$f(x_0)$ и $f(x_0)+\varepsilon$ от оси x. Легко видеть, что для нашей (непрерывной) кривой всегда можно подобрать такое $\delta>0$ (зависящее от ε), что для всех x, принадлежащих интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, соответствующие ординаты $f(x)$ нашей кривой будут удовлетворять неравенствам

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Другими словами, для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Таким образом, математическое определение непрерывности функции отвечает интуитивному понятию непрерывной кривой.

Обратимся еще к графику, изображенному на рис. 4.3.

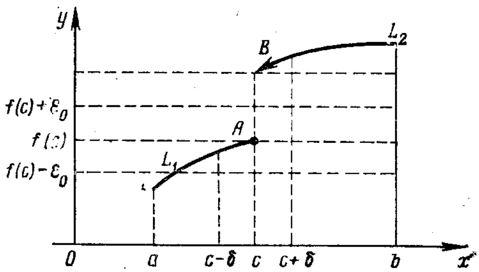

Рис. 4.3.

Этот график представляет собой разрывную кривую L, состоящую из двух непрерывных кусков L_1 и L_2. Кусок L_1 взаимно однозначно проектируется (в направлении оси y) на отрезок $[a, c]$. Кусок же L_2 предполагается лишенным левой концевой точки, он взаимно однозначно проектируется на полуинтервал $(c, b]$. Каждому значению $x\in[a, b]$ соответствует единственное значение $y=f(x)$, равное ординате точки кривой L, имеющей абсциссу x. Кривая L разрывна, она состоит из двух не склеенных друг с другом кусков L_1 и L_2. Разрыв имеет место при переходе аргумента x через значение c. Убедимся в том, что функция $f(x)$ также не является непрерывной в точке c. Очевидно, что $f(c)=Ac$ (рис. 4.3). Возьмем положительное число $\varepsilon_0<AB$. Внимательное рассмотрение чертежа показывает, что как бы ни было мало $\delta>0$, среди значений x, удовлетворяющих неравенству $|c-x|<\delta$, имеются такие, а именно бо́льшие чем c, что для них

$$|f(x)-f(c)|>\varepsilon_0.$$

Таким образом, разрывному графику соответствует разрывная функция. В данном случае функция $f(x)$ разрывна в точке c (ср. с § 1.4).

Величина $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ называется *приращением функции f в точке x, соответствующим приращению h независимой переменной.*

Мы можем понятие непрерывности функции f в точке a выразить еще следующим образом (на языке h): *функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если функция $f(a+h)$ от h определена в некоторой окрестности $h=0$ и если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $|h| < \delta$ выполняется*

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, функция f непрерывна в точке a, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению h аргумента, стремится к нулю вместе с h.

Из свойств предела функции (см. § 4.1) и определения непрерывности в точке немедленно следует

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a, то непрерывны также в точке a и их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$ и произведение $f(x)\varphi(x)$, а также и частное $f(x)/\varphi(x)$ при добавочном условии, что $\varphi(a) \neq 0$.*

Докажем еще теорему о непрерывности функции от функции.

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a и функция $f(y)$ непрерывна в точке $b=\varphi(a)$, то функция от функции $F(x) = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Вследствие непрерывности функции f в точке b найдется такое $\sigma > 0$, что функция $f(y)$ определена на интервале $(b-\sigma, b+\sigma)$ и выполняется неравенство

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \text{ для } |y-b| < \sigma. \tag{2}$$

А вследствие непрерывности функции φ в точке a найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(x)$ определена на интервале $(a-\delta, a+\delta)$ и $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \sigma$ для

$$|x-a| < \delta. \tag{3}$$

Из полученных соотношений следует, что для всех x, удовлетворяющих неравенству (3), функция $f(\varphi(x))$ определена и имеет место неравенство

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon \text{ или } |F(x) - F(a)| < \varepsilon, \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать непрерывность F в точке $x=a$, рассуждают еще так. Так как функция φ непрерывна в точке a и функция f непрерывна в точке $b=\varphi(a)$ и, кроме того, $F(a) = f(\varphi(a))$, то для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ имеет место

$$\lim_{x_n\to a} F(x_n) = \lim_{\varphi(x_n)\to\varphi(a)} f(\varphi(x_n)) = f(\varphi(a)) = F(a).$$

Если функция $\Phi(x)$ получена из нескольких функций с помощью только арифметических действий и операций функции от функции, то установление факта непрерывности Φ в данной точке может быть сведено к последовательному применению предыдущих двух теорем, если эти теоремы применяются конечное число раз.

Отметим следующие теоремы, непосредственно вытекающие из определения непрерывности функций в точке и из теорем § 4.1 о пределе функции.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой $f(x)$ ограничена.*

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой*

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}.$$

Больше того, если $f(a) > 0$, то

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) \quad (x \in U(a)),$$

а если $f(a) < 0$, то

$$f(x) < \frac{f(a)}{2} \quad (x \in U(a)).$$

Пример 1. Постоянная функция $f(x) = C$ определена и непрерывна для любого значения x, потому что приращение ее, соответствующее любому приращению h, равно

$$\Delta C = C - C = 0,$$

и следовательно, тривиальным образом $\Delta C \to 0$ $(h \to 0)$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определена на всей действительной оси и непрерывна на ней.

В самом деле, функция $y = x$ очевидно, непрерывна для любого x. Поэтому этот же факт имеет место для функции $x^2 = xx$, но тогда и для $x^3 = x^2x$. По индукции приходим к непрерывности x^n.

Пример 3. Алгебраический многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

$(a_0, \ldots, a_n$ — заданные числа и n — натуральное число) есть, очевидно, функция, непрерывная для любого x, потому что x^{n-k} $(k = 0, 1, \ldots, n)$ есть, как показано выше, непрерывная на действительной оси функция, a_kx^{n-k} есть непрерывная на оси функция как произведение двух непрерывных на оси функций a_k и x^{n-k} и, наконец, $P(x)$, непрерывна на оси как сумма конечного числа непрерывных на оси функций.

Пример 4. Рациональная функция

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{b_0x^m + \ldots + b_m}, \qquad b_0 \neq 0$$

$(n, m$ — натуральные числа и a_k, b_k — заданные числа) есть непрерывная функция для всех значений x, для которых $Q(x) \neq 0$. Это следует из того, что $f(x)$ получается из непрерывных функций x^k и чисел, взятых в конечном числе, путем производства над ними арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления).

Пример 5. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна для всех значений x. Это вытекает из следующих рассуждений.

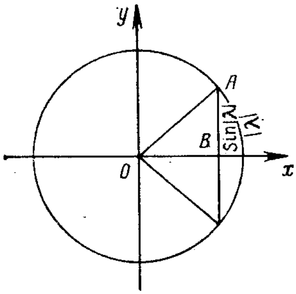

Рис. 4.4.

Имеет место неравенство $|\sin\lambda| \leqslant |\lambda|$. Чтобы доказать его при $|\lambda| \leqslant \pi/2$, помножим его (обе его части) на 2, и тогда левая его часть будет равна длине хорды (рис. 4.4), стягивающей дугу длины $2|\lambda|$. Если теперь $|\lambda| \geqslant \pi/2$, то $|\lambda| \geqslant \pi/2 > 1 \geqslant |\sin\lambda|$. Поэтому

$$|\sin(x+h) - \sin x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1 = |h|$$

и $|\sin(x+h) - \sin x| \to 0$ при $h \to 0$, а это значит, что функция $\sin x$ в точке x (любой) непрерывна.

Пример 6. Функция $\cos x$ непрерывна для всех значений x потому, что

$$|\cos(x+h) - \cos x| = \left|2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1 = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Из полученного неравенства видно, что для всякого ε можно найти δ (в данном случае $\delta = \varepsilon$) такое, что если $|h| < \delta$, то $|\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon$.

Замечание. В этой книге мы исходим из обычного геометрического определения тригонометрических функций (см. § 1.3, п. 7). Но возможны другие их определения, носящие чисто аналитический характер (см. § 10.11).

Пример 7. Функция $|x|$ непрерывна для всех значений x, потому что

$$||x+h| - |x|| \leqslant |x+h-x| = |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

Если функция f не является непрерывной в точке $x = a$ и в то же время существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то говорят, что она имеет *устранимый разрыв* в этой точке. Этим хотят сказать, что f можно видоизменить в точке a (если она определена в a) или доопределить ее в этой точке (если она в a не определена), положив $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, и после этого f станет непрерывной функцией в этой точке.

Пример 8. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

очевидно, разрывна в точке $x = 1$. Но этот разрыв устраняется, если положить $f(1) = 2$.

Если функция f непрерывна для всех x в достаточно малой окрестности точки a, за исключением $x = a$, и неограничена в этой окрестности, то говорят, что f *имеет бесконечный разрыв в* a.

Пример 9. Функция $\sin(1/x)$ может служить примером ограниченной функции с неустранимым разрывом в $x=0$, а функция $\operatorname{tg} x$ — примером функции, имеющей бесконечные разрывы $\left(\text{в точках } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

Пример 10. Функции $\cos(\sin x^2)$ и $(\sin x)^2$ являются непрерывными на всей действительной оси функциями. Это следует из того, что функции x^2, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны на действительной оси, и из теоремы о непрерывности функции от функции.

§ 4.3. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция

По определению, *левой окрестностью точки* (числа) a называется произвольный полуинтервал $(c, a]$, а *правой окрестностью* a называется произвольный полуинтервал $[a, d)$ $(c < a < d)$. *Окрестностью* («точки») $+\infty$ естественно считать (*полубесконечный*) *интервал* $(N, +\infty)$, а *окрестностью* $-\infty$ *интервал* $(-\infty, N)$, где N — в обоих случаях произвольное (конечное) число. Можно еще говорить, что окрестности $+\infty$, $-\infty$ суть соответственно левая и правая окрестности («точки») ∞.

На основе этих определений вводится понятие *правого* и *левого предела* функции f в точке a (конечной и бесконечной). Например, говорят, что A есть *правый предел f в точке a* (конечной или бесконечной), если f определена в некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую правую окрестность a, что для всех принадлежащих к ней $x \neq a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Впрочем, правый (левый) предел f в ∞ обычно называют пределом f при $x \to -\infty$ $(x \to +\infty)$.

Можно еще дать другое определение правого предела функции в точке. Говорят, что функция f *имеет правый предел в точке a* (конечной или бесконечной), равный числу A, если она определена на некоторой правой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n) = A$ для любой сходящейся к a *последовательности* $\{x_n\}$, значения которой $x_n \neq a$ и принадлежат к указанной правой окрестности.

Тот факт, что оба сформулированные определения правого предела эквивалентны, доказывается совершенно аналогично тому, как это делается в случае предела (см. § 4.1).

Сказанное понятным образом переносится на понятие левого предела. Вообще, теоремы § 4.1 о пределах по аналогии переносятся на правые и левые пределы.

Если a — конечная точка, то правый и левый пределы f в ней записываются соответственно так:

$$f(a+0)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),\quad f(a-0)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

Пользуясь определением пределов на «языке ε и δ», легко доказать, что для того чтобы f имела предел в конечной точке a, необходимо и достаточно, чтобы существовали правый и левый пределы f в этой точке и были равны между собой, и тогда $f(a+0)=f(a-0)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пределы f при $x\to-\infty, +\infty, \infty$ часто записывают соответственно так:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty),\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty),\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=f(\infty).$$

Здесь, как в случае конечной точки, имеет место очевидное утверждение: для того чтобы существовал предел f при $x\to\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой пределы f при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ и тогда $f(-\infty)=f(+\infty)=f(\infty)$.

До сих пор мы говорили о конечных пределах функции (A было конечно!), но можно по аналогии ввести пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Например, последнее из этих четырех соотношений выражает, что функция f определена для всех x, меньших некоторого числа (т. е. на некоторой окрестности $-\infty$), и каково бы ни было положительное число N, найдется такое число L, что для всех $x<L$ имеет место $f(x)<-N$.

Односторонние пределы, т. е. пределы справа и слева, имеют большое значение при рассмотрении монотонных функций.

Пусть E — множество действительных чисел (точек прямой). Функция f, определенная на E, называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на* E, если из того, что $x', x''\in E$ и $x'<x''$, следует, что $f(x')\leqslant f(x'')$ (соответственно $f(x')\geqslant f(x'')$).

Неубывающие и невозрастающие на E функции носят общее название *монотонных функций на* E.

