того, что $|\dot{\rho}| = \pm\sigma$, где знак $\pm$ зависит от выбора отсчета σ на эволюте.

Например, если σ возрастает вместе с t, то $R' = -\sigma'$, откуда $\int\limits_{t_1}^{t_2} R'dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma'\,dt$, и в силу формулы Ньютона—Лейбница

$$R_2 - R_1 = \sigma_1 - \sigma_2,$$

где σ_1, R_1 соответствуют значению t_1, а σ_2, R_2 соответствуют значению t_2. Таким образом, в рассматриваемом случае увеличение длины дуги эволюты вызывает равное ему уменьшение радиуса кривизны эвольвенты.

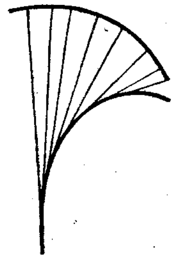

Рис. 6.9.

Представим себе нить, навернутую на эволюту. Пусть она сматывается с последней, будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, все время будет касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту (рис. 6.9). Так как длина нити может быть произвольной, то эволюта порождает бесконечно много эвольвент.

Пример 1. Эволюта циклоиды

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \tag{14}$$

есть кривая $\xi = t + \sin t$, $\eta = -1 + \cos t$. Полагая $t = \tau + \pi$, получим уравнения

$$\xi - \pi = \tau - \sin\tau, \quad \eta + 2 = 1 - \cos\tau,$$

определяющие исходную кривую, но только сдвинутую (эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная исходной; рис. 6.10).

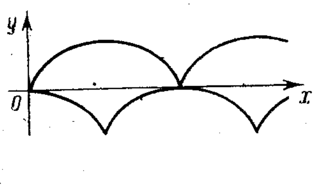

Рис. 6.10.

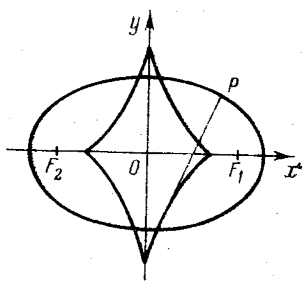

Рис. 6.11.

Пример 2. Эволюта эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a \geqslant b > 0)$ есть астроида (рис. 6.11),

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

(см. § 6.5, пример 2).

§ 6.10. Соприкасающаяся плоскость и подвижный триэдр кривой

Соприкасающейся плоскостью к кривой Γ в ее точке A называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную к Γ в точке A параллельно касательной в другой точке B кривой, когда последняя, двигаясь по кривой, стремится к A.

Покажем, что если кривая $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{\mathbf{r}}$ в окрестности точки t_0 и, кроме того, вторую производную $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ такую, что $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$, то соприкасающаяся плоскость к этой кривой в точке $t = t_0$ существует и имеет уравнение

$$(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0)[\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0] = 0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор текущей точки плоскости.

В самом деле, положим

$$\Delta\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Тогда вектор $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \dfrac{\Delta\dot{\mathbf{r}}_0}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}$, ортогонален (перпендикулярен) к приложенным к точке A векторам $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t_0 + \Delta t)$, а следовательно, и к проходящей через них плоскости. Так как он стремится при $\Delta t \to 0$ к вектору $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}_0 \neq \mathbf{0}$, то и указанная плоскость стремится к плоскости, проходящей через A, перпендикулярной к $\dot{\mathbf{r}}_0 \times \ddot{\mathbf{r}}$, а это и есть соприкасающаяся плоскость к Γ в A. Ее уравнение, очевидно, есть (1).

Существует еще другое определение: *соприкасающейся плоскостью кривой Γ в точке A называется предельное положение подвижной плоскости, проходящей через точку A и две другие точки A_1, A_2 кривой Γ, когда последние, двигаясь по Γ, стремятся к A.*

Можно показать, что при условиях, наложенных выше на $\mathbf{r}(t)$, в окрестности точки t_0 существует соприкасающаяся плоскость к Γ в этой точке и в смысле этого второго определения и она определяется уравнением (1). Таким образом, она совпадает с соприкасающейся плоскостью в смысле первого определения.

В декартовых координатах уравнение (1) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

где x, y, z — текущие координаты соприкасающейся плоскости, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = (x_0', y_0', z_0')$ и $\ddot{\mathbf{r}}_0 = (x_0'', y_0'', z_0'')$.

Выпущенные из точки $A = (x, y, z)$ векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, очевидно, принадлежат к соприкасающейся плоскости S. Если $t = s$ есть длина дуги Г, то $\dot{\mathbf{r}}(s)$ — единичный вектор, а вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ перпендикулярен к $\dot{\mathbf{r}}(s)$.

Из точки A нашей кривой Г (подчиняющейся указанным условиям) можно выпустить три единичных вектора, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, определяющих естественную прямоугольную систему координат в окрестности A

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}=\dot{\mathbf{r}}(s) && \text{— единичный вектор касательной;}\\
&\boldsymbol{\beta}=\frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|}=R\ddot{\mathbf{r}}(s)=R\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds} && \text{— единичный вектор главной нормали;}\\
&\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} && \text{— единичный вектор бинормали.}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Заметим, что направление $\boldsymbol{\alpha}$ зависит от параметра t в том смысле, что замена t на $-t$ изменяет направление $\boldsymbol{\alpha}$ на противоположное.

Что касается вектора $\boldsymbol{\beta}$, то мы его определили с помощью параметра s — длины дуги Г. Замена s на $-s$ или на $s+s_0$, где s_0 — постоянная, не влечет за собой изменение $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ (дифференцирование по s производится два раза), поэтому $\boldsymbol{\beta}$ есть *инвариант* — его направление вовсе не связано с параметрическим представлением кривой.

Нормалью к кривой Г в точке A естественно называть прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно к касательной к Г в этой точке. Среди нормалей имеется одна, принадлежащая к соприкасающейся плоскости S (к кривой Г в точке A). Она называется *главной нормалью*. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$, очевидно, принадлежит к S и перпендикулярен к касательной, поэтому он лежит на главной нормали. Удобно считать, что вектор $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ или $\boldsymbol{\beta}$ определяет положительное направление главной нормали. Можно еще сказать, что $\boldsymbol{\beta}$ есть выходящий из точки A единичный вектор, принадлежащий к S и направленный в сторону вогнутости кривой Г (точнее, ее проекции на S).

Отложим от точки A в направлении $\boldsymbol{\beta}$ вектор длины R — радиуса кривизны Г в A. Конец его — точка O — называется *центром кривизны* Г в A. В случае плоской кривой Г это определение совпадает с приведенным в § 6.10 определением центра кривизны. Очевидно, что центр кривизны O определяется вектором [см. 6.9, (5)]

$$\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}+R\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}+\frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{|\ddot{\mathbf{r}}(s)|^2}.$$

Наконец, вектор γ определен как единичный вектор, перпендикулярный к α и β и притом направленный так, чтобы система (α, β, γ) была ориентирована так же, как прямоугольная система координат (x, y, z), в которой рассматривается кривая.

Прямая, на которой лежит вектор γ (приложенный к точке A), называется *бинормалью* к Γ в A. Вектор γ определяет ее положительное направление.

Приложенные к движущейся по Γ точке A векторы α, β, γ определяют подвижный триэдр.

Отметим, что нормаль к плоской кривой, определенная в § 6.8, очевидно, совпадает (при $\ddot{\mathbf{r}}(s) \neq 0$) с главной нормалью. Положительные же направления на этой прямой (нормали или главной нормали) определены из разных принципов и могут не совпадать.

Исследование поведения вектора $\mathbf{r}(s)$ в окрестности точки s_0 часто удобно проводить, рассматривая $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)$ в прямоугольной системе координат α, β, γ. Будем считать, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (s — дуга Γ) и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ есть вектор точки $A_0 \in \Gamma$ и $\mathbf{ab}$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Тогда α, β, γ — функции от s. Из равенства $\gamma\alpha = 0$, $\gamma\gamma = 1$ следует, что проекции $\dfrac{d\gamma}{ds}$ на направления α и γ равны нулю:

$$\frac{d\gamma}{ds}\alpha = -\gamma\frac{d\alpha}{ds} = -|\ddot{\mathbf{r}}|\gamma\beta = 0, \quad \frac{d\gamma}{ds}\gamma = 0.$$

Но тогда

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{T}\beta, \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial\gamma}{ds}\beta. \tag{5}$$

Число $1/T$ называется *кручением* Γ в рассматриваемой точке $A \in \Gamma$. Его можно, очевидно, еще определить как число, абсолютная величина которого равна $\left|\dfrac{1}{T}\right| = \left|\dfrac{d\gamma}{ds}\right|$ (скорости изменения единичного вектора бинормали относительно s); *знак же* $1/T$ *положительный* или *отрицательный* в зависимости от того, будет ли проекция $\dfrac{d\gamma}{ds}$ на направление β положительна или отрицательна.

Отметим формулы Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{T}, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\gamma}{T}. \tag{6}$$

Первые две из них уже доказаны [см. (3), (4)], а третья доказывается следующим образом. Из тождества $\beta\alpha = \gamma\beta = 0$, $\beta\beta = 1$ дифференцированием их по s получаем

$$\frac{d\beta}{ds}\alpha = -\beta\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds}\gamma = -\beta\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{1}{T}, \quad \frac{d\beta}{ds}\beta = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\beta}{ds} = \left(\frac{d\beta}{ds}\alpha\right)\alpha + \left(\frac{d\beta}{ds}\beta\right)\beta + \left(\frac{d\beta}{ds}\gamma\right)\gamma = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\gamma}{T}.$$

Из (6) следует, что если кривизна Γ тождественно равна нулю ($1/R \equiv \equiv 0$), то $\frac{d\alpha}{ds} \equiv 0$, откуда следует, что $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s_0) + (s - s_0)\dot{\mathbf{r}}(s_0)$, т. е. Γ есть прямая. Если же кручение Γ тождественно равно нулю ($1/T \equiv 0$), то $\frac{d\gamma}{ds} = 0$, $(\gamma\mathbf{r})' = \gamma\alpha + \dot{\gamma}\mathbf{r} = 0$ и $\gamma\mathbf{r} = \mathrm{const}$; это показывает, что Γ — плоская кривая.

Пример 1. Винтовая линия Γ

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \; z = h\theta \quad (a,\, h > 0)$$

имеет длину дуги s, производная которой по θ равна

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{x'^2_\theta + y'^2_\theta + z'^2_\theta} = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Поэтому единичный вектор α касательной к Γ имеет проекции

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = -\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Далее,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{a\cos\theta}{a^2 + h^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-a\sin\theta}{a^2 + h^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$K = |\ddot{\mathbf{r}}| = \frac{a}{a^2 + h^2}, \quad \beta = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} + 0\cdot\mathbf{k},$$

что показывает, что главная нормаль к Γ параллельна плоскости x, y и идет по направлению к оси кругового цилиндра, на который навернута винтовая линия. Наконец,

$$\gamma = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathbf{i} - \frac{h\cos\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathbf{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathbf{k},$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{h\cos\theta}{a^2 + h^2}\mathbf{i} + \frac{h\sin\theta}{a^2 + h^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad \frac{1}{T} = \frac{d\gamma}{ds}\beta = -\frac{h}{a^2 + h^2}.$$

В предположении, что $\mathbf{r}(s)$ имеет в окрестности $s = s_0$ непрерывные производные до третьего порядка включительно, имеет место формула Тейлора

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (s - s_0)\,\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2!}\ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{(s - s_0)^3}{3!}\dddot{\mathbf{r}}_0 + o\left((s - s_0)^3\right)$$
$$(s \to s_0), \tag{7}$$

где остаток есть вектор, длина которого стремится к нулю быстрее, чем $|s - s_0|^3$.

Так как единичные векторы

$$\alpha = \dot{\mathbf{r}}_0, \quad \beta = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_0}{|\ddot{\mathbf{r}}_0|}, \quad \gamma = \alpha\times\beta \quad (\ddot{\mathbf{r}} \neq 0)$$

ортогональны, то имеют место равенства

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \mu(s)\boldsymbol{\beta} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}, \tag{8}$$

$$\lambda(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha}), \quad \mu(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}), \quad \nu(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\gamma}),$$

$$\lambda'(s_0) = \frac{d}{ds}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\alpha})\big|_{s=s_0} = (\dot{\mathbf{r}}(s), \boldsymbol{\alpha})\big|_{s=s_0} = 1, \tag{9}$$

$$\mu'(s_0) = (\dot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad \mu''(s_0) = (\ddot{\mathbf{r}}_0, \boldsymbol{\beta}) \neq 0, \tag{10}$$

$$\nu'(s_0) = \nu''(s_0) = 0, \quad \nu'''(s_0) = (\dddot{\mathbf{r}}(s_0), \boldsymbol{\gamma}) \neq 0. \tag{11}$$

Последнее условие ($\nu'''(s_0) \neq 0$) мы предполагаем дополнительно. Оно обычно имеет место (случай $\nu'''(s_0) = 0$ исключительный).

Если смотреть на кривую Γ по направлению бинормали, то будем видеть ее проекцию Γ_γ на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\gamma = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \mu(s)\boldsymbol{\beta}.$$

В силу свойств (9), (10) Γ_γ имеет в точке A_0 касательную $\mathbf{T}$ и в малой окрестности A_0 находится полностью над $\mathbf{T}$ или под $\mathbf{T}$ (рис. 6.12).

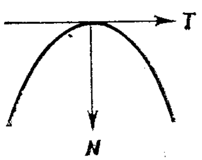

Рис. 6.12.

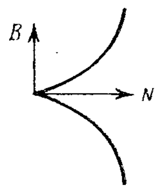

Рис. 6.13.

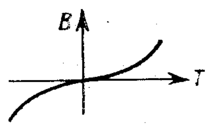

Рис. 6.14.

