

Отсюда, в частности, следует, что один и тот же многочлен  $P(x)$  степени  $n$  можно разложить по степеням  $x - a$  единственным образом, т. е., если для всех значений  $x$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k (x - a)^k = \sum_{k=0}^n \beta'_k (x - a)^k,$$

где  $\beta_k, \beta'_k$  — постоянные, то

$$\beta_k = \beta'_k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Ведь как числа  $\beta_k$ , так и  $\beta'_k$  вычисляются по одной и той же формуле (3).

Итак,

$$\begin{aligned} P(x) &= P(a) + \frac{P'(a)}{1!} (x - a) + \frac{P''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \end{aligned} \quad (4)$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора по степеням  $x - a$  для многочлена  $P(x)$  степени  $n$ .*

Формулу Тейлора по степеням  $x$ , т. е. выражение

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad (5)$$

называют также *формулой Маклорена*.

**Пример 1.** Бином Ньютона. Рассмотрим многочлен  $n$ -й степени

$$P(x) = (a + x)^n,$$

где  $a$  — произвольное число, а  $n$  — натуральное число. Его  $k$ -я производная равна

$$P^{(k)}(x) = n(n - 1) \dots (n - k + 1)(a + x)^{n-k},$$

откуда  $P^{(k)}(0) = n(n - 1) \dots (n - k + 1)a^{n-k}$  и, следовательно, на основании формулы Маклорена для многочлена  $n$ -й степени будем иметь

$$\begin{aligned} (a + x)^n &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n - 1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \\ &+ \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!} a^{n-3}x^3 + \dots + \frac{n(n - 1) \dots 1}{(n - 1)!} ax^{n-1} + x^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Это равенство называется *формулой бинома Ньютона*.

Если ввести обычное обозначение

$$C_n^k = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1, \quad (7)$$

то формула бинома Ньютона может быть записана в более компактной форме:

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k. \quad (6')$$

Числа  $C_n^k$  называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим, что если числитель и знаменатель дроби в (7) помножить на  $(n - k)!$ , то получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{k!(n-k)!},$$

т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (7')$$

Случай  $k = 0$  тоже включается в эту формулу. Ведь  $0! = 1$ .

Другое важное свойство биномиальных коэффициентов выражается равенством

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

Доказательство его предоставляем читателю. Если учесть, что  $C_n^0 = C_n^n = 1$ , то с помощью последнего равенства можно легко получить последовательно числа  $C_n^k$  для любых  $n$  и  $k$ , всякий раз пользуясь только одним действием сложения.

Выше мы вывели формулу Тейлора для многочлена. Пусть теперь в окрестности точки  $a$  задана функция  $f$ , не являющаяся многочленом степени  $n - 1$ , но имеющая там производные до  $n$ -го порядка включительно \*).

Вычислим числа  $f(a), f'(a), \dots, f^{(n-1)}(a)$  и составим при их помощи функцию

$$\begin{aligned} Q(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно,  $Q$  есть многочлен степени  $n - 1$ . Он называется *многочленом Тейлора*, именно  $(n - 1)$ -м многочленом Тейлора, функции  $f$  по степеням  $(x - a)$ .

Если бы исходная функция  $f$  сама была многочленом степени  $n - 1$ , то, как мы установили, выполнялось бы тождество  $f(x) = Q(x)$  для всех значений  $x$  из нашей окрестности. Но в данном случае это тождество не имеет места, ведь мы предположили, что  $f$  не есть многочлен степени  $n - 1$ . Это не мешает многочлену  $Q$  быть тесно связанным с  $f$ . В самом деле, разложим многочлен  $Q$  по формуле Тейлора:

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \quad (9)$$

\*.) На самом деле все выводы в этом параграфе проходят при менее ограничительных условиях, налагаемых на  $f$  (см. ниже формулировку теоремы 1).

Так как (8) и (9) суть разложения по степеням  $x - a$  одного и того же многочлена, то

$$f^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (10)$$

Итак,  $(n-1)$ -й многочлен Тейлора от функции  $f$  можно определить еще и как такой многочлен степени  $n-1$ , для которого выполняется  $n$  равенств (10).

**Пример 2.** На рис. 5.7 изображена кривая  $y = f(x)$ . В качестве ее нулевого приближения в окрестности точки  $a = 0$  естественно взять график ее нулевого многочлена Тейлора  $y = Q_0(x)$ , представляющий собой прямую  $y = f(0)$ , параллельную оси  $x$ . В качестве же первого приближения к нашей кривой естественно взять касательную к ней в точке  $x = 0$ . Ее уравнение есть  $y = Q_1(x)$ , где  $Q_1(x) = f(0) + f'(0)x$ . Следующее приближение — это второе приближение  $y = Q_2(x)$ , где  $Q_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ . Это многочлен Тейлора по степеням  $x$  второй степени, т. е. такой многочлен второй степени, что он и его производные первого и второго порядка в точке 0 совпадают соответственно с  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ .

Мы видим, что графики последующих многочленов Тейлора функции  $f$  по степеням  $x$  прилегают все теснее и теснее к графику  $f$ , во всяком случае, в достаточно малых окрестностях точки  $a = 0$ , если, конечно, функция в ней достаточно много раз дифференцируема.

Положим

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x), \quad (11)$$

где  $Q_{n-1}$  есть  $(n-1)$ -й многочлен Тейлора функции  $f$  по степеням  $x - a$ .

Равенство (11) называется *формулой Тейлора* функции  $f$  в *окрестности точки  $a$* , а  $R_n(x)$  называется *остаточным членом* или  *$n$ -м остатком* рассматриваемой формулы Тейлора.

Замечательно, что для остаточного члена можно дать нетривиальные выражения через  $n$ -ю производную от  $f$ . Ниже мы выведем два таких выражения: *остаточный член в форме Лагранжа* и *остаточный член в форме Коши*.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа выглядит следующим образом:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, x),$$

где  $\xi$  есть некоторая (зависящая от  $x$  и  $n$ ) точка интервала  $(a, x)$ . Здесь и далее  $x$  можно считать не только большим, но и меньшим, чем  $a^*$ ). Обычно точное значение  $\xi$  неизвестно, утверждается лишь, что  $\xi$  находится где-то на интервале  $(a, x)$ .

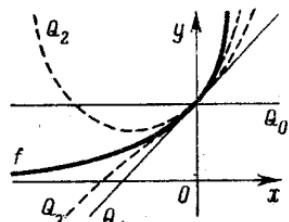


Рис. 5.7.

\* Если  $x < a$ , то  $(a, x)$ ,  $[a, x]$  обозначают множества точек  $t$ , удовлетворяющих соответственно неравенствам  $x < t < a$ ,  $x \leq t \leq a$ .

Бывает удобно число  $\xi$  записать в виде  $\xi = a + \theta(x - a)$ , где  $\theta$  есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам  $0 < \theta < 1$ . При таком обозначении остаточный член в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x - a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши выглядит так:

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(a + \theta(x - a)), \quad 0 < \theta < 1,$$

где  $\theta$  — число, зависящее от  $x$  и  $n$ .

Отметим, что при  $n = 1$  формула Тейлора функции с остаточным членом в форме Лагранжа (или Коши) есть уже известная нам формула Лагранжа о среднем значении:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(a + \theta(x - a)), \quad 0 < \theta < 1.$$

Соответствующая теорема гласит:

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, x]$  вместе со своими производными до  $(n - 1)$ -го порядка включительно и имеет производную порядка  $n$  на интервале  $(a, x)$ .

Тогда ее  $n$ -й остаточный член формулы Тейлора может быть записан в форме Лагранжа или в форме Коши.

**Доказательство.** Зададим произвольное натуральное число  $p$  и указанное в теореме значение  $x$ . Предупредим, что на протяжении доказательства  $x$  будет оставаться неизменным. Нам будет удобно ввести новую вспомогательную переменную  $u$ . По отношению к ней  $x$  будет рассматриваться как постоянная.

Мы ставим своей задачей найти удобное выражение для остатка  $R_n(x)$  в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x).$$

Коротко будем говорить, что мы ищем  $R_n(x)$ , т. е. значение остатка в точке  $x$ . Для этого представим  $R_n(x)$  в виде произведения  $R_n(x) = (x - a)^p H$ , сведя таким образом вопрос к отысканию величины  $H$ . Величина  $H$  зависит от  $x$  и в силу сделанного соглашения будет рассматриваться как постоянная.

Итак, мы имеем равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x - a)^p H.$$

Заменим чисто формально в правой его части постоянную  $a$  на переменную  $u$ . Тогда получим функцию

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \sum_0^{n-1} \frac{(x-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) + (x-u)^n H = \\ &= f(u) + \frac{x-u}{1} f'(u) + \dots + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(u) + (x-u)^n H, \quad (12)\end{aligned}$$

которая во всяком случае определена и непрерывна для всех значений  $u$ , принадлежащих отрезку  $[a, x]$ , потому что на этом отрезке непрерывна исходная функция  $f(u)$  вместе со своими производными до  $(n-1)$ -й включительно. Кроме того, из определения функции  $\Phi(u)$  следует, что при  $u=a$  она принимает значение  $f(x)$  ( $\Phi(a)=f(x)$ ). Больше того, при  $u=x$  она также обращается в  $f(x)$  ( $\Phi(x)=f(x)$ ), что непосредственно видно из правой части (12): если положить в ней  $u=x$ , все члены обращаются в нуль, кроме первого, равного  $f(x)$ . Наконец, наша функция  $\Phi(u)$  имеет на интервале  $(a, x)$  производную, потому что на нем имеет производную  $n$ -го порядка исходная функция  $f$ .

Мы видим, что наша вспомогательная функция  $\Phi(u)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля — она непрерывна на отрезке  $[a, x]$ , имеет производную на интервале  $(a, x)$  и принимает равные значения на его концах. Но тогда согласно теореме Ролля существует между  $a$  и  $x$  промежуточная точка  $u=a+\theta(x-a)$  такая, что производная  $\Phi'$  в ней равна нулю.

Найдем фактически эту производную:

$$\begin{aligned}\Phi'(u) &= f'(u) - f'(u) + (x-u)f''(u) - (x-u)f''(u) + \dots \\ &\dots - \frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(u) + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) - p(x-u)^{p-1} H.\end{aligned}$$

В этом выражении все члены сокращаются, за исключением последних двух. Если в оставшееся выражение подставить указанное значение  $u=a+\theta(x-a)$ , то, как было сказано, оно обращается в нуль.

Решая полученное уравнение относительно  $H$  и умножая найденное  $H$  на  $(x-a)^p$ , получим искомое выражение для остаточного члена:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!p} (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a)).$$

Это выражение зависит от  $p$ , где  $p$  может быть любым натуральным числом. Если в нем положить  $p=n$ , то получим остаточный член в форме Лагранжа, а если положить  $p=1$ , то в форме Коши.

Отметим, что при  $a = 0$  формулу Тейлора называют также *формулой Маклорена*. В этом случае она имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad (13)$$

$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0x)$  — форма Лагранжа,

$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)$  — форма Коши.

Предположим теперь, что функция  $f$  имеет в точке  $a$  непрерывную производную  $f^{(n)}$  порядка  $n$ . Отсюда следует, что существует некоторая окрестность точки  $a$ , на которой функция  $f$  имеет производную  $f^{(n)}$  и тем более непрерывную производную  $f^{(n-1)}$ . Таким образом, условия для разложения  $f$  по формуле (13) с остатком в форме Лагранжа соблюдены, и можно написать, учитывая предложенную непрерывность  $f^{(n)}$  при  $x = a$ , что

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r_n(x) \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(a + \theta(x-a)) - f^{(n)}(a)] = (x-a)^n o(1) = \\ &= o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a). \quad (15)$$

Разложение (15) называют *формулой Тейлора разложения функции  $f$  по степеням  $(x-a)$  с остаточным членом в форме Пеано* \*).

Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 2.** Если функция  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $n$  в точке  $a$ , то она разлагается по формуле (15) Тейлора по степеням  $x-a$  с остаточным членом в форме Пеано.

Докажем лемму.

**Лемма.** Из равенства

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = \alpha'_0 + \alpha'_1(x-a) + \dots + \alpha'_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a, \quad (16)$$

где  $\alpha_k, \alpha'_k$  — числа, не зависящие от  $x$ , следует, что

$$\alpha_k = \alpha'_k \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (17)$$

\* ) Д. Пеано (1852—1932) — итальянский математик.

Действительно, возьмем предел левой и правой частей (16) при  $x \rightarrow a$ . Тогда получим равенство  $\alpha_0 = \alpha'_0$ . Таким образом, можно считать, что в (16) слагаемых  $\alpha_0, \alpha'_0$  нет, и можно (16) сократить на  $x - a$  и получить равенство

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) &= \\ &= \alpha'_1 + \alpha'_2(x-a) + \dots + \alpha'_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}), \end{aligned}$$

откуда, после перехода к пределу при  $x \rightarrow a$ , получим еще, что  $\alpha_1 = \alpha'_1$ . Продолжая этот процесс последовательно, мы получим (17) и лемма доказана.

Из доказанной леммы и сказанного выше следует *единственность разложения функции  $f$  по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано*. Эти слова надо понимать в следующем смысле. Если функция  $f$ , имеющая в точке  $x = a$  непрерывную производную  $n$ -го порядка, представлена в виде

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a, \quad (18)$$

где  $\alpha_k$  — постоянные числа, то эти числа равны

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

т. е. (18) есть тейлорово разложение  $f$  с остатком в форме Пеано.

*Формула Тейлора в окрестности  $x = 0$  четной (нечетной) функции  $f$  содержит в себе члены только четной (нечетной) степени  $x$ :*

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots,$$

$$(f(x) = a_1x + a_3x^3 + \dots).$$

Это следует из того, что нечетные производные от четной функции, так же как четные производные от нечетных функций, суть нечетные функции (см. конец § 5.6). Но последние к тому же предполагаются непрерывными в точке  $x = 0$ , но тогда они необходимо равны нулю в этой точке.

В частности, с помощью этого утверждения легко следует, что для того чтобы многочлен

$$P(x) = \sum_0^n \alpha_k x^k$$

был четным (нечетным), т. е. четной (нечетной) функцией, необходимо и достаточно, чтобы все его члены имели  $x$  в четной (нечетной) степени.

