По определению, *определенным интегралом* (*Римана*) *от* f *на* $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = I, \tag{1}$$

понимаемый в том смысле, что I есть такое число, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех разбиений R, у которых $\Delta x_i < \delta$, имеет место $|S_R - I| < \varepsilon$, независимо от выбора точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Другое эквивалентное определение предела (1) следующее: какова бы ни была последовательность разбиений $R^k = \{a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b\}$ такая, что $\max \Delta x_i^k \to 0$, $k \to \infty$, при любом выборе для каждого k произвольных, но определенных точек $\xi_i^k \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$, соответствующая интегральная сумма имеет предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{R_k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k - 1} f(\xi_i^k)\,\Delta x_i^k = I$$

(не зависящий от выбора указанных R^k и ξ_i^k).

Эквивалентность этих двух пониманий предела (1) доказывается аналогично тому, как устанавливается эквивалентность пониманий предела функции на языке ε, δ и на языке последовательностей.

Факт существования интеграла можно еще выразить на языке критерия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для разбиений R и R' с частичными отрезками длины, не большей δ, имеет место $|S_R - S_{R'}| < \varepsilon$.

§ 9.2. Ограниченность интегрирующей функции

Теорема 1. *Если функция* f *интегрируема на* $[a, b]$, *то она ограничена на* $[a, b]$.

В самом деле, пусть f неограничена на $[a, b]$, и $S_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j$ — ее интегральная сумма, соответствующая произвольному разбиению R. Так как f неограничена на $[a, b]$, то она неограничена по крайней мере на одном из отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ разбиения, пусть на $[x_{j_0}; x_{j_0+1}]$. Имеем

$$S_R = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + \sum{}' f(\xi_j)\,\Delta x_j = f(\xi_{j_0})\,\Delta x_{j_0} + A,$$

где сумма Σ' распространена на все $j \neq j_0$. Мы считаем, что все входящие в нее ξ_j произвольны, но фиксированы. Отсюда $|S_R| \geqslant |f(\xi_{j_0})|\Delta x_{j_0} - |A|$. Зададим как угодно большее число N и составим неравенство

$$|f(\xi_{j_0})|\,\Delta x_{j_0} - |A| > N, \quad |f(\xi_{j_0})| > \frac{|A|+N}{\Delta x_{j_0}}.$$

В силу неограниченности f на $[x_{j_0}, x_{j_0+1}]$ имеется такая точка $\xi_{j_0} \in [x_{j_0}, x_{j_0+1}]$, для которой оно выполняется.

Мы получили, что если f неограничена на $[a, b]$, то каковы бы ни были число $N > 0$ и разбиение R, соответствующая R интегральная сумма может быть сделана путем надлежащего выбора точек ξ_j, большей по абсолютной величине, чем N. Следовательно, f не интегрируема на $[a, b]$.

В дальнейшем будут рассматриваться только ограниченные функции.

§ 9.3. Суммы Дарбу *)

Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция f и пусть $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение $[a, b]$. Положим $m_j = \inf\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$, $M_j = \sup\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$. По определению числа

$$\underline{S}_R = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \Delta x_j, \quad \overline{S}_R = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta x_j$$

называются соответственно нижней и верхней интегральными *суммами Дарбу* f, соответствующими разбиению R. Это вполне определенные числа, зависящие от f и R.

Очевидно, что $\underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R$.

Пусть R_1, R_2, R_3 — разбиения $[a, b]$. Если все точки R_1 принадлежат R_2, то будем писать $R_1 \subset R_2$ и говорить, что R_2 есть продолжение R_1. Если множество точек, из которых состоит R_3, есть теоретико-множественная сумма множеств точек, из которых состоят R_1 и R_2, то будем писать $R_3 = R_1 + R_2$.

Если $R \subset R'$, то

$$\underline{S}_R \leqslant \underline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_{R'} \leqslant \overline{S}_R. \tag{1}$$

Действительно, будем считать, что

$$R = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\},$$

$$R' = \{x_0 = x_{0,0} < x_{0,1} < \ldots < x_{0,l_0} = x_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \ldots$$
$$\ldots < x_{n-2,l_{n-2}} = x_{n-1} = x_{n-1,0} < \ldots < x_{n-1,l_{n-1}} = x_n\}.$$

Тогда, очевидно, $M_{jk} = \sup\limits_{x \in [x_{j,k}, x_{j,k+1}]} f \leqslant \sup\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f \leqslant M_j$ и

$$\overline{S}_{R'} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l_j-1} M_{jk} \Delta x_{jk} \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} M_j \sum_{k=0}^{l_j-1} \Delta x_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta x_j = \overline{S}_R,$$

*) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

и мы доказали последнее неравенство (1). Первое доказывается аналогично.

Каковы бы ни были разбиения R_1, R_2 имеет место $\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_{R_2}$, потому что $\underline{S}_{R_1} \leqslant \underline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_1+R_2} \leqslant \overline{S}_{R_2}$.

Зафиксируем R_1 и пусть R произвольно; тогда

$$\underline{S}_{R_1} \leqslant \overline{S}_R, \quad \underline{S}_{R_1} \leqslant \inf_R \overline{S}_R = \overline{I}.$$

Число $\overline{I} = \inf\limits_R \overline{S}_R$ называется *верхним интегралом функции f на* $[a, b]$. Мы доказали его существование и тот факт, что для любого R (теперь мы заменяем R_1 на R) имеет место

$$\underline{S}_R \leqslant \overline{I}.$$

Но тогда существует точная верхняя грань

$$\underline{I} = \sup_R \underline{S}_R \leqslant \overline{I},$$

называемая *нижним интегралом функции f* на $[a, b]$. Итак, доказано существование нижнего ($\underline{I}$) и верхнего ($\overline{I}$) интегралов f на $[a, b]$ и неравенство $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Лемма 1. *Если E_1, E_2 — множества чисел, то*

$$\sup_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} (x + y) = \sup_{x \in E_1} x + \sup_{y \in E_2} y.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Лемма 2. *Если на отрезке $[c, d]$ задана ограниченная функция f, то*

$$\sup_{\xi, \eta \in [c,d]} [f(\xi) - f(\eta)] = \sup_{\xi, \eta \in [c,d]} |f(\xi) - f(\eta)| = M - m, \tag{2}$$

где $M = M_{[c,d]} = \sup\limits_{x \in [c,d]} f(x)$, $m = m_{[c,d]} = \inf\limits_{x \in [c,d]} f(x)$.

Доказательство. Для любых $\xi, \eta \in [c, d]$

$$f(\xi) - f(\eta) \leqslant |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant M - m. \tag{3}$$

С другой стороны, найдутся такие $\xi, \eta \in [c, d]$, что $f(\xi) > M - \varepsilon/2$; $f(\eta) < m + \varepsilon/2$; для них

$$f(\xi) - f(\eta) > (M - \varepsilon/2) - (m + \varepsilon/2) = M - m - \varepsilon.$$

Мы доказали, что первый и третий члены (2) равны. Тем более в силу (3) они равны второму члену.

Число

$$M - m = \omega = \omega_{[c, d]}$$

называется *колебанием f на* $[c, d]$.

Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\sup_{\xi_j,\eta_j\in[x_j,x_{j+1}]} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j)-f(\eta_j)]\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sup|f(\xi_j)-f(\eta_j)|\,\Delta x_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (M_j-m_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j\Delta x_j = \overline{S}_R-\underline{S}_R, \quad \omega_j=\omega_{[x_j,x_{j+1}]} \quad (4)$$

(всюду в этих соотношениях равенства!).

§ 9.4. Основная теорема

Теорема 1 (основная). *Пусть задана ограниченная на конечном отрезке $[a, b]$ функция f.*

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\underline{I}=\overline{I}$;

2) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение R, что*

$$\overline{S}_R-\underline{S}_R<\varepsilon; \quad (1)$$

3) *для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений R с частичными отрезками $\Delta x_j<\delta$ имеет место неравенство* (1);

4) *существует интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx = I. \quad (2)$$

При этом $I=\underline{I}=\overline{I}$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $\underline{I}$, $\overline{I}$ — нижний и верхний интегралы f на $[a, b]$, а $\underline{S}_R$, $\overline{S}_R$ — нижняя и верхняя интегральные суммы f, соответствующие разбиению R.

Эту теорему можно перефразировать так:

Для того чтобы существовал интеграл от f на $[a, b]$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий 1)—3). *При этом величина интеграла равна $\underline{I}=\overline{I}$.*

Доказательство. 1) $\to$ 2) (из утверждения 1) следует утверждение 2)). Из 1), где считаем $\underline{I}=\overline{I}$, следует, что найдутся разбиения R_1, R_2 такие, что $\underline{I}-(\varepsilon/2)<\underline{S}_{R_1}$, $\overline{S}_{R_2}<\overline{I}+\varepsilon/2$. Тогда

$$\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{R_1}\leqslant\underline{S}_R\leqslant\overline{S}_R\leqslant\overline{S}_{R_2}\leqslant\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}, \quad R=R_1+R_2.$$

Отсюда в силу того, что $\underline{I}=\overline{I}$, имеет место 2).

2) $\to$ 1). Пусть R — разбиение, для которого верно (1). Тогда в силу неравенств $\underline{S}_R\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}_R$ имеет место $\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon$. Но $\varepsilon>0$ как угодно мало, а $\underline{I}$ и $\overline{I}$ — определенные числа, не зависящие от ε, поэтому $\underline{I}=\overline{I}$.

4) $\to$ 3). Пусть существует интеграл (2). Из определения интеграла следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения R, у которого $\Delta x_j < \delta$, имеют место неравенства

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

каковы бы ни были точки $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Отсюда, беря верхнюю и нижнюю грани по $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ входящей в эти неравенства суммы, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_R \leqslant \overline{S}_R \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

т. е. 3).

3) $\to$ 2). Это тривиально.

2) $\to$ 3). Это самая нетривиальная часть теоремы, утверждающая, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящее от него разбиение $R_* = \{a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_n^* = b\}$, для которого $\overline{S}_{R_*} - \underline{S}_{R_*} < \varepsilon$, то также найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений R с $\Delta x_j < \delta$ выполняется (1).