Если смотреть на Γ по направлению касательной, то будем видеть ее проекцию Γ_α на плоскость векторов $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)_\alpha = \mu(s)\boldsymbol{\beta} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}$. Таким образом, Γ_α определяется уравнениями

$$\eta = \mu(s), \quad \zeta = \nu(s), \tag{12}$$

где (η, ζ) — прямоугольные координаты в системе, определяемой ортами $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$.

Имеем в силу (10)

$$\eta = \frac{(s - s_0)^2}{2}\mu''(s_0) + o\left((s - s_0)^3\right) \quad (s \to s_0),$$

и в силу (11)

$$\zeta = \frac{(s - s_0)^3}{3!}\nu'''(s_0) + o\left((s - s_0)^3\right) \quad (s \to s_0).$$

Таким образом, при малых $|s - s_0|$ знак $\eta = \mu(s)$ один и тот же, независимо от знака $s - s_0$,

$$\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)_0 = \lim_{s \to s_0}\frac{\nu'(s)}{\mu'(s)} = \lim_{s \to s_0}\frac{\nu''(s)}{\mu''(s)} = \frac{\nu''(s_0)}{\mu''(s_0)} = 0,$$

а знак $\zeta = \nu(s)$ меняется вместе с переменой знака $s - s_0$, и кривая (12) имеет в начале координат (η, ζ) точку возврата (рис. 6.13; см. еще далее § 7.23).

Наконец, если смотреть на Γ по главной нормали, то будем видеть ее проекцию Γ_β на плоскость векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)_\beta = \lambda(s)\boldsymbol{\alpha} + \nu(s)\boldsymbol{\gamma}.$$

В силу (9), (11) кривая $\xi = \lambda(s)$, $\zeta = \nu(s)$ обладает свойствами

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 = \frac{\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)} = 0, \quad \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 = \frac{\lambda'(s_0)\,\nu''(s_0) - \lambda''(s_0)\,\nu'(s_0)}{\lambda'(s_0)^3} = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_0 = \nu'''(s_0) \neq 0.$$

Это показывает, что кривая Γ_β имеет точку перегиба в A_0 (рис. 6.14).

§ 6.11. Асимптота

Пусть задана кривая (или ветвь кривой) Γ, определяемая уравнением

$$y = f(x) \qquad (x > N), \tag{1}$$

где $f(x)$ — непрерывная для любого $x > N$ функция. Точку $A = (x, f(x))$ кривой Γ можно считать зависящей от x.

Пусть, кроме того, задана прямая L

$$y = ax + b, \tag{2}$$

(a, b — постоянные числа). Если расстояние от точки A кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном возрастании x, то прямая L называется *асимптотой* кривой Γ, соответствующей стремлению x к $+\infty$.

Итак, пусть L есть асимптота Γ при $x \to +\infty$. Уравнение L в нормальном виде записывается так:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = 0.$$

Поэтому расстояние точки $A = (x, f(x))$ кривой Γ до L равно $\rho(x) = |f(x) - ax - b|/\sqrt{1+a^2}$. Так как L, по условию, асимптота Γ при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - ax - b| = 0. \tag{3}$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - a\right] = 0$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a. \tag{4}$$

Из сказанного следует, как надо поступать, чтобы найти асимптоту Γ при $x \to +\infty$. Надо взять предел (4). Если он не существует, то кривая Γ не имеет асимптоты. Если же предел (4) существует и равен a, надо вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-ax\}=b. \tag{5}$$

Если на самом деле предел (5) не существует, то кривая Г не имеет асимптоты при $x\to+\infty$. Если же он существует, то полученные константы a и b определяют прямую, которая и есть асимптота Г при $x\to+\infty$. Так как пределы (4) и (5) если существуют, то единственны, то непрерывная кривая Г (или ветвь кривой), определяемая равенством (1), либо не имеет вовсе либо имеет единственную асимптоту при $x\to+\infty$.

Аналогично определяется асимптота при $x\to-\infty$ непрерывной кривой (ветви кривой)

$$y=f(x)\qquad(x<-N), \tag{6}$$

а также асимптота при $x\to\infty$ кривой

$$y=f(x)\qquad(N\leqslant|x|) \tag{7}$$

(состоящей из двух ветвей, соответствующих $x>N$ и $x<-N$). В проведенных выше рассуждениях надо считать в случае (6), что $x\to-\infty$, а в случае (7), что $x\to\infty$.

Если кривая Г (или ветвь кривой) определяется уравнением $y=f(x)$ $(a<x<b)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на интервале $(a,\ b)$, обладающая свойством $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=+\infty$, то в этом случае естественно называть прямую $x=a$ асимптотой Г. Во всяком случае, прямую $x=a$ принято называть *асимптотой* Г, если непрерывная функция $f(x)\to\infty$, $x\to a$ и строго монотонна в правой или левой окрестности точки $x=a$. Ведь тогда кривую Г можно записать в виде $x=\varphi(y)$, где y, положительное или отрицательное, достаточно велико по абсолютной величине и прямая $x=a$, очевидно, является асимптотой Г в указанном в начале параграфа смысле.

Пример 1. Отдадим себе отчет, какой вид имеет график Г функции $f(x)=\dfrac{1}{x}+x+e^{-x}$.

Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{e^{-x}}{x}\right)=1$. Но уже предел этого отношения при $x\to-\infty$ равен $+\infty$.

Далее, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$. Таким образом, $y=x$ есть асимптота Г при $x\to+\infty$. Прямая $x=0$ тоже есть асимптота Г при стремлении x к 0 справа и слева:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty.$$

Найти корни уравнения $f'(x) = 0$ не удается. Но очевидно, что

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x} > 0 \quad (x > 0),$$

$$\lim_{x\to 0+0} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 1.$$

Таким образом, $f'(x)$ на $(0, \infty)$ строго возрастает и существует только одно значение $x_0 > 0$, где $f'(x_0) = 0$. Функция $f(x)$, очевидно, убывает на $(0, x_0)$ от $+\infty$ до $f(x_0)$, затем возрастает, и при этом ее график имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = x$ и весь находится над последней.

На интервале $(-\infty, 0)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 - e^{-x} < 0,$$

потому что $-1/x^2 < 0$ и $1 - e^{-x} < 0$. Учитывая это, легко видеть, что $f(x)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Далее,

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + e^{-x},$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4} - e^{-x} < 0 \text{ на } (-\infty, 0),$$

$$\lim_{x\to -\infty} f''(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0, x<0} f''(x) = -\infty,$$

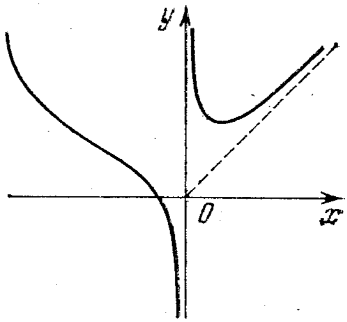

Рис. 6.15.

Поэтому на $(-\infty, 0)$ имеется, и притом единственная, точка x_1 перегиба графика $f(x)$. На $(-\infty, x_1)$ график f обращен выпуклостью книзу, а на $(x_1, 0)$ — выпуклостью кверху (см. схематический график, рис. 6.15).

Пример 2. Кривая $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ не имеет асимптоты, потому что хотя предел

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

и существует, все же предел

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x} - 0, x) = \infty$$

не конечный.

§ 6.12. Замена переменных

Пусть y есть функция от x, а $x = \varphi(t)$ — заданная функция от t. Тогда y есть функция от t. Производные $\frac{dy}{dx}, \frac{dy^2}{dx^2}, \ldots$ от y по x выражаются через производные $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ и через известные производные $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t)$ по следующим формулам

(§ 6.5, (5), (6)):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},\quad \frac{dx}{dt}\neq 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}. \tag{2}$$

Более сложным является случай, когда нужно выразить производные $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ через $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots$, где $v=\lambda(y)$, $x=\mu(t)$ — данные функции. Здесь функция $\lambda(y)$ предполагается обратимой ($y=\lambda^{-1}(v)$).

Очевидно, что

$$\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}, \tag{4}$$

и мы выразили $\frac{dy}{dx}$ через $\frac{dv}{dt}$ и данные функции от v и от t.

Дифференцируя (3) по t, получим

$$\frac{d^2y}{dv^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dv}\frac{d^2v}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

Заменив в (5) $\frac{dy}{dx}$ выражением (4), и разрешив полученное уравнение относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим, что $\frac{d^2y}{dx^2}$ выражается через $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}$ и известные функции от v и от t.

Чтобы получить $\frac{d^3y}{dx^3}$, надо продифференцировать (5) по t, заменить $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ найденными выражениями и разрешить полученное уравнение относительно $\frac{d^3y}{dx^3}$. Подобным образом поступаем для получения соответствующих выражений для более высоких производных $\frac{d^ky}{dx^k}$.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 7.1. Открытое множество

В n-мерном пространстве $R_n = R$ зададим произвольную точку $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Шаром* (или *замкнутым шаром*) радиуса $r > 0$ с центром в этой точке называют множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R$, для которых выполняется неравенство

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \left[\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right]^{1/2} \leqslant r.$$

Открытым шаром радиуса r с центром в $\mathbf{x}^0$ мы будем называть множество точек $\mathbf{x}$, для которых выполняется строгое неравенство $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r$.

Определим *прямоугольник* в R (замкнутый прямоугольник или прямоугольный параллелепипед в R) как множество точек $\mathbf{x} \in R$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ ($a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$). В случае $n = 3$ это реальный прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными осям прямоугольных координат (x_1, x_2, x_3).

Можно еще определить *открытый прямоугольник в R* как множество точек, удовлетворяющих строгим неравенствам $a_j < x_j < b_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

Множество точек $\mathbf{x}$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_j - x_j^0| \leqslant a$ ($j = 1, \ldots, n$), где $a > 0$ — заданное число, естественно назвать *кубом* (или *замкнутым кубом*) в R с центром в точке $\mathbf{x}^0$ и стороной длины $2a$. Конечно, при $n = 3$ это будет куб с гранями, параллельными осям (прямоугольной) системы координат.

Наконец, *открытый куб* (в R) определяется при помощи неравенств $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$).

Неравенства $|x_j - x_j^0| \leqslant \left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < r$ говорят, что если точка x принадлежит шару радиуса r с центром в x^0, то она принадлежит и кубу со стороной длины $2r$ с тем же центром. Таким образом, *куб со стороной* длины $2r$ *с центром в* $\mathbf{x}^0$ *содержит в себе шар радиуса* r с тем же центром. С другой стороны, если точка $\mathbf{x}$ принадлежит кубу, $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$), то для нее выполняется неравенство $\left(\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < \sqrt{n}\, a$, показывающее, что *шар с центром в* $\mathbf{x}^0$ *радиуса* $a\sqrt{n}$ *содержит в себе куб со стороной длины* $2a$ *с тем же центром* (см. § 6.2 (12)).

Мы рассматривали открытые шары и кубы, но это же верно и для замкнутых шаров и кубов.

Зададим произвольное множество E точек $\mathbf{x} \in R$. По определению, $\mathbf{x}^0$ называется *внутренней точкой* множества E, если существует открытый шар с центром в этой точке, полностью принадлежащий E. Слово *шар* здесь можно заменить на *куб*, потому что всякий шар содержит некоторый куб с тем же центром, и наоборот.

Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние. Это определение можно еще сформулировать так: *множество E открытое, если из того, что какая-нибудь точка принадлежит ему, следует, что она внутренняя точка.*

Отсюда видно, что *пустое множество есть открытое множество.*

Открытый шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < r \tag{1}$$

есть открытое множество. В самом деле, пусть $\mathbf{y}$ есть принадлежащая ему точка, т. е. $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| = \rho < r$, и $\mathbf{x}$ — произвольная точка, принадлежащая шару

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon \qquad (\varepsilon < r - \rho). \tag{2}$$

Для нее $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}^0| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < \varepsilon + \rho < r$. Это показывает, что шар (2) принадлежит шару (1).

Предоставляем читателю доказать, что *открытый прямоугольник*, в частности, открытый куб, *есть открытое множество.*

Пересечение G_1G_2 двух открытых множеств G_1 и G_2 есть открытое множество. В самом деле, пусть точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит к G_1G_2. Так как $\mathbf{x}^0$ есть внутренняя точка как G_1 так и G_2, то существуют два открытых шара с центром в $\mathbf{x}^0$, из которых первый принадлежит G_1, а второй — G_2. Пересечение их есть, очевидно, открытый шар (наименьший из них), принадлежащий G_1G_2.

Легко видеть, что *сумма конечного или счетного числа открытых множеств есть открытое множество.* Однако пересечение счетного числа открытых множеств может и не быть открытым, например, пересечение открытых шаров $|\mathbf{x}| < 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ есть точка (нулевая точка).

Окрестностью точки $\mathbf{x}^0 \in R_n$ называют произвольное открытое множество, содержащее в себе эту точку. Очевидно, что *пересечение двух окрестностей* $\mathbf{x}^0$ *есть в свою очередь окрестность* $\mathbf{x}^0$.

После сказанного понятие внутреней точки множества E можно еще определить так: $\mathbf{x}^0$ *есть внутренняя точка E, если суще-*

ствует принадлежащая E окрестность $\mathbf{x}^0$. В самом деле, если $\mathbf{x}^0$ — внутренняя точка по первому определению, то найдется принадлежащий E открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$, но последний есть окрестность $\mathbf{x}^0$. Наоборот, если x^0 есть внутренняя точка по второму определению, то существует принадлежащая E окрестность $\mathbf{x}^0$, которая, будучи открытым множеством, содержит открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$.

В дальнейшем в нашем распоряжении будет много примеров открытых множеств, определенных строго математически, а сейчас мы призовем читателя к геометрической интуиции, сказав, что если с произвольно геометрического тела содрать его границу, то получим открытое множество.