Пример 3. Из равенства  $1 + x^2 + \dots + x^{2m} = (1 - x^{2m+2})/(1 - x^2)$ , и того факта, что  $x^{2m+2}/(1 - x^2) = o(x^{2m}) (x \rightarrow 0)$ , следует, что

$$\frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + \dots + x^{2m} + o(x^{2m}) (x \rightarrow 0). \quad (19)$$

Но тогда (19) есть формула Тейлора функции  $(1 - x^2)^{-1}$  по степеням  $x$  с остаточным членом в форме Пеано.

### § 5.10. Формулы Тейлора для важнейших элементарных функций

Функция  $f(x) = e^x$ . Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Поэтому формула Тейлора по степеням  $x$  функции  $e^x$  с остатком, в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

Если положить в ней  $x = 1$ , то получим приближенное выражение для  $e$ :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}$$

с ошибкой  $|R_n(1)| \leq \frac{1}{n!} e < \frac{3}{\mu!}$ .

При любом  $x \geq 0$

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!} e^x \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

и при  $x < 0$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Функция  $f(x) = \sin x$ . Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Формула Тейлора по степеням  $x$  с остаточным членом Лагранжа имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{v+1} \frac{x^{2v-1}}{(2v-1)!} + R_{2v+1}(x),$$

$$R_{2v+1}(x) = \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} \sin\left(x + (2v+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток стремится к нулю при  $v \rightarrow \infty$  для любого  $x$ :

$$|R_{2v+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2v+1}}{(2v+1)!} \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty).$$

Функция  $f(x) = \cos x$ . Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Формула Тейлора по степеням  $x$  с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{v-1} \frac{x^{2(v-1)}}{(2(v-1))!} + R_{2v}(x),$$

$$R_{2v}(x) = \frac{x^{2v}}{(2v)!} \cos\left(\theta x + 2v\frac{\pi}{2}\right).$$

Остаток ведет себя как и в случае  $\sin x$ :

$$|R_{2v}(x)| \leq \frac{|x|^{2v}}{(2v)!} \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty).$$

Особенно хорошо стремится к нулю остаток функций  $\sin x$  и  $\cos x$  при  $|x| \leq 1$ . Заметим, что численные значения этих функций как раз достаточно знать для дуг  $x$  в пределах между числом 0 и числом  $\pi/4 < 1$ .

Функция  $f(x) = \ln(1+x)$  определена и сколько угодно раз дифференцируема для  $x > -1$ . Ее формулу Тейлора по степеням  $x$  можно написать для  $n = 1, 2, \dots$  при  $x > -1$ . Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

то формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x).$$

При этом для остатка запишем две формы — форму Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(1+\theta x)^n} \quad (0 < \theta < 1)$$

и форму Коши:

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Пусть  $0 \leq x \leq 1$ ; тогда, обращаясь к форме Лагранжа, получим  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n} x^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Мы видим, что при  $0 < x < 1$

остаток стремится к нулю быстро, при  $x = 1$  стремление к нулю происходит очень медленно.

В случае  $-1 < x < 0$  форма Лагранжа не дает возможности сделать определенное заключение о стремлении  $R_n$  к нулю, потому что мы знаем только, что  $\theta$  удовлетворяет неравенствам  $0 < \theta < 1$ . При этом не надо забывать, что  $\theta$  зависит от  $x$  и  $n$ . Но, применяя форму Коши, получим, считая, что  $0 < |x| < 1$ , оценку

$$|R_n| < \frac{|x|^n}{1 - |x|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

потому, что  $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1$ .

При  $x = -1 \ln(1+x)$  не имеет смысла. При  $x > 1$  формула при любом  $n$  имеет смысл, однако ее остаточный член  $R_n(x)$  теперь уже не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . В этом можно убедиться\*), рассуждая следующим окольным путем. Положим

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

Тогда

$$S_n(x) + R_n(x) = S_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$$

и

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Для  $x > 1$  и  $n \rightarrow \infty$  правая часть этого равенства не стремится к нулю. Поэтому  $R_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  не может стремиться к нулю — не выполняется критерий Коши существования предела.

Итак, остаточный член формулы Тейлора функции  $\ln(1+x)$  по степеням  $x$  стремится при  $n \rightarrow \infty$  к нулю только при  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $-1 < x \leq 1$ .

Функция  $f(x) = (1+x)^m$ . Для этой функции

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Формула Тейлора по степеням  $x$  имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x).$$

При этом остаток в форме Лагранжа записывается так:

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n (1+\theta x)^{m-n},$$

\*). Это следует также из расходимости при  $|x| > 1$  ряда с общим членом  $(-1)^n x^{n-1}/(n-1)$  (см. § 11.1).

а в форме Коши

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n (1+\theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

При натуральном  $m$  и любом  $x$  все члены формулы, начиная с  $(m+1)$ -го, исчезают и формула Тейлора превращается в элементарную формулу Ньютона (см. § 5.9, (6)).

Для остальных  $m$  формула имеет смысл, во всяком случае при  $x > -1$ .

Пусть  $0 \leq x < 1$ . Тогда, если воспользоваться формулой Лагранжа, получим для  $n \geq m$ :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{n!} |x|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(см. ниже замечание).

Если же  $-1 < x < 0$ , то, воспользовавшись формулой Коши, получим (см. ниже замечание)

$$|R_n(x)| \leq C \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{(n-1)!} |x|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

где  $C$  — число, вообще зависящее от  $x$ , но не зависящее от  $n$ , потому что  $((1-\theta)/(1+\theta x))^{n-1} \leq ((1-\theta)/(1-\theta))^{n-1} = 1$  и при  $m-1 > 0$

$$(1+\theta x)^{m-1} \leq 2^{m-1},$$

а при  $m-1 < 0$

$$(1+\theta x)^{m-1} < \frac{1}{(1-|x|)^{1-m}}.$$

Таким образом, остаточный член формулы Тейлора функции  $(1+x)^m$  при  $-1 < x < 1$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . При  $x > 1$  остаточный член уже не стремится к нулю \*), так как, если обозначать через  $S_n(x)$  сумму первых  $n$  членов разложения  $(1+x)^m$ , то получим (см. ниже замечание)

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - S_n(x) =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

и для  $R_n(x)$  не выполняется условие Коши существования предела.

Случай  $x = \pm 1$  мы не рассматриваем. Скажем только, что в этих случаях остаточный член  $R_n$  может стремиться и не стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$  в зависимости от  $m$ . При  $m < 0$  и  $x = -1$  функция  $(1+x)^m$  вообще не имеет смысла.

\*) Это следует также из расходимости ряда при  $x > 1$  с общим членом  $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$  (см. § 11.1).

**Замечание.** Для

$$u_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n,$$

где  $m$  — произвольное действительное число, имеет место

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|m-n|}{n+1} |x| \rightarrow |x|, \quad n \rightarrow \infty.$$

Но тогда, как докажет это читатель, при  $n \rightarrow \infty$

$$u_n \rightarrow 0, \text{ если } |x| < 1, \quad u_n \rightarrow \infty, \text{ если } |x| > 1$$

(впрочем, см. § 11.3, теорема 2).

### § 5.11. Ряд Тейлора

Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad (1)$$

где  $u_k$  — числа, зависящие в силу некоторого закона от натурального индекса  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), называется *рядом*.

Обозначим через  $S_n = \sum_0^{n-1} u_k$  сумму его первых  $n$  членов. Числа  $S_n$  составляют последовательность  $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ . Если она сходится, т. е. существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то говорят, что ряд (1) *сходится и имеет сумму, равную S*. При этом пишут  $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ .

Если функция  $f$  имеет в некоторой окрестности точки  $a$  производные сколь угодно высокого порядка, то для нее чисто формально можно написать ряд

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots, \quad (2)$$

который носит название *ряда Тейлора функции f по степеням (x - a)*. Для данных значений  $a$  и  $x$  он может сходиться или расходиться. Особенно важен тот случай, когда ряд Тейлора функции  $f$  сходится к самой функции, т. е. имеет суммой  $f(x)$ .

Это имеет место тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_0^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) = S_n(x) + R_n(x) \quad (3)$$

стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , то из (3) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x),$$

и так как  $S_n(x)$  есть сумма первых  $n$  членов ряда (2), то ряд (2) сходится и имеет своей суммой  $f(x)$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (4)$$

Обратно, если известно, что для некоторого значения  $x$  имеет место равенство (4), т. е. если известно, что ряд (2) при этом значении  $x$  сходится и имеет своей суммой число  $f(x)$ , то это значит, что для указанного значения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

Но тогда из (3) следует, что  $R_n(x) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

На основании результатов, которые были получены в предыдущем параграфе, мы можем теперь сказать, что имеют место следующие разложения в ряды Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (-\infty < x < \infty), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (-\infty < x < \infty), \\ (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (-1 < x \leq 1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В приведенных примерах множества  $E$  точек  $x$ , где ряды Тейлора по степеням  $x$  сходятся, представляют собой интервал или полуинтервал с центром в 0. Это не случайные факты. В дальнейшем будет выяснено, что ряд вида (см. § 11.11)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad (6)$$

где  $a_k$  — заданные постоянные числа, обладает тем свойством, что если он сходится в точке  $x_1$ , то он заведомо сходится для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| < |x_1|$ . Ряды вида (6) называются *степенными рядами*.

Бывают и такие случаи, что для функции  $f$  можно формально написать ее ряд Тейлора по степеням  $(x-a)$ .

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots, \quad (7)$$

пишаче говоря, для этой функции имеют смысл производные  $f^{(k)}(a)$

для любого  $k = 0, 1, 2, \dots$  и ряд (7) сходится для некоторых значений  $x$ , однако сумма ряда для этих  $x$  не равна  $f(x)$ .

**Пример 1.** Вот пример такой функции:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Если  $|x| < 1$ ,  $u = 1 - x^2$ , то

$$\psi'(x) = -2x(1-x^2)^{-2}e^{1/(x^2-1)} = -2xu^{-2}e^{-1/u} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 1.$$

По индукции доказывается, что для  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\psi^{(k)}(x) = P(x)(1-x^2)^{-l}e^{1/(x^2-1)} = P(x)u^{-l}e^{-1/u} \rightarrow P(1) \cdot 0 = 0, \quad x < 1, \quad x \rightarrow 1,$$

где  $P(x)$  — некоторый многочлен, а число  $l > 0$  зависит от  $k$ . Если учесть, что  $\psi(x) = 0$  при  $|x| \geq 1$ , то мы доказали, что  $\lim_{x \rightarrow 1} \psi^{(k)}(x) = 0$ . Далее,

$\psi(1) = 0$ , и если уже установлено, что  $\psi^{(k)}(1) = 0$  при некотором  $k$ , то

$$\psi^{(k+1)}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\psi^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \psi^{(k+1)}(1 + \theta(x - 1)) = 0 \quad (0 < \theta < 1).$$

Итак, для функции  $\psi$  имеют смысл равные нулю числа  $\psi(1)$ ,  $\psi'(1)$ ,  $\psi''(1), \dots$  и можно написать ее ряд Тейлора по степеням  $x - 1$ . Все его члены при любом  $x$  равны нулю. Он, таким образом, сходится, и его сумма для любого  $x$  равна нулю, но отлична от  $\psi(x)$  для  $|x| < 1$ . Аналогичные факты имеют место при  $x = -1$ .

Функция  $\psi$  есть пример бесконечно дифференцируемой на действительной оси функции, равной нулю вне некоторого отрезка.

Функции  $f(x)$ , разлагающиеся в ряд Тейлора по степеням  $(x - a)$ , сходящийся к  $f(x)$  в некоторой окрестности точки  $a$ , называются *аналитическими во всех точках указанной окрестности (открытой)*. В частности, они *аналитические в точке  $a$* .

Из сказанного выше следует, что функции  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  — аналитические на всей действительной оси, а функции  $\ln(1+x)$  и  $(1+x)^m$  — аналитические на интервале  $(-1, +1)$ .

Можно показать (см. ниже пример 2), что, каково бы ни было  $a > 0$ , функции  $\ln(1+x)$  и  $(1+x)^m$  разлагаются в сходящийся к ним ряд Тейлора по степеням  $(x - a)$  для достаточно малых  $x - a$ , откуда следует, что функции  $\ln(1+x)$  и  $(1+x)^m$  на самом деле аналитические при любом  $x > 0$ . Аналитические функции изучаются в специальной математической дисциплине — теории функций комплексного переменного, называемой также теорией аналитических функций.

Возможна следующая классификация функций, заданных на интервале. Функции:

1) произвольные, вообще разрывные;

2) непрерывные;

3) имеющие производную  $f^{(n)}$  для некоторого  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;

4) имеющие непрерывную производную  $f^{(n)}$  для некоторого  $n = 1, 2, \dots$ ;

5) бесконечно дифференцируемые, т. е. имеющие производную  $f^{(n)}$  любого порядка, таким образом, имеющие непрерывную производную  $f^{(n)}$  любого порядка;

6) аналитические.

Каждый следующий класс в этом ряду содержится в предыдущем и состоит из более «хороших» функций.

Функция, определенная равенствами (8), бесконечно дифференцируема на  $(-\infty, \infty)$ , но не является аналитической на нем. Впрочем, она аналитическая на  $(1, \infty)$ ,  $(-\infty, 1)$  и на  $(-1, 1)$ .

Пример 2. Пусть  $f(x) = \ln x$ . Тогда

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \quad (x > 0; k = 1, 2, \dots),$$

$$\ln x = \ln a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(x-a)^k}{ka^k} + R_n(x), \quad a > 0,$$

где  $R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x-a)^n}{(a+\theta(x-a))^n}$ ,  $|x-a| < a$ . Если  $|x-a| < a/2$ , то тогда  $|a+\theta(x-a)| > a - |x-a| > a - (a/2) = a/2$ ,  $|(x-a)/(a+\theta(x-a))| < 1$  и  $|R_n(x)| < 1/n \rightarrow 0$ .

Таким образом, имеет место разложение в сходящийся ряд

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{1 \cdot a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} + \dots$$

для любого  $a > 0$  и  $|x-a| < a/2$ . Это показывает, что функция  $\ln x$  — аналитическая для любого  $a > 0$ .