Именно, в качестве δ возьмем число, удовлетворяющее неравенствам $2\delta < x_{j+1}^* - x_j^*$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, $4n\delta K < \varepsilon$, где $K = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Тогда имеем (пишем M_j, m_j, Δx_j без индексов)

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sum{}' (M - m)\,\Delta x + \sum{}'' (M - m)\,\Delta x,$$

где сумма Σ' распространена на все (замкнутые) отрезки разбиения R, каждый из которых содержит в себе одну из точек R_*, а $\sum''$ — на все остальные отрезки R.

В сумму Σ' входит не более чем $2n$ слагаемых — один отрезок покрывает точку a, другой — точку b, и каждая из точек $x_1^*, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}^*$ покрывается одним или двумя отрезками. Имеем

$$\sum{}' (M - m)\,\Delta x \leqslant 2K\delta 2n < \varepsilon.$$

Сумму $\sum''$ запишем в виде кратной суммы $\sum'' = \sum\limits_i \sum^i$, где $\sum^i$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, соответствующих отрезкам R, каждый из которых попал в один и тот же интервал (x_i^*, x_{i+1}^*) старого разбиения R_*.

Имеем

$$\sum{}'' (M - m)\,\Delta x =$$
$$= \sum_i{}'' \sum{}^i (M - m)\,\Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i \Delta x \leqslant \sum_i (M_i^* - m_i^*)\,\Delta x_i^* < \varepsilon.$$

Поэтому $\overline{S}_R - \underline{S}_R < 2\varepsilon$ для всех разбиений R, для которых $\Delta x < \delta$, т. е. имеет место 3).

3) $\to$ 4). Пусть имеет место 3). Тогда, как уже доказано, справедливо 2) и 1). Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, как указано в 3). Тогда для разбиений R, о которых говорится в 3),

$$\underline{S}_R \leqslant \sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \overline{S}_R, \qquad \underline{S}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_R.$$

Отсюда, полагая $I = \underline{I} = \overline{I}$, получим

$$\left| I - \sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \right| \leqslant \overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon,$$

т. е. I есть определенный интеграл от f на $[a, b]$. Мы доказали 4). Теорема полностью доказана.

Как следствие из основной теоремы, справедлива

Теорема 2. *Пусть задана последовательность разбиений R_k*

$$a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

у которых $\max\limits_j \Delta x_j^k = \delta_k \to 0$.

Если для функции f выполняется одно из условий

$$\lim_{k\to\infty} \left(\overline{S}_{R_k}(f) - \underline{S}_{R_k}(f)\right) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_j f\left(\xi_j^k\right) \Delta x_j^k = \lim_{k\to\infty} S_{R_k}(f) = I, \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{S}_{R_k}(f) = \lim_{k\to\infty} \underline{S}_{R_k}(f) = I, \tag{6}$$

то это влечет существование интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Наоборот, существование интеграла от f на $[a, b]$ влечет выполнение условий (4) — (6).

Из (4), так же как из (6), следует, очевидно, свойство 2) основной теоремы. Из (5) же следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется k такое, что

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S_{R_k} < I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

каковы бы ни были $\xi_j^k \in \left[x_j^k, x_{j+1}^k\right]$. Беря верхнюю и нижнюю грани S_{R_k} по указанным ξ_j^k, получим

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}_{R_k} \leqslant \overline{S}_{R_k} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

откуда следует свойство 2) основной теоремы, в силу которой существует интеграл (от f на $[a, b]$), равный, очевидно, I.

Наоборот, если интеграл существует и равен I, то по его определению существует предел (5) для любой последовательности разбиений с $\delta_k \to 0$, в частности, для рассматриваемой нами последовательности. Но тогда для любого ε найдется k_0 такое, что для $k > k_0$ выполняются неравенства (8) и, следовательно, (9), имеет место (6), тем более (4).

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что *для того чтобы убедиться в существовании интеграла, достаточно убедиться, что существует предел* (5) (*при любом выборе* ξ_j^k!) *для одной какой-нибудь последовательности разбиений* R_k *с* $\delta_k \to 0$. *Например, когда* $[a, b]$ *дробится последовательно на равные части.*

Замечание. Справедлива теорема Дарбу (здесь не доказываемая), утверждающая, что для любой ограниченной на $[a, b]$ функции

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{S}(R) = \overline{I}, \quad \lim_{\delta\to 0} \underline{S}(R) = \underline{I}, \tag{10}$$

хотя f может и не быть интегрируемой ($\underline{I} < \overline{I}$).

Пример. Для функции (Дирихле) f, равной 1 в рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и 0 в иррациональных, при любом разбиении R отрезка $[0, 1]$ верхняя интегральная сумма $\overline{S}(R) = 1$, а нижняя $\underline{S}(R) = 0$. Таким образом, $\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, и функция Дирихле ограничена, но не интегрируема.

§ 9.5. Теоремы о существовании интеграла от непрерывной и монотонной функции на $[a, b]$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$; тогда для разбиения R, у которого частичные отрезки $\Delta x_j < \delta$, имеет место ($\xi_i, \eta_j \in [x_j, x_{i+1}]$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)] \Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \omega(\delta) \Delta x_j = \omega(\delta)(b-a),$$

где $\omega(\delta) = \sup\limits_{\substack{x', x'' \in [a, b] \\ |x'-x''| < \delta}} |f(x') - f(x'')|$ есть модуль непрерывности f на $[a, b]$.

Поэтому

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup_{\xi_j, \eta_j} \sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)] \Delta x_j \leqslant \omega(\delta)(b-a).$$

Но, как мы знаем, для непрерывной на замкнутом конечном отрезке $[a, b]$ функции $\omega(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\overline{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$.

В силу эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы интеграл f на $[a, b]$ существует.

Теорема 2. *Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и монотонная на нем, интегрируема на нем.*

Пусть для определенности f не убывает; тогда для произвольного разбиения R при $\Delta x_j \leqslant \delta$

$$\sum_{j=0}^{n-1} [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)]\,\Delta x_j \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_{j+1}) - f(x_j)] = \delta\,[f(b) - f(a)] < \varepsilon \quad (\xi_j, \eta_j \in [x_j, x_{j+1}]),$$

если δ достаточно мало́. Отсюда, взяв верхнюю грань по ξ_j, η_j, получим

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = \sup \sum [f(\xi_j) - f(\eta_j)]\,\Delta x_j < \varepsilon,$$

и на основании эквивалентности условий 2) и 4) основной теоремы получим, что f интегрируема на $[a, b]$.

Заметим, что монотонная на $[a, b]$ функция может иметь только конечное или счетное число точек разрыва (см. § 3.9).

Действительно, пусть $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N \leqslant b$ — какие-либо, может быть, не все точки разрыва (первого рода) монотонной функции $f(x)$, которую мы будем считать неубывающей. Подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$x_1 + \varepsilon < x_2 - \varepsilon < x_2 + \varepsilon < x_3 - \varepsilon < \ldots$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + \varepsilon) - f(x_k - \varepsilon)] \leqslant f(b) - f(a) = \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то надо считать $f(a - \varepsilon) = f(a)$, а если $x_n = b$, то $f(b + \varepsilon) = f(b)$) и после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] \leqslant \varkappa$$

(если $x_1 = a$, то $x_1 - 0 = a$; если $x_n = b$, то $x_n + 0 = b$). Это неравенство показывает, что функция может иметь не больше одной точки разрыва со скачком, большим $\varkappa/2$. Если такая точка есть, то припишем ей номер 1, затем пересматриваем, имеются ли точки со скачками бо́льшими, чем $\varkappa/3$; таких точек не может быть больше чем две, и если таковые среди незанумерованных на самом деле есть, приписываем им следующие номера и т. д. В результате все точки разрыва будут перенумерованы.

§ 9.6. Теорема Лебега *)

В предыдущем параграфе было доказано, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема (по Риману) на этом отрезке. Там же доказано, что всякая монотонная (ограниченная!) на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем. Мо-

*) А. Лёбег (1875—1941) — французский математик, один из основателей современной теории функций действительного переменного.

нотонная функция может иметь разрывы, но количество точек ее разрыва конечно или счетно. Возникает вопрос, как много точек разрыва может иметь функция, чтобы она оставалась все же интегрируемой по Риману. Исчерпывающий ответ на него дает

Теорема Лебега. *Для того чтобы функция f была интегрируемой на (конечном) отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на $[a, b]$ и непрерывной всюду на $[a, b]$, за исключением множества лебеговой меры нуль.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 12.10 для n-мерного случая.

По определению, множество e имеет лебегову меру нуль, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется покрывающая e счетная или конечная система интервалов, сумма длин которых меньше ε. Конечное и счетное множества точек имеют меру нуль. В самом деле, пусть точки множества перенумерованы: $x_1, x_2, \ldots$ Покроем каждую из них интервалом так, чтобы длина интервала, покрывающего точку x_n, была меньше, чем $\varepsilon \cdot 2^{-n}$. Сумма длин этих интервалов будет меньше ε.

Таким образом, из теоремы Лебега следует, что всякая ограниченная на $[a, b]$ функция, имеющая конечное или счетное число разрывов, интегрируема по Риману.

Заметим, что среди множеств, имеющих лебегову меру нуль, имеются и несчетные множества.

Пример. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и средний интервал $(1/3, 2/3)$ (открытое множество) выкинем; каждый оставшийся отрезок $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ также разделим на три равные части и средние их открытые части выкинем. Оставшиеся четыре отрезка разделим на три части и средние открытые части выкинем. В результате этого процесса, продолженного неограниченно, будет выброшено счетное число интервалов общей длины, равной $1 = (1/3) + (2/9) + (4/27) + \ldots$ Оставшееся на $[0, 1]$ множество E замкнуто.

Можно доказать (см., например, П. С. Александров и А. Н. Колмогоров. Введение в теорию функций действительного переменного, М., ГТТИ, изд. 3, 1938), что E не только замкнуто, но и совершенно — любая точка E есть предельная точка E, а также E нигде не плотно на $[0, 1]$ — любой интервал содержит в себе точки, отличные от E; кроме того, E несчетно и в то же время имеет лебегову меру нуль. E называется *канторовым множеством меры нуль.*

Зададим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \in [0, 1] - E). \end{cases}$$

Она, очевидно, непрерывна во всех точках $[0, 1] - E$ и разрывна во всех точках E.