В ближайших параграфах мы будем рассматривать функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ или, что все равно, от точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, определенные на окрытых множествах n-мерного пространства.

Множество E называется *связным*, если любые его две точки x', x'' можно соединить принадлежащей ему непрерывной кривой, т. е. если существует непрерывная вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\mathbf{x}(0) = x'$, $\mathbf{x}(1) = x''$, $\mathbf{x}(t) \in E$ (см. § 6.5).

Отрезком $\overline{x'x''}$ называется кривая $x(t) = tx' + (1-t)x''$, $t \in [0, 1]$, очевидно, непрерывная и соединяющая точки x', x''.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с точками x', x'' принадлежит ему соединяющий их отрезок. (Примеры см. конец § 7.3.)

Замечание 1. Куб Δ в R_n можно определить при помощи неравенств:

$$\Delta = \{a_j \leqslant x_j \leqslant b_j;\ j = 1, \ldots, n\},$$

где $2d = b_j - a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Легко видеть, что Δ есть сумма 2^n кубов вида $\{\lambda_j \leqslant x_j \leqslant \mu_j;\ j = 1, \ldots, n\}$, где всевозможными способами надо положить $\lambda_j = a_j$, $\mu_j = (a_j + b_j)/2$ или $\lambda_j = (a_j + b_j)/2$, $\mu_j = b_j$. Говорят, что этим куб Δ разбит на 2^n равных кубов (имеющих стороны длины d).

Замечание 2. Мы называем кубом в R_n то, что при $n = 3$ есть обычный (трехмерный) куб со сторонами, параллельными осям координат. Общее определение n-мерного куба требует введения ортогонального преобразования координат:

$$x_j - x_j^0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\xi_k,$$

где $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in R_n$ и α_{jk} — действительные числа, для которых $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2 = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Например, замкнутым кубом Δ в R_n с центром в $\mathbf{x}^0 \in R_n$ и сторонами длины $2d$ называется такое множество точек $\mathbf{x} \in R_n$, которое после надлежащего (зависящего от Δ) ортогонального преобразования координат превращается во множество вида $\{|\xi_k| \leqslant d;\ k = 1, \ldots, n\}$.

Подобное замечание относится и к n-мерным прямоугольникам.

§ 7.2. Предел функции

По определению, *функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет предел в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, равный числу A, обозначаемый так:

$$\lim_{x \to x^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1,\ldots,n)}} f(x_1, \ldots, x_n) = A \tag{1}$$

(пишут еще $f(\mathbf{x}) \to A (\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0)$), если она определена на некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и если существует предел

$$\lim_{\substack{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0 \\ \mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0}} f(\mathbf{x}^k) = A, \tag{2}$$

какова бы ни была стремящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k$ из указанной окрестности ($k = 1, 2, \ldots$), отличных от $\mathbf{x}^0$ (см. § 6.3).

Другое эквивалентное определение заключается в следующем: *функция f имеет в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел, равный* A, если она определена в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta. \tag{4}$$

В этом определении можно заменить неравенства (4) на следующие

$$0 < \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| < \delta \quad (j = 1, \ldots, n),$$

или сказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(\mathbf{x}^0)$ такая, что для всех принадлежащих к ней $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ выполняется (3).

Эквивалентность первого и второго определения в n-мерном случае доказывается аналогично тому, как это делалось в одномерном случае (см. § 4.1).

Сформулируем критерий Коши существования предела (доказываемое как в одномерном случае) (см. § 4.1 теорема 5).

Для того чтобы функция f имела в точке $\mathbf{x}^0$ *предел (конечный), необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлась окрестность* $U(\mathbf{x}^0)$ (в частности, куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$) *так, чтобы для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in U(\mathbf{x}^0)$, *отличных от* $\mathbf{x}^0$, *имело место неравенство*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon.$$

Критерий Коши можно сформулировать и так: *для того чтобы функция f имела в точке* $\mathbf{x}^0$ *предел, необходимо и достаточ-*

но, чтобы функция $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}')$, *зависящая от переменных* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')=(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$, *имела предел в точке* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0)$, *равный нулю.*

Очевидно, что если число A есть предел $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x}^0$, то A есть предел функции $f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в нулевой точке:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})=A,$$

и наоборот.

Рассмотрим некоторую функцию f, заданную во всех точках окрестности точки $\mathbf{x}^0$, кроме быть может точки $\mathbf{x}^0$, пусть $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — произвольный вектор длины единица ($|\boldsymbol{\omega}|=1$) и $t \geqslant 0$ — скаляр. Точки вида $\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}$ $(0 \leqslant t)$ образуют выходящий из $\mathbf{x}^0$ *луч в направлении вектора* $\boldsymbol{\omega}$. Для каждого $\boldsymbol{\omega}$ можно рассматривать функцию

$$f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=f(x_1^0+t\omega_1, \ldots, x_n^0+t\omega_n) \quad (0<t<\delta_\omega)$$

от скалярной переменной t, где δ_ω есть число, зависящее от $\boldsymbol{\omega}$. Предел этой функции (от одной переменной t)

$$\lim_{t\to 0, t>0} f(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega})=\lim_{t\to 0, t>0} f(x_1^0+t\omega_1, \ldots, x_n^0+t\omega_n),$$

если он существует, естественно назвать *пределом f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению вектора* $\boldsymbol{\omega}$.

В частности, если $\boldsymbol{\omega}$ — единичный орт $\mathbf{e}^j=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, направленной по оси x_j, то можно говорить о пределе f в точке $\mathbf{x}^0$ по направлению положительной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0+t\mathbf{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0+t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

или отрицательной полуоси x_j:

$$\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(\mathbf{x}^0-t\mathbf{e}^j)=\lim_{\substack{t\to 0,\\ t>0}} f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0-t, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Из того, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ предел, равный A, следует, очевидно, что она имеет в этой точке предел, равный A, и по любому направлению. Но обратное утверждение неверно — функция f может иметь предел в $\mathbf{x}^0$, равный A по любому направлению и в то же время не иметь предела в $\mathbf{x}^0$.

Пример 1.

$$1)\ f(x, y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \quad 2)\ \varphi(x, y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Функции f и φ определены на плоскости (x, y), за исключением точки $(0, 0)$. Имеем

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}=2(x^2+y^2)^{1/2},$$

откуда

$$\lim_{x,y\to 0} f(x, y) = 0$$

(для $\varepsilon > 0$ полагаем $\delta = \varepsilon/2$ и тогда $|f(x, y)| < \varepsilon$, если только $(x^2+y^2)^{1/2} < \delta$).

Далее, считая, что k постоянная, имеем

$$\varphi(x, kx) = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

откуда видно, что предел φ в $(0, 0)$ по разным направлениям вообще различен. Поэтому φ не имеет предела в $(0, 0)$.

Пример 2. В плоскости (x, y) определим спираль $\rho = \theta$ $(0 < \theta \leqslant 2\pi)$, где ρ — радиус-вектор, а θ — полярный угол. Пусть $\psi(x, y)$ определяется следующим образом (рис. 7.1): $\psi(0, 0) = 1$, $\psi(x, y) = 0$ для $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \theta > 0$, ψ линейна на любом отрезке, соединяющем точку $(0, 0)$ с точкой спирали. Легко видеть, что $\lim\limits_{t\to 0}\psi(tx, ty) = 1$, какова бы ни была точка $(x, y) \neq (0, 0)$, т. е. существует равный 1 предел ψ в $(0, 0)$ по любому направлению, между тем как предел ψ в $(0, 0)$ не существует. Ведь если приближаться к точке $(0, 0)$ по кривой, находящейся между спиралью и осью x в первой четверти плоскости (x, y), то вдоль этой кривой $\psi(x, y) = 0$.

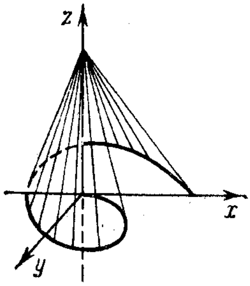

Рис. 7.1.

Будем писать $\lim\limits_{x\to x^0} f(\mathbf{x}) = \infty$, если функция f определена в некоторой окрестности $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, $\mathbf{x}^0$, и для всякого $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(\mathbf{x})| > N$, коль скоро $0 < |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \delta$.

Можно говорить о пределе f, когда $\mathbf{x}\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(\mathbf{x}) = A. \tag{5}$$

Например, в случае конечного числа A равенство (5) надо понимать в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N > 0$, что для точек $\mathbf{x}$, для которых $|\mathbf{x}| > N$, функция f определена и имеет место неравенство $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Справедливы равенства

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\varphi(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\varphi(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\frac{f(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\varphi(\mathbf{x})} \quad \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\varphi(\mathbf{x}) \neq 0\right), \tag{8}$$

где может быть $\mathbf{x}^0 = \infty$. При этом, как обычно, пределы (конечные) в их левых частях существуют, если существуют пределы f и φ. Докажем для примера (7)

Пусть $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0)$; тогда

$$\lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} (f(\mathbf{x}^k)\,\varphi(\mathbf{x}^k)) = \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) \lim_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}^k) =$$

$$= \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}). \qquad (9)$$

Таким образом, предел в левой части (9) существует и равен правой части (9), а так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ призвольна, то он равен пределу функции $f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$.

Теорема 1. *Если функция f имеет предел, не равный нулю в точке $\mathbf{x}^0$,*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta, \qquad (10)$$

она удовлетворяет неравенству

$$|f(\mathbf{x})| > |A|/2. \qquad (11)$$

Больше того, она сохраняет там знак A.

В самом деле, положив $\varepsilon = |A|/2$, найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенствам (10), выполнялось

$$|f(\mathbf{x}) - A| < |A|/2. \qquad (12)$$

Поэтому для таких $\mathbf{x}$ $|A|/2 > |A - f(\mathbf{x})| \geqslant |A| - |f(\mathbf{x})|$, т. е. имеет место (11).

Из (12) для указанных $\mathbf{x}$ следует:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(\mathbf{x}) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда $A/2 < f(\mathbf{x})$ при $A > 0$ и $f(\mathbf{x}) < A/2$ при $A < 0$ (сохранение знака).

Замечание. В § 7.10 будет дано более общее определение предела функции, заданной на произвольном множестве.

§ 7.3. Непрерывная функция

По определению, функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точке $\mathbf{x}^0$, и если предел ее в точке $\mathbf{x}^0$ равен ее значению в ней:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0). \qquad (1)$$

Условие непрерывности f в точке $\mathbf{x}^0$ можно написать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1'}$$

т. е. функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$, если непрерывна функция $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h})$ от $\mathbf{h}$ в точке $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Можно ввести приращение f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующее приращению $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$\Delta_h f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0),$$

и на его языке определить непрерывность f в $\mathbf{x}^0$: *функция f непрерывна в x^0, если*

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = \lim_{h_1, \ldots, h_n \to 0} \left[f\left(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\right] = 0. \tag{1''}$$

Из формул (6)—(8) § 7.2 непосредственно следует

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке $\mathbf{x}^0$ функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ есть непрерывная функция в этой точке, если, конечно, в случае частного* $\varphi(\mathbf{x}^0) \neq 0$.

Постоянную c можно рассматривать как функцию $f(\mathbf{x}) = c$ от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Она непрерывна для любого $\mathbf{x}$, потому что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = c - c = 0 \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Следующей по сложности является функция $f_j(\mathbf{x}) = x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, где индекс j может равняться одному из значений $1, \ldots, n$. Она также непрерывна (как функция от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$!). Действительно, пусть $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$; тогда

$$|f_j(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x})| = |(x_j + h_j) - x_j| = |h_j| \leqslant |\mathbf{h}| \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Если производить над функциями x_j и постоянными действия сложения, вычитания и умножения в конечном числе, то будем получать функции, называемые *многочленами от* $\mathbf{x}$ *или* $(x_1, \ldots, x_n)$. На основании сформулированных выше свойств *многочлены суть непрерывные функции на R_n* (для всех $\mathbf{x} \in R_n$). Отношение P/Q двух многочленов есть *рациональная функция*, очевидно, непрерывная всюду на R_n, за исключением точек $\mathbf{x}$, где $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Функция

$$P(\mathbf{x}) = x_1^3 - x_2^3 + x_1^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 - 3x_3^2 + 4$$

может служить примером многочлена от (x_1, x_2, x_3) третьей степени.

Вообще, имеет место очевидная

Теорема 2. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_m)$ — *непрерывная функция в точке* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *пространства* R_m *и* $m < n$.

Если ее рассматривать как функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m)$$

от $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, *то* F *непрерывна относительно* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (*в пространстве* R_n) *в любой точке вида* $(x_1^0, \ldots, x_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$, *где числа* $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$ *произвольны.*

В самом деле, если $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, то

$$\Delta_h F(\mathbf{x}^0) = F(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - F(x_1^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_m^0 + h_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0) \to 0 \quad (\mathbf{h} \to \mathbf{0}).$$

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ есть целый неотрицательный вектор, т. е. имеющий неотрицательные целые компоненты k_j $(j = 1, \ldots, n)$. Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка R_n, то условимся о следующем обозначении:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}. \tag{2}$$

Эта функция непрерывна для всех $\mathbf{x} \in R_n$, потому что она есть произведение из конечного числа множителей вида x_j, каждый из которых есть непрерывная функция от $\mathbf{x}$. Введем еще новое обозначение

$$|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^{n} k_j, \tag{3}$$

которое употребляют для целых неотрицательных векторов $\mathbf{k}$ и которое не надо путать с $|\mathbf{k}| = \left(\sum_{j=1}^{n} k_j^2\right)^{1/2}$ Составим сумму

$$P_N(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{k}| \leqslant N} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

распространенную на всевозможные векторы $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}| \leqslant N$, где $a_{\mathbf{k}} = a_{k_1, \ldots, k_n}$ — постоянные коэффициенты, снабженные целочисленными векторными индексами $\mathbf{k}$. Эта функция (очевидно непрерывная) называется многочленом от $\mathbf{x}$ степени N.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть функция* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *пространства* R_m (*точек* $\mathbf{x}$), *а функции* $\varphi_j(\mathbf{u}) = \varphi_j(u_1, \ldots, u_n)$ *непрерывна в точке* $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ *пространства* R_n (*точек* $\mathbf{u}$). *Пусть, кроме того,* $\varphi_j(\mathbf{u}^0) = x_j^0$ $(j = 1, \ldots, m)$. *Тогда функция*

$$F(\mathbf{u}) = f(\varphi_1(\mathbf{u}), \varphi_2(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{u}))$$

непрерывна (*по* $\mathbf{u}$) *в точке* $\mathbf{u}^0$.