Теорема 1. *Пусть функция f не убывает на интервале (a, b), где, в частности, может быть $a=-\infty$, $b=+\infty$. Если она ограничена сверху числом M, то существует предел (конечный) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\leqslant M$. Если же она не ограничена сверху, то $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=+\infty$.*

Доказательство. Из ограниченности f следует существование конечной точной верхней грани $\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) = A \leqslant M$. Таким образом, $f(x) \leqslant A$ для всех $x \in (a, b)$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_1) \leqslant A$. Но в силу того, что f не убывает, $f(x_1) \leqslant f(x)$, $x_1 \leqslant x < b$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $x_1 < b$ такое, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенствам $x_1 < x < b$. Это и значит, что

$$A = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x).$$

Пусть теперь неубывающая функция f не ограничена сверху. Тогда для любого M существует $x_1 \in (a, b)$ такое, что $M < f(x_1)$ и вследствие того, что f не убывает на (a, b),

$$M < f(x_1) \leqslant f(x), \qquad x_1 < x < b,$$

а это и говорит о том, что

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty.$$

По образцу доказанной теоремы легко доказывается и

Теорема 2. *Если функция f не убывает на (a, b), где может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$, и $f(x)$ ограничена снизу числом m, то существует (конечный) предел функции f в точке a справа:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A \geqslant m.$$

Если же функция f не ограничена снизу, то

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty.$$

Читатель может самостоятельно видоизменить формулировки и доказательства подобных теорем для невозрастающей на (a, b) функции.

Пример. На отрезке $[0, 2]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{для } 0 \leqslant x < 1, \\ x + 1 & \text{для } 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Она однозначна и монотонна на $[0, 2]$. Легко видеть, что $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = f(1) = 2$.

Теорема 3. *Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке $x \in (a, b)$ существуют пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$ и выполняются неравенства*

$$f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0).$$

Существуют также пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$f(a) \leqslant f(a+0), \quad f(b-0) \leqslant f(b).$$

Эта теорема немедленно следует из предыдущих теорем, если учесть, что из ее условий вытекает, что функция f не убывает на каждом из отрезков $[a, x]$, $[x, b]$.

Можно ввести понятие *непрерывности функции в точке справа и слева.*

Функция f называется *непрерывной в точке a* (конечной) *справа* (*слева*), если существует $f(a+0)$ и $f(a+0)=f(a)$ (соответственно, если существует $f(a-0)$ и $f(a-0)=f(a)$).

Если для функции f в точке a (конечной) имеют смысл оба числа $f(a-0)$ и $f(a+0)$ (конечные) и если она все же разрывна в a, то говорят, что эта функция *имеет разрыв первого рода в точке a.*

Отметим, что *если функция f непрерывна как справа, так и слева в точке a, то она, очевидно, непрерывна в точке a.* Можно

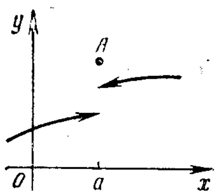

Рис. 4.5.

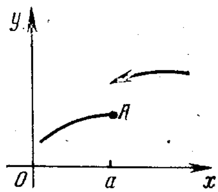

Рис. 4.6.

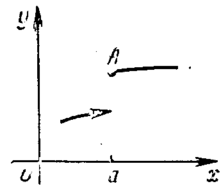

Рис. 4.7.

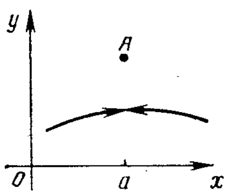

Рис. 4.8.

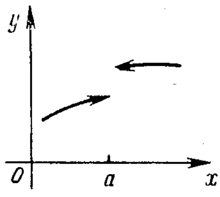

Рис. 4.9.

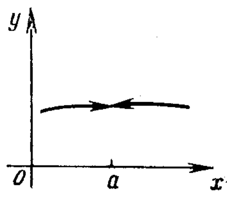

Рис. 4.10.

еще сказать, что *для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы три числа, $f(a-0)$, $f(a)$, $f(a+0)$, имели смысл и чтобы они были равны между собой.*

Мы приводим для примера шесть графиков функций, имеющих разрыв первого рода в точке a. Буква A обозначает точку $A=(a, f(a))$ плоскости. Стрелка на конце куска кривой обозначает, что концевая точка, где находится стрелка, выброшена. На рисунках 4.5—4.8 изображены графики функций f, для которых все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ имеют смысл. На рис. 4.5 числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ различны между собой; функция не только разрывна в a, но и разрывна справа и слева в a. На рис. 4.6 f непрерывна слева в a. На рис. 4.7 f непрерывна справа в a. На рис. 4.8 f имеет устранимый разрыв в a. На рис. 4.9 f не определена в a, разрыв неустраним. На рис. 4.10 f не определена в a, но f можно доопределить в a так, что она будет непрерывной в a.

Заметим следующий важный факт. *Если заданная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *монотонна на нем (не убывает или не возрастает), то, какова бы ни была точка* $x \in [a, b]$, *в ней функция* f *либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.* Это утверждение есть непосредственное следствие из теорем 1, 2 и определения понятия точки разрыва первого рода *).

Если функция f определена в окрестности точки a, исключая быть может a, и имеет разрыв в a, не являющийся разрывом первого рода, то говорят, что она имеет в a *разрыв второго рода.* Например, функция $\sin(1/x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

также имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, потому что хотя для нее и имеет смысл число

$$\psi(0 - 0) = 0,$$

но не имеет смысла число $\psi(0 + 0)$.

§ 4.4. Функции, непрерывные на отрезке

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$ (на множестве точек x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$), если она непрерывна во всех точках интервала (a, b) (множества точек x, для которых $a < x < b$), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b **).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, к изложению которых мы сейчас приступим. Впрочем, мы не останавливаемся пока на важном понятии — равномерной непрерывности функции; оно будет изучено позднее (§ 7.10, теорема 4), сразу для функции n переменных. Из полученных там результатов выводятся соответствующие результаты для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции от одной переменной.

---

*) О числе точек разрыва монотонной функции см. конец § 9.5.

**) Подчеркнем, что у отрезка $[a, b]$ всегда его концы — конечные числа (точки).

Начнем со следующей леммы:

Лемма 1. *Если все значения x_n последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к числу α, принадлежат $[a, b]$, то и $\alpha \in [a, b]$.*

Доказательство. Эта лемма следует из теоремы 3 § 3.1.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для каждого натурального числа n найдется точка $x_n \in [a, b]$ такая, что

$$|f(x_n)| > n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена (a и b — числа!) и из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\alpha \in [a, b]$ (см. предыдущую лемму и теорему 1 из § 3.7). Но в точке α функция f непрерывна и потому*)

$$\lim_{k=\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(\alpha). \tag{2}$$

Но свойство (2) противоречит свойству (1). Поэтому f может быть только ограниченной на $[a, b]$.

Заметим, что если функция непрерывна на интервале (a, b) или на полуинтервале $[a, b)$ или $(a, b]$, то она не обязательно ограничена на нем. Например, функция $1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем.

Если эту функцию доопределить, положив $f(0) = 0$, то она будет конечной в любой точке отрезка $[0, 1]$, однако, *неограниченной на нем.*

Теорема 2. *Непрерывная на $[a, b]$ функция f достигает в некоторых точках отрезка $[a, b]$ своих максимума и минимума, т. е. существуют точки α и β, принадлежащие $[a, b]$, для которых имеет место*

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Таким образом, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. По предыдущей теореме непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена, следовательно, она ограничена сверху некоторым числом K:

$$f(x) \leqslant K \qquad (x \in [a, b]).$$

Но тогда существует точная верхняя грань f на $[a, b]$:

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = M. \tag{3}$$

Число M обладает следующим свойством: для любого натураль-

*) Если $\alpha = b$ (соответственно $\alpha = a$), то в этой точке f непрерывна слева (справа).

ного числа n найдется на $[a, b]$ точка x_n такая, что

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{x_n\}$, как принадлежащая к $[a, b]$, ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходящуюся к некоторому числу β, которое заведомо принадлежит $[a, b]$ (учесть лемму 1). Но функция f непрерывна в точке β и потому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\beta)$. С другой стороны, $M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\leqslant$ $\leqslant M$ $(k=1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=M.$$

Но так как $f(x_{n_k})$ может стремиться только к одному пределу, то $M=f(\beta)$.

Верхняя грань (3), таким образом, достигается в точке β, т. е., как говорят, *функция f достигает в точке β своего максимума на отрезке* $[a, b]$. Мы доказали, что существует точка $\beta\in[a, b]$, для которой

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(\beta).$$

Доказательство другой части теоремы о минимуме аналогично, но его можно свести к доказательству первой части теоремы, учитывая, что

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=-\max_{x\in[a,b]}\{-f(x)\}.$$

Замечание. Функция $y=x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$ и ограничена на нем; верхняя ее грань $\sup\limits_{x\in(0,1)} x=1$ не достигается, т. е. нет такого $x_0\in(0, 1)$, для которого эта функция равна 1. Таким образом, в доказанной теореме условие непрерывности f *на замкнутом* (содержащем в себе оба конца a и b) *отрезке* существенно.

Очевидно, что $\sup\limits_{x\geqslant 0} \operatorname{arctg} x=\pi/2$. Однако, нет такого x на луче $x\geqslant 0$, для которого функция $\operatorname{arctg} x$ принимает значение $\pi/2$, и она не достигает максимума на $x\geqslant 0$. В данном случае условия теоремы не выполняются: область задания непрерывной функции $\operatorname{arctg} x$ неограничена.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и числа $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c)=0$.*

Доказательство. Обозначим отрезок $[a, b]$ через Δ_0. Разделим Δ_0 на две равные части. Если в середине Δ_0 функция равна нулю, то теорема доказана; если этого нет, то одна из половинок Δ_0 такова, что на концах ее наша функция принимает значения разных знаков. Обозначим именно эту половинку через Δ_1 и разделим ее на две равные части. Может случиться, что в середине Δ_1 наша функция равна нулю, и тогда теорема доказана. Если нет, то обозначим через Δ_2 ту из половинок, на концах которой f принимает значения разных знаков. Рассуждая так по индукции, мы либо наткнемся на очередном этапе рассуждений на точку $c \in (a, b)$, для которой $f(c) = 0$, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность (бесконечную) вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, на каждом из которых f имеет значения разных знаков. Тогда существует точка c, принадлежащая всем Δ_n, следовательно, и $[a, b]$. Очевидно, $f(c) = 0$, потому что, если допустить, например, что $f(c) > 0$, то нашлась бы окрестность U_c точки c такая, что для всех x из $[a, b]$, принадлежащих U_c, функция $f(x)$ была бы положительной, но этого не может быть, потому что при достаточно большом n отрезок $\Delta_n \subset U_c$, а f не сохраняет знак на Δ_n. Теорема доказана.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ и C — произвольное число, находящееся между числами A и B $(A \neq B)$, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой $f(c) = C$.*

Это следствие можно сформулировать и так: *непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Определяем новую функцию $F(x) = f(x) - C$, где C — константа — число, находящееся между $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Так как f — непрерывная на $[a, b]$ функция, то и F — непрерывная на $[a, b]$ функция. При этом, очевидно, F принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения, имеющие разные знаки. Тогда, по доказанной теореме, должна найтись внутри $[a, b]$ такая точка c, что $F(c) = 0$ или $f(c) - C = 0$, т. е. $f(c) = C$. Это требовалось доказать.

Пример. Уравнение

$$\cos x - x = 0$$

имеет корень на интервале $(0, \pi)$.

В самом деле, функция $f(x) = \cos x - x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $f(0) = 1$, $f(\pi) = -(1 + \pi)$.

Замечание. Для разрывной на $[a, b]$ функции доказанная теорема вообще не имеет места, как легко видеть на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

§ 4.5. Обратная функция

Зададим какую-либо функцию $y=f(x)$ на произвольном множестве чисел (точек на прямой) E и обозначим через $E_1=f(E)$ образ E (см. § 1.3).

Каждому $y \in E_1$ приведем в соответствие множество всех $x \in E$, для которых $y=f(x)$ Это не пустое множество, обозначим его через e_y.

Таким образом, на E_1 определена функция $x=\varphi(y)$, вообще говоря, многозначная. Функция $\varphi(y)$ называется *обратной функцией по отношению* к $f(x)$.