Таким образом, функция f может служить примером интегрируемой по Риману функции, имеющей несчетное множество точек разрыва.

§ 9.7. Аддитивные и однородные свойства интеграла

Теорема 1. *Если f интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то она также интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, и наоборот. При этом*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность разбиений R_k, содержащих в себе точку c, со стремящимся к нулю максимальным частичным отрезком. R_k индуцирует на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно разбиения R'_k и R''_k,

$$\overline{S}_{R_k} - \underline{S}_{R_k} = \left(\overline{S}_{R'_k} - \underline{S}_{R'_k}\right) + \left(\overline{S}_{R''_k} - \underline{S}_{R''_k}\right), \tag{2}$$

Если теперь интеграл от f на $[a, b]$ существует, то в силу теоремы § 9.4 левая часть (2) стремится при $k \to \infty$ к нулю, а следовательно, и каждое слагаемое (неотрицательное!) правой части стремится к нулю, что влечет по той же теореме существование интегралов от f на $[a, c]$ и $[c, b]$. Поэтому из очевидного равенства

$$S_{R_k} = S_{R'_k} + S_{R''_k}$$

следует после перехода к пределу при $k \to \infty$ равенство (1).

Наоборот, если существуют интегралы от f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то для произвольных их разбиений R'_k и R''_k со стремящимися к нулю максимальными частичными отрезками отдельные слагаемые правой части (2) стремятся при $k \to \infty$ к нулю, но тогда и левая часть (2) стремится к нулю, что влечет за собой существование интеграла f на $[a, b]$.

Мы определили интеграл от f на $[a, b]$, где $a < b$. Но полезно расширить это определение, считая в случае $a > b$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

При таком расширенном понимании символа $\int_a^b$ равенство (1), как нетрудно проверить, сохраняется для любых a, b, c, если только существует интеграл на наибольшем среди отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$.

Мы считаем здесь, что $[a, b]$ — отрезок, соединяющий точки a и b, и даже называем отрезком $[a, a]$ точку a.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ — интегрируемы на $[a, b]$ функции и C — постоянная; тогда*

1) $f(x) \pm \varphi(x)$, 2) $Cf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f(x)\varphi(x)$, 5) $\frac{1}{f(x)}$, *где* $|f(x)| > d > 0$ *на* $[a, b]$ — *суть интегрируемые функции. При этом*

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b Cf(x)\, dx = C \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3'}$$

Заметим, что факт интегрируемости указанных функций непосредственно следует из теоремы Лебега, если принять во внимание, что лебегова мера суммы двух множеств, имеющих лебегову меру нуль, очевидно, в свою очередь равна нулю. Но можно доказать это утверждение, не прибегая к теореме Лебега.

Берем произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда

$$\lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_j [f(\xi_j) \pm \varphi(\xi_j)]\, \Delta x_j =$$

$$= \lim \sum_j f(\xi_j)\, \Delta x_j \pm \lim \sum_j \varphi(\xi_j)\, \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

потому что, по условию, интегралы от $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют. Таким образом, предел в левой части этих соотношений существует и равен правой части. Но это значит, что имеет место (3).

Подобным образом

$$\int_a^b Cf dx = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum Cf(\xi_j)\, \Delta x_j = C \lim \sum f(\xi_j)\, \Delta x_j = C \int_a^b f\, dx.$$

Мы доказали 1), 2), (3) и (3').

Будем обозначать через $M_f = \sup\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f$, $m_f = \inf\limits_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f$. Будем считать, что $K_f = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f|$. Имеем для произвольных $\xi, \eta \in [x_j, x_{j+1}]$

$$|f(\xi)| - |f(\eta)| \leqslant |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant M_f - m_f,$$

$$f(\xi)\varphi(\xi) - f(\eta)\varphi(\eta) \leqslant |f(\xi)|\,|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| +$$
$$+ |\varphi(\eta)|\,|f(\xi) - f(\eta)| \leqslant K_f(M_\varphi - m_\varphi) + K_\varphi(M_f - m_f),$$

$$\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{f(\eta)} = \frac{f(\xi) - f(\eta)}{f(\xi) f(\eta)} \leqslant \frac{1}{d^2}(M_f - m_f).$$

Беря верхние грани левых частей полученных неравенств по $\xi, \eta \in [x_j, x_{j+1}]$, умножая их на Δx_j и суммируя по j, получим

$$\sum (M_{|f|} - m_{|f|})\,\Delta x \leqslant \sum (M_f - m_f)\,\Delta x, \tag{4}$$

$$\sum (M_{f\varphi} - m_{f\varphi})\,\Delta x \leqslant K_f \sum (M_\varphi - m_\varphi)\,\Delta x + K_\varphi \sum (M_f - m_f)\,\Delta x, \tag{5}$$

$$\sum (M_{1/f} - m_{1/f})\,\Delta x \leqslant \frac{1}{d^2} \sum (M_f - m_f)\,\Delta x \tag{6}$$

(мы опустили j у Δx_j). Но вследствие интегрируемости f и φ правые части (4) — (6) при $\Delta x < \delta$, где δ достаточно мало, можно сделать как угодно малыми, но тогда и левые. В случае (5) найдем для данного ε разбиения R_1, R_2, для которых

$$\overline{S}_{R_1}(f) - S_{R_1}(f) < \varepsilon, \quad \overline{S}_{R_2}(\varphi) - S_{R_2}(\varphi) < \varepsilon.$$

Эти неравенства верны, если заменить R_1, R_2 на $R = R_1 + R_2$.

Заметим, что из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$, как это легко видеть на примере функции, равной 1 в рациональных точках $[a, b]$ и -1 в иррациональных.

§ 9.8. Неравенства и теорема о среднем

Теорема 1. *Если f и φ интегрируемы и удовлетворяют неравенству $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx. \tag{1}$$

Существование этих интегралов уже предположено и надо доказать только само неравенство. Имеем, очевидно, для любого разбиения R

$$\sum f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \sum \varphi(\xi_j)\,\Delta x_j.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_j \to 0$, получим (1).

Теорема 2. *Если f интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \leqslant K(b-a), \tag{2}$$

где $K = \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|$.

Имеем $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Поэтому по предыдущей теореме

$$-\int_a^b |f|\,dx = \int_a^b (-|f|)\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx,$$

откуда следует первое неравенство (2). Далее, $|f| \leqslant K$, поэтому

$$\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b K\,dx = K(b-a),$$

и мы получили второе неравенство (2).

В теореме 2 имелось в виду, что $a<b$. Если $a>b$, то

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f|\,dx \leqslant (a-b)K = K|b-a|.$$

Теорема 3 (о среднем). *Если f и φ интегрируемы на $[a, b]$ и $\varphi(x) \geqslant 0$, то*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = \Lambda \int_a^b \varphi\,dx, \tag{3}$$

где $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Действительно, в силу того, что $\varphi(x) \geqslant 0$,

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x). \tag{4}$$

Интегрируя эти неравенства, получим

$$m\int_a^b \varphi\,dx \leqslant \int_a^b f\varphi\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi\,dx. \tag{5}$$

Если $\int_a^b \varphi\,dx = 0$, то второй интеграл в этих соотношениях также равен 0 и равенство (3) очевидно; если же $\int_a^b \varphi\,dx > 0$, то из (5) следует

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f\varphi\,dx}{\int_a^b \varphi\,dx} \leqslant M,$$

т. е. второй член в этих соотношениях равен числу Λ, удовлетворяющему неравенствам $m \leqslant \Lambda \leqslant M$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если в этой теореме f непрерывна на $[a, b]$, то найдутся точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_2) = M$, $f(x_1) = m$ и точка $\xi \in [x_1, x_2]$ такая, что $f(\xi) = \Lambda$, поэтому в случае непре-*

рывной на $[a, b]$ *функции* f *равенство* (3) *можно записать в виде*

$$\int_a^b f\varphi\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi\,dx \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если* f — *интегрируемая неотрицательная на* $[a, b]$ *функция такая, что в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *ее непрерывности* $f(x_0) > 0$, *то*

$$\int_a^b f\,dx > 0.$$

В самом деле, из условия теоремы следует, что существует число $\lambda > 0$ и отрезок $\sigma \subset [a, b]$, содержащий в себе x_0 такие, что $f(x) \geqslant \lambda$ на σ. Пусть $\delta = \overline{[a, b] - \sigma}$ — множество (состоящее из одного или двух отрезков). Тогда

$$\int_a^b f\,dx = \int_\sigma f\,dx + \int_\delta f\,dx \geqslant \int_\sigma f\,dx \geqslant \lambda|\sigma| > 0,$$

где $|\sigma|$ — длина σ.

§ 9.9. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Ньютона — Лейбница

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция f. Начнем с того, что отметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

т. е. не имеет никакого значения, какая буква (x или u) стоит под знаком f в определенном интеграле по отрезку $[a, b]$.

Зададим произвольное значение $x \in [a, b]$ и определим новую функцию $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Она определена для всех значений $x \in [a, b]$, потому что мы знаем, что если существует интеграл от f на $[a, b]$, то существует также интеграл от f на $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что мы считаем, по определению,

$$F(a) = \int_a^a f\,dt = 0. \tag{1}$$

Заметим, что

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Покажем, что F *непрерывна на* $[a, b]$. В самом деле, пусть x, $x+h \in [a, b]$; тогда

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

и, если $K = \sup |f(t)|$, $a \leqslant t \leqslant b$, то

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leqslant K|h| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Таким образом, F непрерывна на $[a, b]$ независимо от того, имеет или нет f разрывы; важно, что f интегрируема на $[a, b]$.

На рис. 9.1 изображен график f. Площадь переменной фигуры $aABx$ равна $F(x)$. Ее приращение $F(x+h) - F(x)$ равно площади фигуры $xBC(x+h)$, которая в силу ограниченности f, очевидно, стремится к нулю при $h \to 0$ независимо от того, будет ли x точкой непрерывности или разрыва f, например, точкой $x = d$.

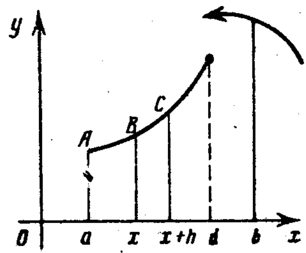

Рис. 9.1.