Доказательство. Так как f непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что f определена для всех

$\mathbf{x}$, для которых $|x_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, m)$, и для них выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon$, и так как функции φ_j непрерывны в точке $\mathbf{u}^0$ пространства R_n, то можно определить такое $\eta > 0$, что для точек $\mathbf{u} \in R_n$ шара $|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0| < \eta$ выполняются неравенства

$$|\varphi_j(\mathbf{u}) - \varphi_j(\mathbf{u}^0)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Тогда выполняется также неравенство

$$|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}^0)| = |f(\varphi_1(\mathbf{u}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{u})) - f(\varphi_1(\mathbf{u}^0), \ldots, \varphi_m(\mathbf{u}^0))| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Функцию мы будем называть *элементарной функцией* от переменных $x_1, \ldots, x_n$, если она может быть получена из этих переменных и констант c при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций φ, где φ — элементарные функции от одной переменной (см. § 1.3). Функции

1) $\sin \ln \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \varphi_1$,
2) $\sin^2 x + \cos 3(x + y) = \varphi_2$,
3) $\ln \dfrac{x - y}{x + y} = \varphi_3$

могут служить примерами элементарных функций.

Легко проверить, пользуясь теоремами 1—3, что функции φ_1 и φ_2 непрерывны на плоскости (x, y), функция же φ_3, очевидно, определена и непрерывна в тех точках (x, y), для которых дробь $(x - y)/(x + y)$ положительна и конечна.

Из теоремы 1 § 7.2 и определения непрерывности функции в точке непосредственно следует

Теорема 4. *Функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывная в точке $\mathbf{x}^0$ и неравная нулю в этой точке, сохраняет знак $f(\mathbf{x}^0)$ в некоторой окрестности этой точки.*

Следствие. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на R_n (во всех точках R_n). Тогда множество G точек $\mathbf{x}$, где она удовлетворяет неравенству $f(x) > c$ (или $f(\mathbf{x}) < c$), какова бы ни была постоянная c, есть открытое множество.*

В самом деле, функция $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - c$ непрерывна на R_n, и множество всех точек $\mathbf{x}$, где $F(\mathbf{x}) > 0$, совпадает с G. Пусть $\mathbf{x}^0 \in G$; тогда существует шар

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta,$$

на котором $F(\mathbf{x}) > 0$, т. е. он принадлежит к G и точка $\mathbf{x}^0 \in G$ — внутренняя для G.

Случай $f(\mathbf{x}) < c$ доказывается аналогично.

Пример.

1) $f_1(\mathbf{x}) = \sum_1^n \dfrac{x_k^2}{a_k} \quad (a_k > 0)$;

2) $f_2(\mathbf{x}) = \sum_1^n |x_k|$;

3) $f_3(\mathbf{x}) = \max_k |x_k|$.

Эти три функции определены и непрерывны на R_n. Непрерывность f_3 вытекает из следующих выкладок:

$$|f_3(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f_3(\mathbf{x})| = |\max_k |x_k + h_k| - \max_k |x_k|| \leqslant$$

$$\leqslant \max_k |x_k + h_k - x_k| = \max_k |h_k| \to 0 \quad (|\mathbf{h}| \to 0).$$

В таком случае множества значений $\mathbf{x}$, для которых выполняются неравенства $f_i(\mathbf{x}) < c$ $(i = 1, 2, 3)$,— открытые множества. Первое из них есть внутренность эллипсоида в n-мерном пространстве; второе и третье при $n = 2$ суть внутренности квадратов, изображенных соответственно на рис. 7.2 и 7.3.

Эти три множества выпуклые, потому что из неравенств $f_i(x) < c$ и $f_i(y) < c$ следует $f_i(tx + (1-t)y) < c$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Неравенства $f_i(x) > c > 0$ определяют внешности указанных фигур.

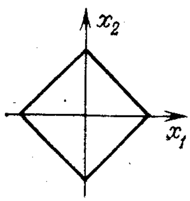

Рис. 7.2.

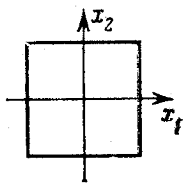

Рис. 7.3.

§ 7.4. Частные производные и производная по направлению

В этом параграфе мы будем рассматривать функции f, определенные на произвольном открытом множестве $G \subset R_n$.

Назовем *приращением* f *в точке* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $(\in G)$ *по переменной* x_j *с шагом* h *величину*

$$\Delta_{x_j h} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл.

Частной производной по x_j *в точке* $\mathbf{x}$ называется предел

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x})}{h} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ есть обычная производная от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой как функция только от переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Функция $z = f(x, y)$ от двух переменных изображается в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), поверхностью — геометрическим местом точек $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in G$. Очевидно, что *величина* $f'_x(x_0, y_0)$

(если она существует) *равна тангенсу наклона к оси x, касательной к сечению этой поверхности плоскостью $y = y_0$ в точке, имеющей абсциссу x_0.*

Производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, n)$ называют также *частными производными первого порядка от f.*

Выражения $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ называют *частными производными второго порядка.* При $i = j$ их принято обозначать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Выражения $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}$ называют *частными производными третьего порядка*, и т. д. Широко пользуются обозначениями, такими как приведенные ниже:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}}_{m \text{ раз}} = \frac{\partial^m}{\partial x_k^m}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^6}{\partial z\, \partial y^2 \partial z^2 \partial x}$$

Мы увидим в дальнейшем, что во многих важных случаях эти операции частного дифференцирования законно менять местами без изменения результата.

Можно еще ввести понятие *производной по направлению.* В случае функций от одной переменной оно не употребляется.

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор. *Производной от функции f в точке* $\mathbf{x}$ *по направлению* $\boldsymbol{\omega}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

(если он существует). Подчеркнем, что при вычислении этого предела предполагается, что t стремится к нулю, принимая *положительные* значения, поэтому можно еще сказать, что $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ *есть правая производная в точке $t = 0$ от функции $f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} t)$* по t.

Можно, как в случае функций от одной переменной, говорить о правой и левой частной производной по x_j. Надо учесть, что *производная по направлению положительной оси x_j совпадает с правой частной производной по x_j, однако производная по направлению отрицательной оси x_j имеет знак, противоположный знаку левой производной по x_j.*

§ 7.5. Дифференцируемая функция. Касательная плоскость

Для простоты будем рассматривать трехмерный случай; в n-мерном случае рассуждения аналогичны. Случай $n=1$ был специально рассмотрен в § 5.2.

Пусть на открытом множестве $G \subset R_3$ задана функция

$$u = f(x, y, z),$$

имеющая в точке $(x, y, z) \in G$ непрерывные частные производные первого порядка. Отсюда автоматически следует, что эти частные производные существуют в некоторой окрестности (x, y, z), хотя, быть может они в точках, отличных от (x, y, z), не являются непрерывными. Рассмотрим приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, где $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z| < \delta$ и δ достаточно мало́, чтобы точка $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ не выходила из указанной окрестности. Имеют место равенства (пояснения ниже):

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = \tag{1}$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) + \tag{2}$$

$$+ f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z) + \tag{3}$$

$$+ f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = \tag{4}$$

$$= f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\,\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y, z+\Delta z)\Delta y + \\ + f'_z(x, y, z+\theta_3\Delta z)\,\Delta z = \tag{5}$$

$$= \big(f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1\big)\,\Delta x + \big(f'_y(x, y, z) + \varepsilon_2\big)\,\Delta y + \\ + \big(f'_z(x, y, z) + \varepsilon_3\big)\,\Delta z = \tag{6}$$

$$= f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z + o(\rho)\ (\rho \to 0), \tag{7}$$

$$0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1, \ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0 \quad (\rho \to 0). \tag{8}$$

Отметим, что соотношение $\rho \to 0$ эквивалентно трем соотношениям: $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$.

Переход от (2) к первому члену (5) обосновывается так: функция $f(\xi, y+\Delta y, z+\Delta z)$ от ξ (при фиксированных $y+\Delta y$, $z+\Delta z$) имеет, по условию, производную (по ξ) на отрезке $[x, x+\Delta x]$ и к ней применима теорема Лагранжа о среднем. Аналогичное пояснение ко второму и третьему членам (5). Переход от (5) к (6) чисто формальный: мы положили, например,

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1.$$

Но не формален здесь факт, что $\varepsilon_1 \to 0$ при $\rho \to 0$. Он следует из предположенной непрерывности f'_x в (x, y, z). Наконец, переход от (6) к (7) сводится к утверждению, что имеет место равенство

$$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z = o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

В самом деле (см. § 6.2, (9)) при $\rho \to 0$

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z|/\rho \leqslant \rho \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}/\rho = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \to 0.$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1. *Если функция $u = f$ имеет непрерывные частные производные (первого порядка) в точке (x, y, z), то ее приращение в этой точке, соответствующее достаточно малому приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, можно записать по формуле*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(\rho) \ (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \tag{9}$$

где частные производные взяты в точке (x, y, z).

Так как значения частных производных в правой части (9) не зависят от Δx, Δy, Δz, то из условий теоремы 1 следует, что приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, может быть записано по формуле

$$\Delta u = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{10}$$

где числа A, B, C не зависят от Δx, Δy, Δz.

Сделаем следующее определение: если приращение функции f в точке (x, y, z) для достаточно малых $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ может быть записано в виде суммы (10), где A, B, C — числа, не зависящие от Δx, Δy, Δz, то говорят, что функция f *дифференцируема* в точке (x, y, z). Таким образом, *дифференцируемость функции f в (x, y, z) заключается в том, что ее приращение Δf в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое есть линейная функция $A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z$ от $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — она называется главной линейной частью приращения Δf, второе же слагаемое, вообще, сложно зависит от приращений Δx, Δy, Δz, но если стремить их к нулю, то оно будет стремиться к нулю, быстрее, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.*

Легко видеть, что если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), т. е. представляется равенством (10), то она имеет в этой точке производные, равные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = C. \tag{11}$$

Например, первое равенство (11) доказывается так. Пусть приращение f в (x, y, z) записывается по формуле (10). Если считать в последней $\Delta x = h$, $\Delta y = \Delta z = 0$, то получим равенство $\Delta_{xh} u = Ah + o(h)$ $(h \to 0)$. После деления его на h и перехода к пределу, получим

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh} u}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

Из сказанного следует

Теорема 2. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные, и достаточно, чтобы она имела в этой точке непрерывные частные производные.*

Из (10) следует, что *если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.*

Пример 1. Функция $f(x, y, z)$, равная нулю на координатных плоскостях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и единице в остальных точках R_3, имеет, очевидно, частные производные, равные нулю в точке $(0, 0, 0)$, но она, очевидно, разрывна в этой точке и потому не может быть в ней дифференцируемой. Таким образом, одного существования частных производных в точке недостаточно для дифференцируемости и даже непрерывности в этой точке.

Отметим отличие многомерного случая от одномерного. При $n = 1$ свойство дифференцируемости f в x записывается в виде равенства $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, следовательно, если $A \neq 0$, то остаток стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее главной части. При $n > 1$ это уже не так; например, при $n = 3$, каковы бы ни были числа A, B, C, одновременно не равные нулю, всегда можно стремить Δx, Δy, Δz к нулю так, чтобы при этом постоянно выполнялось равенство $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0$, но тогда в (10) остаточный член $o(\rho)$ вообще больше главного. Впрочем, если мы заставим Δx, Δy, Δz стремиться к нулю так, чтобы выполнялась пропорциональность $\Delta x : \Delta y : \Delta z = A : B : C$, то тогда главная часть приращения будет величиной, имеющей строго порядок ρ, и остаток будет стремиться к нулю быстрее главной части.

Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то главная линейная часть ее приращения в этой точке называется еще *дифференциалом f в этой точке, соответствующим приращениям $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ независимых переменных.*

Он записывается так: $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$. О других обозначениях мы будем еще говорить.

Рассмотрим поверхность S, описываемую функцией $z = f(x, y)$, заданной в окрестности точки (x_0, y_0).

Плоскость L_0 называется *касательной плоскостью к поверхности S в ее точке $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$*, если расстояние $r(P, L_0)$ подвижной точки $P = (x, y, z) \in S$ до L_0 стремится к нулю быстрее расстояния ρ от P до P_0:

$$r(P, L_0) = o(\rho) \quad (\rho \to 0). \tag{12}$$

Теорема 3. *Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то описываемая ею поверхность имеет, и притом единственную, касательную плоскость в точке P_0, определяемую уравнением*

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \tag{13}$$

($( )_0$ обозначает, что в скобках надо положить $x = x_0$, $y = y_0$).