Пример 3. Найдем главный степенной член функции  $\ln(1+x+x^2)$ :

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) + o(x+x^2) = x + o(x) + o(x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Ведь  $\ln(1+u) = u + o(u)$ ,  $u \rightarrow 0$ ;  $u = x+x^2 \rightarrow 0$   $x \rightarrow 0$ ;  $x^2 = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$  и  $o(x+x^2) = o(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , потому что

$$\frac{o(x+x^2)}{x} = \frac{o(x+x^2)}{x+x^2} \cdot \frac{x+x^2}{x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

$\downarrow \qquad \downarrow$   
0              1

Пример 4. Найдем теперь главный степенной член функции

$$\ln(1+x+x^2) - x.$$

Если воспользоваться предыдущим результатом, то это не даст главного члена. Ведь тогда

$$\ln(1+x+x^2) - x = x + o(x) - x = o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Но мы получили некоторую информацию. Главный член, если существует, то имеет степень  $n > 1$ . Попробуем воспользоваться формулой Тейлора с

остатком  $o(u^2)$ ,  $u \rightarrow 0$  в смысле Пеано. Имеем  $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ ,  $u \rightarrow 0$ , поэтому

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2) - x &= x + x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o((x+x^2)^2) - x = \\ &= x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

### § 5.12. Выпуклость кривой в точке. Точка перегиба

Говорят, что кривая  $y = f(x)$  обращена в точке  $x_0$  выпуклостью кверху (книзу), если существует окрестность  $x_0$  такая, что для всех ее точек  $x$  касательная к кривой в точке  $x_0$  (т. е. в точке, имеющей абсциссу  $x_0$ ) расположена выше (ниже) самой кривой (рис. 5.8; здесь в точке  $x_1$  кривая обращена выпуклостью книзу, в точке  $x_2$  — кверху).

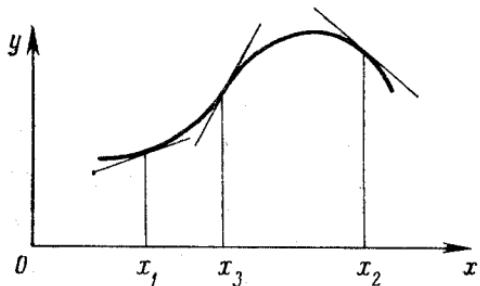


Рис. 5.8.

Говорят, что точка  $x_0$  есть точка перегиба кривой  $y = f(x)$ , если при переходе  $x$  через  $x_0$  точка кривой (имеющая абсциссу  $x$ ) переходит с одной стороны касательной на другую (на рис. 5.8 точка  $x_3$  — точка перегиба).

Иначе говоря, существует достаточно малое  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  кривая находится с одной стороны касательной в  $x_0$ , а для всех  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  — с другой.

Указанные определения выделяют возможные расположения кривой относительно касательной к ней в достаточно малой окрестности точки касания. Но не нужно думать, что эти определения исчерпывают все возможные случаи такого расположения. Вспомним о кривой, являющейся графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0). \end{cases}$$

Ось  $x$  пересекает и касается этой кривой в точке  $x = 0$  и  $x = 0$  не есть точка перегиба.

**Теорема 1.** Если функция  $f$  имеет в точке  $x_0$  вторую непрерывную производную и  $f''(x_0) > 0$  ( $< 0$ ), то кривая  $y = f(x)$  обращена в  $x_0$  выпуклостью книзу (кверху).

**Доказательство.** Разлагаем  $f$  в окрестности  $x = x_0$  по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

Остаток  $R(x)$  равен величине превышения кривой  $f$  над касательной к ней в точке  $x_0$ . В силу непрерывности  $f''$ , если  $f''(x_0) > 0$ , то и  $f''(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$  для  $x$ , принадлежащих достаточно малой окрестности точки  $x_0$ , а потому, очевидно, и  $R(x) > 0$  для любого отличного от  $x_0$  значения  $x$ , принадлежащего к указанной окрестности.

Аналогично рассматривается случай  $f''(x_0) < 0$ .

**Теорема 2.** Если функция  $f$  такова, что производная  $f'''$  непрерывна в  $x_0$ , а  $f''(x_0) = 0$  и  $f'''(x_0) \neq 0$ , то кривая  $y = f(x)$  имеет в  $x_0$  точку перегиба.

**Доказательство.** В этом случае

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

В силу непрерывности  $f'''$  в  $x_0$  и того факта, что  $f'''(x_0) \neq 0$ , следует, что  $f'''(x_0 + \theta(x - x_0))$  сохраняет знак в некоторой окрестности точки  $x_0$ ; он один и тот же справа и слева от точки  $x_0$ . С другой стороны, множитель  $(x - x_0)^3$  меняет знак при переходе  $x$  через  $x_0$ , а вместе с ним и величина  $R(x)$  (равная превышению точки кривой над касательной в  $x_0$ ) меняет знак при переходе  $x$  через  $x_0$ . Это доказывает теорему.

Сформулируем более общую теорему:

**Теорема 3.** Пусть функция  $f$  обладает следующими свойствами:

$$f''(x_0) = \dots = f^{(k)}(x_0) = 0,$$

$f^{(k+1)}(x)$  непрерывна в  $x_0$  и  $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$ .

Тогда, если  $k$  — нечетное число, то кривая  $y = f(x)$  обращена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того, будет ли  $f^{(k+1)}(x_0) < 0$  или  $f^{(k+1)}(x_0) > 0$ , а если  $k$  — четное число, то  $x_0$  есть точка перегиба кривой.

Если дополнительно к приведенным уже условиям еще

$$f'(x_0) = 0, \quad (1)$$

то, если  $k$  — нечетное число, функция  $f$  достигает в точке  $x_0$  максимума или минимума в зависимости от того, будет ли  $f^{(k+1)}(x_0) < 0$  или  $f^{(k+1)}(x_0) > 0$ .

**Доказательство** основано на том, что при указанных условиях имеет место разложение по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

а при дополнительном условии (1) это разложение превращается в следующее:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

В заключение заметим, что говорят также, что кривая  $y = f(x)$  имеет точку перегиба в точке  $x$ , где производная  $f'(x)$  равна  $+\infty$  или  $-\infty$  (см. рис. 5.1. в, г на стр. 128 и замечания к ним).

### § 5.13. Выпуклость кривой на отрезке

По определению кривая  $y = f(x)$  называется *выпуклой кверху* (*книзу*) на отрезке  $[a, b]$ , если любая дуга этой кривой с концами в точках  $x_1, x_2$  ( $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ) расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 5.9, 5.10).

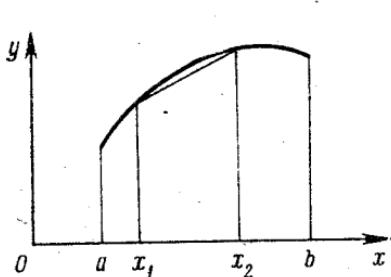


Рис. 5.9.

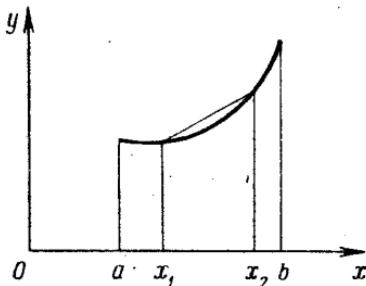


Рис. 5.10.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и имеет вторую производную на  $(a, b)$ .

Для того чтобы кривая  $y = f(x)$  была выпуклой кверху (*книзу*) на  $[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $f''(x) \leq 0$  ( $f''(x) \geq 0$ ) для всех  $x \in (a, b)$ .

**Доказательство.** Пусть наша кривая — выпуклая кверху на  $[a, b]$ . Тогда для любых  $x$  и  $h > 0$  таких, что  $x, x+h \in [a, b]$ , имеет место неравенство  $f(x+h) \geq (f(x) + f(x+2h))/2$ , откуда  $f(x+h) - f(x) \geq f(x+2h) - f(x+h)$ .

Если теперь  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные точки интервала  $(a, b)$ , то, положив  $h = (x_2 - x_1)/n$ , будем иметь

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \geq f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) \geq \dots \geq f(x_2) - f(x_2 - h).$$

Таким образом,  $(f(x_1 + h) - f(x_1))/h \geq (f(x_2 - h) - f(x_2))/(-h)$ , и, переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим неравенство

$$f'(x_1) \geq f'(x_2),$$

показывающее, что производная  $f'$  на интервале  $(a, b)$  не возрастает. Но тогда  $f''(x) \leq 0$  на  $(a, b)$ .

Обратно пусть  $f''(x) \leq 0$  и  $a < x_1 < x_2 < b$ . Нужно доказать, что функция  $F(x) = f(x) - f(x_1) - m(x - x_1)$ , где  $m = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$ , удовлетворяет неравенству  $F(x) \geq 0$  на  $[x_1, x_2]$ . Допустим, что это не так. Тогда  $\min_{x_1 < x < x_2} F(x) = F(x_0) < 0$  и  $x_1 < x_0 < x_2$ . Поэтому  $F'(x_0) = 0$ .

Применив формулу Тейлора, получим  $0 = F(x_2) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} \times F''(x_0 + \theta(x_2 - x_0)) = F(x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2!} f''(x_0 + \theta(x_2 - x_0))$ . Но в правой части этой цепочки равенств первый член, по предположению, отрицательный, а второй неположительный, поэтому правая часть меньше нуля и мы пришли к противоречию.

Доказательство в случае

$$f''(x) \geq 0$$

аналогично.

Пример. Функция  $y = \sin x$  имеет непрерывную первую производную и вторую производную

$$(\sin x)'' = -\sin x \leq 0$$

на  $[0, \pi/2]$ . Поэтому хорда  $OA$ , стягивающая дугу кривой  $y = \sin x$  на  $[0, \pi/2]$ , ниже синусоиды (рис. 5.11). Так как уравнение хорды  $y = (2/\pi)x$ , то мы получим неравенство

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

часто употребляемое в математическом анализе.

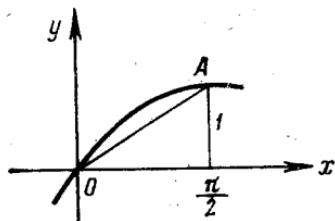


Рис. 5.11.

## § 5.14. Раскрытие неопределенностей

В нашем распоряжении теперь имеются очень сильные методы дифференциального исчисления — теоремы о среднем и формула Тейлора. С их помощью можно автоматизировать вычисление многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ .

Случай  $0/0$ . Требуется вычислить  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  в предположении, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(x) \neq 0$  в окрестности  $a$ .

Пусть  $a$  — конечное число и для функций  $f$  и  $\varphi$  найдены главные степенные члены (относительно  $(x - a)$ ):

$$f(x) = \alpha_p(x - a)^p + o((x - a)^p) \quad (x \rightarrow a), \quad \alpha_p \neq 0,$$

$$\varphi(x) = \beta_q(x - a)^q + o((x - a)^q) \quad (x \rightarrow a), \quad \beta_q \neq 0.$$

Тогда (см. § 4.10, (10))

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_p (x-a)^p}{\beta_q (x-a)^q} = \begin{cases} \frac{\alpha_p}{\beta_p} & \text{при } p = q, \\ 0 & \text{при } p > q, \\ \infty & \text{при } p < q. \end{cases}$$

Примеры.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left( x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \right)}{x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} = -2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sqrt[3]{1 - x} - \cos \sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{\left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) - \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2) \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\left( \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right)x^2 + o(x^2)} = -3$$

Но функции  $f$  и  $\varphi$  могут не иметь производных в точке  $a$  или почему-либо может быть затруднительно или нежелательно вычисление их в этой точке. Тогда может быть полезна следующая общая теорема, доказательство которой основано на применении теоремы о среднем Коши:

**Теорема 1.** Пусть функции  $f$  и  $\varphi$  непрерывны и имеют производные в окрестности точки  $a$  ( $a$  — число или  $\infty$ ), за исключением, быть может, точки  $a$ ; при этом  $\varphi$  и  $\varphi'$  не равны нулю в указанной окрестности и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \tag{1}$$

(конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

В частности, здесь речь может идти о правом или левом пределе, и тогда под окрестностью  $a$  понимается правая или левая ее окрестность.

**Доказательство.** Пусть  $a$  — число (конечное). Тогда, полагая  $f(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\varphi(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ , мы получим, что функции  $f$  и  $\varphi$  непрерывны в точке  $a$ . Это свойство вместе со сформулированными в теореме свойствами позволяет применить к функциям  $f$  и  $\varphi$  теорему Коши. Таким образом, какова бы ни была точка  $x$  из указанной окрестности, найдется между  $a$  и  $x$  точка  $\xi = a + \theta(x - a)$ ,  $0 < \theta < 1$  такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (3)$$

Если существует предел (1), то, очевидно, также существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A,$$

а следовательно, и предел (2).

Итак, существование второго предела в (2) влечет существование равного ему первого предела в (2). Обратное утверждение неверно.

**Пример 4.** В силу того, что  $\sin x \approx x$  ( $x \rightarrow 0$ ),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

С другой стороны, соответствующее отношение производных равно

$$\frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x} = 2x \frac{1}{\cos x} \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos(1/x)}{\cos x}. \quad (4)$$

Оно, очевидно, не стремится ни к какому пределу при  $x \rightarrow 0$ . Это видно из того, что первый член правой части стремится к нулю, а второй не стремится к какому-либо пределу. Это не мешает тому, что после подстановки в (4) вместо  $x$  функция  $\xi = \xi(x)$ , которая возникает в формуле Коши (3), получается такая функция от  $x$ , которая имеет предел при  $x \rightarrow 0$ .

Нам надо рассмотреть еще случай  $a = \infty$  (или  $a = +\infty$  или  $a = -\infty$ ). Сделаем подстановку  $x = 1/u$ . Тогда получим функции  $F(u) = f(1/u)$ ,  $\Phi(u) = \varphi(1/u)$  от  $u$ . Они непрерывны в окрестности точки 0 (при  $a = +\infty$  или  $a = -\infty$  — в правой или левой окрестностях точки 0), имеют производные (по  $u$ ) в этой окрестности и  $\Phi'$ , так же как  $\Phi'$  не равны нулю в ней.

При этом  $\lim_{u \rightarrow 0} F(u) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  и  $\lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ .

Далее, если существует  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ , то, очевидно, существует

равный ему предел:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{F'(u)}{\Phi'(u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(1/u)(-1/u^2)}{\varphi'(1/u)(-1/u^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Поэтому на основании уже доказанного выше (для конечного  $a$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F(u)}{\Phi(u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F'(u)}{\Phi'(u)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Этим теорема доказана.

Приводимое ниже доказательство теоремы 1 годится как для конечного, так и бесконечного  $a$ , т. е.  $a$  может быть равным  $\infty$ ,  $+\infty$  или  $-\infty$ .