Пусть теперь *функция* f *не только интегрируема на* $[a, b]$, *но непрерывна в точке* $x \in [a, b]$. Докажем, что *тогда* F *имеет в этой точке производную, равную*

$$F'(x) = f(x). \tag{2}$$

В самом деле, для указанной точки x (пояснения ниже)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(x) + \eta(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dt + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \eta(t)\,dt = f(x) + o(1) \quad (h \to 0). \tag{3}$$

Мы положили $f(t) = f(x) + \eta(t)$, а так как $f(x)$ — постоянная относительно t, то $\int_x^{x+h} f(x)\,dt = f(x)h$. Далее, в силу непрерывности f в точке x для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что $|\eta(t)| < \varepsilon$ для $|x - t| < \delta$. Поэтому

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \eta(t)\,dt \right| \leqslant \frac{1}{|h|} |h| \varepsilon = \varepsilon \text{ для } |h| < \delta,$$

что доказывает, что левая часть этого неравенства есть $o(1)$ при $h \to 0$.

Переход к пределу в (3) при $h \to 0$ показывает существование производной от F в точке x и справедливость равенства (2). При $x = a$, b речь здесь идет соответственно о правой и левой производной.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то на основании доказанного выше соответствующая ей функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{4}$$

имеет призводную, равную $f(x)$: $F'(x) = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$. Следовательно, функция $F(x)$ есть первообразная от f на $[a, b]$.

Мы доказали, что *произвольная непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* f *имеет на этом отрезке первообразную, определенную равенством* (4). Этим *доказано существование первообразной для всякой непрерывной на отрезке функции* (см. § 8.1).

Пусть теперь $\Phi(x)$ есть произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Мы знаем, что $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Полагая в этом равенстве $x = a$ и учтя, что $F(a) = 0$, получим $\Phi(a) = C$.

Таким образом, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. Но

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b).$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{5}$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1 (Ньютона — Лейбница). *Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ — ее любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство* (5).

Из (5) по теореме Лагранжа следует:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b),$$

где $\xi \in (a, b)$ — некоторая точка. Этим уточняется равенство § 9.8, (6) при $\varphi(x) = 1$, где утверждалось, что $\xi \in [a, b]$.

Теорему 1 можно обобщить.

Теорема 2. *Для непрерывной кусочно гладкой на $[a, b]$ функции F имеет место*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть (см. § 5.15)

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

где $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — точки разрыва F' (первого рода!). Тогда (пояснения ниже)

$$F(b) - F(a) = \sum_{0}^{n-1} [F(x_{j+1}) - F(x_j)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_j+1} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx. \qquad (7)$$

Второе равенство в (7) верно, потому что для любого j

$$F(x_{j+1}) - F(x_j) = \int_{x_j}^{x_j+1} F'(x)\,dx. \qquad (8)$$

Ведь производная $F'(x)$ существует и непрерывна на интервале (x_j, x_{j+1}). Кроме того, существуют пределы $F'(x_j + 0)$, $F'(x_{j+1} - 0)$, которые равны соответственно правой и левой производной от F в точках $x = a, b$.

Из интегрируемости F' на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ следует ее интегрируемость на $[a, b]$ и последнее равенство (7).

Замечание. Функция F' не определена в точках $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1} \in [a, b]$, но это не мешает ей быть интегрируемой на $[a, b]$ (см. подробнее по этому поводу § 9.11).

Теорема 3. *Для непрерывных кусочно гладких на* $[a, b]$ *функций* $u(x)$, $v(x)$ *имеет место формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx. \qquad (9)$$

Ведь произведение $u(x)v(x)$ есть также непрерывная кусочно гладкая на $[a, b]$ функция, имеющая, таким образом, всюду на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, производную, вычисляемую по формуле

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Если учесть еще, что функции $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то в силу предыдущей теоремы

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx,$$

откуда следует (9).

Теорема 4 (о замене переменной). *Справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{10}$$

где функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, $a=\varphi(c)$, $b=\varphi(d)$ и значения $\varphi(t)$ $(c\leqslant t\leqslant d)$ принадлежат отрезку $[A, B]$, на котором $f(x)$ непрерывна. (Таким образом, $[a, b]\subset[A, B]$.)

В самом деле, пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — соответственно первообразные функции $f(x)$ и $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Тогда (см. § 8.1, (2)) имеет место тождество $\Phi(t)=F[\varphi(t)]+C$, $c\leqslant t\leqslant d$, где C — некоторая постоянная. Теперь (10) следует из очевидного равенства

$$F(b)-F(a)=F[\varphi(d)]-F[\varphi(c)]=\Phi(d)-\Phi(c)$$

на основании теоремы Ньютона — Лейбница.

Пример 1. $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^\pi = 2$ в силу теоремы Ньютона — Лейбница: $\sin x$ непрерывна на $[0, \pi]$, $-\cos x$ ее первообразная.

Пример 2.

$$\int_a^b \operatorname{sign} t\,dt = |t|\,\Big|_a^b = |b|-|a| \tag{11}$$

в силу теоремы 2, потому что $|x|$ есть непрерывная кусочно гладкая (или гладкая, если $ab\geqslant 0$) функция на отрезке $[a, b]$, а $\operatorname{sign} x$ — ее производная, существующая всюду на $[a, b]$, за исключением точки $x=0$.

В частности, из (11) следует:

$$\int_0^x \operatorname{sign} t\,dt = |x|.$$

§ 9.10. Вторая теорема о среднем

Теорема. *Если функция φ — неотрицательная неубывающая на отрезке $[a, b]$, а f — интегрируемая на $[a, b]$, то существует точка $\xi\in$ $\in[a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Будем сначала считать, что φ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = -\varphi(x)\int_x^b f(u)\,du\,\Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx =$$

$$= \varphi(a)\int_a^b f(u)\,du + \int_a^b \varphi'(x)\int_x^b f(u)\,du\,dx. \tag{2}$$

Пусть

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du, \quad M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_x^b f(u)\,du;$$

тогда правая часть (2), учитывая, что $\varphi(a)$, $\varphi'(x) \geqslant 0$, не больше чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) M = \varphi(b)\,M$, но не меньше, чем $\left(\varphi(a) + \int_a^b \varphi'(x)\,dx\right) m = \varphi(b)\,m$. Поэтому найдется $\xi \in [a, b]$, для которого выполняется равенство (1).

Если теперь φ — неубывающая неотрицательная функция, вообще говоря, разрывная, то она интегрируема на $[a, b]$ и существует последовательность непрерывно дифференцируемых неубывающих неотрицательных функций ψ_n, для которых (см. § 18.2, 5), том II)

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi_n(x)|\,dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

На основании уже доказанного при любом n найдется точка $\xi_n \in [a, b]$, для которой

$$\int_a^b \psi_n(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_{\xi_n}^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Из последовательности $\{\xi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in [a, b]$. Но тогда в силу непрерывности интеграла справа в (4) по нижнему пределу и того факта, что

$$\left| \int_a^b \psi_n f\,dx - \int_a^b \varphi f\,dx \right| \leqslant K \int_a^b |\psi_n - \varphi|\,dx \to 0, \quad n \to \infty, \quad K \geqslant |f(x)|,$$

из (4) после перехода к пределу при $n \to \infty$ следует (1).

§ 9.11. Видоизменение функции

Теорема. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то после видоизменения ее в конечном числе точек отрезка $[a, b]$ она останется интегрируемой без изменения величины интеграла.*

Доказательство. Ясно, что видоизмененная функция

$$f_1(x) = f(x) + \varphi(x),$$

где φ равна нулю всюду на $[a, b]$, за исключением указанных в условии теоремы точек. Ясно также, что интеграл от φ на $[a, b]$ равен нулю. Поэтому f_1 интегрируема и

$$\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b \varphi\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

До сих пор при исследовании функции f на интегрируемость мы предполагали, что f задана во всех точках $[a, b]$. Из доказанной теоремы мы видим, что интегрируемость f не зависит от того, какие значения принимает f на конечной системе точек отрезка $[a, b]$. Но раз так, то можно и не предполагать, что f задана на этих точках. В этом смысле мы будем говорить об интегрируемости ограниченной функции на $[a, b]$, заданной на самом деле на множестве, полученном выбрасыванием из $[a, b]$ конечного числа точек, например, об интегрируемости $\sin(1/x)$ или $(\sin x)/x$ на $[0, 1]$. Обе эти функции непрерывны и ограничены только на $(0, 1]$, но говорят, что они интегрируемы на $[0, 1]$.

Если заданную на отрезке $[a, b]$ интегрируемую на нем функцию f видоизменить на счетном множестве точек, то видоизмененная функция f_1 сможет оказаться уже не интегрируемой. Например, функция $f(x) \equiv 1$ имеет интеграл Римана на $[0, 1]$, равный 1 (любая ее интегральная сумма равна 1). Но если ее значения в рациональных точках заменить на значения, равные 0, то получится функция f_1 Дирихле, не интегрируемая по Риману: любая ее верхняя сумма Дарбу равна 1, а нижняя равна 0. Однако это явление бывает не всегда.

Пусть e есть то множество, на котором мы видоизменили функцию f, интегрируемую на $[a, b]$, и f_1 — видоизмененная функция. Тогда $f(x) = f_1(x) + \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 0$ на $[a, b] - e$. Если множество e такое, что для любой таким образом ему соответствующей ограниченной (!) функции φ существует интеграл $\int\limits_a^b \varphi\, dx = 0$, то на таком множестве можно, очевидно, видоизменить функцию f, не нарушая ее интегрируемости, и тогда уже не важно, определена или нет на самом деле f на этом множестве. В таких случаях говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ существует на $[a, b]$, хотя функция f определена только на $[a, b] - e$.

Пример. Функция $\psi(x) = \sin(\sin(1/x))^{-1}$ определена на $[0, 1] - e$, где e — множество, состоящее из 0 и точек $x_k = 1/k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, очевидно, счетное. Если дополнить ψ на e любыми числовыми значениями, образующими, однако, ограниченное в совокупности множество, то получим определенную на $[0, 1]$ функцию $\psi_1(x)$, интегрируемую на $[0, 1]$, потому, что она ограничена на $[0, 1]$ и непрерывна всюду на $[0, 1]$ за исключением точек множества e, имеющего лебегову меру нуль.