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), S — описываемая ею поверхность и L_0 — плоскость, определяемая уравнением (13). Произвольная точка $P \in S$ имеет координаты $(x, y, f(x, y))$. Из аналитической геометрии известно, что ее расстояние до L_0 выражается формулой (пояснения ниже)

$$r(P, L_0) = \frac{1}{M}\left|f(x,y) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)\right| = \\ = o(r) = o(\rho), \quad r \to 0, \ \rho \to 0, \quad (14)$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + [f(x,y) - f(x_0, y_0)]^2}.$$

Здесь $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 + 1}$ есть нормирующий множитель плоскости L_0. Второе равенство (14) имеет место вследствие предположенной дифференцируемости f в точке (x_0, y_0). Последнее же равенство говорит, что величина вида $o(r)$ $(r \to 0)$ обладает тем свойством, что ее отношение к ρ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Ведь если $\rho \to 0$, то тогда и $r \to 0$ $(0 \leqslant r \leqslant \rho!)$ и потому

$$\left|\frac{o(r)}{\rho}\right| = \left|\frac{o(r)}{r} \cdot \frac{r}{\rho}\right| \leqslant \left|\frac{o(r)}{r}\right| \to 0.$$

Мы доказали, что плоскость, определяемая уравнением (13), есть касательная плоскость к S в точке (x_0, y_0).

Другой касательной плоскости к S в точке (x_0, y_0) не существует. В самом деле, пусть касательная плоскость к S в P_0 имеет уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (15)$$

Тогда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) - C(f - f_0) = o(\rho) = o(r), \quad \rho \to 0, \ r \to 0. \quad (16)$$

Последнее равенство в (16) объясняется следующим образом. В силу дифференцируемости f в точке (x_0, y_0)

$$|f - f_0| = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \varepsilon r\right| \leqslant \\ \leqslant r\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2} + r|\varepsilon| < cr,$$

где c — константа, не зависящая от r. Надо учесть, что ε ограничено, потому что $\varepsilon \to 0$ при $r \to 0$. Но тогда

$$\rho = \sqrt{r^2 + |f - f_0|^2} < c_1 r,$$

где c_1 не зависит от r и $\rho \to 0$ при $r \to 0$, следовательно,

$$\left|\frac{o(\rho)}{r}\right| = \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\,\frac{\rho}{r}\right| \leqslant c_1 \left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right| \to 0, \quad r \to 0, \quad \rho \to 0.$$

Если положить в (16) $y = y_0$, разделить на $x - x_0$ и перейти к пределу при $x \to x_0$, то получаем

$$A - C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0.$$

Аналогично, полагая в (16) $x = x_0$, деля на $y - y_0$ и переходя к пределу при $y \to y_0$, получим

$$B - C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Но тогда $C \neq 0$, потому что иначе было бы $A = B = C = 0$, и, следовательно, наша плоскость имеет вид (13).

Пример 2. Функция ($\alpha > 0$)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{(1+\alpha)/2} & \text{в рациональных точках,} \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

очевидно, разрывна в любой точке, отличной от нулевой, в нулевой же точке она дифференцируема:

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) = 0x + 0y + \rho^{1+\alpha},$$

где $\rho^{1+\alpha} = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$. Таким образом, f есть пример функции, дифференцируемой в точке, но не имеющей непрерывных частных производных в этой точке.

Примеры 1 и 2 показывают, что свойство функции быть дифференцируемой в точке слабее свойства иметь непрерывные частные производные в точке, но сильнее свойства иметь частные производные в точке.

§ 7.6. Производная сложной функции; производная по направлению; градиент

Ограничимся рассмотрением функции трех переменных, определенной на открытом множестве $G \subset R_3$. Распространение излагаемых здесь фактов на n-мерный случай производится аналогично.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$u = f(x, y, z) \tag{1}$$

дифференцируема в точке $(x, y, z) \in G$, а функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{2}$$

зависящие от скалярного параметра t, имеют производную в t. Тогда производная по t от сложной функции (производная от f вдоль кривой (2)) $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ вычисляется по формуле

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t) + \\ + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t),$$

или, короче:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

В самом деле, вследствие дифференцируемости f в (x, y, z) каково бы ни было достаточно малое приращение $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad \left(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0\right). \tag{4}$$

Значению t, которому при помощи равенств (2) соответствует точка (x, y, z), придадим приращение Δt. Оно вызовет приращения Δx, Δy, Δz функций (2). Если именно их подставить в (4), то получим приращение $F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta u$ функции F в точке t. После деления (4) на Δt и перехода к пределу получим

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}\right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

т. е. (3), потому что функции (2) имеют производные, а

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \varepsilon(\rho) \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z^2}{\Delta t}\right)} \to$$
$$\to 0 \cdot \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = 0 \quad (\Delta t \to 0)$$

($\Delta t \to 0$ влечет $\rho \to 0$).

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то для нее имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора* $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, *выражаемая формулой*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно определения производной по направлению (см. § 7.4) и в силу предыдущей теоремы

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x + t\cos\alpha, y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma) - f(x, y, z)}{t} =$$
$$= \left[\frac{d}{dt} f(x + t\cos\alpha, y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\right]_{t=0} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где частные производные взяты в (x, y, z).

Если $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ — уравнение гладкой кривой Γ, где параметр s — длина дуги, то величины

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s), \quad \frac{dy}{ds} = \psi'(s), \quad \frac{dz}{ds} = \chi'(s)$$

суть направляющие косинусы вектора касательной к Г. Поэтому величина

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s)+\frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s)=\frac{d}{ds}f(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)),$$

где f — дифференцируемая функция, есть производная по направлению указанного касательного вектора. Говорят еще, что $\frac{\partial f}{\partial s}$ есть производная от f вдоль Г.

Введем вектор

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),\tag{6}$$

называемый *градиентом* функции f в точке (x, y, z).

Плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярная к градиенту f в этой точке, если он не равен нулю, имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0.\tag{7}$$

Эта плоскость замечательна тем, что ее можно (в силу (5)) рассматривать как геометрическое место выходящих из (x_0, y_0, z_0) лучей, вдоль которых производная от f равна нулю. В § 7.19 будет доказано, что эта плоскость есть касательная плоскость в (x_0, y_0, z_0) к поверхности, определяемой уравнением

$$f(x, y, z)=A\quad(A=f(x_0, y_0, z_0)).\tag{8}$$

Формула (5) говорит, что *производная от f в точке (x, y, z) по направлению единичного вектора* $\mathbf{n}$ *равна проекции градиента f в этой точке на направление* $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}=(\operatorname{grad} f, \mathbf{n})=\operatorname{grad}_{\mathbf{n}} f.\tag{9}$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\leqslant|\operatorname{grad} f|\tag{10}$$

для любого вектора $\mathbf{n}$. Если $\operatorname{grad} f=\mathbf{0}$, что обычно бывает только в исключительных точках, то $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}=0$ для любого вектора $\mathbf{n}$. Если же $\operatorname{grad} f\neq\mathbf{0}$ (одна из частных производных от f не равна нулю), то (10) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\mathbf{n}$, за исключением единственного вектора $\mathbf{n}_0=(\cos\alpha_0,$

$\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$), направленного в сторону $\operatorname{grad} f$. Таким образом,

$$\cos\alpha_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos\gamma_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{11}$$

Из сказанного следует, что *градиент функции f в точке (x, y, z) можно определить как вектор, обладающий следующими двумя свойствами:*

1) *длина его равна максимальной величине производной по направлению* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ в (x, y, z) (для дифференцируемой в (x, y, z) функции этот максимум существует и есть число неотрицательное);

2) *если его длина не равна нулю, то он направлен в ту же сторону, что и вектор* $\mathbf{n}$, *вдоль которого производная* $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ *максимальна.*

Это новое определение градиента полностью эквивалентно его формальному определению при помощи формулы (6). Оно показывает, что $\operatorname{grad} f$ есть инвариант, т. е. он может быть определен независимо от системы координат, в которой рассматривается функция f от точки (см. (1)). Чтобы пояснить эти слова, рассмотрим физический пример. Будем считать, что G есть физическое тело, а $u = u(P)$ есть температура переменной его точки P, вообще меняющаяся от точки к точке. Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат (x, y, z), то физическая функция $u = u(P)$ может быть заменена на математическую $u = f(x, y, z)$, где (x, y, z) — прямоугольные координаты точек $P \in G$. В другой прямоугольной системе (x', y', z') наша физическая функция будет описываться, вообще говоря, другой математической функцией

$$u = f_1(x', y', z') = \\ = f(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'), \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned} \tag{13}$$

— формулы преобразования координат.

Градиент нашей физической функции $u = u(P)$ естественно определить в духе второго приведенного выше определения. Это есть вектор, по направлению которого температура в данной точке P возрастает быстрее всего, длина же его равна максимальной скорости возрастания температуры среди скоростей, соответствующих разным направлениям.

Мы знаем, что если функция f, описывающая нашу физическую функцию, в системе (x, y, z) дифференцируема в точке $P = (x, y, z)$, для нее имеет смысл градиент в этой точке, определяемый тройкой чисел

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{14}$$

Во второй системе координат (x', y', z') он задается другой тройкой:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}\right). \tag{15}$$

Таким образом, мы из чисто физических соображений доказали, что если некоторый вектор в прямоугольной системе координат (x, y, z) задан тройкой чисел (14), то при условии дифференцируемости f в (x, y, z) он в новой системе (x', y', z') задается тройкой (15), где f_1 определяется формулами (12), (13). Но этот факт можно доказать и формально.

В самом деле, вектор (14) согласно формулам, известным из аналитической геометрии, в новой системе (x', y', z') имеет компоненты

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial x'}, \\ \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \\ \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial z'}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Тот факт, что эти компоненты равны соответственно $\frac{\partial f_1}{\partial x'}, \frac{\partial f_1}{\partial y'}, \frac{\partial f_1}{\partial z'}$, вытекает из теоремы 1 о производной сложной функции. Надо иметь в виду при применении этой теоремы, что обычную производную по t, очевидно, всюду можно заменить на частную производную по t.

Градиент f еще записывают так:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \tag{17}$$

где ∇ — оператор*), который каждой дифференцируемой в

*) Знак ∇ напоминает арфу, греческое название которой — $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ (набла).

(x, y, z) функции f приводит в соответствие вектор — $\operatorname{grad} f$. Этот оператор называется *оператором Гамильтона или оператором набла.* Его удобно считать символическим вектором

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{18}$$

и рассматривать $\operatorname{grad} f$ как символическое произведение вектора ∇ на скаляр f.

При физическом подходе к функции как к некоторой величине u, зависящей от точки пространства, формулы (16) естественно записать следующим образом (не вводя функций f и f_1 для разных систем координат):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x'}, \\
\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial y'}, \\
\alpha_3 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z'}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В формальной теории векторов *вектором* (трехмерным) называется вещь, обозначаемая символом $\mathbf{a}$ и выражаемая в каждой прямоугольной системе координат (x, y, z) тройкой чисел $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — компонент $\mathbf{a}$ в системе (x, y, z). При этом компоненты вектора $\mathbf{a}$ в любой другой прямоугольной системе координат (x', y', z'), $\mathbf{a} = (a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$, получаются из (a_x, a_y, a_z) при помощи преобразований

$$a_{x'} = \alpha_1 a_x + \beta_1 a_y + \gamma_1 a_z, \quad a_{y'} = \alpha_2 a_x + \beta_2 a_y + \gamma_2 a_z,$$
$$a_{z'} = \alpha_3 a_x + \beta_3 a_y + \gamma_3 a_z,$$

аналогичных преобразованиям координат (x, y, z) в (x', y', z'):

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Формулы (19) дают, таким образом, формальное доказательство того факта, что $\operatorname{grad} f$ есть вектор.

Отсюда уже нетрудно сделать следующий формальный шаг. Будем считать, что оператор ∇ есть вектор (символический), имеющий в прямоугольной системе (x, y, z) компоненты $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, а в произвольной другой прямоугольной системе (x', y', z') — компоненты $\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$. При этом новые компоненты выражаются через старые при помощи (символических) равенств

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial z'} &= \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

т. е. так, как если бы символический оператор ∇ был реальным вектором. Если помножить (символически) левые и правые части (20) на скаляр u (дифференцируемую функцию), то мы получим известное уже нам равенство (19) между частными производными от функции от u.

Таким образом, если заданы компоненты градиента f в системе (x, y, z) и нужно вычислить его компоненты в системе (x', y', z'), можно поступить так. Считаем, что $\operatorname{grad} f = \nabla f$ есть произведение вектора ∇ на скаляр f, находим компоненты ∇ в системе (x', y', z') по формулам (20), а затем умножаем их на скаляр f. Иначе говоря, при преобразовании вектора ∇f к новым координатам применяются те же операции, как если бы ∇ был обычным вектором, а f — помноженным на него числом (скаляром).

Пример 1. Пусть $f(r) = F(Q)$ есть функция от расстояния $r = r(P, Q)$ между фиксированной точкой $P(x_0, y_0, z_0)$ и переменной точкой $Q = (x, y, z)$;

$$\operatorname{grad} F = \left(f'(r)\frac{x - x_0}{r},\ f'(r)\frac{y - y_0}{r},\ f'(r)\frac{z - z_0}{r}\right)$$

есть вектор, имеющий направление вектора PQ и длину $|\operatorname{grad} F| = |f'(r)|$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = |f'(r)| \cos(PQ, \mathbf{n}).$$

В частности, если $F(Q) = f(r) = \ln(1/r)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\cos(PQ, \mathbf{n})}{r}.$$

Пример 2. Функции

$$(\nabla u, \nabla u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{21}$$

$$\Delta u = \nabla\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{22}$$

инвариантны относительно преобразований прямоугольных систем координат, потому что $\nabla u = \operatorname{grad} u$ — вектор (инвариант), левая часть (21) есть квадрат его длины (скалярное произведение вектора на самого себя), а $\nabla\nabla$ есть символический инвариант (скалярное произведение символического вектора ∇ на самого себя), умноженный на скаляр.