Важно выделить тот случай, когда обратная функция однозначна. Это всегда имеет место, если функция f *строго монотонна*, т. е. строго возрастает или строго убывает на области E своего определения.

Функция f называется *строго возрастающей* (*убывающей*) на E, если из того, что x', $x'' \in E$ и $x' < x''$, следует, что $f(x') < f(x'')$ (соответственно $f(x') > f(x'')$).

Если $f(x)$ *есть строго возрастающая* (*убывающая*) *функция на* E, *то обратная ей функция* $x=\varphi(y)$, *очевидно, также однозначная, строго возрастающая* (*убывающая*) *на образе* $E_1=f(E)$ *функция.*

В этом случае, очевидно, имеют место тождества:

$$\varphi[f(x)]=x,\ x \in E; \quad f[\varphi(y)]=y,\ y \in E_1.$$

При этом удобно обозначать обратную к f функцию символом f^{-1}:

$$f^{-1}f(x)=x,\ x \in E; \quad ff^{-1}(y)=y,\ y \in E_1.$$

Теорема 1. *Пусть* $y=f(x)$ *есть непрерывная строго возрастающая на отрезке* $[a, b]$ *функция и* $A=f(a)$, $B=f(b)$.

Тогда образ $[a, b]$ *есть отрезок* $[A, B]$ *и обратная к* f *функция* $x=\varphi(y)$ *однозначна, строго возрастает и непрерывна на* $[A, B]$.

В этой теореме можно заменить «возрастающая» на «убывающая» и тогда в ее заключении надо заменить $[A, B]$ на $[B, A]$.

Доказательство. Пусть $E_1=f([a, b])$. По условию $A, B \in E_1$ и, так как функция f непрерывна на $E=[a, b]$, то и любая точка $[A, B]$ принадлежит E_1 (см. следствие теоремы 3 § 4.4 о промежуточных значениях непрерывной функции).

Если точка y не принадлежит $[A, B]$, то вследствие строгой монотонности f она не может быть образом какой-либо точки $x \in [a, b]$. Этим доказано, что образ отрезка $[a, b]$ при помощи f есть отрезок $[A, B]$. То, что обратная определенная на $[A, B]$ функция $x=\varphi(y)$ однозначна и строго монотонна, следует непосредственно из строгой монотонности $y=f(x)$ на $[a, b]$. Остается доказать непрерывность функции $x=\varphi(y)$ в любой точке $y_0 \in [A, B]$.

Пусть y_0 есть внутренняя точка $[A, B]$, т. е. $y_0 \in (A, B)$. Ей, мы уже знаем, соответствует единственная точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $y_0 = f(x_0)$ или $x_0 = \varphi(y_0)$.

Зададим положительное число $\varepsilon > 0$, которое будем считать настолько малым, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, и пусть $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Из строгой монотонности f следует, что для любого $y \in (y_1, y_2)$ соответствующее значение $x = \varphi(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Таким образом, доказано, что для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$ именно такого, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$, можно подобрать окрестность (y_1, y_2) точки y_0 такую, что $|x - x_0| = |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_2)$.

Сформулированное здесь свойство функции $\varphi(y)$ доказано для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но тогда оно, очевидно, верно и для любых $\varepsilon > 0$. Это свойство выражает тот факт, что функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке y_0.

Для концевой точки $y_0 = B$ соответствующая точка $x_0 = b = \varphi(y_0)$. Полагаем $x_1 = b - \varepsilon > a$, $y_1 = f(x_1)$ и тогда, очевидно, будет $|\varphi(y_0) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всех $y \in (y_1, y_0]$.

В этом же духе рассматривается случай $y_0 = A$.

Приведем еще другое доказательство непрерывности функции $x = \varphi(y)$ (обратной к функции $y = f(x)$, непрерывной и строго монотонной на $[a, b]$). Зададим $y_0 \in [A, B]$ и произвольную последовательность точек $y_n \in [A, B]$ такую, что $y_n \to y_0$. Положим $x_0 = \varphi(y_0)$, $x_n = \varphi(y_n)$. Тогда $y_0 = f(x_0)$, $y_n = f(x_n)$. Непрерывность φ в точке y_0 будет доказана, если мы покажем, что $x_n \to x_0$.

Допустим, что это не так. Тогда найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, стремящаяся к некоторой точке $x' \in [a, b]$, отличной от x_0. В силу строгой монотонности f тогда $f(x_0) \neq f(x')$.

Но по условию $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0)$, а в силу непрерывности f

$$f(x_{n_k}) \to f(x'), \quad x_{n_k} \to x'.$$

Мы получили противоречие, потому что одна и та же последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ не может стремиться к разным пределам.

Пример. Функция $y = \sin x$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Образом этого отрезка посредством функции $\sin x$ является отрезок $[-1, +1]$. На основании доказанной теоремы существует определенная на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ обратная к $\sin x$ однозначная непрерывная строго возрастающая функция $x = \arcsin y$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$.

Для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на всей действительной оси, обратная функция, как известно, уже многозначна:

$$x = \operatorname{Arcsin} y = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{1}$$

т. е. каждому $y \in [-1, +1]$ соответствует множество e_y значений x, определяемых формулой (1).

Теорема 2. *Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая на интервале (a, b) функция и пусть*

$$A=\inf f(x), \qquad B=\sup f(x), \qquad x\in(a, b), \tag{2}$$

где, в частности, может быть a, $A=-\infty$, b, $B=+\infty$.

Тогда образ (a, b) есть интервал (A, B) и обратная к f функция $x=\varphi(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на (A, B).

Замечание. В этой теореме можно слова «возрастающая», «возрастает» заменить на «убывающая», «убывает», но тогда образ (a, b) будет (B, A).

Из определения числа B непосредственно следует, что если оно конечно, то точка $y>B$ не может принадлежать образу $f((a, b))$. Но и число B тоже не может принадлежать $f((a, b))$, иначе существовала бы точка $x_1\in(a, b)$ такая, что $B=f(x_1)$, и так как на интервале (a, b) можно определить точку $x_2>x_1$, то в силу строгой монотонности f мы получили бы $f(x_2)>B=f(x_1)$, что противоречит определению B.

Подобным образом доказывается, что и число A не принадлежит $f((a, b))$, если оно конечно. Итак, образ $f((a, b))$ принадлежит (A, B). Но на самом деле эти два множества совпадают. Действительно, пусть $y\in(A, B)$. Тогда в силу определений (2) должны найтись такие x_1, $x_2\in(a, b)$, что

$$y_1=f(x_1)<y<f(x_2)=y_2,$$

и вследствие строгого возрастания f должно быть $x_1<x_2$. Но функция f непрерывна на (a, b), тем более на $[x_1, x_2]$, и когда x пробегает отрезок $[x_1, x_2]$, сама она должна пробегать все значения между y_1 и y_2, следовательно, и значение y.

Это значит, что существует значение $x=\varphi(y)$ (единственное в силу строгой монотонности f) такое, что $y=f(x)$. Этим доказано, что образ интервала (a, b) есть интервал (A, B) и что определенная выше функция $x=\varphi(y)$ есть обратная к f функция.

Функция φ непрерывна в точке y, потому что φ можно также рассматривать как обратную функцию к функции f, определенной на указанном отрезке $[x_1, x_2]$, а к этой последней можно применить предыдущую теорему. Тот факт, что φ строго возрастает, очевиден. Теорема доказана.

Примечание. В теореме 2 интервалы (a, b), (A, B) можно соответственно заменить на полуинтервалы, например, на $[a, b)$, $[A, B)$ и тогда a и A — конечные числа.

Пример. Рассмотрим $\sqrt[n]{a}$, где $a>0$ и n — натуральное число. *Арифметическим значением корня n-й степени из a* называется положительное число, n-я степень которого равна a. Это число обозначается еще так:

$$\sqrt[n]{a}=a^{1/n}. \tag{3}$$

Существование и единственность этого числа вытекает из следующих соображений. Функция

$$y = x^n \tag{4}$$

непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$, и, кроме того, она равна нулю при $x = 0$ и стремится к $+\infty$ вместе с x. На основании теоремы 2 и примечания к ней функция $y = x^n$ имеет обратную однозначную и непрерывную функцию $x = \varphi(y)$ $(0 \leqslant y < \infty)$, строго возрастающую, равную нулю при $y = 0$ и стремящуюся к $+\infty$ вместе с y.

Таким образом, каково бы ни было $y \in [0, \infty)$, существует единственное положительное число $x = \varphi(y)$ такое, что $[\varphi(y)]^n = y$. Но тогда $\varphi(y) = y^{1/n}$.

В частности, если считать $y = a$, то мы доказали существование и единственность арифметического значения корня n-й степени из a $(a \geqslant 0)$.

§ 4.6. Показательная и логарифмическая функции

Функция a^x. Зададим положительное число $a > 0$. Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число $a^{1/n}$ — как арифметическое значение корня n-й степени из a.

Если теперь p/q $(q > 0)$ есть неотрицательная рациональная дробь, то, по определению, полагают

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p, \quad a^0 = 1.$$

Доказательство второго равенства в этой цепи и того факта, что это определение приводит к тому же числу, если дробь p/q будет записана в форме $np/nq = p/q$, где n — произвольное натуральное число, известно читателю из элементарной алгебры. Наконец, по определению, полагают

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}.$$

Этим определена функция a^x $(a > 0)$ для любых рациональных значений x.

Обозначим через Q множество всех рациональных чисел. Функция a^x определена на этом множестве. В курсе элементарной математики доказывается на основании только аксиом числа I — IV групп, что она удовлетворяет свойству:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \tag{1}$$

каковы бы ни были $x, y \in Q$. Там доказывается также неравенство $a^x < a^y$ $(x < y;\ x, y \in Q,\ a > 1)$.

Но функцию a^x можно доопределить на всех иррациональных точках так, что определенная таким образом на всей действительной оси R продолженная функция, которую естественно обозначить снова через a^x, будет непрерывной всюду на R. Больше того, для продолженной функции свойство (1) выполняется уже для всех $x, y \in R$.

Начнем с того, что докажем вспомогательное неравенство (Бернулли *)).

Если $a > 1$ и N — натуральное, то $a^{1/N} = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. Поэтому, учитывая формулу бинома Ньютона, получим

$$a = (1+\lambda)^N > 1 + N\lambda \text{ и } a^{1/N} - 1 < (a-1)/N.$$

Если теперь h есть произвольное положительное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h \leqslant 1$, то можно подобрать такое натуральное N, что $1/(N+1) < h \leqslant 1/N$. Поэтому при $a > 1$

$$a^h - 1 \leqslant a^{1/N} - 1 < \frac{a-1}{N} = \frac{N+1}{N}(a-1)\frac{1}{N+1} < 2(a-1)h.$$

На основании неравенства Бернулли получим

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) \leqslant 2a^x(a-1)(y-x) \quad (x,\ y \in Q,\ 0 < y - x \leqslant 1). \tag{2}$$

Зададим произвольное положительное рациональное число c и введем новое множество Q_c, состоящее из всех $x \in Q$, которые удовлетворяют неравенству $x \leqslant c$.

Из (2) следует:

$$a^y - a^x \leqslant M(y-x) \quad (x,\ y \in Q_c,\ 0 < y - x \leqslant 1,\ M = 2(a-1)a^c), \tag{3}$$

где, таким образом, M есть константа, не зависящая от рассматриваемых x, y.

Следовательно,

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x-y| \qquad (x,\ y \in Q_c,\ |x-y| \leqslant 1). \tag{4}$$

Зададим произвольное действительное число $x = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ и положим

$$x^{(n)} = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если $x \in Q_c$, то и $x^{(n)} \in Q_c$. Кроме того, $|x - x^{(n)}| \leqslant 10^{-n} < 1$, поэтому

$$\left| a^x - a^{x^{(n)}} \right| \leqslant M \left| x - x^{(n)} \right|,$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{x^{(n)}} = a^x. \tag{5}$$

Так как c может быть любым положительным рациональным числом, то мы доказали, что для всякого рационального числа x выполняется равенство (5).