Интегрируемость ψ вытекает также из следующей теоремы:

Теорема. *Функция f, ограниченная на $[a, b]$ и интегрируемая на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$, интегрируема на $[a, b]$.*

В этой формулировке $[a, x]$ можно заменить на $[x, b]$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$ и $\delta = \varepsilon/4M$. Так как f интегрируема на отрезке $[a, b-\delta]$, то существует его разбиение $R' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} = b - \delta\}$ такое, что

$$\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} = \sum_{j=0}^{n-2} (M_j - m_j)\, \Delta x_j < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем еще разбиение $R = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\overline{S}_R - \underline{S}_R = (\overline{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}) + (M_{n-1} - m_{n-1})\,\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \varepsilon,$$

что показывает (см. § 9.4, основная теорема), что f интегрируема на $[a, b]$.

В нашем примере ψ ограничена на $[0, 1]$ и интегрируема на любом отрезке $[\delta, 1]$, $\delta > 0$. Ведь на $[\delta, 1]$ она имеет не больше чем конечное число точек разрыва.

§ 9.12. Несобственные интегралы

Зададим на конечном полуинтервале $[a, b)$ функцию f. Допустим, что она интегрируема на любом отрезке $[a, b']$, где $b' < b$ и неограничена в окрестности точки b. Тогда ее интеграл на $[a, b)$ или, что все равно, на $[a, b]$ в обычном смысле (Римана), не может существовать, потому что интегрируемая на $[a, b]$ по Риману функция необходимо ограничена. Однако может случиться, что существует предел $\lim\limits_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$. Если это так, то этот предел называют *несобственным интегралом от* f на отрезке $[a, b]$ и записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx. \tag{1}$$

В таком случае говорят, что *интеграл* $\int\limits_a^b f\,dx$ *сходится*. В противном случае говорят, что он *расходится* или не существует как несобственный риманов интеграл.

Допустим теперь, что функция f задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b']$, где $a < b' < \infty$. Если существует предел

$$\lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом от* f *на* $[a, \infty)$ и обозначается так:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b' \to \infty} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Условимся в следующей терминологии. Выражение

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

будем называть *интегралом* (*от* f) *с особенностью в точке* b, если выполняются следующие условия: если b — конечная точка, то функция f интегрируема на $[a, b']$ при любом b', удовлетворяющем неравенствам $a < b' < b$ и, кроме того, неограничена в окрестности точки b. Если же $b = +\infty$, то про функцию f предполагается лишь, что она интегрируема на $[a, b']$ при любом конечном $b' > a$.

Подобным образом определяется интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с единственной особенностью в точке a. Теперь b — конечная точка. Если точка $a < b$ тоже конечна, то f в окрестности a неограничена и интегрируема на любом отрезке $[a', b]$, где $a < a' < b$. Если же $a = -\infty$, то функция f предполагается интегрируемой на $[a', b]$ для любого $a' < b$.

В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать интеграл (2) с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной. Все выводы по аналогии могут быть перенесены на случай интеграла с единственной особенностью в точке a.

Теорема 1. *Пусть задан интеграл* (2) *с единственной особенностью в точке* b. *Для его существования необходимо и достаточно выполнение условия* (*Коши*): *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $b_0 < b$ *такое, что*

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(t)\,dt\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

каковы бы ни были b', b'', *удовлетворяющие неравенствам* $b_0 < b' < b'' < b$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (a < x < b).$$

Существование интеграла (2) эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$, что в свою очередь эквивалентно выполнению условия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует b_0, где $a < b_0 < b$, так что выполняется неравенство $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$ для всех b' и b'', удовлетворяющих неравенствам $b_0 < b' < b'' < b$. Но

$$F(b'') - F(b') = \int\limits_{b'}^{b''} f(t)\,dt$$

и теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — постоянное число, имеет, очевидно, единственную особенность в точке $x = 0$. Чтобы пояснить, сходится ли он, надо вычислить предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left[1-\varepsilon^{1-\alpha}\right] = \begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1,\\ \infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

Таким образом, интеграл (4) сходится при $\alpha < 1$ и равен $(1-\alpha)^{-1}$ и расходится при $\alpha > 1$.

Если же $\alpha = 1$, то он расходится:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = +\infty.$$

Пример 2. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{N\to\infty} x^{1-\alpha}\Bigg|_1^N =$$

$$= \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при}\quad \alpha>1 \text{ (сходится)},\\ +\infty & \text{при}\quad \alpha<1 \text{ (расходится)},\end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty}\ln N = +\infty \text{ (расходится).}$$

Пусть снова задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Тогда интеграл

$$\int_c^b f\,dx, \tag{6}$$

где $a < c < b$, также имеет единственную особенность в точке b. Условие Коши существования интегралов (5) и (6) формулируется, очевидно, совершенно одинаково. Поэтому эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся. Кроме того, при $a < c < b$, очевидно, имеет место

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx = \lim_{b'\to b}\left(\int_a^c f\,dx + \int_c^{b'} f\,dx\right) =$$
$$= \int_a^c f\,dx + \lim_{b'\to b}\int_c^{b'} f\,dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f\,dx, \quad (7)$$

где $\int_a^c$ — обычный риманов собственный интеграл, а интегралы $\int_a^b$ и $\int_c^b$ — несобственные.

Отметим равенство

$$\int_a^b (Af + B\,\varphi)\,dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} (Af + B\varphi)\,dx =$$
$$= A\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx + B\lim_{b'\to b}\int_b^{b'} \varphi\,dx = A\int_a^b f\,dx + B\int_a^b \varphi\,dx, \quad (8)$$

где A и B — постоянные. Его надо понимать в том смысле, что если существуют интегралы в правой части, то существует также интеграл в левой и имеет место равенство (8).

Говорят, что интеграл (5) (имеющий особенность в точке b) *сходится абсолютно*, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty \quad (9)$$

от абсолютного значения $|f(x)|$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. В самом деле, из сходимости интеграла (9) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ на интервале (a, b) найдется точка b_0 такая, что если $b_0 < b' < b'' < b$, то

$$\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \geqslant \left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right|,$$

т. е. для интеграла (1) выполняется условие Коши.

Так как

$$\left|\int_a^{b'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^{b'} |f(x)|\,dx,$$

то после перехода к пределу при $b' \to b$ для абсолютно сходящегося интеграла (5) получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10}$$

Несобственный интеграл может сходиться, но не абсолютно (см. далее примеры §§ 9.14 и 9.15). Конечно, несобственный интеграл от неотрицательной функции, если сходится, то абсолютно.

Отметим еще следующую очевидную теорему:

Теорема 2. *Если F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет непрерывную на $[a, b)$ производную $F'(x)$, то*

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} [F(b') - F(a)] = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} \int_a^{b'} F'(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx,$$

где интеграл справа может быть собственным и несобственным.

Например,

$$\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

где особенность интеграла имеет место в левом конце $[0, 1]$.

§ 9.13. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b, и на промежутке $[a, b)$ интегрирования $f(x) \geqslant 0$.

Тогда, очевидно, функция

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,dx \qquad (a < b' < b)$$

от b' монотонно не убывает. Поэтому, если она ограничена, $F(b') \leqslant M$ $(a < b' < b)$, существует интеграл (1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M.$$

Если же F неограничена, то интеграл (1) расходится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_b^{b'} f(x)\,dx = +\infty.$$

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_a^b f\,dx = \infty,$$

в зависимости от того, будет ли интеграл сходиться или расходиться.

Теорема 1. *Пусть интегралы*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

имеют единственную особенность в точке b и на промежутке $[a, b)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \tag{3}$$

Тогда из сходимости интеграла (2) следует сходимость интеграла (1) и имеет место неравенство

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx,$$

а из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

Доказательство. Из (3) следует, что для $a < b' < b$

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b'} \varphi\,dx. \tag{4}$$

Если теперь интеграл (2) сходится, то правая часть (4) ограничена числом, равным интегралу (2), но тогда ограничена и левая. И так как левая часть при возрастании b' монотонно не убывает, то она стремится к пределу (интегралу):

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx.$$

Наоборот, из расходимости интеграла (1) следует, что предел левой части (4) при $b' \to \infty$ равен ∞, а следовательно, и предел правой равен ∞.

Теорема 2. *Пусть интегралы (1) и (2) имеют единственную особенность в точке b, подынтегральные функции положительны и существует предел*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0. \tag{5}$$

Тогда эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (5) следует, что для положительного $\varepsilon < A$ можно указать такое $c \in [a, b)$, что

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \quad (c < x < b),$$

и так как $\varphi(x) > 0$, то

$$(A - \varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (A + \varepsilon)\varphi(x) \quad (c < x < b). \tag{6}$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_c^b (A + \varepsilon)\varphi\, dx$. Но тогда по предыдущей теореме сходится также интеграл $\int\limits_c^b f\, dx$, а вместе с ним интеграл $\int\limits_a^b f\, dx$. Наоборот, из сходимости $\int\limits_a^b f\, dx$ следует сходимость $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ потому, что наряду с (5) имеет место равенство

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0.$$

Замечание 1. Теорема 2 может быть обобщена следующим образом. Пусть функции f и φ по-прежнему удовлетворяют условиям этой теоремы и ψ — непрерывная и неотрицательная на (a, b) функция. Тогда интегралы $\int\limits_a^b f\psi\, dx$ и $\int\limits_a^b \varphi\psi\, dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся. Чтобы доказать это утверждение, надо рассмотреть вытекающие из (6) неравенства

$$(A - \varepsilon)\varphi(x)\psi(x) \leqslant f(x)\psi(x) \leqslant (A + \varepsilon)\varphi(x)\psi(x).$$

Замечание 2. Если в теореме 2 $A = 0$, то сходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^b f\, dx$, что следует из второго неравенства (6), где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Замечание 3. В теореме 2 можно заранее считать, что только одна из функций f или φ положительна на $[a, b)$, потому что из (6) тогда следует, что и вторая положительна на $[c, b)$ при некотором c.

Примеры. Значок $\sim$ между двумя интегралами обозначает, что эти интегралы в силу теоремы 2 одновременно сходятся или одновременно расходятся.