Пусть задана принадлежащая к указанной в теореме окрестности последовательность точек  $x_k$  ( $x_k \neq a$ ), стремящаяся к  $a$  ( $x_k \rightarrow a$ ). В силу того, что  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , для каждого натурального  $k$  найдется натуральное  $n_k$  такое, что

$$|f(x_{n_k})| < \frac{1}{k} |f(x_k)|, \quad |\varphi(x_{n_k})| < \frac{1}{k} |\varphi(x_k)|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

при этом можно считать, что  $n_k < n_{k+1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} f(x_{n_k}) &= o(f(x_k)), \\ \varphi(x_{n_k}) &= o(\varphi(x_k)), \end{aligned} \quad k \rightarrow \infty, \quad (5)$$

и справедливо асимптотическое равенство (см. теорему 1 § 4.10)

$$\frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)} \approx \frac{f(x_k) - f(x_{n_k})}{\varphi(x_k) - \varphi(x_{n_k})} \quad (k \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Применяя для каждого  $k$  теорему Коши (см. (1) § 5.8), находим точку  $\xi_k \in (x_k, x_{n_k})$  такую, что

$$\frac{f(x_k) - f(x_{n_k})}{\varphi(x_k) - \varphi(x_{n_k})} = \frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)}. \quad (7)$$

В силу условия (1) из (6) и (7) получим (см. теорему 2 § 4.10), что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_{n_k})}{\varphi(x_k) - \varphi(x_{n_k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)} = A.$$

Теорема доказана.

Случай  $\infty/\infty$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и имеют производные  $f'$  и  $\varphi'$  в окрестности (в частности, в правой или в левой окрестности) точки  $a$  (конечной или бесконечной), за исключением самой точки  $a$ . При этом  $\varphi' \neq 0$  в указанной окрест-

ности и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty \quad (+\infty \text{ или } -\infty). \quad (8)$$

Тогда, если существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A, \quad (9)$$

то существует равный ему предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (10)$$

**Доказательство.** Зададим произвольную последовательность точек  $x_k$  ( $x_k \neq a$ ), стремящуюся к  $a$  ( $x_k \rightarrow a$ ).

Так как по условию  $f(x_k) \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(x_k) \rightarrow \infty$ , то каждому натуральному  $k$  можно привести в соответствие натуральное  $n_k > k$  ( $n_k > n_{k-1}$ ) такое, что

$$k|f(x_k)| < |f(x_{n_k})|, \quad k|\varphi(x_k)| < |\varphi(x_{n_k})| \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$f(x_k) = o(f(x_{n_k})), \quad \varphi(x_k) = o(\varphi(x_{n_k})) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Поэтому (см. теоремы 1 и 2 § 4.10) для некоторых  $\xi_k \in (x_k, x_{n_k})$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_k)}{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_k)}{\varphi'(\xi_k)} = A \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

и потому что при  $k \rightarrow \infty$   $x_k \rightarrow a$ , следовательно,  $x_{n_k} \rightarrow a$  ( $k < n_k$ ) и  $\xi_k \rightarrow a$ . Мы доказали, что из всякой последовательности  $\left\{ \frac{f(x_k)}{\varphi(x_k)} \right\}$  можно выделить подпоследовательность  $\left\{ \frac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})} \right\}$ , для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k})}{\varphi(x_{n_k})} = A.$$

Но тогда (см. теорему 9 § 4.1) существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

и выполняется равенство (10).

В равенстве (10) существование второго предела влечет существование ему равного первого, но не наоборот, как показывает следующий пример: предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

существует, между тем как предел при  $x \rightarrow \infty$  отношения производных  $(1 - \cos x)/1$  не существует.

Выражаемые теоремами 1, 2 правила, в силу которых вычисление предела отношения функций может быть сведено к вычислению предела отношения их производных, называют правилом Лопиталля; по имени математика, который сформулировал это правило, правда, для весьма простых случаев. Впрочем это правило было известно И. Бернулли до Лопиталля \*).

Другие неопределенности. Нам остается еще рассмотреть другие виды неопределенностей. Их можно свести к предыдущим.

Если  $f \rightarrow \infty$  и  $\varphi \rightarrow \infty$ , то пишем  $f - \varphi = \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{f}\right) \cdot \frac{1}{f\varphi}$ , и получаем неопределенность вида  $0/0$ .

Если же  $f \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow \infty$ , то пишем  $f\varphi = \frac{f}{1/\varphi}$ , что приводит к неопределенности вида  $0/0$ .

Выражения  $u^v$ , приводящие к неопределенностям  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ , удобно логарифмировать, что приводит к неопределенностям вида  $0 \cdot \infty$ .

Например,  $\lim_{x \rightarrow a} u^v = e^{\lim_{x \rightarrow a} v \ln u}$  если предел показателя степени в правой части конечный. Если же последний равен  $+\infty$ ,  $-\infty$ , то предел левой части равен соответственно  $+\infty$ ,  $0$ .

Примеры.

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k!}{e^x} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

### § 5.15. Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функции

Функцию  $f$  мы называем *гладкой* на отрезке  $[a, b]$ , если она имеет непрерывную производную на этом отрезке.

В этом определении под производной в точках  $a, b$  понимается соответственно правая и левая производная в этих точках. Гладкая на  $[a, b]$  функция автоматически непрерывна на  $[a, b]$ , ведь она имеет всюду на  $[a, b]$  производную.

Другое эквивалентное определение гласит: *функция  $f$  гладкая на  $[a, b]$ , если она непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и имеет на интервале  $(a, b)$  непрерывную производную  $f'(x)$  такую, что*

\* ) Г. Ф. Лопиталь (1661—1704) — французский математик. И. Бернулли (1667—1748) — швейцарский математик.

существуют пределы

$$f'(a+0) = A, \quad f'(b-0) = B. \quad (1)$$

Ясно, что первое определение влечет второе. Допустим теперь, что  $f$  — гладкая в смысле второго определения. Тогда

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \rightarrow A \quad (h > 0, h \rightarrow 0, 0 < \theta < 1) \quad (2)$$

и, следовательно,  $f$  имеет производную (правую) в точке  $a$ , равную  $f'(a) = A$ . В силу первого равенства (1) она непрерывна (справа) в этой точке. Аналогично доказывается существование и непрерывность производной от  $f$  в точке  $b$  и равенство  $f'(b) = B$ . Следовательно,  $f$  гладкая также и в смысле первого определения.

Функцию  $f$  мы называем *кусочно непрерывной* на отрезке  $[a, b]$ , если она определена и непрерывна всюду на  $[a, b]$ , за исключением, быть может, конечного числа точек  $x_j$  ( $a \leq x_1 < \dots < x_N \leq b$ ), в которых существуют пределы  $f$  справа и слева, т. е. имеют смысл конечные числа  $f(x_j - 0)$ ,  $f(x_j + 0)$ . Впрочем, для  $x = a$  и  $x = b$  предполагается, что имеют смысл соответственно только  $f(a+0)$ ,  $f(b-0)$ .

Таким образом, кусочно непрерывная на  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна на каждом из интервалов  $(x_j, x_{j+1})$ . Больше того, независимо от того, определена или не определена она в точках  $x_j$ ,  $x_{j+1}$ , ее можно видоизменить или доопределить в этих точках так, что она окажется непрерывной уже на отрезке  $[x_j, x_{j+1}]$ .

**Пример 1.** Функция  $[x]$ , определяемая как наибольшее целое число, не превышающее  $x$ , может служить примером функции, являющейся кусочно непрерывной на любом отрезке  $[a, b]$ . Ее график изображен на рис. 5.12. Точкаами разрыва функции  $[x]$  являются целые значения  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Разрывы в этих точках первого рода, т. е. в них существуют правый и левый пределы функции. Рассмотрим один из наибольших интервалов непрерывности нашей функции, для определенности  $(1, 2)$ . На нем функция  $[x]$  непрерывна. На соответствующем отрезке  $[1, 2]$  она уже перестает быть непрерывной ( $[2-0] = 1 \neq [2]$ ). Но достаточно ее видоизменить, положив равной 1 при  $x = 2$ , как она окажется непрерывной на  $[1, 2]$ .

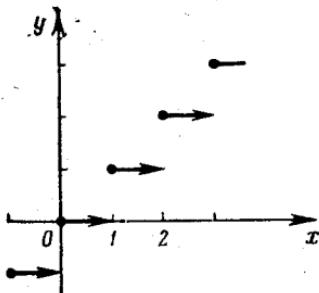


Рис. 5.12.

Мы назовем функцию  $f$  *кусочно гладкой* на отрезке  $[a, b]$ , если она кусочно непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную  $f'$  на этом отрезке. Таким образом, отрезок  $[a, b]$  можно разбить точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (3)$$

так, что  $f$  непрерывна вместе со своей производной  $f'$  на каждом

из интервалов  $(x_j, x_{j+1})$  и, кроме того, существуют односторонние конечные пределы как  $f$ , так и  $f'$  в концевых точках  $x_j$  этих интервалов.

Если, рассматривая вполне определенный отрезок  $[x_j, x_{j+1}]$ , видоизменить или доопределить нашу функцию  $f$  на его концах  $x = x_j, x_{j+1}$  так, что она примет в них соответственно значения  $f(x_j + 0), f(x_{j+1} - 0)$ , то, как это было установлено в начале этого параграфа, функция  $f$  окажется гладкой на отрезке  $[x_j, x_{j+1}]$ .

Например, функция  $\psi(x) = |x|$ , очевидно, не только кусочно непрерывна, но и кусочно гладкая на любом отрезке  $[a, b]$ , потому что на интервалах  $(m, m+1)$ , где  $m$  — целое, она непрерывна вместе со своей производной и на их концах существуют односторонние пределы  $\psi$  и  $\psi'$ . Если заменить значение  $\psi(m+1) = m+1$  на новое значение  $\psi(m+1) = m$ , то функция  $\psi$  окажется постоянной на замкнутом отрезке  $[m, m+1]$ , следовательно, гладкой (см. рис. 5.12).

Важным частным случаем кусочно гладкой функции является *непрерывная кусочно гладкая на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$* . Для нее имают место следующие характерные свойства:

1)  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ; 2) существует разбиение (3) отрезка  $[a, b]$  такое, что  $f$  является гладкой функцией на каждом из частичных отрезков  $[x_j, x_{j+1}]$ .

Пример 2. Функция  $|x|$  не является гладкой на  $[-1, 1]$ , потому что в точке  $x = 0$  она не имеет производной. С другой стороны,  $|x|$  — непрерывная кусочно гладкая на  $[-1, +1]$  функция, потому что она непрерывна на  $[-1, +1]$  и имеет непрерывную производную на интервалах  $(-1, 0), (0, 1)$ , которая к тому же имеет соответствующие односторонние пределы на концах этих интервалов.

Очевидно, что  $|x'| = \text{sign } x = \begin{cases} +1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Мы считаем, что функция  $\text{sign } x$  в точке  $x = 0$  не определена.

Упражнения.

1. Показать, что функция, изображенная на рис. 5.6, кусочно гладкая. Показать еще, что функции изображенные на рисунках 5.1, 6 —  $e$ , не являются таковыми.

Пояснение. Учесть, что эти функции в точке  $x_0$  имеют бесконечные производные, во всяком случае, правые и левые.

2. Показать, что функция  $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| \leq 1, \end{cases}$  не является

гладкой на отрезке  $[-1, +1]$ , несмотря на то, что она имеет производную во всех точках этого отрезка.

3. Показать, что если функция  $f$  непрерывна, но не гладкая на отрезке  $[a, b]$ , и в то же время гладкая на каждом из отрезков  $[a, c], [c, b]$ , то  $f$  не имеет производной в точке  $c$ , хотя и имеет в этой точке правую и левую производные.

4. Показать, что если  $f$  непрерывна и имеет производную  $f'$  во всех точках  $[a, b]$ , то последняя не может иметь разрывы первого рода (производная от  $f$  в примере 2, хотя и существует всюду на  $[-1, +1]$ , но имеет в  $x = 0$  разрыв второго рода).

***n*-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЯ КРИВОЙ****§ 6.1. *n*-мерное пространство. Линейное множество**

Произвольную упорядоченную систему  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  из  $n$  действительных (комплексных) чисел  $x_i$  называют *вектором* или *точкой *n*-мерного действительного (комплексного) пространства  $R_n$* . Таким образом,  $R_n$  есть множество всех указанных  $\mathbf{x}$ .

Векторы (точки)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_n$  мы будем складывать и вычитать и умножать на них действительные (комплексные) числа, руководствуясь следующим правилом: если  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  и  $\alpha, \beta$  — действительные (комплексные) числа, то

$$\alpha\mathbf{x} \pm \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 \pm \beta y_1, \dots, \alpha x_n \pm \beta y_n).$$

Вектор (точку)  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  называют *нулевым вектором* (точкой)  $R_n$ . Очевидно,  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  для любого  $\mathbf{x} \in R_n$ . Полагают еще  $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$  и тогда, очевидно,  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ .

В приложениях (в геометрии, в механике) говорят, что  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  есть вектор, начало которого есть нулевая точка, а конец — точка  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . В двумерном и трехмерном случае ( $n = 2, 3$ ) такая терминология имеет наглядный смысл.

Непосредственно проверяется выполнение следующих свойств ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R_n$ ,  $\alpha, \beta$  — действительные (комплексные \*) числа):

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ ,                                      | 5) $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x}$ , |
| 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ ,        | 6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ ,               |
| 3) из $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ следует $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ , | 7) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .                                 |
| 4) $\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ ,                  |  |

Множество  $E$  элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$  любой природы называется *линейным действительным (комплексным) множеством*, если для любых двух элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  в силу некоторого закона определен элемент  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in E$ , называемый их *суммой*, и если для любого действительного (комплексного) числа  $\alpha$  и любого элемента  $\mathbf{x} \in E$  определен также элемент  $\alpha\mathbf{x} \in E$  (*произведение  $\alpha$  на  $\mathbf{x}$* ) и при этом выполняются перечисленные выше свойства (аксиомы 1)—7).

Из сказанного следует, что  $R_n$  можно рассматривать как пример линейного множества. Но существуют и многие другие такие

\*) О комплексных числах см. § 8.2.

примеры. Множество всех последовательностей действительных или комплексных чисел  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ , если считать, что

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots), \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots\},$$

есть линейное множество. Его подмножество, состоящее из сходящихся к конечным числам последовательностей, с тем же определением сложения и умножения на число, очевидно, также есть линейное множество. Множество  $C$  всех непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $f$  (действительных или комплексных), если считать, как обычно, что

$$\alpha f + \beta \varphi = \alpha f(x) + \beta \varphi(x) \quad (f, \varphi \in C),$$

есть тоже, очевидно, линейное множество.

