке можно дать следующую развернутую формулировку непрерывности функции в точке:

Функция f называется непрерывной в точке a , если она определена на некотором интервале (c, d) , содержащем точку a , и если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В силу сказанного в § 4.1 приведенной формулировке полностью эквивалентна следующая формулировка:

Функция f непрерывна в точке a , если она определена на некотором интервале (c, d) , содержащем a , и если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a , имеет место

$$\lim_{x_n \rightarrow a} f(x_n) = f(a).$$

Если функция $f(x)$, заданная в окрестности точки a , не является непрерывной в точке a , т. е. если для нее не выполняется высказанные выше свойства, то говорят, что она *разрывна в точке a* .

Можно дать и прямое определение разрывности f в точке a :

Пусть функция f определена в окрестности точки a и пусть существует такое положительное число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка x_δ такая, что

$$|a - x_\delta| < \delta, \quad |f(a) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon_0;$$

тогда $f(x)$ *разрывна в точке a* .

Рассмотрим непрерывную кривую C — график непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 4.2). Термин «непрерывная кривая» здесь употреблен в житейском (интуитивном) смысле — ее можно начертить всю, не отрывая карандаша от бумаги.

Зададим произвольное значение $x_0 \in (a, b)$. Ему соответствует значение $f(x_0)$ нашей функции. Зададим $\varepsilon > 0$ и проведем три прямые параллельно оси x , соответственно на расстояниях $f(x_0) - \varepsilon$,

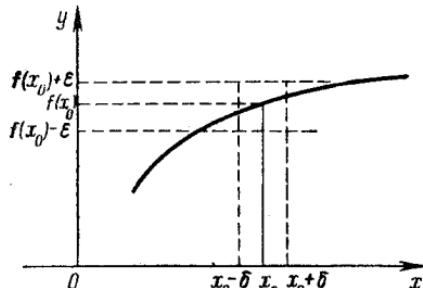


Рис. 4.2.