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\ln(1+\sqrt{x})} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty, \quad x \to 0.$$

$$2)\ \int_0^1 \frac{dx}{x-\ln(1+x)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \infty, \quad x \to 0.$$

Интегралы 1), 2) имеют единственную особенность в точке $x = 0$ (это отмечено выше символом $x \to 0$). В знаменателях под этими интегралами мы выделили главные степенные члены (см. §§ 4.10 и 5.11) и применили теорему 2. Интеграл 1) сходится, а интеграл 2) расходится.

$$3)\ \int_1^\infty x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx = \int_1^\infty \left(x^{\alpha+2}e^{-x^\beta}\right)\frac{1}{x^2}\,dx \leqslant K\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty, \quad \beta > 0.$$

Функция в скобках непрерывна на $[1, \infty]$ и стремится к нулю при $x \to \infty$, поэтому она ограничена на $[1, \infty)$ некоторой константой K. Таким образом, этот интеграл, имеющий единственную особенность в $x = \infty$, сходится.

§ 9.14. Интегрирование по частям

Пусть на луче $[a, \infty)$ заданы непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а ψ к тому же имеет непрерывную производную. Тогда, если обозначить через $\Phi(x)$ какую-либо первообразную от $\varphi(x)$, получим

$$\int_a^N \varphi(x)\psi(x)\,dx =$$
$$= \psi(N)\Phi(N) - \psi(a)\Phi(a) - \int_a^N \psi'(x)\Phi(x)\,dx, \qquad a < N < \infty. \tag{1}$$

Если существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \psi'(x)\Phi(x)\,dx = A \tag{2}$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x)\Phi(x) = B, \tag{3}$$

то существует несобственный интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = B - \psi(a)\Phi(a) - A. \tag{4}$$

Отметим некоторые частные достаточные признаки существования интеграла (2) и предела (3), а следовательно, и существования интеграла (4).

1) Если функция

$$|\Phi(x)| \leqslant M \tag{5}$$

ограничена,

$$\psi(x) \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{6}$$

и

$$\int_a^\infty |\psi'(x)|\,dx < \infty, \tag{7}$$

то интеграл (2) и предел (3) существуют.

Действительно, тогда интеграл (2) сходится, даже абсолютно:

$$\int_a^\infty |\psi'(x)\,\Phi(x)|\,dx \leqslant M \int_a^\infty |\psi'(x)|\,dx < \infty,$$

и

$$|\psi(x)\Phi(x)| \leqslant M|\psi(x)| \to 0 \quad (x \to \infty).$$

Таким образом, в данном случае интеграл (4) сходится и $B = 0$.

2) *Признак Дирихле.* Этот признак заключается в том, что для функции Φ выполняется неравенство (5), что же касается функции ψ, то она предполагается убывающей на $[a, \infty)$ и стремящейся к нулю при $x \to \infty$, и, таким образом, имеющей неположительную производную. Тогда условие (6) выполняется. Выполняется также и признак (7) потому, что существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N |\psi'(x)|\,dx = -\lim_{N\to\infty} \int_a^N \psi'(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} [\psi(a) - \psi(N)] = \psi(a).$$

Таким образом, признак Дирихле есть частный случай признака 1).

Пример. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{8}$$

имеет единственную особенность (в «точке» ∞). Надо иметь в виду, что функция $(\sin x)/x$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Если ее положить равной 1 в этой точке, то она станет непрерывной. Интеграл (8) сходится потому, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

сходится на основании признака Дирихле (функция $1/x$ монотонно убывает, стремится при $x \to \infty$ к нулю и имеет непрерывную производную, а функция $\sin x$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $(-\cos x)$). Однако интеграл (8) сходится не абсолютно (см. § 9.15, пример 1).

§ 9.15. Несобственный интеграл и ряд *)

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \quad b_k \to b.$$

Тогда можно определить ряд

$$\int_{b_0}^{b_1} f\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f\,dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx, \tag{2}$$

k-й член которого равен

$$u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx.$$

Теорема 1. *Если интеграл* (1) *сходится, то сходится также ряд* (2) *и имеет место равенство*

$$\int_a^b f\,dx = \sum_0^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f\,dx = \int_a^b f\,dx,$$

Если f неотрицательна на $[a, \infty)$, то и наоборот, из сходимости ряда (2) следует сходимость интеграла (1). В самом деле, пусть ряд сходится и имеет сумму, равную S. Для любого b', где $a < b' < b$, можно указать такое n_0, что $b_n > b'$ для $n > n_0$. Поэтому, учитывая, что $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b_n} f\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx \leqslant S,$$

*) Для понимания этого параграфа требуются самые элементарные понятия о ряде в пределах § 11.1.

т. е. интеграл в левой части ограничен и, следовательно, несобственный интеграл (1) существует. Но тогда, как доказано выше, справедливо равенство (3).

Если же функция f не сохраняет знак на $[a, b)$, то из сходимости ряда (2) вообще не следует сходимость интеграла. Например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x \, dx = \sum_{0}^{\infty} 0 = 0$$

сходится, интеграл же $\int_0^\infty \sin t \, dt$ расходится потому, что функция от x

$$\int_0^x \sin t \, dt = 1 - \cos x$$

не стремится к пределу при $x \to \infty$.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна и не возрастает на* $[0, \infty)$, *то интеграл*

$$\int_0^\infty f(x) \, dx$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots$$

одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leqslant f(k), \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Суммируя их по k, получим

$$\sum_{1}^{n+1} f(k) = \sum_{0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_0^{n+1} f(x) \, dx \leqslant \sum_{0}^{n} f(k). \tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что все члены в этих соотношениях при возрастании n монотонно не убывают, следует утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots \tag{5}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ потому, что функция

$1/(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$ непрерывна и монотонно убывает на $[0, \infty)$, а

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^\alpha} \begin{cases} < \infty & (\alpha > 1), \\ = \infty & (\alpha \leqslant 1). \end{cases}$$

В случае $\alpha \leqslant 0$ непосредственно видно, что ряд (5) расходится.

Теорема 3. *Пусть в интеграле*

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx \tag{6}$$

функции $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны,* $\psi(x) > 0$ *и возрастает (не убывает),* $\varphi(x)$ *неотрицательна и периода* l *и* $\int_0^l \varphi(x)\,dx > 0$. *Тогда интеграл*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\psi(x)} \tag{7}$$

и интеграл (6) *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Доказательство. Представим интеграл (6) формально в виде ряда

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k, \quad \lambda_k = \int_{kl}^{(k+1)l} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx. \tag{8}$$

В силу периодичности φ

$$\int_{kl}^{(k+1)l} \varphi(x)\,dx = \int_0^l \varphi(kl+u)\,du = \int_0^l \varphi(u)\,du = \mu > 0,$$

и так как ψ возрастает, то, очевидно,

$$\frac{\mu}{\psi((k+1)\,l)} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{\mu}{\psi(kl)} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Интеграл слева в (8) одновременно сходится с рядом справа в (8), который в силу (9) сходится одновременно с рядом $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\psi(kl)}$, который, наконец, по предыдущей теореме сходится одновременно с интегралом (7), и теорема доказана.

Пример 1.

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty$$

по теореме 3, где надо считать $l = \pi$, $\varphi(x) = |\sin x|$, $\psi(x) = x$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx \qquad (\alpha > 0). \tag{10}$$

Он имеет единственную особенность в точке ∞. При $\alpha > 1$ он абсолютно сходится:

$$\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{|x^\alpha + \sin x|}\,dx \leqslant \int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha - 1} < \infty,$$

потому что $x^\alpha \sim x^\alpha - 1$ $(x \to \infty)$, а $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$.

При $\alpha \leqslant 1$ интеграл (10) абсолютно не сходится потому, что

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{|x^\alpha + \sin x|}\,dx \geqslant \int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha + 1}\,dx = \infty$$

в силу последней теоремы. Ведь функция $|\sin x|$ непрерывна, периода π и $\int_0^\pi |\sin x|\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2 > 0$, функция же $x^\alpha + 1$ непрерывно возрастает и $\int_\pi^\infty (x^\alpha + 1)^{-1}\,dx = \infty$.

Но интеграл (10) все же для $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ сходится (не абсолютно). Действительно, применяя интегрирование по частям, получим

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx = -\cos x\,\frac{1}{x^\alpha + \sin x}\Bigg|_1^N - \int_1^N \frac{\cos x\,(\alpha x^{\alpha-1} + \cos x)}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx.$$

Первый член правой части при $\alpha > 0$ имеет при $N \to \infty$ конечный предел, второй член есть сумма интегралов

$$I'_N = -\int_1^N \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx, \quad I''_N = -\alpha\int_1^N \frac{\cos x \cdot x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx.$$

Но

$$\int_2^\infty \frac{|\cos x|\,x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx \leqslant \int_2^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x^\alpha - 1)^2}\,dx < C\int_2^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < \infty,$$

поэтому I''_N стремится к конечному пределу при $N \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, и вопрос свелся к исследованию I'_N.

Интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^\alpha + \sin x)^2}\,dx$ при $\alpha > 0$ сходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^{2\alpha}}\,dx \tag{11}$$

(см. замечание 1 в конце § 9.13) в силу того, что $x^\alpha + \sin x \sim x^\alpha (x \to \infty)$. А интеграл (11) одновременно сходится с интегралом

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}} \begin{cases} < \infty & (1/2 < \alpha), \\ = +\infty & (1/2 \geqslant \alpha) \end{cases}$$

(см. предыдущую теорему).

Итак, предел I'_N при $N \to \infty$ существует только при $\alpha > 1/2$, поэтому и интеграл (10) сходится только при $\alpha > 1/2$.

§ 9.16. Несобственные интегралы с особенностями в нескольких точках

Пусть (a, b) есть интервал, конечный или бесконечный, и на нем задана функция f такая, что интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

имеет особенности только в точках a и b. Это значит, что $a = -\infty$ или, если a — конечная точка, то в ее окрестности функция f неограничена; также $b = +\infty$ или, если b — конечная точка, то в окрестности ее f неограничена. Кроме того, функция f интегрируема на любом отрезке $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$.

Произвольная точка c интервала (a, b) делит его на два частичных интервала (a, c), (c, b).

Интеграл

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx \tag{2}$$

имеет единственную особенность (в точке a); интеграл

$$\int\limits_c^b f(x)\,dx \tag{3}$$

также имеет единственную особенность (в точке b). Для интегралов (2) и (3) мы уже знаем, в каком случае они существуют (сходятся) как несобственные интегралы.