Наконец, множество многочленов  $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$  степени не выше  $n$  есть также линейное множество, если понимать их сложение и умножение на число в обычном смысле.

В списке аксиом 1) — 7) ничего не говорится явно о вычитании элементов и о нулевом элементе. На самом деле эти понятия возникают на основе этих аксиом. Положим  $\theta_x = 0 \cdot x$ ; тогда  $x + \theta_x = x + 0 \cdot x = 1 \cdot x = x$ .

Аналогично определяем  $\theta_y = 0 \cdot y$ ; для него также  $y + \theta_y = y$ . Далее,

$$x + y + \theta_y = x + (y + \theta_y) = x + y,$$

$$x + y + \theta_x = x + (\theta_x + y) = (x + \theta_x) + y = x + y.$$

Но тогда (аксиома 3))  $\theta_x = \theta_y = \theta$ , каковы бы ни были  $x, y \in E$ . Итак,  $\theta$  есть нулевой элемент в  $E$ , так как для любого  $x \in E$  имеет место  $x + \theta = x$ . Положим теперь  $-x = (-1)x$ ; тогда  $x + (-x) = (1 - 1)x = 0x = \theta$ . Вычитание  $x - y$  двух элементов  $x, y \in E$  определяется при помощи равенства  $x - y = x + (-y)$ . Это действие, обратное действию сложения:

$$(x - y) + y = x + (-y) + y = x + [(-y) + y] = x + \theta = x.$$

### § 6.2. Евклидово $n$ -мерное пространство.

#### Пространство со скалярным произведением

Пусть  $R_n$  есть действительное или комплексное  $n$ -мерное пространство. Произвольным его точкам (векторам)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

приведем в соответствие число

$$(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \tag{1}$$

называемое скалярным произведением векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .

Здесь черта над  $y_j$  есть знак комплексного сопряжения. В случае действительного пространства  $y_j$  действительны и  $\bar{y}_j = y_j$ .

Скалярное произведение, очевидно, обладает следующими свойствами:

- 1)  $(x, \bar{y}) = (\bar{y}, x)$ ;  
 2)  $(x, y)$  есть линейная форма по  $x$ , т. е. для любых векторов  $x, y, z$  и чисел  $\alpha, \beta$

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z);$$

таким образом, в силу 1)

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z);$$

- 3)  $(x, x) \geq 0$  для любого вектора  $x$ , а из равенства  $(x, x) = 0$  следует, что  $x = 0$ , так как тогда  $x_j = 0, j = 1, \dots, n$ .

Введем следующее определение: если  $E$  есть линейное (действительное или комплексное) множество и любым его двум элементам (обобщенным векторам)  $x, y$  приведено в соответствие число  $(x, y)$ , подчиняющееся условиям 1) — 3), то будем говорить, что  $E$  есть линейное пространство со скалярным произведением (где введено скалярное произведение).

Конечно, если  $E$  — действительное линейное множество, то в формулировках условий 1) — 3) можно черточки, обозначающие комплексное сопряжение, опустить.

Теперь мы можем сказать, что  $n$ -мерное пространство  $R_n$ , в котором введено понятие (1), есть пространство со скалярным произведением.

В математике известны и другие линейные пространства со скалярным произведением. Некоторые из них мы будем изучать (см. гл. 14).

Пусть  $x$  и  $y$  — два элемента какого-либо линейного множества  $E$ , где введено скалярное произведение, и  $\lambda$  — произвольное число (действительное или комплексное, в зависимости от того, будет ли  $E$  действительным или комплексным). Тогда в силу свойств 1) — 3)

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(\bar{x}, y) + |\lambda|^2(y, y). \quad (2)$$

Если  $(y, y) > 0$ , то положив в (2)

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}, \quad (3)$$

и, учитя что  $a\bar{a} = |a|^2$ , будем иметь

$$\bar{\lambda}(x, y) = \lambda(\bar{x}, y) = -\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} = -|\lambda|^2(y, y),$$

т. е.

$$0 \leq (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}, \quad (4)$$

и мы получили важное неравенство (неравенство Буняковского):

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2}. \quad (5)$$

При  $(y, y) = 0$ , т. е. если  $y = \theta$  есть нулевой элемент, оно тоже верно, потому что  $(x, \theta) = (x, 0 \cdot \theta) = 0(x, \theta) = 0$ .

Далее, для любых двух элементов  $x, y \in E$  имеет место:

$$\begin{aligned} (x+y, x+y) &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leqslant \\ &\leqslant (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leqslant \\ &\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2, \end{aligned} \quad (6)$$

и мы получили другое важное неравенство:

$$(x+y, x+y)^{1/2} \leqslant (x, x)^{1/2} + (y, y)^{1/2}. \quad (7)$$

Для пар элементов вида  $x = \alpha y$  и  $y$ , где  $\alpha$  — число и  $y$  любое или  $y = \theta$  и  $x$  любое, неравенство (5) обращается в точное равенство

$$|(x, y)| = (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2}. \quad (8)$$

Наоборот, если выполняется равенство (8), то либо  $y = \theta$ , либо выполняется (2) со знаком равенства, если  $\lambda$  определить по формуле (3), и тогда  $x + \lambda y = \theta$  в силу свойства 3) скалярного произведения.

Неравенство (7), очевидно, обращается в равенство при условии, что либо  $y = \theta$ , либо  $x = \alpha y$ , где  $\alpha$  — неотрицательное число.

Но и наоборот, если (7) есть на самом деле равенство, то все соотношения в (6) обращаются в равенства, откуда, в частности, следует (8). Следовательно, либо  $y = \theta$ , либо  $x = \alpha y$ , где  $\alpha$  — число. Положив в равенстве (7)  $x = \alpha y$ ,  $(y, y) > 0$ , получим после сокращения на  $(y, y)$  равенство  $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$ , откуда  $\alpha \geqslant 0$ .

Арифметическое значение корня квадратного из  $(x, x)$  называется *нормой*  $x$  и обозначается так:  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$  (см. следующий параграф).

$n$ -мерное пространство  $R_n$ , где введено скалярное произведение (1), а вместе с ним и норма  $\|x\| = |x| = \left( \sum_1^n |x_j|^2 \right)^{1/2}$  для  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , называется *евклидовым  $n$ -мерным пространством*. Таким образом, нормы элементов  $x$  евклидова  $n$ -мерного пространства мы будем обозначать также через  $|x|$ . При  $n = 3$  норма  $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$  вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$  есть его длина.

Неравенства (5), (7) для элементов евклидова  $n$ -мерного пространства превращаются в следующие неравенства для систем чисел  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$ :

$$\left| \sum_1^n x_j y_j \right| \leqslant \left( \sum_1^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_1^n |y_j|^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$$\left( \sum_1^n |x_j + y_j|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left( \sum_1^n |x_j|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_1^n |y_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Из (9) следует

$$\sum_1^n |x_j y_j| \leqslant \left( \sum_1^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_1^n |y_j|^2 \right)^{1/2}, \quad (11)$$

потому что можно считать, что неравенство (9) применено к неотрицательным числам  $|x_j|$ ,  $|y_j| = |\bar{y}_j|$ .

Отметим еще неравенства

$$\frac{1}{n^{1/2}} \sum_1^n |x_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_1^n |x_j|. \quad (12)$$

Первое из них вытекает из (11), если считать  $y_j = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ), а второе проверяется непосредственно после возвведения его частей в квадрат.

Соотношение (9) называется *неравенством Коши*, а (10) есть частный случай *неравенства Минковского* (см. далее § 14.2, (12)).

### § 6.3. Линейное нормированное пространство

Если  $E$  есть линейное множество элементов  $x, y, \dots$  и каждому его элементу  $x$  приведено в соответствие число  $\|x\|$ , удовлетворяющее ниже формулируемым трем свойствам 1) — 3), то говорят, что  $E$  есть *линейное нормированное пространство*, а число  $\|x\|$  называют *нормой элемента*  $x$ .

1)  $\|x\| \geq 0$  для любого  $x \in E$ ; из равенства  $\|x\| = 0$  следует, что  $x = 0$ , т. е. есть нулевой элемент линейного множества  $E$ ;

2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  для любого  $x \in E$ -и любого числа  $\alpha$  (комплексного или действительного, в зависимости от того, будет ли  $E$  комплексным или действительным);

3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , каковы бы ни были  $x, y \in E$ .

Таким образом, евклидово пространство  $R_n$  есть нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = |x| = \left( \sum_1^n |x_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Возможны и другие (не евклидовы) нормировки пространства  $R_n$ . Например, для точек (векторов)  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R_n$  можно ввести норму

$$\|x\| = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \quad (2)$$

или

$$\|x\| = \left( \sum_1^n |x_j|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \quad (3)$$

Тот факт, что (2) есть норма, так же как то, что (3) при  $p = 1$  есть норма, читатель легко может проверить (общий случай см. § 14.2).

Неравенство 3) называется *неравенством треугольника*. В двумерном или трехмерном случае евклидова пространства оно как раз и выражает известный геометрический факт, что длина стороны треугольника не превышает суммы длин остальных его

двух сторон, и кстати доказывает этот факт аналитическим путем.

Из неравенства 3) следует (если заменить в нем  $x$  на  $x - y$  или  $y$  на  $y - x$ ), что

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|, \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|,$$

поэтому

$$\|x - y\| \geq \|\|x\| - \|y\|\|. \quad (4)$$

В нормированном пространстве  $E$  можно определить понятие *предела*. Будем говорить, что последовательность элементов  $x_n \in E$  сходится (стремится) к элементу  $x \in E$  и писать  $x_n \rightarrow x$  или  $\lim x_n = x$  ( $n \rightarrow \infty$ ), если  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Если последовательность элементов  $x_n \in E$  имеет предел  $x \in E$ , то этот предел единственный, потому что из того, что  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \rightarrow y$ , следует

$$\|x - y\| = \|(x - x_n) + (x_n - y)\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \rightarrow 0,$$

откуда  $\|x - y\| = 0$ , т. е.  $x = y$ .

Так как  $\|\|x_n\| - \|x\|\| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0$ , то из того, что  $x_n$  сходится к  $x$ , следует, что  $\|x_n\|$  стремится к  $\|x\|$ :

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Если  $x_n, y_n, x, y \in E$ , а  $\alpha_n, \alpha$  — числа и если  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ ,  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n x_n) = \alpha x.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|(x \pm y) - (x_n \pm y_n)\| &\leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \\ \|\alpha x - \alpha_n x_n\| &= \|(\alpha - \alpha_n)x + \alpha_n(x - x_n)\| \leq \|(\alpha - \alpha_n)x\| + \\ &+ \|\alpha_n(x - x_n)\| \leq |\alpha - \alpha_n| \|x\| + |\alpha_n| \|x - x_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

#### § 6.4. Вектор-функция в $n$ -мерном евклидовом пространстве

Пусть  $E$  есть множество действительных чисел  $t$ . Если каждому  $t \in E$  в силу определенного закона приведен в соответствие вектор \*)

$$x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad (1)$$

то будем говорить, что этим определена *вектор-функция*  $x(t)$  на  $E$ .

Обычные функции  $\alpha(t)$  (приводящие в соответствие каждому  $t \in E$  число  $\alpha(t)$ ) называют также *скалярными функциями*.

\*) Мы будем иметь в виду векторы  $x$ , принадлежащие действительному пространству  $R_n$ , но ничего в наших рассуждениях не изменится, если считать  $R_n$  комплексным.

Будем говорить, что вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  имеет предел в точке  $t_0$ , равный вектору  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , и писать

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{y}, \quad t \rightarrow t_0, \quad (2)$$

если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)| = 0, \quad (3)$$

или, что все равно (пояснения ниже), если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_j(t) = y_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4)$$

Равенство (3) утверждает, что скалярная функция  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)|$  от  $t$  имеет предел при  $t \rightarrow t_0$ , равный нулю, но это, как мы знаем, предполагает, что она определена на некоторой окрестности точки  $t_0$ , за исключением, быть может, самой точки  $t_0$ , но тогда и все компоненты  $x_j(t)$  определены на этой окрестности.

Имеют место неравенства (см. 6.2, (11))

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} |y_j - x_j(t)| &\leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n |y_j - x_j(t)| \leqslant \left[ \sum_{j=1}^n (y_j - x_j(t))^2 \right]^{1/2} = |\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)|, \end{aligned}$$

из которых следует, что если выполняется (3), то выполняется и (4) для всех  $j = 1, \dots, n$ , и наоборот.

По определению, вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  имеет правый (левый) предел в точке  $t_0$ , равный  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , если

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \quad t > t_0$$

(соответственно  $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \quad t < t_0$ ). Эти пределы обозначаются соответственно так:

$$\mathbf{x}(t_0 + 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0 - 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \mathbf{x}(t).$$

Легко видеть, рассуждая как выше, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0 + 0) &= (x_1(t_0 + 0), \dots, x_n(t_0 + 0)), \\ \mathbf{x}(t_0 - 0) &= (x_1(t_0 - 0), \dots, x_n(t_0 - 0)), \end{aligned}$$

причем существование векторных пределов, стоящих в левых частях этих равенств, влечет существование соответствующих пределов компонент, и наоборот.

По определению, вектор-функция  $\mathbf{x}(t)$  непрерывна, непрерывна справа или непрерывна слева в точке  $t_0$ , если существуют соответственно пределы  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t_0 + 0)$  и  $\mathbf{x}(t_0 - 0)$ , равные  $\mathbf{x}(t_0)$ .

Эти определения, очевидно, эквивалентны утверждениям, что компоненты  $x_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) в точке  $t_0$  непрерывны, непрерывны справа, непрерывны слева.

Очевидно, что  $\mathbf{x}(t)$  непрерывна в  $t = t_0$  тогда и только тогда, когда существуют  $x(t_0)$ ,  $\mathbf{x}(t_0 + 0)$  и  $\mathbf{x}(t_0 - 0)$  и выполняются равенства  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0 + 0) = \mathbf{x}(t_0 - 0)$ .