§ 7.7. Независимость от порядка дифференцирования

Теорема 1. *Пусть на открытом плоском множестве G задана функция $f(x, y)$. Если она имеет в точке (x, y) непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то они равны между собой в этой точке:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \tag{1}$$

В самом деле,

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{xh}[f(x, y+h) - f(x, y)] = f(x+h, y+h) - \\ - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y) = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f. \tag{2}$$

Далее (пояснения ниже),

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh}f = \Delta_{yh}\,[f(x+h, y) - f(x, y)] = h[f'_y(x+h, y+\theta h) - f'_y(x, y+\theta h)] = h^2 f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta h) = h^2\left[f''_{xy}(x, y) + \varepsilon\right] \quad (\varepsilon \to 0 \text{ при } h \to 0). \qquad (3)$$

Так как производная $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывна в точке (x, y), то тем самым она существует в достаточно малой окрестности этой точки и автоматически в этой окрестности существует $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y$. При достаточно малом h мы не выходим из этой окрестности и законно, как это сделано во втором равенстве (3), применить теорему о среднем по y к функции $[f(x+h, y) - f(x, y)]$. Предпоследнее равенство есть применение этой же теоремы по x к f'_y, что законно, потому что в указанной окрестности существует частная производная $\dfrac{\partial f'_y}{\partial x} = f''_{xy}$. Последнее равенство, где отмечается, что $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$, выражает, что производная f''_{xy} в точке (x, y) непрерывна. Из (3) следует, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{yh}\Delta_{xh}f}{h^2} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогично, пользуясь непрерывностью f''_{yx}, доказывается равенство

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{xh}\Delta_{yh}f}{h^2} = f''_{yx}(x, y),$$

и так как $\Delta_{xh}\Delta_{yh} = \Delta_{yh}\Delta_{xh}f$ при любых h, то верно и (1).

Заметим, что непрерывность обеих входящих в (1) частных производных есть только достаточное условие для выполнения равенства (1). В литературе известны и менее ограничительные накладываемые на f условия, влекущие за собой это равенство, но очень редко приходится их применять.

Пусть дан целочисленный неотрицательный вектор $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_j \geqslant 0)$. Будем говорить, что частная производная подчинена вектору $\mathbf{k}$, если каково бы ни было $j = 1, \ldots, n$, при ее вычислении применяется операция $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ не больше, чем k_j раз. Если, в частности, $k_j = 0$, то операция $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ не применяется. Теперь мы можем высказать теорему.

Теорема 2. *Если все подчиненные вектору* $\mathbf{k}$ *частные производные от функции* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывны (в* R_n*) в точке* $\mathbf{x}$, *то в любой из них можно переставить порядок дифференцирования как угодно, не изменяя результата.*

Доказательство этой теоремы во всей ее общности потребовало бы хотя и простой, но громоздкой индукции. Мы ограничимся только примером. Производная $\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$ подчинена, очевидно, вектору (1, 1, 2). В предположении, что не только она, но и все частные производные от f, подчиненные этому вектору, непрерывны по (x, y, z), мы можем, пользуясь всякий раз либо определением частной производной либо теоремой 1, получить равенства

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}.$$

Например, во втором равенстве мы рассуждаем так: частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, по условию, непрерывны относительно (x, y, z), тем более они непрерывны при фиксированном x относительно (y, z), поэтому они равны. В пятом равенстве это же рассуждение проводится для $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Упражнение. Показать, что функция

$$v = \frac{1}{8\pi^{3/2}(t_0 - t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t_0 - t)}},$$
$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

называемая фундаментальным решением уравнения теплопроводности, удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\Delta_0 v - \frac{\Delta v}{\partial t_0} = 0, \quad \Delta v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$
$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right).$$

§ 7.8. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка

Рассмотрим функцию

$$W = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

заданную на некотором открытом множестве $G \subset R_n$. Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$W = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, \ldots, u_m), \tag{2}$$

где

$$u_j = \psi_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \ldots, m; \ \mathbf{x} \in G). \tag{3}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная W есть функция от независимой векторной переменной $\mathbf{x}$; эта же переменная W есть функция от *зависимой векторной переменной* $\mathbf{u}$. Последняя зависит от независимой переменной $\mathbf{x}$: каждому вектору $\mathbf{x}$ из G соответствует вектор

$$\mathbf{u} = (\psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x})).$$

Таким образом, роль векторной переменной $\mathbf{x}$ здесь носит исключительный характер — она в приводимых ниже рассуждениях будет фигурировать *только как независимая переменная.*

Пусть функция f имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке $\mathbf{x} \in G$. Тогда, как мы знаем из § 7.5, она дифференцируема, т. е. приращение ее в этой точке может быть записано в виде

$$\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{4}$$

$$\rho = |\Delta x| = \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Сумма

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j \tag{5}$$

называется *главной линейной частью приращения* W в точке $\mathbf{x}$ или еще *дифференциалом* W *в этой точке, соответствующим приращениям* $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ *независимых переменных.*

Для независимых $x_1, \ldots, x_n$ полагают

$$\Delta x_j = dx_j \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

и называют эти величины не только приращениями независимых переменных x_i, но и их *дифференциалами.* Мы будем их называть *независимыми дифференциалами* в знак того, что они не зависят от $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Формально «независимость» величин dx_j будет проявляться в том, что при дифференцировании (по $x_1, \ldots, x_n$) они будут рассматриваться как *постоянные* ($d(dx_j) = 0$).

В силу соглашения (6) дифференциал W может быть записан в форме

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j. \tag{7}$$

Ясно, что dW есть величина, зависящая, вообще говоря, от $x_1, \ldots, x_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$.

Для любых двух функций, u и v, имеющих непрерывные частные производные в точке $\mathbf{x}$, справедливы свойства

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{8}$$

$$d(uv) = udv + vdu, \tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{10}$$

и при этом частные производные от функций, стоящих в скобках, непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Докажем, например, третье из этих равенств:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right) dx_j = \sum_{1}^{n} \frac{v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}}{v^2} dx_j =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(v\sum_{1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j - u\sum_{1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Непрерывность $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right)$ видна из третьего члена цепи.

Дифференциал от функции W называют еще *дифференциалом первого порядка*, потому что приходится еще рассматривать дифференциалы высших порядков.

Пусть теперь функция W имеет вторые непрерывные частные производные. По определению, *второй дифференциал* от нее, соответствующий независимым приращениям (дифференциалам) $dx_1, \ldots, dx_n$, определяется равенством

$$d^2W = d(dW), \tag{11}$$

где считается, что обе операции d в правой части (11) берутся для указанных независимых приращений $dx_1, \ldots, dx_n$, которые должны рассматриваться как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$). Таким образом,

$$d^2W = d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_i} dx_j = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(d\frac{\partial W}{\partial x_i}\right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i. \tag{12}$$

Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}$, то второй дифференциал представляет собой квадратическую форму относительно независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$.

Вообще, дифференциал порядка l от W для независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения

$$d^lW = d(d^{l-1}W) \quad (l = 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

где d^l, d, d^{l-1} берутся для указанных независимых дифференциалов dx_i, которые к тому же рассматриваются при вычислениях как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$).

Рассуждая как в (12), легко получим, что

$$d^3W = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 W}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} dx_k dx_i dx_j$$

и в общем случае

$$d^lW = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_l=1}^{n} \frac{\partial^l W}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_l}} dx_{k_1} \ldots dx_{k_l}.$$

Мы определили понятие дифференциала функции W в терминах независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или независимой векторной переменной $\mathbf{x}$). Но пусть, как это было объяснено в начале этого параграфа, W рассматривается теперь как функция от *зависимой* векторной переменной $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$. Возникает вопрос, как выражаются дифференциалы первого и высшего порядков в терминах этой переменной u. Начнем изучение этого вопроса в случае дифференциала первого порядка.

Будем предполагать, что функции $\varphi(u)$ и $\psi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$, о которых шла речь в начале параграфа, имеют непрерывные частные производные. Тогда

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} du_i, \tag{14}$$

и мы получили, как в случае одной переменной, что первый дифференциал от W выражается через зависимые переменные так же, как через независимые. В этом проявляется *инвариантность формы первого дифференциала.*

Чтобы исследовать поставленный вопрос, в случае второго дифференциала будем предполагать, что функции φ и ψ_j имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Дифференцируя обе части (14), приняв во внимание свойства (8) и (9), получим (пояснения ниже)

$$d^2W = d(dW) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_i} du_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i} du_j du_i + \frac{\partial W}{\partial u_i} d^2u_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} du_i du_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} d^2u_i. \quad (15)$$

Во втором равенстве этой цепи мы воспользовались свойствами (8) и (9), и, кроме того, тем фактом, что форма первого дифференциала сохраняется и для зависимых переменных u_j.

Мы видим, что второй дифференциал от функции W, выраженный в терминах зависимых переменных u_j, существенно распадается на два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратическую форму, аналогичную форме (12), где d^2W выражалось через независимые переменные. Второе же слагаемое представляет собой некоторый добавок, с которым надо считаться: если $u_i \neq x_i$, то этот добавок, вообще говоря, не равен нулю. Впрочем, если u_i $(i = 1, \ldots, m)$ — линейные функции от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, то свойство инвариантности сохраняется и для дифференциалов высшего порядка.

Отметим, что из наших рассуждений следует, что если выражение (15) взято для $dx_1, \ldots, dx_n$, которые фигурируют в выражении (12), то оба эти выражения тождественно равны, каковы бы ни были $\mathbf{x}$, для которых существуют указанные выше непрерывные частные производные второго порядка, и каковы бы ни были независимые dx_i.

Выраженные через зависимые переменные u_j дифференциалы d^3W, d^4W, ... вычисляются подобным образом последовательно. Приходится считаться с тем фактом, что выражения для них становятся все более громоздкими.

§ 7.9. Предельная точка. Теорема Вейерштрасса. Замкнутые и открытые множества

Рассмотрим произвольное множество E точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $R_n = R$.

По определению, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ есть *предельная точка* E, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x}$, принадлежащую E и отличную от $\mathbf{x}^0$.

На самом деле из этого определения следует, что любая окрестность $\mathbf{x}^0$ содержит в себе бесконечное множество точек $\mathbf{x}$, принадлежащих E, и можно определить последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| \to 0$.

В самом деле, согласно определению предельной точки, для каждого натурального $k = 1, 2, \ldots$ имеется $\mathbf{x}^k \in E$, для которой $0 < |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < 1/k$ и $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < |\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^0|$, где $k = 1, 2, \ldots$.

Приведем другие определения предельной точки, очевидно, эквивалентные данному выше:

$\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E, если любой открытый шар (открытый куб) с центром в $\mathbf{x}^0$ содержит хотя бы одну точку $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ или если существует последовательность точек $\{\mathbf{x}^k\}$ такая, что $\mathbf{x}^k \in E$ $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ $(k \to \infty)$.

Множество всех предельных точек E обозначается через E' и называется *производным множеством* от E.

Пример 1. Пусть E — множество точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами. Любая точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R$ есть предельная точка E, потому что произвольный куб $|x_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, n)$ содержит в себе точки E, отличные от x^0. Таким образом, $E' = R_n$.

Пример 2. Конечное множество точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$ не имеет ни одной предельной точки ($E \neq \varnothing$) хотя бы потому, что в любой окрестности предельной точки должно было бы быть бесконечное множество точек E.

Пример 3. Множество E $\mathbf{x}^k = (k, 0, \ldots, 0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не имеет предельных точек ($E' = \varnothing$), потому что расстояние между любыми его точками $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l| = |k - l| \geqslant 1$ $(k \neq l)$. Если бы точка $\mathbf{x} \in R_n$ была предельной точкой E, то в любой ее малой окрестности находились бы две точки E,— расстояние между ними могло быть меньшим как угодно малого $\delta > 0$.

Пример 4. Пусть

$$V_1 = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 < r^2\right\}, \quad \Gamma = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 = r^2\right\}, \quad V_2 = \left\{\mathbf{x}: \sum_1^n x_k^2 > r^2\right\}.$$

Распространяя обычную терминологию с $n = 3$ на произвольное n, мы скажем, что V_1 есть открытый шар в R_n с центром в нулевой точке, Γ — его граница, и V_2 — его внешность. Имеют место следующие факты:

$$\begin{gathered} V_1' = V_1 + \Gamma, \ (V_1 + \Gamma)' = V_1 + \Gamma, \ V_2' = V_2 + \Gamma, \\ (V_2 + \Gamma)' = V_2 + \Gamma, \ \Gamma' = \Gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

Из наглядных соображений (рис. 7.4), которые легко перевести на язык неравенств, следует, что точку $\mathbf{x}^1 \in V_1$ можно окружить достаточно малым шаром (с центром в ней) полностью принадлежащим V_1, откуда x^1 есть предельная точка V_1, но не есть предельная точка Γ и V_2. Любой шар с центром в произвольной точке $\mathbf{x}^2 \in \Gamma$ содержит в себе отличные от нее точки V_1, Γ и V_2, и потому $\mathbf{x}^2$ есть предельная точка V_1, Γ, V_2, $V_1 + \Gamma$, $V_2 + \Gamma$. Наконец, точку $\mathbf{x}^3 \in V_2$ можно окружить шаром, полностью принадлежащим V_2, и потому она есть предельная точка V_2, но не есть предельная точка V_1, Γ, $V_1 + \Gamma$. Отсюда следуют равенства (1).

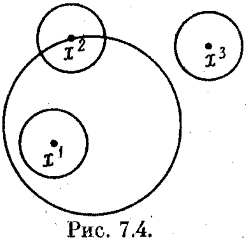

Рис. 7.4.