По определению, несобственный интеграл (1) существует (сходится) в том и только в том случае, если каждый из интегралов (2) и (3) существует. При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Это определение не зависит от c. В самом деле, если $a < c < c' < b$, то

$$\int_c^b = \int_c^{c'} + \int_{c'}^b, \tag{4}$$

где интеграл $\int_c^{c'}$ — собственный, и, аналогично,

$$\int_a^c + \int_c^{c'} = \int_a^{c'}. \tag{5}$$

Сложив (4) и (5) и сократив на $\int_c^{c'}$, получим

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^{c'} + \int_{c'}^b.$$

Но может быть более сложный случай. Пусть задан, пока формально, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где интервал (a, b) может быть конечным и бесконечным. Пусть, далее, интервал (a, b) можно разбить точками $a = c_0 < c_1 < c_2 \ldots \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ на конечное число частичных интервалов (c_k, c_{k+1}) таких, что каждый из интегралов

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{7}$$

имеет только одну особенность на одном из концов (c_k, c_{k+1}).

Тогда, если все несобственные интегралы (7) существуют (сходятся), то, по определению, считают существующим (сходящимся) и интеграл (6). При этом полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f\,dx.$$

Если хотя бы один из интегралов (7) не сходится, то и интеграл (6) считается расходящимся (не существующим).

Аналогично, интеграл (6) называется абсолютно сходящимся тогда и только тогда, если все интегралы (7) абсолютно сходятся.

Мы хотим еще сделать одно замечание. Допустим для примера, что точка a конечна, $a < b < \infty$, и интеграл

$$\int_a^\infty f\,dx \tag{8}$$

имеет, кроме точки ∞, еще только одну особенность в точке b.

Пусть $b < c < \infty$. Тогда, как было определено выше, несобственный интеграл (8), который мы будем считать существующим, можно определить следующим образом ($\varepsilon_j > 0$):

$$\int_a^\infty f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx + \int_c^\infty f\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx + \lim_{\varepsilon_3\to 0}\int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0}\left\{\int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx + \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx + \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx\right\} \quad (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 > 0), \tag{9}$$

т. е. если существует несобственный интеграл (8), то существует также предел выражения в фигурных скобках, когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга*). Важно отметить, что обратное утверждение также верно, т. е. если существует предел правой части (9), когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга, то существуют каждый из трех пределов, стоящих в третьем члене (9), т. е. существует несобственный интеграл (8). Чтобы доказать это, введем обозначение

$$\varphi_1(\varepsilon_1) = \int_a^{b-\varepsilon_1} f\,dx, \quad \varphi_2(\varepsilon_2) = \int_{b+\varepsilon_2}^{c} f\,dx, \quad \varphi_3(\varepsilon_3) = \int_c^{1/\varepsilon_3} f\,dx.$$

Пусть известно, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\to 0}\{\varphi_1(\varepsilon_1) + \varphi_2(\varepsilon_2) + \varphi_3(\varepsilon_3)\};$$

тогда выполняется условие Коши: для всякого $\eta > 0$ должно найтись такое $\delta > 0$, что если $0 < \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \varepsilon_3' < \delta$, то

$$|\varphi_1(\varepsilon_1) + \varphi_2(\varepsilon_2) + \varphi_3(\varepsilon_3) - \varphi_1(\varepsilon_1') - \varphi_2(\varepsilon_2') - \varphi_3(\varepsilon_3')| < \eta.$$

*) Здесь идет речь о пределе функции от трех переменных в нулевой точке на множестве точек с положительными координатами.

Но мы имеем право взять $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3'$, и тогда получится, что для всякого $\eta > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|\varphi_1(\varepsilon_1) - \varphi_1(\varepsilon_1')| < \eta$ для $0 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1' < \delta$, а это показывает, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \varphi_1(\varepsilon_1). \tag{10}$$

Подобным образом доказывается существование остальных двух пределов:

$$\lim_{\varepsilon_2 \to 0} \varphi_2(\varepsilon_2), \quad \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \varphi_3(\varepsilon_3). \tag{11}$$

Таким образом, доказано, что для существования интеграла (8) необходимо и достаточно существование предела в правой части (9), когда положительные ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю независимо друг от друга.

В этом утверждении существенно, что переменные ε_1, ε_2, ε_3 независимы. Если бы, например, было известно, что существует предел правой части только при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \to 0$, то этого было бы недостаточно, чтобы заключить существование каждого из пределов (10), (11) порознь.

Приведенные рассуждения распространяются понятным образом и на другие случаи расположения особенностей интеграла.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}. \tag{12}$$

Он имеет единственную особенность в точке 0. Он не существует, потому что не существуют отдельно интегралы $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ и $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$.

На основании сказанного выше можно еще сказать, что интеграл (12) не существует потому, что не существует предел

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon_2}^{1} = \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

когда ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга.

Итак, несобственный интеграл по Риману от функции $1/x$ на отрезке $[-1, 1]$ не существует.

Однако существует одно важное обобщение несобственного интеграла (*в смысле главного значения — по Коши*), в силу которого указанный интеграл понимается как предел

$$P.\,V.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}=0$$

(т. е. здесь $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2$!). Здесь *P. V.* — сокращенная запись выражения Principal Value (англ.) — главное значение (см. § 16.7, (5)).

§ 9.17. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

Пусть функция f имеет на некотором интервале, содержащем в себе точку a, непрерывную кусочногладкую производную порядка $r-1$ включительно. Тогда на указанном интервале существует, за исключением конечного числа точек, производная $f^{(r)}(x)$, представляющая собой кусочнонепрерывную функцию (см. § 5.15). Для любого значения x из этого интервала имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R(x), \tag{1}$$

$$R(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{0}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt \qquad (0!=1). \tag{2}$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

$$R(x)=-\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1}+\frac{1}{(r-2)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{r-2}f^{(r-1)}(t)\,dt=$$

$$=-\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1}-\frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}(x-a)^{r-2}+$$

$$+\frac{1}{(r-3)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{r-3}f^{(r-2)}(t)\,dt=\ldots=-\sum_{0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+f(x).$$

Если в интеграле (2) сделать подстановку $t=a+(x-a)u$, $dt=(x-a)du$, то получим следующее выражение для остаточного члена:

$$R(x)=(x-a)^r\,\psi(x),$$

$$\psi(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{0}^{1}(1-u)^{r-1}f^{(r)}(a+(x-a)u)\,du. \tag{3}$$

Здесь, если $f^{(r)}(x)$ непрерывна, то и $\psi(x)$ — непрерывная функция от x, потому что к интегралу (3) применима теорема о непрерывности его по параметру x (см. § 12.13). Если же функция f имеет непрерывные производные более высокого порядка $f^{(r+s)}(s>0)$, то $\psi(x)$ законно дифференцировать s раз под знаком интеграла (см. § 13.12). Поэтому в этом случае $\psi(x)$ будет s раз непрерывно дифференцируема. Этот факт мы не могли бы получить, рассматривая остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, содержащей в себе функцию θ, дифференциальные свойства которой *a priori* неизвестны.

§ 9.18. Формулы Валлиса и Стирлинга *)

Формула Валлиса имеет вид

$$\sqrt{\pi}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\,2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}}. \tag{1}$$

Чтобы вывести ее, проинтегрируем по частям интеграл:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=-\sin^{n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$
$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx.$$

Перенося второй интеграл правой части этого равенства в левую и деля на n, получим

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx. \tag{2}$$

Отправляясь от четного и нечетного n и последовательно применяя это равенство, понижающего степень $\sin x$ на две единицы, получим

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx=\frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

*) Д. Валлис (1616—1703) — английский математик; Д. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик.

Разделив теперь эти равенства одно на другое и положив

$$\mu_m = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

приходим к равенству

$$\pi = 2\frac{[(2m)!!]^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!}\mu_m. \tag{3}$$

Заметим, что на отрезке $[0, \pi/2]$

$$\sin^{2m+1} x \leqslant \sin^{2m} x \leqslant \sin^{2m-1} x,$$

откуда

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x\, dx.$$

Деля члены этой цепи на $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2m+1} x\, dx$ и применяя равенство (2), получим

$$1 \leqslant \mu_m \leqslant \frac{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x\, dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, dx} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m},$$

откуда следует, что

$$\mu_m \to 1 \qquad (m \to \infty). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует асимптотическое равенство

$$\pi \approx 2\frac{[(2m)!!]^2}{(2m-1)!!\,(2m+1)!!} \approx 2\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 2m \quad (m \to \infty),$$

где мы последовательно пренебрегли множителями μ_m, $\frac{2m}{2m+1} \to 1$, откуда

$$\sqrt{\pi} \approx 2\sqrt{m}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} = 2\sqrt{m}\frac{[(2m-2)!!]^2}{(2m-1)!} =$$

$$= 2\sqrt{m}\frac{[(2m)!!]^2}{(2m)!}\cdot\frac{1}{2m} = \frac{(m!)^2\, 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}} \qquad (m \to \infty),$$

т. е. имеет место (1)

Формула Стирлинга представляет собой равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}} = 1 \tag{5}$$

или, что все равно, асимптотическое равенство

$$n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (n\to\infty). \tag{6}$$

Покажем неравенства

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)}e^{-n+(1/4n)}, \tag{7}$$

из которых непосредственно следует (5) или (6).

Положим

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+(1/2)}, \quad \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Функция $1/x$ монотонно убывает и выпукла книзу при $x>0$, поэтому площадь фигуры, ограниченной ее графиком, осью x и прямыми $x=n$, $x=n+1$, меньше площади трапеции $nBC(n+1)$, но больше площади трапеции $nB'C'(n+1)$, где $B'C'$ — отрезок касательной к нашей кривой в точке ее, имеющей абсциссу $x = n+(1/2)$ (рис. 9.2):

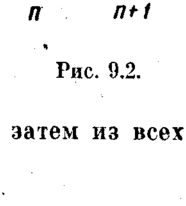

Рис. 9.2.