Пусть теперь x есть иррациональное число, удовлетворяющее неравенству $x < c$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, то на основании критерия Коши существования предела для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|x^{(n)} - x^{(m)}| < \varepsilon/M \qquad (n,\ m > N). \tag{6}$$

Это показывает в силу (4), что имеет место неравенство

$$\left| a^{x^{(n)}} - a^{x^{(m)}} \right| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \qquad (n, m > N),$$

*) Я. Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

верное для любых указанных натуральных n, m. Но тогда последовательность чисел $\{a^{x^{(n)}}\}$ тоже удовлетворяет условию Коши: существует предел этой последовательности при $n \to \infty$. Этот предел обозначают символом a^x, т. е. пишут

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x^{(n)}}. \tag{7}$$

Итак, для любого действительного числа x выполняется равенство (7). Для рационального x это равенство доказано выше. Для иррационального x доказано только существование предела в правой части (7), а левая часть a^x считается равной правой по определению.

Пусть теперь x и y любые действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $x \leqslant c$, $y \leqslant c$, $|x-y| < 1/2$. Тогда при $n > 1$

$$x^{(n)} \leqslant c,\ y^{(n)} < c,$$

$$|x^{(n)} - y^{(n)}| \leqslant |x^{(n)} - x| + |x - y| + |y - y^{(n)}| \leqslant 2\cdot 10^{-n} + \frac{1}{2} < 1$$

и

$$|a^{x^{(n)}} - a^{y^{(n)}}| \leqslant M|x^{(n)} - y^{(n)}| \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Так как при этом $x^{(n)} \to x$, $y^{(n)} \to y$, $a^{x^{(n)}} \to a^x$, $a^{y^{(n)}} \to y$ и функция $|x|$ непрерывна, то получим

$$|a^x - a^y| \leqslant M|x - y| \tag{9}$$

при $0 < |x-y| < 1/2$. Из неравенства (9) непосредственно следует, что функция a^x непрерывна для любого $x < c$, следовательно, и для любого x, потому что c можно считать произвольным.

Имеют место свойства

$$a^x < a^y, \text{ если } x < y, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \tag{11}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{12}$$

Чтобы доказать эти свойства, будем исходить из того, что для рациональных x, y они известны из школьного курса элементарной алгебры.

Пусть λ и μ — постоянные рациональные числа такие, что $x < \lambda < \mu < y$, и пусть x_n, $y_n \in Q$ — переменные такие, что $x_n \to x$, возрастая, и $y_n \to y$, убывая. Тогда $a^{x_n} < a^\lambda < a^\mu < a^{y_n}$, а после перехода к пределу $a^x \leqslant a^\lambda < a^\mu \leqslant a^y$, и мы получили (10). Свойства (11) следуют из того, что это верно в случае, когда $x \to -\infty$, или $x \to +\infty$, пробегая рациональные значения, и из доказанной уже монотонности (см. (10)). Наконец, (12) следует из равенства $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n}$ после перехода в нем к пределу.

До сих пор мы считали $a > 1$. Если $0 < a < 1$, то полагаем

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{13}$$

В этом случае свойство (12) функции a^x и ее непрерывность сохранятся, но теперь уже она будет строго убывать. Наконец, полагаем

$$1^x = 1 \tag{14}$$

для всех x.

Отметим еще, что при натуральном m

$$a^{xm} = a^x a^{(m-1)x} = (a^x)^2 a^{(m-2)x} = \ldots = (a^x)^m,$$

$$(a^{x/m})^m = a^x \quad \text{и} \quad a^{x/m} = (a^x)^{1/m},$$

поэтому для рационального числа $p/q > 0$

$$(a^x)^{p/q} = (a^x)^{(1/q)p} = (a^{x/q})^p = a^{x(p/q)}.$$

Далее, если y — произвольное положительное число, и $y_n \to y$, где y_n — рациональные, то

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{xy_n} = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y,$$

и мы доказали, что $a^{xy} = (a^x)^y$ пока для $y > 0$. На основании (12) это равенство, очевидно, распространяется на случай произвольного y (ведь $a^{-y}a^y = a^{y-y} = a^0 = 1$).

Функция $\lg_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Пусть для определенности $a > 1$. Тогда $y = a^x$ есть функция непрерывная и строго возрастающая на всей действительной оси. При этом

$$\inf_{x\in(-\infty,+\infty)} a^x = 0, \qquad \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty.$$

Таким образом, функция a^x отображает действительную ось $(-\infty, +\infty)$ на открытую полуось $(0,\infty)$, и обратная к ней функция по теореме 2 § 4.5 однозначна, строго возрастает и непрерывна на $(0, \infty)$. Эта функция называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так:

$$\lg_a y.$$

Из сказанного следует, что (мы заменяем y на x)

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg_a x = -\infty.$$

При $a < 1$ рассуждения аналогичны. Функция a^x также отображает действительную ось $(-\infty, +\infty)$ на полуось $(0, +\infty)$, но строго убывая. Обратная функция $\lg_a x$, определенная на $(0, +\infty)$, также будет строго убывать, и теперь

$$\lim_{x\to\infty} \lg_a x = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lg_a x = +\infty.$$

Имеют место тождества $(a \neq 1,\ a > 0)$

$$a^{\lg_a x} = x \quad (0 < x < +\infty), \quad \lg_a a^x = x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Отсюда на основании свойств функции a^x при $x,\ y > 0$ имеем

$$a^{\lg_a (xy)} = xy = a^{\lg_a x} a^{\lg_a y} = a^{\lg_a x + \lg_a y}$$

и

$$\lg_a(xy) = \lg_a x + \lg_a y.$$

Если в этом равенстве заменить x на x/y, то получим

$$\lg_a x - \lg_a y = \lg_a \frac{x}{y}.$$

Далее,

$$a^{\lg_a x^y} = x^y = \left(a^{\lg_a x}\right)^y = a^{y \lg_a x} \quad (x > 0),$$

поэтому

$$\lg_a x^y = y \lg_a x \quad (a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0).$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\lg_a b \cdot \lg_b a} = \left(a^{\lg_a b}\right)^{\lg_b a} = b^{\lg_b a} = a$$

и, следовательно,

$$\lg_a b \cdot \lg_b a = 1.$$

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\lg_e a = \ln a$.

§ 4.7. Степенная функция x^b

Здесь b — постоянная, а x — переменная. При любом b эта функция во всяком случае определена на положительной полуоси $x > 0$ (ведь в § 4.6 мы обосновали определение числа a^x, где $a > 0$ и x произвольно).

Имеет место формула (см. § 4.6)

$$x^b = e^{b \lg x} \quad (x > 0), \tag{1}$$

с помощью которой свойства степенной функции можно вывести из известных уже нам свойств показательной и логарифмической функций. Очевидно, x^b есть непрерывная функция. При $b > 0$ она строго возрастает и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty.$$

При $b > 0$ естественно считать, что $0^b = 0$; тогда функция x^b делается непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $b < 0$ функция x^b непрерывна и строго убывает на положительной полуоси и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = 0.$$

Формула (1) влечет характеристическое свойство степенной функции:

$$(xy)^b = x^b y^b \quad (x, y > 0).$$

На рис. 1.2 и рис. 4.11, 4.12 приведены графики функции x^b $x > 0$ для нескольких положительных и отрицательных значений b.

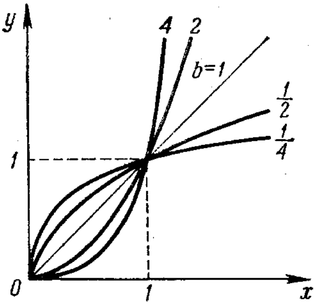

Рис. 4.11.

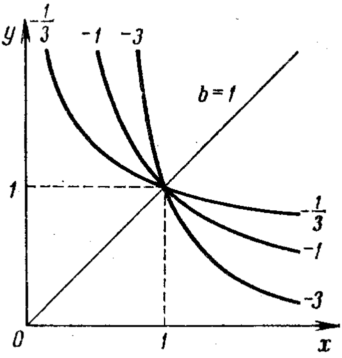

Рис. 4.12.

Степенна́я функция x^b имеет смысл как действительная функция и для отрицательных x, если b — целое или рациональное p/q, где q — нечетное.

§ 4.8. Еще о числе e

В § 3.5 рассматривалась функция

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

от целого аргумента n, и было показано, что если $n \to \infty$, пробегая натуральные числа, то $\alpha(n)$ стремится к пределу, который был назван числом e. Но функция $\alpha(n)$ определена на самом деле для произвольных, действительных значений n, исключая $n \in \in (-1, 0]$. Мы покажем, и это важно для приложений, что

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(n) = e, \tag{1}$$

где предел понимается как предел функции $\alpha(n)$, определенной для указанных n.

Чтобы доказать (1), достаточно убедиться в том, что (1) верно в двух случаях: когда $n \to +\infty$ и когда $n \to -\infty$, пробегая не обязательно целые значения.

Если n — положительное действительное число и $[n]$ — его целая часть, то $n < [n] + 1 \leqslant n + 1$ и очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n]+2} < e\left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

При $n \to +\infty$, очевидно, $[n]$, $[n] + 1 \to +\infty$, откуда первый и последний члены цепи стремятся к e. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e \ (n \to +\infty),$$

и так как при этом

$$1+\frac{1}{n} \to 1,$$

то мы доказали (1). Пока для $n \to +\infty$.

Если теперь $n \to -\infty$, то $m = -n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e,$$

т. е. доказано (1) и при $n \to -\infty$. Но тогда верно (1).

Полагая $h = 1/n$, получим еще

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

§ 4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Целью этого параграфа является доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Функция $\psi(x) = (\sin x)/x$ определена для всех значений $x \neq 0$.

Пусть $0 < x < \pi/2$; тогда (рис. 4.13) $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, потому что половина хорды, стягивающей дугу окружности, меньше половины дуги, которая в свою очередь меньше половины длины, объемлющей дугу ломаной. Тогда $1 < x/(\sin x) < 1/(\cos x)$, или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

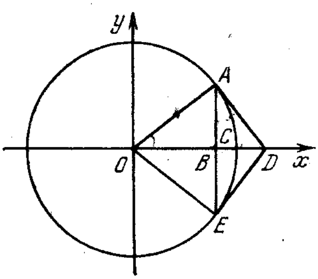

Рис. 4.13.

Эти неравенства, очевидно, верны не только для положительных, но и для отрицательных x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \pi/2$, в силу четности входящих в (2) функций.

Функция $\cos x$ непрерывна (см. § 4.2, пример 6), поэтому

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Перейдем в соотношениях (2) к пределу при $x \to 0$. Пределы левой и правой частей (2) равны 1, поэтому существует и притом равный 1 предел средней части (2).

§ 4.10. Порядок переменной, эквивалентность (асимптотика)

Говорят, что f *на множестве точек E имеет порядок* φ или еще *f есть O большое от φ на E* и пишут при этом

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ на } E, \tag{1}$$

если

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)| \text{ на } E, \tag{2}$$

где C — не зависящая от x положительная константа.

В частности,

$$f(x) = O(1) \text{ на } E$$

обозначает тот факт, что f на E ограничена.

Очевидно, если $f(x) = O(\varphi_1(x))$ на E и $\varphi_1(x) = O(\varphi_2(x))$ на E, то $f(x) = O(\varphi_2(x))$ на E.

Примеры.

1. $\sin x = O(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.
2. $x = O(x^2)$ на $[1, \infty]$ (но не на $[0, 1]$); при этом x^2 и x здесь переставить местами, очевидно, нельзя. С другой стороны, $x^2 = O(x) = O(1)$ на $[0, 1]$.

Мы будем писать

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \to a) \tag{3}$$

и говорить, что *функция f есть о малое от φ при $x \to a$*, если

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x), \tag{3'}$$

где функция $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$.

Мы также будем писать

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \to a), \tag{4}$$

если существует окрестность $U(a)$ точки a (конечной и бесконечной) такая, что

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \in U(a),\ x \neq a). \tag{4'}$$

Само собой разумеется, что определение (3), так же как и (4), предполагает, что обе функции f и φ определены на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Если на некоторой такой окрестности (исключая точку a) $\varphi(x) \neq 0$, то определения (3) и (4), очевидно, эквивалентны следующим: говорят, что *f есть о малое от φ при $x \to a$*, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \tag{5}$$

и *f есть O большое от φ при $x \to a$*, если существует окрестность $U(a)$, на которой, за исключением точки a, отношение $f(x)/\varphi(x)$ ограничено. Можно считать, что стремление $x \to a$ происходит только слéва ($x < a$) или справа ($x > a$), и тогда для бесконечной точки в первом случае надо считать, что $x \to +\infty$ и во втором, что $x \to -\infty$. Конечно, под окрестностью a понимается тогда правая или соответственно левая ее окрестность.