Производная от вектор-функции  $\mathbf{x}(t)$  в точке  $t$  определяется как предел:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{h},$$

если, конечно, он существует. Производная порядка  $m$  от  $\mathbf{x}(t)$  определяется по индукции:

$$\frac{d^m \mathbf{x}}{dt^m} = \frac{d}{dt} \frac{d^{m-1} \mathbf{x}}{dt^{m-1}} \quad (m = 2, 3, \dots).$$

При этом, очевидно, существование ее влечет за собой существование производных  $m$ -го порядка от компонент и наоборот. Имеет место равенство

$$\frac{d^m \mathbf{x}}{dt^m} = (x_1^{(m)}(t), \dots, x_n^{(m)}(t)) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Производные первого и второго порядка обозначают и так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}(t), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Если  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  — вектор-функция, а  $\alpha(t)$  — скалярная функция, то имеют место равенства:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{y}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{y}(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\alpha(t) \mathbf{x}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t),$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x} \pm \mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} (\alpha \mathbf{x}) = \alpha \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{x},$$

где, конечно, предполагается, что пределы или производные, фигурирующие в правых частях равенств, существуют. Эти равенства тривиальным образом доказываются переходом от векторов к соответствующим координатам, например,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{y}(t)] &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} [x_1(t) \pm y_1(t)], \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} [x_n(t) \pm y_n(t)] \right) = \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} y_n(t) \right) = \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) \right) \pm \left( \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} y_n(t) \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{x}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{y}(t). \end{aligned}$$

Но можно рассуждения проводить чисто векторным путем, например, полагая  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \beta$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = y$ , получим

$$|\alpha(t)x(t) - \beta y| \leq |[\alpha(t) - \beta]x(t)| + |\beta(x(t) - y)| \leq \\ \leq |\alpha(t) - \beta| |x(t)| + |\beta| |x(t) - y| \rightarrow 0 \cdot |y| + |\beta| \cdot 0 = 0, t \rightarrow t_0.$$

### § 6.5. Кривая в $n$ -мерном пространстве

При непрерывном возрастании  $t$  на  $[a, b]$  ( $(a, b)$ ) точка, определяемая непрерывной вектор-функцией

$$x(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in R_n, \quad (1)$$

описывает некоторый образ — траекторию (годограф) вектор-функции  $x(t)$  или множество точек, упорядоченное посредством переменной  $t$ . При этом не исключено, что подвижная точка  $x(t)$  может возвратиться в точку пространства  $R_n$ , которую она уже прошла, но уже при новом значении  $t$ . При  $n=2, 3$  подобные траектории имеют реальный смысл.

Наряду с непрерывной вектор-функцией (1) будем рассматривать вектор-функции, определяемые векторными равенствами

$$x_*(\tau) = x(\lambda(\tau)) = (\varphi_1(\lambda(\tau)), \dots, \varphi_n(\lambda(\tau)))$$

$$(\tau \in [c, d] \text{ или } \tau \in (c, d)) \quad (2)$$

или, что все равно, системами скалярных равенств

$$x_1 = \varphi_{*1}(\tau) = \varphi_1(\lambda(\tau)), \dots, x_n = \varphi_{*n}(\tau) = \varphi_n(\lambda(\tau)), \quad (2')$$

где  $t = \lambda(\tau)$  есть произвольная непрерывная строго монотонная (действительная!) функция, отображающая (взаимно однозначно!) некоторый отрезок  $[c, d]$  (интервал  $(c, d)$ ) новой переменной  $\tau$  на отрезок  $[a, b]$  (интервал  $(a, b)$ ) прежней переменной  $t$ .

Ясно, что уравнение (2) определяет ту же траекторию, что и уравнение (1), и упорядочение ее точек с помощью  $t$  и  $\tau$  происходит одинаково, если  $\lambda(\tau)$  строго возрастает, и оно меняется на противоположное упорядочение, если  $\lambda(\tau)$  строго убывает.

Говорят, что уравнение (1) определяет *непрерывную кривую*  $\Gamma$ , заданную параметрически через параметр  $t$ , в то время как уравнение (2) определяет ту же кривую  $\Gamma$ , но через параметр  $\tau$ . Таким образом, различным указанным строго монотонным непрерывным функциям  $\lambda(\tau)$  соответствуют различные *параметрические представления* одной и той же *непрерывной кривой*  $\Gamma$ .

Всегда можно функцию  $\lambda(\tau)$  подобрать так, что будет  $c = 0$ ,  $d = 1$ .

Функции  $\lambda(\tau)$  можно разбить на два класса: класс строго возрастающих функций и класс строго убывающих функций. Первый класс упорядочивает точки  $\Gamma$  в одном направлении, а втор-

рой — в другом, ему противоположном. В связи с этим возникает понятие *ориентированной кривой*  $\Gamma$ . Мы можем обозначить, например, через  $\Gamma_+$  кривую  $\Gamma$ , ориентированную при помощи параметра  $t$ .  $\Gamma_+$  определяют также всевозможные уравнения (2), где  $\lambda(\tau)$  — непрерывные строго возрастающие функции. Эту же кривую  $\Gamma$ , *ориентированную противоположно*, естественно обозначать через  $\Gamma_-$ . Она определяется всевозможными уравнениями (2), где  $\lambda(\tau)$  — непрерывные строго убывающие функции.

Кривая  $\Gamma$  называется *гладкой на*  $[a, b]$  [на  $(a, b)$ ], если ее можно \*) задать при помощи *гладкой вектор-функции*  $x(t)$ , т. е. непрерывной и имеющей непрерывную не равную нулю производную на  $[a, b]$  (на  $(a, b)$ ) или, что, очевидно, все равно, если компоненты  $x_j(t)$  вектор-функции  $x(t)$  есть гладкие скалярные функции на  $[a, b]$  (на  $(a, b)$ ), имеющие производные, одновременно не равные нулю. Это последнее свойство эквивалентно тому факту, что

$$|\dot{x}(t)|^2 = \sum_{j=1}^n [x'_j(t)]^2 > 0, \quad t \in [a, b] \ ((a, b)). \quad (3)$$

В этой формулировке, конечно, непрерывность  $x(t)$  в концевых точках  $a$  и  $b$  понимается как односторонняя непрерывность справа в  $a$  и слева в  $b$ . Производная же  $x'(t)$  в  $a$  и  $b$  понимается как правая в  $a$  и левая в  $b$ .

Мы будем называть параметр  $\tau$  *допустимым* параметром гладкой кривой  $\Gamma$ , если он связан с  $t$  при помощи равенства  $t = \lambda(\tau)$ ,  $\tau \in [c, d] \ ((c, d))$ , где  $\lambda(\tau)$  не только непрерывна и строго монотонна, но имеет непрерывную производную, не равную нулю на  $[c, d] \ ((c, d))$ . Таким образом, производная  $\lambda'(\tau)$  на самом деле имеет один и тот же знак на  $[c, d] \ ((c, d))$ : «+» или «-». Если  $\tau$  — допустимый параметр, то сформулированное выше на языке  $t$  определяющее свойство гладкой кривой, очевидно, сохранится, если его формулировать на языке  $\tau$ , потому что вектор-функция  $x(\lambda(\tau)) = x_*(\tau)$ , имеет непрерывную производную на  $[c, d] \ ((c, d))$ , к тому же не равную нулю:

$$\sum_{j=1}^n x'_{*j}(\tau)^2 = \lambda'(\tau)^2 \sum_{j=1}^n x'_j(t)^2 > 0.$$

Зададим точку  $(x_1^0, \dots, x_n^0) = x^0 \in \Gamma$ , соответствующую значению  $t_0 \in (a, b)$ . Одно из слагаемых суммы в (3) положительное, для определенности будем считать  $n$ -е:  $x_n'(t_0)^2 > 0$ .

\*) Здесь слово «могло» существенно, так как гладкую вектор-функцию можно «испортить», введя новый параметр  $\tau$  при помощи подстановки  $t = \lambda(\tau)$ , где  $\lambda(\tau)$  — строго монотонная непрерывная функция, имеющая производную, равную нулю, или вовсе не имеющая производной в некоторых  $\tau$ .

Тогда существует окрестность \*) значения  $t_0$  на которой  $x_n'(t)$  сохраняет знак, и на этой окрестности уравнение  $x_n = x_n(t)$  можно разрешить:

$$t = \mu(x_n), \quad (x_n^0 - \eta_1 < x_n < x_n^0 + \eta_2),$$

где  $\eta_1, \eta_2 > 0$  — некоторые числа, а  $\mu$  — функция, обратная к  $x_n(t)$ , непрерывная и имеющая непрерывную производную. Но тогда кусок нашей кривой (1), соответствующий указанной окрестности, наряду с уравнениями (1) определяется также уравнениями

$$\begin{aligned} x_j &= \mu_j(x_n) = x_j[\mu(x_n)] \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ x_n &= x_n \quad (x_n^0 - \eta_1 < x_n < x_n^0 + \eta_2). \end{aligned}$$

Эти уравнения можно дифференцировать один раз (в указанной окрестности):

$$\frac{dx_j}{dx_n} = \frac{\frac{dx_j}{dt}}{\frac{dx_n}{dt}} \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Сказанное мы резюмируем:

**Теорема 1.** *Какова бы ни была точка  $x^0$  гладкой кривой  $\Gamma$ , соответствующая некоторому значению  $t = t_0 \in (a, b)$  параметра, можно указать такое достаточно малое  $\delta > 0$ , что кусок  $\Gamma$ , соответствующий изменению  $t$  на интервале  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , можно параметрически выразить по крайней мере через одну из координат  $x_i$ :*

$$x_j = \varphi_j(x_i) \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n; x_i^0 - \eta_1 < x_i < x_i^0 + \eta_2),$$

где функции  $\varphi_j$  имеют непрерывные производные:

$$\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{dx_j}{dt}}{\frac{dx_i}{dt}} \quad (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n).$$

В частности, в двумерном случае гладкая кривая определяется двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t \in (a, b)), \quad (4)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  имеют непрерывные, одновременно не равные нулю производные. Если, например,  $\varphi'(t_0) \neq 0$ , то существует интервал  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , на котором  $\varphi$  имеет обратную функцию  $t = \varphi^{-1}(x)$ , и тогда  $y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ . Обычно в этом случае говорят, что

\*) Если  $t_0 = a, b$ , то вместо окрестности надо иметь в виду полуокрестность (правую или левую) точки  $t_0$ .

функция  $y = f(x)$  задана параметрически равенствами (4), формулу же

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (5)$$

трактуют как *формулу производной от функции  $f(x)$  в параметрическом виде*. Очевидно также, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'_t}{x'_t} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'_t}{x'_t} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}, \quad (6)$$

если добавочно допустить, что существуют вторые производные  $x''_t, y''_t$ :

Кривая  $\Gamma$  называется *непрерывной кусочно гладкой* на  $[a, b]$  (на  $(a, b)$ ), если ее можно задать при помощи непрерывной на  $[a, b]$  ( $(a, b)$ ) вектор-функции  $\mathbf{x}(t)$  такой, что отрезок  $[a, b]$  (интервал  $(a, b)$ ) может быть разбит на конечное число частей точками  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  так, что  $\mathbf{x}(t)$  на этих частях \*  $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$  есть гладкая кривая.

Надо иметь в виду, что в точках деления  $t_k$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) левая производная  $\dot{\mathbf{x}}(t_k - 0)$ , вообще говоря, не равна правой  $\dot{\mathbf{x}}(t_k + 0)$ , но обе они отличны от нуля (среди их компонент имеется хотя бы одна не равная нулю).

Различные параметрические представления непрерывной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma$  определяются уравнением (2) при помощи функции  $t = \lambda(\tau)$ , имеющей на  $[c, d]$  ( $(c, d)$ ) не равную нулю непрерывную производную  $\lambda'(\tau)$ .

Непрерывная кривая (1) называется также *кривой Жордана* (*жордановой кривой*) по имени французского математика Жордана (1838—1922). Если при этом  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$ , то кривую называют *замкнутой* (*замкнутой кривой Жордана*). Если, кроме того, из того факта, что  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$  следует только, что либо  $t_1 = t_2$ , либо одно из чисел  $t_1, t_2$  равно  $a$ , а другое  $b$ , то кривая  $\Gamma$  называется *замкнутой самонепересекающейся кривой Жордана* или *непрерывной замкнутой самонепересекающейся кривой*.

Если из равенства  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$  ( $t_1, t_2 \in [a, b]$  или  $t_1, t_2 \in (a, b)$ ) следует  $t_1 = t_2$ , то говорят, что  $\Gamma$  есть *незамкнутая самонепересекающаяся кривая*.

При  $n = 2$  мы получим плоскую непрерывную кривую

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad t \in [a, b] \text{ или } t \in (a, b). \quad (7)$$

\*<sup>1</sup>) В случае интервала  $[a, t_1], [t_{N-1}, b]$  заменяются соответственно на  $(a, t_1], [t_{N-1}, b)$ .

Например, уравнения

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (-\infty < \theta < \infty) \quad (8)$$

определяют гладкую плоскую кривую. Когда  $\theta$  непрерывно изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , соответствующая точка  $(x, y)$  описывает бесконечное число раз окружность

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (9)$$

В связи с этими говорят, что уравнения (8) суть параметрические уравнения окружности (9). В данном случае параметр  $\theta$  имеет геометрический смысл — это есть угол, образованный радиус-вектором точки  $(x, y)$  с положительным направлением оси  $x$ .

Уравнения окружности (8) можно записать более экономно:

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (10)$$

где  $\theta$  пробегает только отрезок  $[0, 2\pi]$ . Кривая (10) есть гладкая самонепересекающаяся замкнутая кривая. Про окружность  $\Gamma$ , рассматриваемую как геометрическое место точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению (9), тоже обычно говорят, что она замкнутая кривая. Это можно понимать в следующем смысле: существует непрерывная самонепересекающаяся заданная параметрически замкнутая кривая, кривая (10), пробегающая точки  $\Gamma$  и только точки  $\Gamma$ .

Жордан доказал следующее геометрически очевидное утверждение; требующее, однако, для его обоснования нетривиальных рассуждений: *самонепересекающаяся непрерывная замкнутая кривая  $\Gamma$ , лежащая на плоскости  $R$ , делит множество  $R - \Gamma$  на две непересекающиеся непустые области, внутреннюю по отношению к  $\Gamma$  и внешнюю:  $R - \Gamma = A_i + A_e$ .* Любые две точки в  $A_i$  можно соединить непрерывной кривой, полностью принадлежащей к  $A_i$ ; а любые две точки  $A_e$  можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей к  $A_e$ . Любая кривая, соединяющая произвольную точку  $A_i$  с произвольной точкой  $A_e$ , имеет по крайней мере одну общую точку с  $\Gamma$  (пересекается с  $\Gamma$ ). Область  $A_i$  ограничена, в то время как  $A_e$  не ограничена.