Множество E называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре (кубе). В противном случае E называется *неограниченным*. В этом определении можно считать, что шар (куб), о котором идет речь, имеет центр в нулевой точке, потому что, если все точки $\mathbf{x} \in E$ удовлетворяют неравенству $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\| < \rho_1$, то и неравенству $|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| + |\mathbf{x}^0| < \rho_2$, где $\rho_2 = \rho_1 + |\mathbf{x}^0|$.

Следующая теорема обобщает соответствующую одномерную теорему и базируется на ней:

Теорема 1. *Из всякой ограниченной последовательности точек* $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)(k = 1, 2, \ldots)$ *можно выделить подпоследовательность* $\left\{\mathbf{x}^{k_l}\right\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$, *сходящуюся к некоторой точке* $\mathbf{x}^0$:

$$\left\|\mathbf{x}^{k_l} - \mathbf{x}^0\right\| \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Доказательство. Так как последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена, то существует число M такое, что

$$M > |\mathbf{x}^k| \geqslant |\mathbf{x}_j^k| \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Это показывает, что координаты точек $\mathbf{x}^k$ также ограничены. Первая координата пробегает ограниченную последовательность $\{x_1^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и на основании одномерной теоремы найдется подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$ натуральных чисел и некоторое число x_1^0 такие, что $x_1^{k_{l_1}} \to x_1^0\ (l_1 \to \infty)$. Вторую координату x_2^k рассмотрим только для найденных натуральных k_{l_1}. Подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_1}}\right\}$ ограничена, и по одномерной теореме можно выбрать подпоследовательность $\left\{x_2^{k_{l_2}}\right\}$ и число x_2^0 такие, что $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. Так как $\{k_{l_2}\}$ есть подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$, то имеет место одновременно $x_1^{k_{l_2}} \to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. В силу ограниченности третьей координаты можно, рассуждая как выше, получить подпоследовательность $\left\{k^{l_3}\right\}$ подпоследовательности $\left\{k^{l_2}\right\}$, для которой одновременно

$$x_1^{k_{l_3}} \to x_1^0, \quad x_2^{k_{l_3}} \to x_2^0, \quad x_3^{k_{l_3}} \to x_3^0,$$

где x_3^0 — некоторое число. Продолжая этот процесс, на n-м его этапе получим подпоследовательность натуральных чисел $k_{l_n} = k_l$ и систему чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ такие, что одновременно $x_j^{k_l} \to x_j^0$ $(l \to \infty;\ j \subset 1, \ldots, n)$. Полагая $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получим утверждение теоремы.

Но возвратимся к предельным точкам. Конечное (состоящее из конечного числа точек) множество не имеет предельных точек (пример 2). Существуют бесконечные неограниченные множества, не имеющие предельных точек (пример 3). Однако имеет место

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Ограниченное бесконечное множество E имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Так как множество E бесконечно, то оно содержит в себе последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ (бесконечную!) различных между собой точек. Из нее можно на основании предыдущей теоремы выделить подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}^{k_l}\right\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in R_n$. Так как все $\mathbf{x}^{k_l}$ для разных l различны, то $\mathbf{x}^0$ есть, очевидно, предельная точка E — ведь в любой ее окрестности имеются точки $\mathbf{x}^{k_l} \in E$, отличные от $\mathbf{x}^0$.

Конечно, $\mathbf{x}^0$ может принадлежать или не принадлежать к E.

Множество $E \subset R_n$ называется *замкнутым*, если все его предельные точки принадлежат ему ($E' \subset E$).

Надо иметь в виду, что в этом определении не утверждается, что E обязано иметь предельные точки, а только говорится, что если E имеет такие точки, то они принадлежат к E. Таким образом, *всякое множество, не имеющее вовсе предельных точек, замкнуто. Пустое множество, конечное множество, множество целых точек* (имеющих целые координаты) в пространстве R_n — *все это замкнутые множества.*

Множество примера 1 не замкнуто потому, что иррациональные точки являются предельными его точками, но они не принадлежат ему.

Шар вместе с границей (пример 4), внешность шара вместе с границей, сама граница — все это примеры замкнутых множеств. Открытый шар, внешность (замкнутого) шара — не замкнутые множества. Это геометрически очевидно, но легко может быть обосновано при помощи соответствующих неравенств.

Дадим еще другое определение замкнутого множества: множество E замкнуто, если из того, что точки сходящейся к $\mathbf{x}^0$ последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ принадлежат E, следует принадлежность $\mathbf{x}^0$ множеству E.

Эти определения эквивалентны. В самом деле, пусть E замкнуто в смысле первого определения, а второе определение для E не выполняется. Тогда найдутся последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ и точка $\mathbf{x}^0$ такие, что $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, но $\mathbf{x}^0 \notin E$. Но это возможно, очевидно, только тогда, когда элементы $\mathbf{x}^k$ последовательности пробегают бесконечное множество (различных между собой) точек, но тогда $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E и она должна по условию принадлежать E. Мы пришли к противоречию. Итак, из первого определения следует второе.

Наоборот, пусть E — замкнутое множество по второму определению и $\mathbf{x}^0$ предельная точка E; тогда найдется, как мы знаем, последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$. По второму определению $\mathbf{x}^0 \in E$ и, таким образом, всякая предельная точка E принадлежит E, т. е. выполняется первое определение.

Если к множеству E добавить все его предельные точки, то мы получим множество, которое обозначают через $\bar{E}$ и называют замыканием E. Таким образом, $\bar{E} = E + E'$.

Теорема 3. *Замыкание множества E есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка $\bar{E}$. Зададим $\varepsilon > 0$. В шаре $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \varepsilon$ должна существовать точка $\mathbf{x}' \in \bar{E}$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^0$. Последнюю можно окружить шаром, принадлежащим исходному шару, настолько малым, что он не содержит в себе точки $\mathbf{x}^0$. В нем обязательно должна быть точка E, которая, таким образом, принадлежит исходному шару. Итак, в любом шаре с центром $\mathbf{x}^0$ имеется отличная от $\mathbf{x}^0$ точка E. Это показывает, что $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка E, т. е. $\mathbf{x}^0 \in \bar{E}$.

Между замкнутыми и открытыми (см. § 7.1) множествами имеется тесная связь: *если E замкнуто, то $R-E$ открыто, и наоборот.* В самом деле, пусть E замкнуто и $\mathbf{x}^0 \in R-E$; тогда существует шар с центром в $\mathbf{x}^0$, принадлежащий к $R-E$. Если бы это было не так, то существовала бы последовательность точек $\mathbf{x}^k \in E$, сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$), и в силу замкнутости E тогда бы $\mathbf{x}^0 \in E$, и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь E — открытое множество. Возьмем произвольную, принадлежащую $R-E$, последовательность точек $\mathbf{x}^k$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. Последняя не может быть точкой E, потому что в любой ее окрестности имеются точки $R-E$, но тогда она принадлежит $R-E$. Следовательно, $R-E$ замкнуто.

Введем три определения.

1. Точка $\mathbf{x}^0$ называется *граничной точкой* множества E, если любая ее окрестность содержит в себе как точки E так и точки, не принадлежащие E.

2. Точка $\mathbf{x}^0$ называется (см. § 7.1) *внутренней точкой* множества E, если существует ее окрестность, полностью принадлежащая E.

3. Точка $\mathbf{x}^0$ называется *внешней* по отношению ко множеству E, если она не только не принадлежит E, но существует окрестность $\mathbf{x}^0$, полностью не принадлежащая E.

Всюду в этих определениях, очевидно, «окрестность» можно заменить на «открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$» или «открытый куб с центром в $\mathbf{x}^0$».

Обратим внимание на тот факт, что определения 1—3 взаимно исключают друг друга и единственно возможны. Иначе говоря, каждая точка $\mathbf{x} \in R$ удовлетворяет одному и только одному из этих определений.

Таким образом, если задано произвольное множество $E \subset R$, то по отношению к нему все пространство R распадается на три попарно непересекающихся множества:

1) E_1 — множество внутренних точек E — *открытое ядро множества E*. Это открытое множество, потому что, если $\mathbf{x} \in E_1$, то найдется полностью принадлежащий к E открытый шар V с центром в $\mathbf{x}^0$. Но все точки V — внутренние для V, следовательно, и для E, следовательно, $V \subset E_1$.

2) E_2 — множество внешних точек E — **внешность** E. Это тоже открытое множество, что доказывается аналогично.

3) Γ — множество граничных точек E — **граница** E.

Это замкнутое множество, потому что E_1+E_2 — открыто как сумма двух открытых множеств и $\Gamma = R-(E_1+E_2)$.

Множества $E_1+\Gamma$ и $E_2+\Gamma$, очевидно, замкнутые, потому что их дополнения до R открытые.

Имеют место (теоретико-множественные) равенства

$$E_1+\Gamma = E+\Gamma = \overline{E},\quad E_2+\Gamma = (R-E)+\Gamma = \overline{R-E},$$

доказательство которых представляется читателю.

В равенстве $R = E_1+E_2+\Gamma$ одно или два слагаемых в правой части могут оказаться пустыми множествами. Надо иметь в виду, что пустое множество и все пространство R являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

Пример 5. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена и непрерывна на R и c — заданное число, тогда, как нетрудно доказать, множества (точек $\mathbf{x}$, для которых выполняются указанные в скобках соотношения) $\{f(\mathbf{x}) = c\}$, $\{f(\mathbf{x}) \leqslant c\}$, $\{f(\mathbf{x}) \geqslant c\}$ замкнутые, а множества $\{f(\mathbf{x}) > c\}$, $\{f(\mathbf{x}) < c\}$ — открытые. Конечно, некоторые из этих множеств могут оказаться пустыми, но пустые множества одновременно замкнуты и открыты.

Результаты примера 4 немедленно следуют из этих утверждений. Надо иметь в виду, что если бы функция $f(\mathbf{x})$ была задана только на части R, то указанные утверждения могут и не иметь места.

Теорема 4. *Всякое открытое одномерное (лежащее на оси $(-\infty, \infty)$) множество G есть сумма конечного или счетного числа попарно не пересекающихся интервалов*:

$$G = \sum \delta_k.$$

В самом деле, пусть точка $\mathbf{x}^0 \in G$; тогда существуют интервалы $\delta_{\mathbf{x}^0} = (\lambda, \mu)$, покрывающие $\mathbf{x}^0$ и полностью принадлежащие G. Пусть

$$\alpha = \inf \lambda, \quad \beta = \sup \mu,$$

где нижняя и верхняя грани распространены на всевозможные указанные интервалы $\delta_{\mathbf{x}^0}$. В частности, может случиться, что $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$ или эти равенства выполняются одновременно (и тогда $G = (-\infty, \infty)$). Каждой точке $\mathbf{x}^0 \in G$ мы привели в соответствие максимальный интервал $\delta = (\alpha, \beta)$, ее содержащий и полностью содержащийся в G. Пусть A есть множество различных интервалов δ (очевидно, попарно не пересекающихся). Каждому из них приведем в соответствие одно принадлежащее ему рациональное число. Ясно, что A конечно или счетно, потому что оно эквивалентно некоторому подмножеству рациональных чисел. Это доказывает теорему.

Упражнения.

1. Доказать, что сумма конечного или счетного числа открытых множеств, а также пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Привести пример счетной системы открытых множеств, пересечение которых не есть открытое множество.

2. Доказать, что сумма конечного числа замкнутых множеств, так же как пересечение конечного и счетного числа замкнутых множеств, есть множество замкнутое. Привести пример счетной системы замкнутых множеств, сумма которых не есть замкнутое множество.

§ 7.10. Функции на множестве. Свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве

Пусть на произвольном множестве A точек n-мерного пространства ($A \subset R = R_n$) задана функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{x}^0$ — предельная точка A. Будем говорить, что число Λ *есть предел f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A, если* $\lim\limits_{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^k) = \Lambda$, какова бы ни была сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k \in A$, отличных от $\mathbf{x}^0$.

Это определение эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется куб или шар с центром в $\mathbf{x}^0$, для всех точек $\mathbf{x}$ которого, содержащихся в A, но отличных от $\mathbf{x}^0$, выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}) - \Lambda| < \varepsilon$. Эквивалентность этих определений доказывается аналогично тому, как это делается в случае предела функции f в точке $\mathbf{x}^0$ без добавления «на множестве» (см. § 4.1 и 7.2).

Аналогично доказывается условие Коши существования предела f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A: *для того чтобы существовал (конечный) предел f в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве A, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$, для которых $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$, $0 < |\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0| < \delta$.*

Будем говорить, что определенная на A функция f непрерывна на A в точке $\mathbf{x}^0 \in A$, если

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}^k \in A}} f(\mathbf{x}^k) = f(\mathbf{x}^0), \tag{1}$$

какова бы ни была сходящаяся к $\mathbf{x}^0$ последовательность точек $\mathbf{x}^k \in A$.

Обратим внимание, что если $\mathbf{x}^0$ есть *изолированная точка* A, т. е. не являющаяся предельной для A, то существует шар с центром в $\mathbf{x}^0$, содержащий в себе только одну точку множества A, а именно $\mathbf{x}^0$. Но тогда, если $\mathbf{x}^k \in A$ и $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$, то $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ для всех $k > N$, где N достаточно велико и равенство (1) выполняется автоматически.

Таким образом, *если $\mathbf{x}^0$ есть изолированная точка A, то функция, определенная на A, необходимо непрерывна на A в этой точке.*

Если функция f, определенная на A, непрерывна в любой точке A, то говорят, что f непрерывна на A.

Докажем две теоремы, выражающие замечательные свойства функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве; они обобщают соответствующие свойства непрерывных функций от одной переменной, заданных на отрезке.