Наконец, можно считать в (3), (4), что x стремится к конечному или бесконечному пределу a, пробегая определенную последовательность $x_1, x_2, \ldots$

Очевидно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x \to a)$, а $\varphi(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, то $f(x) = o(\psi(x))$ $(x \to a)$, потому что

$$f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x)\psi(x) = \varepsilon_2(x)\psi(x),$$

где $\varepsilon_2(x) = \varepsilon(x)\varepsilon_1(x) \to 0$ $(x \to a)$, так как $\varepsilon(x) \to 0$ и $\varepsilon_1(x) \to 0$.

Примеры.
1. $x^n = o(e^x)$ $(x \to +\infty)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
2. $x^2 = o(x)$ $(x \to 0)$.
3. $x = o(x^2)$ $(x \to \infty)$.
4. $\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$.
5. $x = O(\sin x)$ $(x \to 0)$.

Говорят, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны* (*равны асимптотически*) при $x \to a$ и пишут

$$f_1(x) \approx f_2(x) \quad (x \to a),$$

если обе они определены и не равны нулю на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1. \tag{6}$$

Здесь относительно стремления x к a можно согласиться, так же как выше.

Теорема 1. *Для того чтобы две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ были эквивалентными (равными асимптотически) при $x \to a$, необходимо и достаточно чтобы выполнялись свойства*

$$f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a), \qquad f_2(x) \neq 0 \quad (x \neq a). \tag{7}$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x) \qquad (\varepsilon(x) \to 0,\ x \to a),$$

откуда

$$f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x) f_2(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a),$$

т. е. справедливо (7).

Обратно, пусть имеет место (7). Тогда $f_1(x) = f_2(x) + \varepsilon(x) f_2(x)$, где $\varepsilon(x) \to 0$ $(x \to a)$. Отсюда

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 + \varepsilon(x),$$

и после перехода к пределу при $x \to a$ получим (6).

Заметим, что если $f_1(x) \approx f_2(x)$ $(x \to a)$, то, очевидно, и обратно, $f_2(x) \approx f_1(x)$ $(x \to a)$.

Теорема 2. *Пусть в окрестности точки a, за исключением, быть может, ее самой, заданы три функции, $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\Lambda(x)$. Если $f_1(x) \approx f_2(x)$ при $x \to a$, то*

$$\lim_{x \to a} \{f_1(x) \Lambda(x)\} = \lim_{x \to a} \{f_2(x) \Lambda(x)\}. \tag{8}$$

Это равенство надо понимать в том смысле, что *если существует предел правой его части, то существует также, и притом ему равный, предел левой части, и обратно.*

Отсюда следует, что если один из пределов не существует, то не существует и второй.

Доказательство. Пусть существует предел, стоящий в правой части (8), равный A. Тогда, очевидно,

$$\lim_{x \to a} \{f_1(x) \Lambda(x)\} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \lim_{x \to a} \{f_2(x) \Lambda(x)\} = 1 \cdot A = A.$$

Аналогично доказывается существование предела правой части (8) и равенство (8), если известно, что существует предел левой части (8).

Доказанная теорема очень проста и в то же время она весьма важна. Для применения ее на практике надо знать побольше случаев эквивалентных пар функций.

Ниже мы приводим ряд таких случаев.

1) $\sin x \approx x$ $(x \to 0)$, потому что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $1 - \cos x \approx \frac{1}{2} x^2$ $(x \to 0)$, потому что

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Второе равенство в этой цепи верно на основании теоремы 2 в силу того, что $\sin \frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$ $(x \to 0)$.

3) $e^h - 1 \approx h$ $(h \to 0)$, потому что, если положить $e^h - 1 = z$, то $e^h = 1 + z$, $h = \ln(1 + z)$ и

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\ln(1 + z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\ln(1 + z)^{1/z}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

При этом предпоследнее равенство верно, потому что $\ln u$ есть функция непрерывная для $u>0$ и, в частности, в точке $u=e$.

4) $\ln(1+u)\approx u$ $(u\to 0)$, потому что

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=\lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{1/u}=\ln e=1.$$

5) $\sqrt[n]{1+u}-1\approx\frac{u}{n}(u\to 0), n=1,2,\ldots$, потому что

$$\frac{\sqrt[n]{1+u}-1}{\frac{u}{n}}=\frac{u}{\frac{u}{n}\left[(1+u)^{(n-1)/n}+(1+u)^{(n-2)/n}+\ldots+1\right]}\to 1\ (u\to 0).$$

Учесть, что функция $(1+u)^\alpha$ непрерывна в точке $u=0$.

6) $\operatorname{tg} x\approx x$ $(x\to 0)$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1,$$

так как $\cos x$ — непрерывная функция.

Например, в силу 2) и 5) и теоремы 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{x^2}{2}}=\frac{2}{3}. \tag{9}$$

Полезно следующее определение. Если для функции $\varphi(x)$ можно подобрать числа α и m, где $\alpha\neq 0$, такие, что $\varphi(x)\approx\alpha x^m$, $x\to 0$, то говорят, что *функция αx^m есть главный степенной член функции* $\varphi(x)$. Очевидно, что числа α, m однозначно зависят от функции $\varphi(x)$.

Правые части асимптотических равенств 1)—6) суть, очевидно, главные степенные члены левых частей. Общие методы нахождения главных степенных членов в более сложных случаях основаны на применении формулы Тейлора (см. далее § 5.11, примеры 3, 4, и § 5.14).

Если αx^m, βx^n $(\alpha, \beta\neq 0)$ суть, соответственно, главные степенные члены функций φ и ψ, то на основании теоремы 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m}{\beta x^n}=\begin{cases}\frac{\alpha}{\beta} & (m=n),\\ 0 & (m>n),\\ \infty & (m<n).\end{cases} \tag{10}$$

Это рассуждение в частном случае было проведено при вычислении предела (9).

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5.1. Производная

Перед чтением этой главы мы рекомендуем читателю прочесть еще раз § 1.5, где говорилось о том, как возникает понятие производной. А сейчас мы начинаем сразу с формального определения производной.

Производной от функции f в точке x называется предел, к которому стремится отношение ее приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Заметим, что при фиксированном x величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть вполне определенная функция от Δx:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если функция f определена в некоторой окрестности точки x, то функция $\psi(\Delta x)$ определена для достаточно малых, не равных нулю Δx, т. е. для Δx, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, где δ достаточно малое положительное число. При $\Delta x = 0$ она заведомо не определена. Вопрос о существовании производной функции f в точке x эквивалентен вопросу о существовании предела функции $\psi(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования конечного предела (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

А это последнее равенство выражает, что функция f в точке x непрерывна.

Утверждение обратное теореме 1 не верно: если функция f непрерывна в точке x, то отсюда не следует, что она имеет производную в этой точке (см. ниже).

Говорят, что *f имеет в точке x бесконечную производную, равную* $+\infty$ *или* $-\infty$ (случай ∞ исключается), если в этой точке $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ или соответственно $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$.

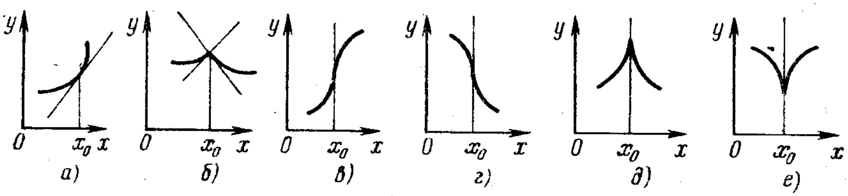

Рис. 5.1.

Наконец, введем понятия *правой* и *левой производной от f в точке x*:

$$f'_+(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\psi(0+0),\quad f'_-(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\psi(0-0).$$

Для того чтобы существовала производная $f'(x)$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы существовали производные от f в точке x справа и слева и были равны между собой и тогда автоматически они равны $f'(x)$.

Это утверждение верно также, если в нем термин «производная» заменить на «бесконечная производная».

Функция, изображенная на рис. 5.1, *а*, имеет производную в точке x_0 — график в этой точке имеет (см. § 1.5) касательную (единственную). Функция, изображенная на рис. 5.1, *б*, не имеет производной, но существуют $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, не равные друг другу. Функции, изображенные на рис. 5.1, *в*, *г*, имеют бесконечные производные $f'(x_0)=+\infty$ и $f'(x_0)=-\infty$ соответственно, а функции на рис. 5.1, *д* и *е* не имеют производной в точке x_0. В случае рис. 5.1, *д* $f'_-(x_0)=+\infty$, $f'_+(x_0)=-\infty$, а в случае рис. 5.1, *е* $f'_-(x_0)=-\infty$, $f'_+(x_0)=+\infty$.

Надо иметь в виду, что производная от функции в точке x есть функция от x. С этой точки зрения обозначение $f'(x)$ является весьма удобным, $f'(a)$ обозначает число — производную от функции f в точке a.

В § 1.5 были выведены формулы (1) — (4) производной от x^n ($n=0, 1, \ldots$), $\sin x$ и $\cos x$. Ниже выводится производная от показательной функции a^x ($a>0$):

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h-1}{h} =$$
$$= a^x \lim_{z\to 0} \frac{z}{\lg_a(1+z)} = a^x \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \lg_a(1+z)^{1/z}} =$$
$$= \frac{a^x}{\lg_a e} = a^x \ln a. \qquad (2)$$

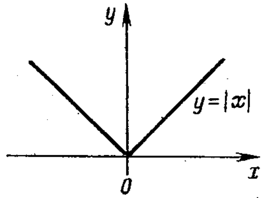

Рис. 5.2.

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h-1=z\to 0$ ($h\to 0$) и тем фактом, что функция $\lg_a u$ для $u>0$, в частности, при $u=e$, непрерывна.

Если в последнем равенстве положить $a=e$, то получим

$$(e^x)' = e^x. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию (рис. 5.2)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

При $x=0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} \to \begin{cases} 1 & (h>0,\ h\to 0), \\ -1 & (h<0,\ h\to 0). \end{cases}$$

Производная от $|x|$ в точке $x=0$ не существует, потому что правая производная в этой точке отлична от левой; в остальных точках производная от $|x|$ существует и равна

$$|x|' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x>0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

Из рассмотрения графика видно, что функция $|x|$ непрерывна для любого x, в том числе и в точке $x=0$. Это видно также из следующих выкладок:

$$||x+h|-|x|| \leqslant |x+h-x| = |h| \to 0 \quad (h\to$$

Функция $|x|$ интересна тем, что она непрерывна для любого x, но имеется такое значение x, именно $x=0$, для которого она не имеет производной. В точке $x=0$ графика этой функции не существует касательной.

Пример функции $|x|$ показывает, что обратное теореме 1 утверждение неверно.

В математике известны примеры функций f, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и не имеющих производной ни в одной точке этого отрезка (функция Вейерштрасса). Их графики невозможно нарисовать, но они могут быть заданы с помощью некоторых формул. Эти примеры мы не приводим здесь.

Пример 1. Функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{для рациональных } x,\\ x^2 & \text{для иррациональных } x\end{cases}$$

разрывна во всех точках $x\neq 0$, но в точке $x=0$ имеет производную $f'(0)=0$, потому что для h рациональных $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0$ и для h иррациональных $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^2-0}{h}=h\to 0\ (h\to 0)$.

Пример 2. Функция

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

непрерывна на $(-\infty,\infty)$; для всех $x\neq 0$ она имеет производную, но в точке $x=0$ она не имеет даже правой производной и левой, потому что величина $\frac{f(h)-f(0)}{h}=\sin\frac{1}{h}$ не имеет предела, когда $h\to 0$, оставаясь положительным или отрицательным

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что $v(x)\neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(u\pm v)'=u'\pm v', \tag{4}$$

$$(uv)'=uv'+u'v, \tag{5}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0). \tag{6}$$

Доказательство (4) приведено в § 1.5. Докажем (5), (6). Придадим независимой переменной x приращение Δx. Пусть соответствующие приращения u и v будут Δu и Δv. Тогда

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v=uv'+vu',$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

В частности, если C — постоянная, то $(Cu)'=Cu'+C'u=Cu'$, потому что $C'=0$.

Докажем (6):

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Несколько основных формул дифференцирования

1. $$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x\cdot 1' - 1\cdot x'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Более общая формула

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n\cdot 1' - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \qquad (n = 1,\ 2\ldots;\ x \neq 0).$$

Таким образом, справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \tag{7}$$

обобщающая формулу § 1.5 (1) на любые целые n.