Нужно сказать, что определение непрерывной кривой является настолько общим, что имеются примеры удовлетворяющих этому определению математических объектов, которые весьма сильно отличаются от нашего обычного представления о кривой, в особенности, если разрешить ей самопересекаться.

Доказано, например, что можно определить такие непрерывные на отрезке  $[0, 1]$  функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

что при непрерывном возрастании  $t$  от  $t = 0$  до  $t = 1$  переменная точка  $(\varphi(t), \psi(t))$ , отправляясь при  $t = 0$  от положения  $(0, 0)$ , пробежит буквально все точки квадрата  $0 \leq x, y \leq 1$  и при  $t = 1$

окажется в верхнем правом его углу (1, 1). Таким образом, эта кривая (кривая Пеано) заметает буквально все точки квадрата  $0 \leq x, y \leq 1$ , и при этом отдельные его точки заметаются кривой не один раз.

На рис. 6.1. изображена плоская кривая  $\Gamma$ , которую будем считать заданной непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \varphi'^2 + \psi'^2 > 0, \quad 0 < t < 1.$$

Когда  $t$  непрерывно возрастает на интервале  $(0, 1)$ , точка  $(x, y)$  движется по кривой  $\Gamma$  от точки  $A$  через  $B, C$  и снова при  $t \rightarrow 1$  стремится к  $B$ . Мы

видим, что, несмотря на непрерывную дифференцируемость функций  $\varphi$  и  $\psi$ , кривая  $\Gamma$  имеет особенность в точке  $B$ , выражющуюся в том, что как бы ни был мал прямоугольник с центром в  $B$ , принадлежащая ему часть  $\Gamma$  не проектируется взаимно однозначно ни на одну из осей координат. Если гладкая кривая  $\Gamma$  в любой ее точке не обладает этим недостатком, т. е. если любую точку можно покрыть прямоугольником  $\Delta$  с параллельными осями координат, так, что  $\Gamma \Delta$  проектируема взаимно однозначно на одну из координатных осей, то  $\Gamma$  называют *одномерным дифференцируемым многообразием*.

В § 17.1 доказана лемма 1, из которой как частный случай вытекает следующее утверждение.

*Если определенная на отрезке  $[a, b]$  гладкая кривая  $\bar{\Gamma}$*

$$x_i = \varphi_i(t), \quad \sum_{i=1}^n (\varphi'_i)^2 > 0, \quad a \leq t \leq b$$

*самонепересекается, т. е. если  $\bar{\Gamma}$  и  $[a, b]$  при помощи уравнений (1) находятся во взаимно однозначном соответствии, то полученная из нее выкидыванием обоих ее концов кривая  $\Gamma$  (заданная на интервале  $(a, b)$ ) есть одномерное дифференцируемое многообразие.*

Пример 1. Эллипс  $\Gamma$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

есть ограниченная гладкая замкнутая самонепересекающаяся кривая, потому что  $\Gamma$  также описывается параметрическими уравнениями

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (12)$$

определяющими ограниченную гладкую замкнутую кривую в том понимании терминов гладкость, замкнутость, как это определено выше в этом параграфе.

Пример 2. Астроида  $\Gamma$

$$|ax|^{2/3} + |by|^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \quad (0 < b < a) \quad (13)$$

есть ограниченная непрерывная кусочно гладкая замкнутая кривая, потому что уравнение (13) эквивалентно следующим двум:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (14)$$

причем имеется только одна пара значений  $\theta$  ( $\theta = 0, \theta = 2\pi$ ), которым соответствует одна и та же точка  $\Gamma$ . Из (13) видно, что кривая  $\Gamma$  симметрич-

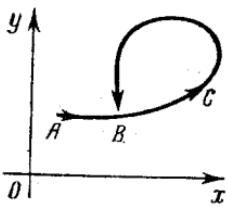


Рис. 6.1.

на относительно осей координат, а из (14) видно, что она непрерывна; производные от  $x$  и  $y$  по  $\theta$  тоже непрерывны и одновременно не равны нулю всюду, за исключением точек  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Поэтому куски  $\Gamma$ , соответствующие интервалам  $(0, \pi/2), (\pi/2, \pi), (\pi, 3\pi/2), (3\pi/2, 2\pi)$ , гладкие (см. § 6.9, рис. 6.11).

## § 6.6. Геометрический смысл производной вектор-функции

Пусть в пространстве, где определена прямоугольная система координат  $(x, y, z)$ , задана гладкая вектор-функция (см. стр. 186)

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in (a, b). \quad (1)$$

На рис. 6.2 изображен годограф вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  и отмечены две точки  $A$  и  $B$  годографа — концы векторов  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  с началом в нулевой точке.

Очевидно, что вектор  $\overrightarrow{AB} = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  точка  $B$ , двигаясь по годографу, стремится к точке  $A$ , а секущая, проходящая через  $A$  и  $B$ , стремится занять положение определенной прямой, которую называют *касательной к годографу в точке A*. Поэтому предельный вектор

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

(он не равен нулю!) лежит на касательной к годографу в точке  $A$ . Длина  $|\dot{\mathbf{r}}|$  вектора  $\dot{\mathbf{r}}$  есть предел длины вектора  $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , потому что

$$\left| \left| \dot{\mathbf{r}} \right| - \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \right| \leq \left| \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

Если  $t$  есть время и конец вектора  $\mathbf{r}(t)$  описывает движение некоторой точки, то  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  есть вектор, выражающий скорость этой точки в момент времени  $t$ . Длина его  $|\dot{\mathbf{r}}|$  есть скалярная величина скорости. Кроме того, вектор  $\dot{\mathbf{r}}$  определяет направление движения точки в момент  $t$ . Вектор  $\ddot{\mathbf{r}}$  есть ускорение точки в момент  $t$ .

В § 6.4 мы уже останавливались на некоторых свойствах производной от вектор-функции. Отметим еще следующие очевидные свойства ( $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ):

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) + \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right), \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \left[ \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \right],$$

где  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$  — скалярное произведение, а  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] =$

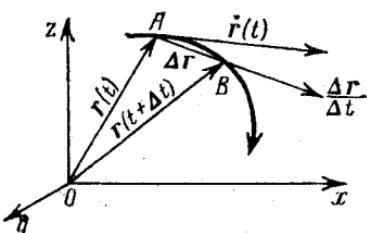


Рис. 6.2.

$= (a_y b_z - a_z b_y, \ a_z b_x - a_x b_z, \ a_x b_y - a_y b_x)$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Отметим еще следующий факт. Пусть гладкая вектор-функция  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$  имеет постоянную норму (длину):  $|\mathbf{b}(t)| = c = \text{const} > 0$ . Тогда  $(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = b^2 = c^2$  и

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 2 \left( \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) = 0.$$

Таким образом, для любого  $t$  векторы  $\mathbf{b}$  и  $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$  ортогональны (по условию  $\mathbf{b}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \neq 0$ ).

Произвольный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ , имеющий при любом рассматриваемом  $t$  положительную длину ( $|\mathbf{a}| > 0$ ), можно записать в виде  $\mathbf{a} = \alpha \boldsymbol{\omega}$ , где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left( \frac{a_1(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2(t)}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3(t)}{|\mathbf{a}|} \right), \alpha(t) = |\mathbf{a}| = \\ &= \sqrt{a_1(t)^2 + a_2(t)^2 + a_3(t)^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что если вектор  $\mathbf{a}$  имеет производную для рассматриваемых  $t$ , то функции  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\alpha$  имеют производные для этих  $t$ . Производная от вектора  $\mathbf{a}$  раскладывается на два вектора:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \boldsymbol{\omega} + \alpha \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (1)$$

Из них первый направлен в ту же сторону, что и  $\mathbf{a}$  (или  $\boldsymbol{\omega}$ ), и длина его равна скорости изменения длины  $\mathbf{a}$ , а второй ортогонален к  $\boldsymbol{\omega}$ : Эта формула применяется в механике для разложения вектора ускорения на две составляющие, из которых одна имеет направление движения, а другая направлена перпендикулярно к ней.

### § 6.7. Длина дуги кривой

Пусть  $\Gamma$  есть непрерывная кривая

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \quad (t \in [a, b]). \quad (1)$$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на части точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b. \quad (2)$$

Им соответствуют точки кривой  $\Gamma$   $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ . Если соединить их последовательно отрезками (рис. 6.3), то получим ломаную, вписанную в  $\Gamma$ .

Длиной кривой  $\Gamma$  называется предел, к которому стремится сумма длин звеньев этой ломаной,

$$|\overline{AB}| = \lim \sum_1^n |A_{k-1}^* A_k|, \quad \max (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0, \quad (3)$$

когда максимальный частичный отрезок разбиения (2) стремится к нулю. Если предел (3) существует, то говорят, что *кривая спрямляема на отрезке  $[a, b]$  изменения параметра  $t$* .

Будем считать теперь, что наша кривая  $\Gamma$  гладкая. Таким образом, функции  $\varphi, \psi, \chi$  предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные на  $[a, b]$ , подчиняющиеся неравенству

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2 > 0 \quad (t \in [a, b]). \quad (4)$$

В разделе «Интегральное исчисление» будет доказано, что гладкая кривая спрямляема на любом отрезке изменения параметра  $t$  и что длина дуги гладкой кривой  $\Gamma$  обладает свойством аддитивности. Это значит, что если  $P_1, P_2, P_3$  — три точки  $\Gamma$ , соответствующие значениям  $t_1, t_2, t_3$  параметра, и  $t_1 < t_2 < t_3$ , то имеет место равенство

$$|\overline{P_1 P_3}| = |\overline{P_1 P_2}| + |\overline{P_2 P_3}|.$$

Введем новую функцию,  $s = F(t)$ , равную длине дуги  $\overline{AC}$ , соответствующей изменению параметра на отрезке  $[a, t]$ . В интегральном исчислении будет доказано, что функция  $F(t)$  обладает следующими свойствами: она непрерывна и имеет непрерывную производную на  $[a, b]$ , определяемую формулой

$$F'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} > 0. \quad (5)$$

Кроме того,  $F(a) = 0$ . Но тогда  $s$  есть строго возрастающая функция, отображающая отрезок  $[a, b]$  изменения  $t$  на некоторый отрезок  $[0, l]$  изменения  $s$ , и существует обратная к ней функция

$$t = \Lambda(s) \quad (0 \leq s \leq l),$$

непрерывная и имеющая непрерывную производную  $\Lambda'(s) > 0$ .

Следовательно,  $s$  можно рассматривать как один из допустимых параметров нашей гладкой кривой  $\Gamma$ :

$$x = \varphi(\Lambda(s)), \quad y = \psi(\Lambda(s)), \quad z = \chi(\Lambda(s)) \quad (0 \leq s \leq l).$$

Нусть теперь  $\tau$  есть произвольный допустимый параметр  $\Gamma$ , связанный с  $t$  при помощи функции  $t = \lambda(\tau)$ , имеющей не равную нулю непрерывную производную. Тогда знак  $\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt} \lambda'(\tau)$  зависит от знака  $\lambda'(\tau)$ . Таким образом, учитывая формулу производной функции от функции, будем иметь

$$\frac{ds}{d\tau} = \lambda'(\tau) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} = \pm \sqrt{\varphi'_1(\tau)^2 + \psi'_1(\tau)^2 + \chi'_1(\tau)^2}, \quad (6)$$

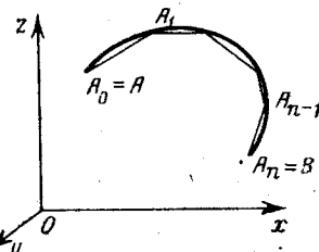


Рис. 6.3.

где

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau)), & y &= \psi_1(\tau) = \psi(\lambda(\tau)), \\ z &= \chi_1(\tau) = \chi(\lambda(\tau)) & (\tau \in (c, d)) \end{aligned} \quad (7)$$

— уравнения  $\Gamma$ , выраженные через параметр  $\tau$ , а перед корнем стоит знак «+» или «—» в зависимости от того, будет ли  $s$  возрастать или убывать при возрастании  $\tau$ .

Отсюда

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (8)$$

где при  $d\tau > 0$  надо поставить «+» в первом случае и «—» во втором. Однако при  $d\tau < 0$  надо, наоборот, поставить в первом случае «—», а во втором «+».

Если в равенстве (6) положить  $\tau = s$ , то справа перед корнем надо поставить знак «+», и мы получим равенство  $1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$ . Заметим, что мы считали, что  $s = 0$  при  $t = a$  и что  $s$  возрастает вместе с  $t$ .

Заметим еще, что приведенное выше определение длины дуги  $\Gamma$  внешне зависит от параметрического представления кривой. На самом деле длина дуги есть инвариант, не зависящий от выбора параметра  $t$ , при помощи которого задана кривая (см. § 10.3, (3)).

### § 6.8. Касательная. Нормаль к плоской кривой

В пространстве, где определена прямоугольная система координат  $(x, y, z)$ , пусть задана гладкая кривая, определяемая вектором  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in (a, b)$  (рис. 6.4). Будем считать,

что отсчет дуги выбран так, что ее длина возрастает вместе с возрастанием параметра  $t$  (так же, как в § 6.7).

Положим  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$ . Вектор  $\mathbf{r}_0$  имеет направление касательной к нашей кривой в точке  $t_0$ , поэтому произвольная точка касательной  $\rho = (x, y, z)$  определяется вектором

$$\rho = \mathbf{r}_0 + u \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (1)$$

где  $u$  — произвольное число (текущий параметр касательной).

Равенство (1) есть уравнение *касательной к кривой в точке  $t_0$*  в векторной форме.

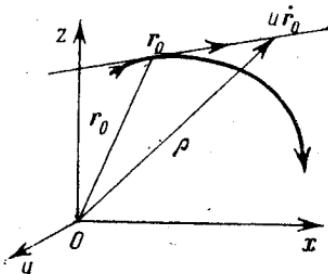


Рис. 6.4.

Из (1) следует, что уравнения касательной в декартовых координатах имеют вид

$$x - x_0 = ux'_0, \quad y - y_0 = uy'_0, \quad z - z_0 = uz'_0,$$

или

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}. \quad (2)$$

Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, которые образует положительное направление касательной (направление  $\mathbf{r}_0$ ) соответственно с положительными направлениями осей координат  $x, y, z$ . Очевидно

$$\cos \alpha = \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} = \left( \frac{dx}{ds} \right)_0,$$

$$\cos \beta = \frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} = \left( \frac{dy}{ds} \right)_0,$$

$$\cos \gamma = \frac{z'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} = \left( \frac{dz}{ds} \right)_0,$$

где  $\left( \frac{dx}{ds} \right)_0$  обозначает, что в  $\frac{dx}{ds}$  надо подставить значение  $s = s_0$ , соответствующее  $t = t_0$ . Перед корнями стоит знак «+», потому что мы согласились, что длина дуги возрастает вместе с  $t$ .