Теорема 1. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, ограничена на нем.*

Доказательство. Допустим, что она не ограничена на A; тогда для любого натурального k найдется такая точка $\mathbf{x}^k \in A$, что

$$|f(\mathbf{x}^k)| > k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Полученная последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ ограничена. Из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k'}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in R_n$. Вследствие замкнутости A точка $\mathbf{x}^0 \in A$, а в силу непрерывности f в $\mathbf{x}^0$ на A $\lim\limits_{\mathbf{x}^{k'} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k'}) = f(\mathbf{x}^0)$, и мы получили противоречие с неравенствами (2).

Теорема 2. *Функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A, достигает на нем своего максимума и минимума.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы известно, что f ограничена на A. Поэтому она имеет на A конечные точные нижнюю и верхнюю грани:

$$m = \inf_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}), \quad M = \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Из свойства верхней грани следует, что для любого натурального k найдется точка $\mathbf{x}^k \in A$ такая, что

$$M - \frac{1}{k} < f(\mathbf{x}^k) \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Полученная последовательность $\{x^k\}$ ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{k_j}\}$, сходящуюся к некоторой точке $\mathbf{x}^0$. В силу замкнутости A точка $\mathbf{x}^0 \in A$ и в силу непрерывности f на A $\lim\limits_{\mathbf{x}^{k_j} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^{k_j}) = f(\mathbf{x}^0)$. С другой стороны, из (3) следует, что этот предел должен равняться числу M. Но тогда

$$f(\mathbf{x}^0) = M = \max_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Аналогично доказывается существование точки $\mathbf{y}^0 \in A$, в которой f достигает минимума на A:

$$f(\mathbf{y}^0) = m = \min_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим снова пока произвольное множество $A \subset R$ и определенную на нем не обязательно непрерывную функцию f, но ограниченную на A.

Зададим число $\delta > 0$ и введем величину

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta \\ \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')|, \tag{4}$$

называемую *модулем непрерывности f на множестве A*. В правой части (4) взята точная верхняя грань абсолютных величин разностей значений f, соответствующих всевозможным парам точек $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$, отстоящих друг от друга на расстоянии меньшем, чем δ.

Модуль непрерывности есть функция от δ, очевидно, неотрицательная. Она не убывает, потому что если $0 < \delta < \delta_1$, то

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta \\ \mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \sup_{\substack{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta_1 \\ \mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| = \omega(\delta_1).$$

Поэтому существует предел

$$\omega(0+0) = \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \delta>0}} \omega(\delta) = \lambda \geqslant 0. \tag{5}$$

По определению полагаем далее $\omega(0) = \lambda$.

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каковы бы ни были $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$, $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \lambda + \varepsilon,$$

где число λ определено в (5).

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого натурального k найдутся точки $\mathbf{x}_k'$, $\mathbf{x}_k'' \in A$ такие, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < 1/k$, в то время как $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| \geqslant \lambda + \varepsilon_0$. Но тогда

$$\omega(1/k) \geqslant |f(x_k') - f(x_k'')| \geqslant \lambda + \varepsilon_0$$

при любом k и $\lambda = \omega(0+0) = \lim\limits_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \geqslant \lambda + \varepsilon_0$, что невозможно.

Введем определение:

1) Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве A, если ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ на A стремится к нулю при $\delta \to 0$, т. е.

$$\omega(0+0) = \lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0. \tag{6}$$

Приведем другое эквивалентное определение.

2) Функция f называется *равномерно непрерывной* на A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in A$ с $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta$ имеет место $|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$.

Определение 1) влечет за собой 2) в силу теоремы 3, где надо положить $\lambda = 0$. Наоборот, если имеет место 2), то, задав $\varepsilon > 0$ и подобрав $\delta > 0$ так, как это сказано в 2), получим

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{\mathbf{x}',\mathbf{x}''\in A \\ |\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta}} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant \varepsilon,$$

и так как ω монотонно не убывает, то отсюда, следует (6), т. е. 1).

Докажем теперь важную теорему.

Теорема 4. *Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве A, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального k найдется пара точек

$$\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}''_k \in A, \quad |\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k| < 1/k, \tag{7}$$

для которых

$$|f(\mathbf{x}'_k) - f(\mathbf{x}''_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{8}$$

В силу ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}'_k\}$ и замкнутости A, существует подпоследовательность $\{\mathbf{x}'_{k_j}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in A$: $\mathbf{x}'_{k_j} \to \mathbf{x}^0$. В силу (7) тогда и $\mathbf{x}''_{k_j} \to \mathbf{x}^0$, и потому вследствие непрерывности f в $\mathbf{x}^0$,

$$\lim_{k_j \to \infty} |f(\mathbf{x}'_{k_j}) - f(\mathbf{x}''_{k_j})| = |f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^0)| = 0,$$

что противоречит (8).

Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $A \in R_n$. Будем предполагать, что она ограничена на A. Пусть $\mathbf{x}^0 \in A$ и $\delta > 0$. Обозначим через V_δ шар $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leqslant \delta$ с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса δ и положим $M_\delta = \sup\limits_{\mathbf{x} \in AV_\delta} f(\mathbf{x})$, $m_\delta = \inf\limits_{\mathbf{x} \in AV_\delta} f(\mathbf{x})$. Очевидно, что M_δ есть невозрастающая, а m_δ — неубывающая функции от δ, поэтому разность $M_\delta - m_\delta$ есть невозрастающая функция от δ. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} (M_\delta - m_\delta) = \omega(\mathbf{x}^0),$$

который называют *колебанием функции f в точке* $\mathbf{x}^0$. Нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы определенная на замкнутом ограниченном множестве A функция f была непрерывной на A в точке $\mathbf{x}^0 \in A$, необходимо и достаточно, чтобы ее колебание в этой точке равнялось нулю* $(\omega(\mathbf{x}^0) = 0)$.

Докажем еще теорему:

Теорема 6. *Пусть A есть замкнутое ограниченное множество и $\lambda > 0$. Тогда множество E_λ тех точек $\mathbf{x} \in A$, для которых $\omega(\mathbf{x}) \geqslant \lambda$, замкнуто.*

В самом деле, если $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}^0$ и $\omega(\mathbf{x}^k) \geqslant \lambda$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\mathbf{x}^0 \in A$ и, кроме того, если $V_\delta(\mathbf{x}_0)$ есть некоторый шар с центром в $\mathbf{x}^0$ радиуса δ, то найдется такое k, что точка $\mathbf{x}^k$ будет находиться строго внутри $V_\delta(\mathbf{x}_0)$. Но тогда можно указать шар $V_\sigma(\mathbf{x}^k)$ с центром в $\mathbf{x}^k$ и настолько малого радиуса, что

$$V_\sigma(\mathbf{x}^k) \in V_\sigma(\mathbf{x}_0),$$

и, следовательно,

$$M_\delta(\mathbf{x}_0) - m_\delta(\mathbf{x}^0) \geqslant M_\sigma(\mathbf{x}^k) - m_\sigma(\mathbf{x}^k) \geqslant \omega(\mathbf{x}^k) \geqslant \lambda.$$

Таким образом, $M_\delta(\mathbf{x}^0) - m_\delta(\mathbf{x}^0) \geqslant \lambda$ для любого шара $V_\delta(\mathbf{x}^0)$. Но тогда $\omega(\mathbf{x}^0) \geqslant \lambda$.

Пример 1. Множество Ω называется *выпуклым*, если вместе с любыми его двумя точками принадлежит Ω и отрезок, их соединяющий.

Для выпуклого множества Ω имеет место неравенство

$$\omega(\delta_1+\delta_2, f) \leqslant \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f) \quad 0 \leqslant \delta_1, \delta_2. \tag{9}$$

Действительно, если $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$, $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''| < \delta_1+\delta_2$, то на отрезке, соединяющем $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, можно указать точку $\mathbf{x}$ такую, что $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}| < \delta_1$, $|\mathbf{x}''-\mathbf{x}| < \delta_2$. Поэтому для $\delta_1, \delta_2 > 0$.

$$\omega(\delta_1+\delta_2; f) = \sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|<\delta_1+\delta_2} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|<\delta_1} |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})| + \sup_{|\mathbf{x}''-\mathbf{x}|<\delta_2} |f(\mathbf{x}'') - f(\mathbf{x})| = \omega(\delta_1, f) + \omega(\delta_2, f),$$

где верхние грани распространяются на произвольные $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$, удовлетворяющие написанным неравенствам. Случаи $\delta_1 = 0$ и $\delta_2 = 0$ получаются переходом к пределу. Из (9) следует неравенство

$$\omega(m\delta) \leqslant m\omega(\delta) \tag{10}$$

при любом натуральном m.

Пример 2. Из (9) и монотонности ω следуют неравенства

$$0 \leqslant \omega(\delta_2, f) - \omega(\delta_1, f) < \omega(\delta_2-\delta_1, f), \quad 0 < \delta_1 < \delta_2, \tag{11}$$

откуда видно, что $\omega(t, f)$ есть непрерывная функция от $t \geqslant 0$, если f непрерывна на замыкании ограниченной выпуклой области Ω.

Пример 3. Функция (Дирихле), равная нулю на рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и единице на иррациональных, разрывна во всех точках $[0, 1]$ относительно $[0, 1]$, но это не мешает ей быть непрерывной на множестве A рациональных точек (относительно A).

Упражнения.

1. Показать, что модули непрерывности $\omega(t)$ функций

1) $\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ (см. начало § 15.5);

2) x^2 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

3) $\sin x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\sin \frac{1}{x} (0 < |x| \leqslant 1)$;

5) $\sin x$ $(-\infty < x < \infty)$

определяются равенствами:

$$1)\ \omega(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 1 & (1 \leqslant t); \end{cases} \qquad 2)\ \omega(t) = \begin{cases} 1-(1-t)^2 & (0 \leqslant t \leqslant 1), \\ 1 & (1 \leqslant t); \end{cases}$$

$$3)\ \omega(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leqslant t \leqslant \pi/2), \\ 1 & (\pi/2 \leqslant t); \end{cases} \qquad 4)\ \omega(t) = 2 \quad (0 \leqslant t);$$

$$5)\ \omega(t) = \begin{cases} 2\sin\frac{t}{2} & (0 \leqslant t \leqslant \pi), \\ 2 & (\pi \leqslant t). \end{cases}$$

2. Показать, что если функция $\omega(t)$ $(t \geqslant 0)$ непрерывна при $t = 0$ и удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \omega(\delta_2) - \omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2-\delta_1) \quad (0 < \delta_1 < \delta_2),$$

то она есть модуль непрерывности самой себя.

3. Расстоянием точки $\mathbf{x}^0 \in R$ до множества $E \subset R$ называется число

$$r(\mathbf{x}^0, E) = \inf_{\mathbf{x}\in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = \inf_{\mathbf{x}\in E} \sqrt{\sum_1^n (x_j - x_j^0)^2}.$$

Здесь и далее E, E_1, E_2, F — непустые множества.

Доказать, что если E — замкнутое множество (ограниченное или неограниченное), то расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ достигается в некоторой точке $\mathbf{y} \in E$, т. е. $r(\mathbf{x}^0, E) = \min\limits_{\mathbf{x}\in E} |\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}| = |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|$.

4. Доказать, что расстояние $r(\mathbf{x}^0, E)$ есть непрерывная функция от $\mathbf{x}^0$.

5. Расстоянием между двумя множествами E_1 и E_2 называют число

$$r(E_1, E_2) = \inf_{\substack{\mathbf{x}'\in E_1\\ \mathbf{x}''\in E_2}} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|.$$

Доказать, что если E_1 и E_2 — замкнутые множества и одно из них ограничено, то существуют две точки $\mathbf{y} \in E_1$ и $\mathbf{z} \in E_2$, для которых эта нижняя грань достигается, т. е. $r(E_1, E_2) = \min\limits_{\mathbf{x}'\in E_1, \mathbf{x}''\in E_2} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| = |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

Таким образом, если E_1 и E_2 не пересекаются, то $r(E_1, E_2) > 0$.

6. Доказать, что если F замкнутое, а Ω открытое ограниченное множество и $F \subset \Omega$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество F^ε точек $\mathbf{x}$, расстояние которых до F не превышает ε, принадлежит Ω.

§ 7.11. Продолжение равномерно непрерывной функции. Частная производная на границе области

Теорема 1. *Если функция f равномерно непрерывна на незамкнутом множестве A, то ее можно продолжить на $\bar{A} - A$, и притом единственным образом, так, что полученная (продолженная) определенная на $\bar{A}$ функция будет непрерывной на $\bar{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0 \in \bar{A} - A$, таким образом, $\mathbf{x}^0$ есть предельная точка A. В силу равномерной непрерывности f на A для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon \tag{1}$$

для всех $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| < \delta. \tag{2}$$

Но для точек $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$, для которых $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|$, $|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}^0| < \delta/2$ выполняется неравенство (2), а поэтому и (1). В силу условия Коши тогда существует предел f на A в точке $\mathbf{x}^0$. Естественно его обозначить через $f(\mathbf{x}^0)$. Этим наша функция f теперь уже определена на $\bar{A}$.

Пусть теперь $\mathbf{x}_0'$ и $\mathbf{x}_0''$ — произвольные точки $\bar{A}$ такие, что

$$|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0''| < \delta. \tag{3}$$

Тогда найдутся две последовательности точек $\mathbf{x}_k', \mathbf{x}_k'' \in A$ таких, что $|\mathbf{x}_k' - \mathbf{x}_k''| < \delta$ и $\mathbf{x}_k' \to \mathbf{x}_0'$, $\mathbf{x}_k'' \to \mathbf{x}_0''$ $(k \to \infty)$. Для них для любого k выполняется неравенство $|f(\mathbf{x}_k') - f(\mathbf{x}_k'')| < \varepsilon$, которое после перехода к пределу при $k \to \infty$ превращается в соотношение

$$|f(\mathbf{x}_0') - f(\mathbf{x}_0'')| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$