Дальше мы увидим, что она остается верной и для нецелых n.

2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{8}$$

3. $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{9}$$

§ 5.2. Дифференциал функции

Если функция f имеет в точке x производную, то существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x; \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \tag{1}$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{1'}$$

Если ввести обозначение $A = f'(x)$, то равенство (1) можно записать следующим образом:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{2}$$

Говорят, что функция f *дифференцируема в точке* x, если ее приращение Δy в этой точке можно записать в виде (2), где A — некоторая константа, не зависящая от Δx (но вообще зависящая от x).

Из сказанного следует, что *если функция f имеет в точке x производную, то она дифференцируема в этой точке* ($A = f'(x)$).

Верно и обратное утверждение: *если функция f дифференцируема в точке x, т. е. ее приращение в точке x представимо в виде* (2), *то она имеет производную в точке x, равную числу A.*

В самом деле, пусть приращение Δy в точке x представимо в виде (2). Разделим обе части (2) на Δx и перейдем к пределу. Тогда

$$f'(x) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} o(1) = A.$$

Таким образом, *для того чтобы функция f имела производную в точке x, необходимо и достаточно чтобы она была дифференцируемой в этой точке.*

Равенство (2) показывает, что если $A = f'(x) \neq 0$, то приращение функции эквивалентно при $\Delta x \to 0$ первому слагаемому правой части (2):

$$\Delta y \approx A\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

В этом случае (когда $A \neq 0$) член $A\Delta x$ называется *главным линейным членом приращения.* Главный член линейно (точнее, пропорционально) зависит от Δx. *Приближенно, пренебрегая бесконечно малой $o(\Delta x)$ высшего порядка, при малых Δx можно считать Δy равным главному члену.*

Главный линейный член приращения называют *дифференциалом* функции f в точке x (соответствующим приращению Δx независимой переменной x) и обозначают так:

$$dy = df = f'(x)\Delta x.$$

В целях симметрии приращение Δx независимой переменной обозначают еще через dx, полагая, таким образом, $\Delta x = dx$. Это соглашение не противоречит выражению $dx = x'\Delta x = \Delta x$ для дифференциала функции $y = x$ от x.

Таким образом, дифференциал функции f в точке x запишется так:

$$dy = f'(x)dx. \tag{3}$$

Из этого равенства следует, что *производная от f в точке x равна $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. она равна отношению дифференциала функции f в точке x к соответствующему дифференциалу независимой переменной x.*

Надо иметь в виду, *что дифференциал dx независимой переменной не зависит от x, он равен Δx — произвольному приращению аргумента x. Что же касается дифференциала dy функции y (отличной от x), то он зависит от x и dx* (см. (3)).

Можно дать геометрическое представление указанных понятий.

Рассмотрим (рис. 5.3) график функции $y=f(x)$; A и B суть точки графика, соответствующие значениям x и $x+\Delta x$ независимой переменной. Ординаты точек A и B соответственно равны $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$. Приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ в точке x равно длине отрезка BD и представляется в виде суммы $\Delta y = BD = DC + CB$, где $DC = \operatorname{tg}\alpha\ \Delta x = f'(x)\Delta x$ и α есть угол между касательной в точке A к графику и положительным направлением оси x.

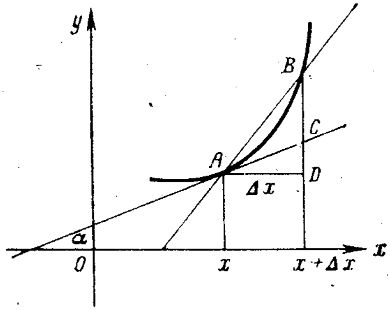

Рис. 5.3.

Мы видим, что отрезок DC есть дифференциал функции f в точке x:

$$DC = dy = f'(x)\Delta x.$$

Таким образом, на долю второго члена CB приращения Δy приходится величина $o(\Delta x)$. Эта величина при больших Δx может быть даже больше, чем главный член, но она есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x \to 0$. При $f'(x) \neq 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство $CB/DC < \varepsilon$.

Отметим очевидные формулы:

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'\,dx = u'\,dx \pm v'\,dx = du \pm dv, \tag{4}$$

$$d(uv) = (uv)'\,dx = (uv' + u'v)\,dx = u\,dv + v\,du, \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{6}$$

Пример. Нужно прикинуть, сколько материала истрачено на изготовление коробки кубической формы, если известно, что внутренний размер ребра коробки равен 10 *см*, а толщина стенок равна 0,1 *см*.

Объем куба есть функция $V(a) = a^3$ от длины его ребра a. Объем стенок коробки определяется как приращение функции

$$\Delta V = V(10+0{,}1) - V(10) \approx V'(10)\cdot 0{,}1 = \\ = 0{,}1\,[3a^2]_{a=10} = 300\cdot 0{,}1 = 30 \ (см^3).$$

§ 5.3. Производная функции от функции

Теорема. *Пусть задана функция от функции $z = F(x) = f(\varphi(x))$, где $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$. При этом функция φ имеет производную в точке x, а функция f имеет производную в точке y. Тогда существует производная от F в точке x, равная*

$$F'(x) = f'(y)\varphi'(x). \tag{1}$$

Доказательство. Так как функция f имеет производную в точке y, то она дифференцируема в этой точке (см. предыдущий параграф), т. е.

$$\Delta z = f'(y)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y \qquad (\varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0). \tag{2}$$

Будем считать, что $\varepsilon(0) = 0$. Равенство (2) при таком соглашении останется верным $(0 = f'(y)0 + 0, 0)$.

Зададим приращение Δx независимой переменной x. Оно влечет за собой определенное приращение Δy функции $y = \varphi(x)$, которое, в свою очередь, влечет за собой приращение Δz функции $z = f(y)$, выраженное через Δy по формуле (2).

Но полученное число Δz есть в то же время приращение функции $z = F(x)$, соответствующее взятому нами приращению Δx в точке x.

Разделив обе части равенства (2) на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

Перейдя теперь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим производную

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0}\varepsilon(\Delta y)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$
$$= f'(y)\varphi'(x) + 0\cdot\varphi'(x) = f'(y)\varphi'(x).$$

Заметим, что соглашение, что $\varepsilon(0) = 0$, было сделано на тот случай, когда при некоторых $\Delta x \neq 0$ будет $\Delta y = 0$.

Формула (1) может быть усложнена. Например, если $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то $\quad z'_\xi = z'_y y'_x x'_\xi$.

Пример 1. Чтобы вычислить производную по переменной x от функции $z = \cos(\sin^3 x^2)$, вводим цепочку вспомогательных функций:

$$z = \cos u, \quad u = v^3, \quad v = \sin w, \quad w = x^2.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (\cos u)'(v^3)'(\sin w)'(x^2)' =$$
$$= -\sin u\,(3v^2)\cos w\cdot 2x = -6x\cos x^2\sin^2 x^2\sin(\sin^3 x^2).$$

Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическими синусом, косинусом, танген-*

сом, котангенсом. Очевидно,

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x, \tag{5}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{(\operatorname{th} x)'}{(\operatorname{th} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}\,\frac{(\operatorname{ch} x)^2}{(\operatorname{sh} x)^2} = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}. \tag{7}$$

Другое доказательство теоремы. Рассмотрим некоторую последовательность значений $\Delta x \to 0$.

Если ее значения вызывают соответствующие $\Delta y \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = z'_y y'_x.$$

Другой характерный случай, если значения Δx рассматриваемой последовательности вызывают $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta z = 0$, и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0 = z'_y y'_x.$$

Последнее равенство в этой цепи верно потому, что в этом случае, очевидно, необходимо $y'_x = 0$.

Если теперь последовательность значений $\Delta x \to 0$ произвольна, то из нее всегда можно выделить подпоследовательность первого или второго вида. В обоих случаях предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ $(\Delta x \to 0)$ существует и равен $z'_y y'_x$. Но тогда существует предел $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ для нашей последовательности (см. § 4.1, теорема 9), равный, очевидно, $z'_y y'_x$.

§ 5.4. Производная обратной функции

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная строго монотонная, т. е. строго возрастающая или строго убывающая, функция $y = f(x)$. Пусть образ (a, b) есть интервал (A, B). Тогда обратная к f функция $x = \varphi(y)$ есть однозначная непрерывная и строго монотонная на (A, B) функция (см. § 4.5).

Зафиксируем $x \in (a, b)$ и дадим ему приращение $(x + \Delta x \in \in (a, b))$. Тогда f получит соответствующее приращение Δy $(y, y + \Delta y \in (A, B))$, такое, что $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Наоборот, $\varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x$.

Вследствие непрерывности прямой и обратной функций для указанных Δx и Δy имеет место утверждение: из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, и обратно.

Пусть теперь функция φ в точке y имеем неравную нулю производную $\varphi'(y)$. Покажем, что в таком случае функция f также имеет в соответствующей точке x производную. В самом деле,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Так как из того, что $\Delta x \to 0$, следует, что $\Delta y \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

и мы получили

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \tag{1'}$$

Этим доказано, что *если $y = f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x = \varphi(y)$ — обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y) \neq 0$, то функция f имеет в соответствующей точке x производную, определяемую формулой* (1).

Может случиться, что в точке y $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \infty$. В этом случае, очевидно, функция f имеет в точке x производную $f'(x) = 0$.

Если же $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 0$, то для строго возрастающей функции при этом $\Delta x/\Delta y > 0$, а для строго убывающей $\Delta x/\Delta y < 0$. В первом случае $f'(x) = +\infty$, а во втором $f'(x) = -\infty$.

Производная $\lg_a x$. На основании доказанной теоремы, если $y = \lg_a x$, то

$$(\lg_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\ln_a e}{x} \quad (a > 0).$$

В случае натурального логарифма производная имеет особенно простой вид

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Этим объясняется, что в математическом анализе, по крайней мере в теоретических рассуждениях, предпочитают рассматривать логарифмические функции при основании e.

Функция $\ln x$ как действительная функция определена только для положительных значений x *).

*) Для отрицательных x функция $\ln x$ также может быть естественно определена как комплексная функция. Но эти вопросы нас здесь не интересуют.

Но можно рассматривать функцию $\ln|x|$, которая определена как для положительных, так и для отрицательных x. Ее график симметричен относительно оси y, а для положительных x совпадает с графиком $\ln x$ (рис. 5.4).

Функция $\ln|x|$ будет играть большую роль в интегральном исчислении. Ее производная при $x \neq 0$ равна

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sign} x = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ для } x > 0, \\ -1 \text{ для } x < 0. \end{cases}$$

(См. далее § 8.1, второй пример таблицы неопределенных интегралов.)

Для производной от степенной функции $x^n (x > 0)$, где n — любое действительное число, имеет место формула

$$(x^n)' = \left(e^{n\ln x}\right)' = \frac{n}{x}e^{n\ln x} = nx^{n-1}, \tag{8}$$

обобщающая формулу § 1.5, (1).

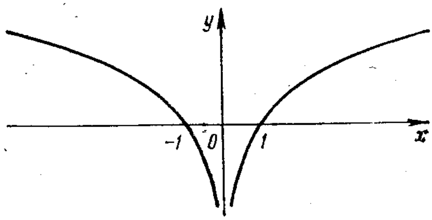

Рис. 5.4.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ строго возрастает на отрезке $[-1, +1]$ и отображает этот отрезок на $[-\pi/2, \pi/2]$. Обратная к ней функция $x = \sin y$ имеет производную $(\sin y)' = \cos y$, положительную на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1).$$

Следовательно,

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Здесь берется арифметическое значение корня (со знаком «+»). Функция $y = \operatorname{arctg} x$ строго возрастает на действительной оси $(-\infty, +\infty)$ и отображает ее на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Обратная к ней функция $x = \operatorname{tg} y$ имеет производную $(\operatorname{tg} y)' = \sec^2 y$, не равную нулю на этом интервале. Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Упражнение. Доказать равенство $(\lg_x a)' = -\dfrac{(\lg_x a)^2}{x\ln a}$.

§ 5.5. Таблица производных простейших элементарных функций

$(C)' = 0$ (C — постоянная);

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ $(a > 0)$;

$(x^a)' = ax^{a-1}$ $(x > 0)$;

$(\lg_a x)' = \dfrac{\lg_a e}{x}$ $(x > 0,\ a > 0)$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$;

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$;

$$(|x|)' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & (x > 0); \\ -1 & (x < 0); \end{cases}$$

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$.