Кривую, заданную в плоскости  $x, y$ , можно рассматривать как частный случай кривой в пространстве, у которой  $z(t) = 0$ . Поэтому соотношениям (2) в плоском случае соответствует одно уравнение

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0}.$$

Положительное направление касательной образует в этом случае с осью  $x$  угол  $\alpha$ , для которого

$$\cos \alpha = \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}} = \left( \frac{dx}{ds} \right)_0, \quad \sin \alpha = \frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0}} = \left( \frac{dy}{ds} \right)_0.$$

В плоском случае можно еще определить понятие *нормали в точке  $t_0$  кривой*, то есть прямой, принадлежащей рассматриваемой плоскости и проходящей через точку  $t_0$  перпендикулярно к касательной. В некоторых вопросах важно задать положительное направление нормали  $N$ . Оно задается так, чтобы направление  $T$  касательной, идущее в сторону возрастания  $t$ , и  $N$  образовали систему, ориентированную так же, как система осей координат  $x, y$ .

иначе говоря, угол, образованный  $T$  и  $N$ , должно быть возможно непрерывным передвижением по плоскости совместить с координатным углом так, что  $T$  совпадет с положительным направлением оси  $x$ , а  $N$  — с положительным направлением оси  $y$  (рис. 6.5 и 6.6).

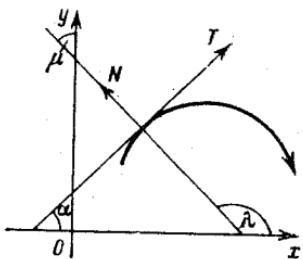


Рис. 6.5.

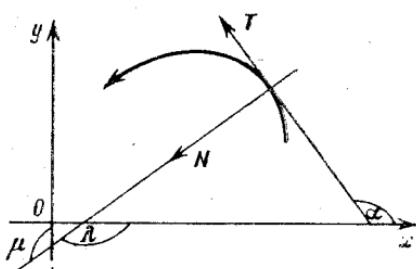


Рис. 6.6.

Пусть  $\lambda$ ,  $\mu$  — суть углы, образованные положительным направлением нормали соответственно с осями  $x$ ,  $y$ . Из рисунков видно, что сделанное соглашение приводит нас к формулам \*)

$$\cos \lambda = -\sin \alpha = -\left(\frac{dy}{ds}\right)_0, \quad \cos \mu = \cos \alpha = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0.$$

### § 6.9. КРИВИЗНА И РАДИУС КРИВИЗНЫ КРИВОЙ. ПЛОСКАЯ КРИВАЯ. ЭВОЛЮТА И ЭВОЛЬВЕНТА

*Кривизной окружности радиуса  $R$*  называется число  $1/R$ . Это число можно получить как отношение угла между касательными в концах какой-нибудь дуги окружности к длине этой дуги. Последнее определение дает идею определения кривизны, пригодного для произвольных гладких кривых.



Рис. 6.7.

Рассмотрим гладкую кривую  $\Gamma$  (рис. 6.7). Она спрямляема, и имеет смысл говорить о длине любой ее дуги  $\overarc{AB}$ . Угол  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ) между (положительными) направлениями касательных к дуге в ее точках  $A$  и  $B$  называется *углом смежности дуги  $\overarc{AB}$* . Отношение угла смежности дуги  $\overarc{AB}$  к ее длине называется *средней кривизной дуги  $\overarc{AB}$*  (см. рис. 6.7). Наконец, *кривизной кривой  $\Gamma$*  в ее точке  $A$  называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности  $\alpha$  дуги  $\overarc{AB}$  кривой к ее длине  $\Delta s$  ( $\Delta s > 0$ ), когда последняя стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta s}. \quad (1)$$

\*) Запомнить это можно, взяв векторное произведение  $(0, 0, 1) \times (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$ .

Таким образом,  $0 \leq K \leq \infty$ . По определению, величина  $R = 1/K$  (где считается, что  $0 = 1/\infty$ ,  $\infty = 1/0$ ) называется *радиусом кривизны*  $\Gamma$  в точке  $A$ .

Заметим, что угол смежности  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) дуги  $\overarc{AB}$  равен углу между векторами  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  и  $\dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{r}} + \Delta \dot{\mathbf{r}}$ , где  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор точки  $\Gamma$ , или углу между соответствующими единичными векторами  $\tau(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)/|\dot{\mathbf{r}}(t)|$  и  $\tau(t + \Delta t)$ . Поэтому косинус угла  $\alpha$ , очевидно, равен скалярному произведению  $(\tau(t), \tau(t + \Delta t))$ , а сам угол  $\alpha$  может быть записан в виде

$$\alpha = \arccos(\tau(t), \tau(t + \Delta t)) \quad (0 \leq \alpha \leq \pi),$$

откуда видно, что для гладкой кривой из  $\Delta t \rightarrow 0$  следует  $\alpha \rightarrow 0$ .

Из векторной алгебры известно, что

$$\sin \alpha = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times (\dot{\mathbf{r}} + \Delta \dot{\mathbf{r}})|}{|\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{r}} + \Delta \dot{\mathbf{r}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \Delta \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{r}} \times \Delta \dot{\mathbf{r}}|}, \quad (2)$$

так как  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ . Знаменатель здесь не равен нулю, потому что у гладкой кривой  $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  знаменатель стремится к  $|\dot{\mathbf{r}}|^2 > 0$ , а числитель стремится к нулю. Введем длину дуги  $s = s(t)$  нашей кривой. Длина куска  $\overarc{AB}$  равна  $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$  ( $\Delta t > 0$ ). Из  $\Delta s \rightarrow 0$  следует  $\Delta t \rightarrow 0$ , потому что  $t$  и  $s$  оба — допустимые параметры гладкой кривой (см. § 6.7).

Будем теперь предполагать, что радиус-вектор  $\mathbf{r}(t)$  нашей гладкой кривой  $\Gamma$  имеет вторую производную  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ , и при этом условии докажем существование конечной кривизны  $\Gamma$  в точке  $A$  (определенной параметром  $t$ ).

В силу (1), (2) кривизна  $\Gamma$  в точке  $t$  равна (пояснения ниже)

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left| \dot{\mathbf{r}} \times \frac{\Delta \dot{\mathbf{r}}}{\Delta t} \right|}{|\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{r}}(t + \Delta t)| \frac{\Delta s}{\Delta t}}, \quad (3)$$

т. е.

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

В третьем члене (3) мы заменили  $\alpha$  на  $\sin \alpha$  под знаком предела. Это законно, ведь если для стремящейся к нулю последовательности значений  $\Delta s$  соответствующие значения  $\alpha > 0$ , то  $\sin \alpha \approx \alpha$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ) и применима теорема 2 § 4.10, если же значения  $\alpha = 0$ , начиная с некоторого, то для них  $\sin \alpha = \alpha = 0$  и спаса верно второе равенство (3).

Если параметр  $t = s$  есть длина дуги  $\Gamma$ , то, как мы знаем,  $|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1$  и вектор  $\dot{\mathbf{r}}(s)$  перпендикулярен к  $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ , поэтому

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|, \quad R = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|}. \quad (5)$$

В плоском случае ( $z = 0$ ) выражение кривизны через координаты выглядит так:

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Если плоская кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , где функция  $f$  в окрестности точки  $x$  имеет непрерывную производную и в самой точке вторую производную, то, полагая в последней формуле  $t = x$ , получим

$$K = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (7)$$

(в полярных координатах см. § 7.26, упражнение 1).

Пусть  $A = (x, f(x))$  есть точка кривой  $\Gamma$ . Точка  $O$ , лежащая на нормали к  $\Gamma$  в точке  $A$  на расстоянии  $R = 1/K$  от  $A$  в сторону вогнутости  $\Gamma$ , называется центром кривизны  $\Gamma$  в точке  $A$ .

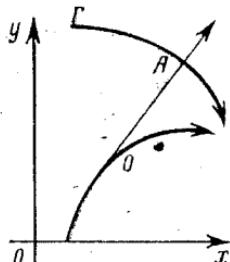


Рис. 6.8.

Кривая  $\gamma$ , являющаяся геометрическим местом центров  $O$  кривизны плоской кривой  $\Gamma$ , называется эволютой  $\Gamma$ . Сама кривая  $\Gamma$  называется эвольвентой  $\gamma$ .

На рис. 6.8 изображена плоская кривая  $\Gamma$ . Направление возрастания ее длины дуги  $s$  показано стрелкой. Вторая производная  $y'' = f''(x) < 0$ . Поэтому радиус кривизны в точке  $A$  равен

$$R = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (8)$$

Направляющие косинусы касательной (направленной в сторону возрастания  $s$ ) равны  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ , а направляющие косинусы единичной нормали  $\mathbf{v}$ , идущей от  $A$  в сторону вогнутости  $\Gamma$ , задаются числами

$$\mathbf{v} = \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right). \quad (9)$$

Координаты  $(\xi, \eta)$  центра  $O$  кривизны  $\Gamma$  в точке  $A$  определяются,

очевидно, равенствами

$$\xi = x + \frac{dy}{ds} R, \quad \eta = y - \frac{dx}{ds} R. \quad (10)$$

Это таким образом, уравнения эволюты.

В случае расположения и ориентировки кривой  $\Gamma$  как на рис. 6.8  $y_x'' < 0$ ,  $x_t' > 0$ . Поэтому из формулы

$$y_x'' = \frac{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}{x_t'^3}$$

следует, что числитель ее правой части отрицательный, и потому [см. (6)]

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}{y_t' x_t'' - x_t' y_t''}, \quad s_t' = (x_t'^2 + y_t'^2)^{1/2}. \quad (11)$$

Следовательно, из (10) следует, что уравнения эволюты кривой  $\Gamma$  в параметрической форме имеют вид

$$\xi = x - y_t' \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}, \quad \eta = y + x_t' \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}. \quad (12)$$

Они сохраняются и при других расположениях и ориентировке относительно осей координат.

Ниже дается другой вывод уравнений (12) эволюты кривой  $\Gamma$ .

Вводим для  $\Gamma$  в качестве параметра длину дуги  $s$ . Соответствующую вектор-функцию записываем, как это обычно делают, в виде  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ , хотя формально следовало бы употреблять другие обозначения, например,  $\mathbf{r}_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$ . Вектор  $\mathbf{r}(s)$  перпендикулярен к вектору  $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ , а следовательно, и к вектору  $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{r}}(s)/|\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ . Вектор  $\mathbf{v}$ , очевидно, есть единичный вектор нормали, направленный внутрь  $\Gamma$ , поэтому радиус-вектор  $\rho$  эволюты определяется векторными уравнениями (см. (5))

$$\rho = \mathbf{r} + \mathbf{v}R = \mathbf{r} + \ddot{\mathbf{r}}(s)R^2$$

или, что все равно, двумя скалярными равенствами ( $\rho = (\xi, \eta)$ ):

$$\xi = x + x_s'' \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^3}{(x_t' y_t'' - y_t' x_t'')^2}, \quad \eta = y + y_s'' \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^3}{(x_t' y_t'' - y_t' x_t'')^2}. \quad (13)$$

Но

$$x_s' = x_t' \frac{dt}{ds} = \frac{x_t'}{s_t'}, \quad s_t' = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2},$$

$$\begin{aligned} x_s'' &= \frac{s_t' x_t'' - x_t' \frac{d}{dt} s_t'}{s_t'^3} = \frac{s_t' x_t'' - \frac{x_t' (x_t' x_t'' + y_t' y_t'')}{s_t'}}{s_t'^3} = \\ &= \frac{(x_t'^2 + y_t'^2) x_t'' - x_t' (x_t' x_t'' + y_t' y_t'')}{s_t'^4} = -y_t' \frac{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}{s_t'^4} \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$y_s'' = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2) y_t'' - y_t' (x_t' x_t'' + y_t' y_t'')}{s_t'^4} = x_t' \frac{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}{s_t'^4}.$$

Подставляя полученные выражения  $x_s'', y_s''$  в (13), получаем уравнения (12).

Отметим два факта, характеризующие связь между эволвентой и эволютой:

1) Нормаль к эволвенте в любой ее точке  $s$  является в то же время касательной к эволюте.

В самом деле [см. (11)],  $\frac{1}{R} = y_s' x_s'' - x_s' y_s''$ , и свойство 1) вытекает из того, что касательные векторы к  $\Gamma$  и  $\gamma$  в соответствующих точках перпендикулярны [см. (10)]:

$$\begin{aligned} x_s' \xi_s' + y_s' \eta_s' &= (x_s'^2 + y_s'^2) + (y_s'' x_s' - x_s'' y_s') R + (x_s' y_s' - x_s'' y_s') R_s' = \\ &= 1 - \frac{1}{R} R + 0 = 0. \end{aligned}$$

2) Справедливо равенство

$$\sigma' = \pm R', \quad (14)$$

где, если  $A$  и  $O$  — соответствующие точки эволвенты  $\Gamma$  и эволюты  $\gamma$ , то  $R$  — радиус кривизны  $\Gamma$  в  $A$ , а  $\sigma$  — длина дуги  $\gamma$ , соединяющей  $O$  с некоторой неподвижной точкой  $\gamma$ . Знак «+» или «-» зависит от направления отсчета  $\sigma$ .

В самом деле, равенство (10) запишем следующим образом:

$$\mathbf{r} - \mathbf{p} = -R\mathbf{v},$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  — соответственно радиус-векторы  $A$  и  $O$ , откуда  $(\mathbf{r} - \mathbf{p}, \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}) = R^2$ . Дифференцируя по  $t$ , получим (пояснения ниже)

$$RR' = (\mathbf{r} - \mathbf{p}, \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}) = -(\mathbf{r} - \mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = -R|\dot{\mathbf{p}}| = \mp R\sigma',$$

что влечет за собой (14).

Второе равенство цепи следует из того, что в силу уже доказанного свойства 1)  $(\mathbf{r} - \mathbf{p}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$ , третье — из того, что  $|\mathbf{r} - \mathbf{p}| = R$  и векторы  $\mathbf{r} - \mathbf{p}$  и  $\dot{\mathbf{p}}$  направлены одинаково; четвертое следует из