$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$;

$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$;

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}$.

Упражнения.
Показать, что *)

1. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{ax^2+bx+c} = \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

2. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

3. $\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

4. $\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)' = \mp\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (верхний знак соответствует $x > 0$, а нижний $x < 0$).

5. $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(1+\ln x)$.

6. $(\ln|\operatorname{tg} x|)' = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$, откуда $\left(\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sin x}$.

7. $\dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)' = \sqrt{a^2-x^2}$.

8. $(|x|^p)' = \begin{cases} p|x|^{p-2}x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ $(p > 1)$.

*) Формулы 1—7 полезно иметь в виду при вычислении неопределенных интегралов.

§ 5.6. Производные и дифференциалы высшего порядка

Производная от функции f есть снова функция. Поэтому можно попытаться взять от нее производную. Полученная функция (если она существует) называется *второй производной от* $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

По индукции, *производная* $f^{(n)}(x)$ *порядка* n определяется как первая производная от производной $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Конечно, производная n-го порядка от данной функции f в данной точке x может существовать и не существовать.

Если говорят, что функция f имеет производную n-го порядка в точке x, то этим самым утверждают, что она имеет в достаточно малой окрестности точки x производную $f^{(n-1)}(x)$ порядка $(n-1)$, которая имеет производную в точке x. Эта последняя обозначается через $f^{(n)}(x)$ и называется производной порядка n от f в точке x.

Функция x^m, где m — целое положительное число, имеет на всей действительной оси производную любого порядка

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

При $n > m$ $(x^m)^{(n)} \equiv 0$.

Степенная функция x^a, где a — произвольное действительное число, имеет для $x > 0$ производную любого порядка n, определяемую по аналогичной формуле

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}. \tag{1}$$

Очевидно,

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

и, в частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3}$$

Нетрудно проверить формулы

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Если $s = f(t)$ есть функция, выражающая зависимость прямолинейного пути, пройденного точкой, от времени t, то вторая производная $s'' = f''(t)$ есть ускорение точки в момент t. В дальнейшем мы увидим, что знание второй производной от функции имеет большое значение при изучении поведения ее графика.

Формула Лейбница. Если функция $f=uv$, где u и v в свою очередь функции, имеющие в некоторой точке производные порядка n, то f имеет производную n-го порядка в этой точке, выражаемую по формуле Лейбница:

$$f^{(n)}=uv^{(n)}+C_n^1u'v^{(n-1)}+C_n^2u''v^{(n-2)}+\ldots+u^{(n)}v=\sum_{l=0}^{n}C_n^lu^{(l)}v^{(n-l)}, \tag{6}$$

где C_n^l — биномиальные коэффициенты и $u^{(0)}=u$ (см. § 5.9, (6) и (7)).

Доказательство этой формулы проводится по индукции. При $n=1$ она очевидна. Если предположить, что она верна при n, то ее верность при $n+1$ получается из следующих выкладок:

$$f^{(n+1)}=\frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{n}C_n^lu^{(l)}v^{(n-l)}=\sum_{l=0}^{n}C_n^l\left(u^{(l+1)}v^{(n-l)}+u^{(l)}v^{(n-l+1)}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{n+1}C_n^{l-1}u^{(l)}v^{(n+1-l)}+\sum_{l=0}^{n}C_n^lu^{(l)}v^{(n+1-l)}=\sum_{0}^{n+1}C_{n+1}^lu^{(l)}v^{(n+1-l)},$$

так как $C_{n+1}^0=C_n^0=C_n^n=C_{n+1}^{n+1}=1$ и $C_{n+1}^l=C_n^l+C_n^{l-1}$ $(l=1,\ldots,n)$.

Пример. $(x\sin x)^{100}=$

$$=x\sin\left(x+100\frac{\pi}{2}\right)+100\cdot1\cdot\sin\left(x+99\frac{\pi}{2}\right)=x\sin x-100\cos x.$$

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную на некотором интервале $(a,\ b)$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$y=\varphi(\psi(x))=f(x)\quad(x\in(a,\ b)). \tag{7}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная y есть функция $(y=f(x))$ от *независимой* переменной x; эта же самая переменная y есть функция от *зависимой* переменной u $(y=\varphi(u),\ u\neq x)$. Последняя зависит от независимой переменной x $(u=\psi(x))$. *Таким образом, роль переменной x здесь носит исключительный характер — она в этих рассуждениях будет фигурировать только как независимая переменная.*

Дифференциал от функции f

$$dy=f'(x)dx \tag{8}$$

мы будем также называть *первым дифференциалом от f в точке x, соответствующим дифференциалу (приращению) независимой переменной $dx=\Delta x$.*

Дифференциал n-го порядка от функции f в точке x, соответствующий дифференциалу независимой переменной $dx=\Delta x$, онределяется по индукции:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{9}$$

Таким образом, в этих равенствах дифференциалы d и d^{n-1} берутся для одного и того же дифференциала dx независимой переменной x, который при этом рассматривается как постоянная величина (не зависящая от x).

Из равенства (9) следует, что n-я производная от f в точке x есть отношение

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{10}$$

где в числителе $d^n y$ есть n-й дифференциал от y в точке x, соответствующий тому значению dx, которое стоит в знаменателе.

Пусть теперь переменная y рассматривается как функция от *зависимой* переменной $u (u \neq x)$, т. е. $y = \varphi(u)$, $u = \psi(x)$, где φ и ψ имеют достаточное число производных. Тогда

$$dy = f'(x)dx = \varphi'(u)\psi'(x)dx = \varphi'(u)du, \tag{11}$$

и мы выразили первый дифференциал dy через u.

Равенство (11) замечательно вот с какой точки зрения. Мы определили дифференциал dy функции y как произведение производной от y по *независимой* переменной x на дифференциал dx. Оказывается, что dy можно определить так же, как произведение производной от y по *зависимой* переменной u на дифференциал du. При этом имеют место равенства

$$dy = y'_x dx = y'_u du, \tag{12}$$

если, конечно, дифференциал du, стоящий в третьем члене (12), соответствует именно тому dx, которое стоит во втором члене (12).

В этом смысле говорят, что форма $dy = \varphi'(u)du$ записи первого дифференциала *инвариантна относительно любой переменной* u. Для дифференциалов второго и более высокого порядка инвариантность уже не имеет места. Мы хотим этим сказать, что при $n > 1$ и $u \neq x$ $d^n y$, вообще говоря, не равняется $\varphi^{(n)}(u)du^n$, как это имеет место по определению в случае, когда $u = x$ есть независимая переменная.

В самом деле,

$$d^2 y = d(dy) = d(\varphi'(u)du) = d\varphi'(u)du + \varphi'(u)d^2u =$$
$$= \varphi''(u)(du)^2 + \varphi'(u)d^2u. \tag{13}$$

Теперь $d^2u \neq 0$ и членом $\varphi'(u)d^2u$ нельзя пренебречь, ведь $d^2u = \psi''(x)(dx)^2$. Таким образом, второй дифференциал, в отличие от первого, не имеет инвариантного характера.

То же явление (отсутствие инвариантности) имеет место и для дифференциалов более высокого порядка. Имеем

$$d^3y = d(d^2y) = \varphi'''(u)(du)^3 + \varphi''(u)d(du)^2 + \varphi''(u)du\,d^2u + \varphi'(u)d^3u =$$
$$= \varphi'''(u)(du)^3 + \varphi''(u)2du\,d^2u + \varphi''(u)du\,d^2u + \varphi'(u)d^3u =$$
$$= \varphi'''(u)(du)^3 + 3\varphi''(u)du\,d^2u + \varphi'(u)d^3u. \tag{14}$$

В этом же духе вычисляются дифференциалы более высокого порядка. К сожалению, с увеличением n соответствующее выражение для d^ny становится все более и более громоздким.

Пусть y есть функция от u, где u — зависимая переменная, т. е. в свою очередь есть функция от третьей переменной x. Явно эту последнюю зависимость u от x мы не хотим выражать. Больше того, мы можем ее вовсе не знать, а только предполагать, что такая зависимость есть. Требуется вычислить производные от y по u: $y'_u, y''_u, y'''_u, \ldots$

Мы уже знаем, что

$$y'_u = \frac{dy}{du} \qquad (du \neq 0), \tag{15}$$

т. е. что производная от y по переменной u равна отношению дифференциалов: $dy:du$.

При вычислении производных более высокого порядка применяется это правило и правило вычисления дифференциалов от суммы, разности, произведения и частного (см. § 5.2, (4), (5), (6)). Кроме того, надо иметь в виду, что $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Имеем

$$y''_u = \frac{d\left(\frac{dy}{du}\right)}{du} = \frac{1}{du}\,\frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^2} = \frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^3}. \tag{16}$$

Левая часть (16) есть вторая производная от y по u, а правая часть есть определенное рациональное выражение от дифференциалов du, dy, d^2u, d^2y. Если $u = x$, т. е. независимая переменная, то $du = dx \neq 0$, а $d^2u = 0$, и из (16) следует уже известное нам равенство $y''_u = \dfrac{d^2y}{du^2}$, но если u есть функция от x, не равная x, то y''_u вычисляется по формуле (16).

Имеем также

$$y'''_u = \frac{d\left(\frac{du\,d^2y - dy\,d^2u}{du^3}\right)}{du} =$$
$$= \frac{du^3\left(d^2u\,d^2y + du\,d^3y - d^2y\,d^2u - dy\,d^3u\right) - \left(du\,d^2y - dy\,d^2u\right)3du^2d^2u}{du^7}. \tag{17}$$

Добавление. *Производная от четной функции есть функция нечетная:*

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x).$$

Аналогично *производная нечетной функции есть четная функция*. Поэтому производная порядка k от четной функции есть четная или нечетная функция в зависимости от того, будет ли k четным или нет.

§ 5.7. Возрастание и убывание функции на интервале и в точке. Локальный экстремум

Функция f называется *строго возрастающей на интервале* (a, b) (*или отрезке* $[a, b]$), если для любых точек x_1, x_2 из (a, b) (или $[a, b]$), удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция f называется *неубывающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что x_1, $x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) и $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Аналогично, функция f называется *строго убывающей*, соответственно *невозрастающей на* (a, b) (*или* $[a, b]$), если из того, что $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in (a, b)$ (или $[a, b]$) следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x. Тогда для достаточно малых Δx имеет смысл ее приращение в точке x:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

По определению, функция f:

1) *возрастает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{1}$$

2) *убывает в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{2}$$

3) *достигает локального максимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \leqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta); \tag{3}$$

4) *достигает локального минимума в точке* x, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Delta y \geqslant 0 \quad (|\Delta x| < \delta). \tag{4}$$

Подчеркнем, что все неравенства (1) — (4) должны соблюдаться для достаточно малых Δx, положительных и отрицательных.

Указанные четыре свойства можно еще выразить так: для всех точек $x' \in (x-\delta, x)$ и для всех точек $x'' \in (x, x+\delta)$ имеет место:

$$\text{в случае } 1)\ f(x') < f(x) < f(x''),$$
$$2)\ f(x') > f(x) > f(x'');$$

и для всех точек $x' \in (x-\delta, x+\delta)$:

$$\text{в случае } 3)\ f(x') \leqslant f(x),$$
$$4)\ f(x') \geqslant f(x),$$

т. е. в случае 3) значение f в точке x *является максимальным в достаточно малой окрестности* x и в случае 4) значение f в точке x *является минимальным в достаточно малой окрестности* x.

Локальные максимум или минимум называют локальным *экстремумом.*

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос, как узнать, что имеет место тот или иной из приведенных четырех случаев, если известны производные от f первого или более высокого порядка в точке x или по соседству с ней.

Допустим, что функция f в точке x имеет положительную производную: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$. Таким образом, величина $\Delta y/\Delta x$, являющаяся при фиксированном x функцией от Δx, стремится к положительному числу. Но тогда (см. теорему 2 § 4.1) и сама эта величина должна быть положительной для всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, при достаточно малом δ, т. е. согласно определению 1) функция f в точке x должна возрастать.

Аналогично доказывается, что если $f'(x) < 0$, то f убывает в точке x. Мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Если функция f в точке x имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) в этой точке.*

Из этой теоремы немедленно следует

Теорема Ферма́. *Если функция f достигает в точке x локального экстремума (максимума или минимума) и в ней существует производная $f'(x)$, то последняя равна нулю ($f'(x) = 0$).*

В самом деле, если бы $f'(x) \neq 0$, то в силу предыдущей теоремы функция должна была бы быть возрастающей или убывающей в точке x, что исключает возможность существования экстремума функции в этой точке.

Эту теорему можно сформулировать и так:

Для того чтобы функция f, имеющая в точке x производную, достигала в ней локального экстремума, необходимо, чтобы производная от f в этой точке была равной нулю.

Конечно, условия $f'(x) = 0$ недостаточно, чтобы функция имела в x локальный экстремум. Если $f'(x) = 0$, то функция f может не иметь локального экстремума в точке x. Она может в этой точке возрастать, как это имеет место, например, для функции x^3 при $x=0$, убывать (например, $f(x)=-x^3$ при $x=0$), а может точка x и не быть ни точкой возрастания ни убывания, ни точкой экстремума функции. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{5}$$

имеет производную $f'(0)=0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$\left(\text{ведь } \left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\right)$. С другой стороны, в любой как угодно малой окрестности $|x|<\delta$ точки 0 как справа, так и слева от нее f принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому точка 0 не является ни точкой возрастания, ни точкой убывания, ни точкой экстремума функции f.

В следующем параграфе мы переходим к очень важным теоремам, называемым теоремами о среднем. С их помощью будет весьма удобно получить дальнейшие заключения, относящиеся к теории локальных экстремумов.

§ 5.8. Теоремы о среднем значении. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Достаточные критерии локальных экстремумов

Теорема Ролля*). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах его $(f(a)=f(b))$.*

Тогда на интервале (a, b) есть хотя бы одна точка c, где производная от f равна нулю $(f'(c)=0)$.

Доказательство. Пусть M и m соответственно максимум и минимум f на отрезке $[a, b]$. Они существуют в силу непрерывности f на $[a, b]$. Если выполняются равенства $M=m=f(a)$, то $f(x)=M$ для всех $x\in[a, b]$ и $f'(c)=0$ в любой точке $c\in(a, b)$. Если же указанные равенства одновременно не выполняются, то по крайней мере одно из чисел M или m отлично от числа $f(a)=f(b)$, пусть для определенности M. Но тогда максимум функции f на отрезке $[a, b]$ достигается в некоторой точке c интервала (a, b) и, следовательно, в этой точке f имеет также локальный максимум. Так как в точке c производная $f'(c)$ суще-

*) М. Ролль (1652—1719) — французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.

ствует, то по теореме Ферма она равна нулю. Случай $m \neq f(a)$ разбирается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема о среднем Коши. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют производные на интервале (a, b) одновременно не обращающиеся в нуль. При этом $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$* *).

Тогда на интервале (a, b) найдется точка c, для которой выполняется равенство

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a < c < b). \tag{1}$$

Доказательство. Вводим функцию

$$F(x) = [\psi(b)-\psi(a)]\varphi(x) - [\varphi(b)-\varphi(a)]\psi(x).$$

Она, очевидно, непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Кроме того, $F(a) = F(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $F'(c) = 0$, т. е.

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c) = [\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c). \tag{2}$$

Число $\varphi'(c) \neq 0$, потому что в противном случае, в силу того, что $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$, было бы $\psi'(c) = 0$, но $\varphi'(c)$ и $\psi'(c)$ по условию одновременно не равны нулю. Поэтому произведение $[\varphi(b) - \varphi(a)]\varphi'(c) \neq 0$. Разделив на него левую и правую части равенства (2), получим (1).

Как следствие из теоремы Коши при $\varphi(x) = x$ и $\psi = f$ получим теорему Лагранжа:

Теорема о среднем Лагранжа **). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Тогда существует на интервале (a, b) точка c, для которой выполняется равенство*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \quad (a < c < b). \tag{3}$$

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл, если записать ее в таком виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (a < c < b).$$

Левая часть этого равенства есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой промежуточной точке $c \in (a, b)$. Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая (рис. 5.5) есть график непрерывной на $[a, b]$ функции, имеющей производную

*) Заметим, что, например, условие $\varphi'(x) \neq 0$ на (a, b) влечет за собой $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

**) Ж. А. Лагранж (1736—1813) — французский математик.

на (a, b), то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе $c (a < c < b)$ такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Равенство (3) называется *формулой* (*Лагранжа*) *конечных приращений*. Промежуточное значение c удобно записывать в виде

$$c = a + \theta(b - a),$$

где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < 1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a + \theta(b - a)) \quad (0 < \theta < 1). \tag{4}$$

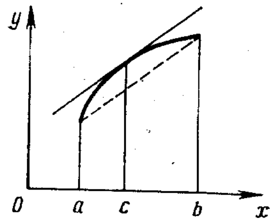

Рис. 5.5.

Она верна, очевидно, не только для $a < b$, но и для $a \geqslant b$.

Теорема 1. *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале (a, b), не убывает (строго возрастает) на $[a, b]$.*

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдется на интервале (x_1, x_2) точка c, для которой

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \quad (x_1 < c < x_2).$$

Если по условию $f' \geqslant 0$ на (a, b), то $f'(c) \geqslant 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0; \tag{5}$$

если же $f' > 0$ на (a, b), то $f'(c) > 0$ и

$$f(x_2) - f(x_1) > 0. \tag{6}$$

Так как неравенства (5) и (6) имеют место, каковы бы ни были x_1, x_2, где $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то в первом случае f не убывает, а во втором f строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2. *Если функция имеет на интервале (a, b) производную, равную нулю, то она постоянна на (a, b).*

В самом деле, на основании теоремы Лагранжа имеет место

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(c),$$

где x_1 — фиксированная точка интервала (a, b), x — произвольная его точка (она может находиться справа и слева от x_1) и c — некоторая, зависящая от x_1 и x точка, находящаяся между x_1 и x. Так как по условию $f'(x) \equiv 0$ на (a, b), то $f'(c) = 0$ и $f(x) = f(x_1) = C$ для всех $x \in (a, b)$.

Заметим, что в приведенных теоремах ослабление налагаемых в них условий может привести к неверности утверждений.

Например, функция $f(x)$, определяемая равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$$

(рис. 5.6), очевидно, непрерывна на отрезке $[0, 1]$, равна нулю на его концах и имеет производную во всех точках $(0, 1)$, за исключением только одной точки $x = \frac{1}{2}$, и для нее уже, очевидно, не выполняется теорема Лагранжа.

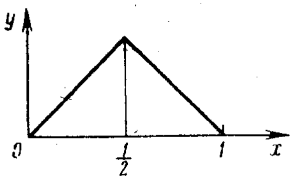

Рис. 5.6.

Докажем теорему, которая дает достаточный критерий существования локального экстремума функции.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет производную*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \text{справа от } x_0,$$
$$f'(x) \leqslant 0 \quad (\geqslant 0) \quad \text{слева от } x_0,$$

то x_0 есть точка локального минимума (максимума) f.

Выражение *справа* (*слева*) *от* x_0 означает «на достаточно малом интервале с левым (правым) концом x_0». Доказательство непосредственно следует из формулы конечных приращений.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

потому что из условий теоремы следует, что правая часть формулы неотрицательна (неположительна) в достаточно малой окрестности точки x_0 независимо от знака $x - x_0$.

Заметим, что в этой теореме существование производной в самой точке x_0 не предполагалось. Конечно, если производная $f'(x_0)$ существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

Следующая теорема дает достаточный критерий существования локального экстремума функции по знаку второй производной.

Теорема 4. *Если функция f удовлетворяет условиям $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции f.*

Доказательство. Существование второй производной в точке x_0 влечет за собой существование первой производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и, тем более, непрерывность f в этой окрестности. Из того, что $f''(x_0) > 0$ (<0) следует, что $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0 и, так как $f'(x_0) = 0$, то справа от x_0 $f' > 0$ (<0), а слева от x_0 $f' < 0$ (>0). Теперь утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы.

Мы знаем, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая всюду на интервале (a, b) положительную производную, строго возрастает на отрезке $[a, b]$. С другой стороны, пример, который приводится ниже, показывает, что если непрерывная в окрестности точки $x=0$ функция f имеет положительную производную в этой точке, то отсюда не следует, что f возрастает в некоторой достаточно малой окрестности $x=0$.

Таким образом, возрастание функции в точке не влечет, вообще говоря, ее возрастание в некоторой ее окрестности.

Пример 1. Функция $F(x)=\frac{x}{2}+f(x)$, где f определяется равенством (5) предыдущего параграфа, имеет производную $F'(0)=\frac{1}{2}+f'(0)=1/2>0$ в точке $x=0$ и, следовательно, возрастает в этой точке. В то же время она не возрастает на любом интервале, содержащем эту точку. Действительно, для $x\neq 0$

$$F'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

При $x_k=1/k\pi$ $(k=1, 2, \ldots)$

$$F'(x_k)=\frac{1}{2}-(-1)^k,$$

откуда видно, что в любом интервале, содержащем в себе нулевую точку, производная F' принимает значения разных знаков и, следовательно, F не изменяется на нем монотонно.

Пример 2. На отрезке $[-1, e]$ дана функция

$$\psi(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Она непрерывна, имеет конечную производную всюду на $[-1, e]$, за исключением $x=0$, где

$$\psi'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(h)-\psi(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\ln|h|=-\infty. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что ψ в точке $x=0$ убывает. Уравнение $\psi'(x)=1+\ln|x|=0$ имеет два корня: $x_1=-1/e$, $x_2=1/e$. Кроме того, $\psi''(x)=1/x$ $(x\neq 0)$ и $\psi''(-1/e)<0$, $\psi''(1/e)>0$, следовательно, $-1/e$ есть точка локального максимума, а $1/e$ — точка локального минимума.

Пример 3. График функции (см. § 8.9)

$$x=\frac{t^2-a}{b+2t\sqrt{c}} \qquad (b^2-4ac<0,\ c>0)$$

распадается на две непрерывные ветви, соответствующие изменению t на $(-\infty, -b/2\sqrt{c})$, $(-b/2\sqrt{c}, \infty)$. На каждом из этих интервалов функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Это легко видеть, если учесть, что в силу условия $b^2-4ac>0$ производная $x'>0$ и при $t=-b/2\sqrt{c}$ выражение $(t^2-a)=\frac{b^2}{4c}-a<0$.

§ 5.9. Формула Тейлора

При помощи формулы Тейлора *) можно по данным значениям $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a)$ функции f и ее производных в точке a и некоторым сведениям о производной $f^{(n)}$ в окрестности этой точки узнать приближенно, часто с большой точностью, значение f в точках этой окрестности.

Средством приближения являются специально строящиеся по указанным значениям многочлены, называемые *многочленами Тейлора* данной *функции*.

Мы начнем с того, что выведем формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n. \tag{1}$$

Зададим произвольное число a и в правой части равенства (1) произведем замену x на $(x-a)+a$:

$$P(x) = b_0 + b_1[(x-a)+a] + \ldots + b_n[(x-a)+a]^n.$$

Затем раскроем квадратные скобки и приведем подобные при одинаковых степенях $x-a$. В результате получим равенство

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \ldots + \beta_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k, \tag{2}$$

где β_k — постоянные, зависящие от исходных коэффициентов b_k.

Равенство (2) называется *разложением многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$*, а числа β_k называются коэффициентами данного разложения.

С этой точки зрения исходное равенство (1) можно трактовать как разложение $P(x)$ по степеням x, т. е. по степеням $x-a$, где $a=0$.

Будем последовательно дифференцировать равенство (2):

$$P'(x) = \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + 3\beta_3(x-a)^2 + \ldots,$$
$$P''(x) = 2\beta_2 + 3\cdot 2\beta_3(x-a) + 4\cdot 3\beta_4(x-a)^2 + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(k)}(x) = k!\beta_k + (k+1)k\ldots 2\beta_{k+1}(x-a) + \ldots$$

В последнем равенстве, определяющем k-ю производную, положим $x=a$. Тогда в правой части все члены, начиная со второго, обратятся в нуль, и мы получим $P^{(k)}(a) = k!\beta_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. При этом, как обычно, мы считаем, что $P^{(0)}(a) = P(a)$, $0! = 1$. Итак, коэффициенты β_k разложения (2) многочлена $P(x)$ по степеням $x-a$ необходимо выражаются по формуле

$$\beta_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{3}$$

*) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.