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Умножая члены этой цепи на $n+(1/2)$ и вычитая затем из всех членов 1, получим

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)}-1=\frac{1}{4n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

т. е. $0<\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ или

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}. \tag{9}$$

Подставляя теперь в эти неравенства $n+j$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$

вместо n и перемножая их, получим

$$1<\frac{a_n}{a_{n+k}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+k}\right)}. \qquad (10)$$

Первое неравенство (9) показывает, что последовательность положительных чисел a_j $(j=1, 2, \ldots)$ монотонно убывает и, следовательно, стремится к неотрицательному пределу, который обозначим через α. Из неравенств (10) после перехода в них к пределу при $k\to\infty$, получим

$$1<\frac{a_n}{\alpha}\leqslant e^{1/4n} \qquad (11)$$

откуда видно, что $\alpha>0$.

Формула Валлиса на языке чисел a_n, очевидно, записывается так

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}}=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

и, следовательно,

$$\alpha=\sqrt{2\pi}. \qquad (12)$$

Из (8), (11) и (12) следуют неравенства (7).

Глава 10

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 10.1. Площадь в полярных координатах

Площадь S фигуры, ограниченной двумя выходящими из полярного полюса O лучами $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$ и кривой Γ, заданной в полярных координатах непрерывной функцией $\rho = f(\theta)$, может быть определена следующим образом (рис. 10.1).

Производим разбиение отрезка $[\theta_0, \theta_*]$ изменения θ:

$$\theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \theta_*.$$

Элемент площади фигуры, ограниченной кривой Γ и лучами $\theta = \theta_k$, $\theta = \theta_{k+1}$, приближенно выражаем площадью кругового

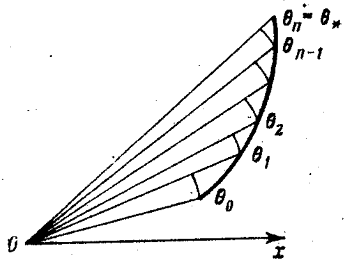

Рис. 10.1.

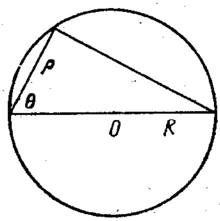

Рис. 10.2.

сектора, ограниченного теми же лучами и окружностью радиуса $\rho_k = f(\theta_k)$, равной $\frac{1}{2}\rho_k^2\Delta\theta_k$, $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Естественно считать, по определению,

$$S = \lim_{\max\Delta\theta_k \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} f^2(\theta)\, d\theta. \qquad (1)$$

Мы получили формулу площади фигуры в полярных координатах. Для непрерывной функции $f(\theta)$ интеграл (1), как мы знаем, существует.

Конечно, возникает вопрос, будет ли определенная таким образом величина S равна тому же числу, как если бы мы вычислили площадь нашей фигуры в декартовых координатах. Этот вопрос положительно решается на основании общей теории меры по Жордану (см. § 12.4).

Пример. Изображенная на рис. 10.2 окружность в полярных координатах определяется уравнением $\rho = 2R\cos\theta$. В силу (1) ее площадь равна

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

§ 10.2. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг оси x.

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и считаем, что элемент ΔV объема тела, ограниченный плоскостями $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi y_k^2 \cdot \Delta x_k = \pi f(x_k)^2\, \Delta x_k.$$

Величина $V_n = \pi \sum\limits_0^{n-1} f(x_k)^2\, \Delta x_k$ приближенно выражает V и

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_0^{n-1} f(x_k)^2\, \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (1)$$

Мы получили формулу объема тела вращения. Приведем еще другой вывод этой формулы, основанной на введении дифференциала объема. Обозначим через $V(x)$ объем части тела, заключенный между плоскостями, проходящими через точки a и x оси x, перпендикулярно к последней (рис. 10.3). Приращение $\Delta V(x)$, соответствующее приращению $\Delta x > 0$, есть объем части тела, заключенной между плоскостями, перпендикулярными к оси x, проходящими через точки x и $x + \Delta x$.

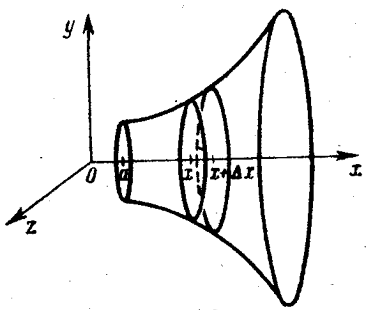

Рис. 10.3.

Докажем, что имеет место равенство

$$\Delta V = \pi f^2(x)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0). \qquad (2)$$

В самом деле, пусть

$$m = \min_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi), \quad M = \max_{x \leqslant \xi \leqslant x+\Delta x} f(\xi).$$

Тогда, очевидно,

$$\pi m^2\Delta x \leqslant \Delta V(x) \leqslant \pi M^2\Delta x, \quad \pi m^2\Delta x \leqslant \pi f^2(x)\Delta x \leqslant \pi M^2\Delta x, \tag{3}$$

и так как функция непрерывна, то $M - m \to 0$ $(\Delta x \to 0)$. Это показывает, что

$$\pi(M^2 - m^2)\Delta x = o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2).

Равенство (2) говорит, что первое слагаемое его правой части есть дифференциал V:

$$dV = \pi f^2(x)\Delta x = \pi f^2(x)dx.$$

На основании формулы Ньютона — Лейбница искомый объем равен

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример. Эллипсоид вращения (вокруг оси x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

есть тело, ограниченное поверхностью вращения кривой

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (-a \leqslant x \leqslant a)$$

вокруг оси x, поэтому на основании формулы (1) его объем равен

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

§ 10.3. Длина дуги гладкой кривой

Пусть Г есть гладкая кривая, определенная функциями (см. § 6.5)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

таким образом, имеющими на $[a, b]$ непрерывные производные. Введем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и составим сумму (см. § 6.8)

$$S_n = \sum_0^{n-1} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

$$\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k), \quad \Delta y_k = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k),$$

$$\Delta z_k = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k), \quad \delta = \max \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k,$$

представляющую собой длину ломаной, вписанной в Г с вершинами в точках, соответствующих значениям t_k.

Имеем тогда ($t_k < \mu_k, \nu_k, \lambda_k < t_{k+1}$) при $\delta \to 0$

$$S_n = \sum_0^{n-1} \sqrt{\varphi'(\mu_k)^2 + \psi'(\nu_k)^2 + \chi'(\lambda_k)^2}\, \Delta t_k =$$

$$= \sum_0^{n-1} \sqrt{\varphi'(t_k)^2 + \psi'(t_k)^2 + \chi'(t_k)^2}\, \Delta t_k + \sum_0^{n-1} \varepsilon_k \Delta t_k \to$$

$$\to \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt.$$

В первом равенстве цепи мы воспользовались теоремой о среднем.

Чтобы обосновать, что $\sum \varepsilon_k \Delta t_k \to 0$ при $\delta \to 0$, введем вспомогательную функцию

$$\alpha(u, v, w) = \sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(v)^2 + \chi'(w)^2},$$

очевидно непрерывную на кубе $\Delta = \{a \leqslant u, v, w \leqslant b\}$. Модуль ее непрерывности на Δ обозначим через $\omega(\delta)$. Так как расстояние между точками (t_k, t_k, t_k) и $(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)$ нашего куба не превышает $\delta\sqrt{3}$, то

$$|\varepsilon_k| = |\alpha(t_k, t_k, t_k) - \alpha(\mu_k, \nu_k, \lambda_k)| \leqslant \omega(\delta\sqrt{3}),$$

и потому

$$\left|\sum_0^{n-1} \varepsilon_k \Delta t\right| \leqslant \varphi(\delta\sqrt{3}) \sum_0^{n-1} \Delta t_k = (b-a)\,\omega(\delta\sqrt{3}) \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Мы доказали, что длина гладкой кривой (1) существует и выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt. \tag{2}$$

При замене переменной при помощи непрерывно дифференцируемой функции $t = \lambda(\tau)$, ($\lambda'(\tau) > 0$, $c \leqslant \tau \leqslant d$) получим, очевидно,

$$S = \int_c^d \sqrt{\varphi_1'(\tau)^2 + \psi_1'(\tau)^2 + \chi_2'(\tau)^2}\, d\tau, \tag{3}$$

где $\varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau))$, ..., что показывает инвариантность формулы (1) длины дуги.

Если кривая (плоская) задана уравнением

$$y = f(x), \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где f имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то, очевидно, ее длина дуги выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

(надо положить в (2) $t = x$, $y = f(x)$, $z = 0$).

Пример. Длина дуги винтовой линии

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = b\theta, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$$

в силу (2) равна

$$S = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2 + b^2}\, d\theta = \theta_0 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 10.4. Площадь поверхности тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Вычислим площадь S поверхности вращения Γ вокруг оси x. Для этого произведем разбиение $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

впишем в кривую Γ ломанную Γ_n с вершинами $(x_k, f(x_k))$ и вычислим площадь поверхности вращения последней вокруг оси x:

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \quad \Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

и перейдем к пределу при $\max \Delta x_k \to 0$.

В результате получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{2}$$

В самом деле, вынося из-под корня Δx_k $(\Delta x_k > 0)$ и применяя к Δy_k теорему о среднем, получим (пояснения ниже)

$$S_n = \pi \sum_0^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k =$$

$$= 2\pi \sum_0^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k + \alpha \to$$

$$\to 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \qquad (\max \Delta x_k \to 0, \ x_k < \xi_k < x_{k+1}),$$

где

$$\alpha = \pi \sum_{0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k.$$

Доказательство того, что

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_k \to 0, \tag{3}$$

следует из соотношений:

$$|\alpha| \leqslant \pi \sqrt{1 + M^2} \sum_{0}^{n-1} |f(x_k) + f(x_{k+1}) - 2f(\xi_k)|\, \Delta x_k <$$

$$< \varepsilon \sum_{0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon (b - a), \quad \max_k \Delta x_k < \delta,$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \sqrt{1 + f'(x)^2}$, и число $\delta > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, настолько мало, что

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2\pi \sqrt{1 + M^2}} \quad \text{при} \quad \Delta x_k < \delta.$$

Такое δ существует в силу равномерной непрерывности функции f на $[a, b]$.

Общее определение площади произвольной гладкой поверхности см. § 12.23, том II.

Пример. Площадь поверхности вращения куска параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси x равна $S = 2\pi \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.

§ 10.5. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и система точек

$$x_0, \ x_1, \ \ldots, \ x_n. \tag{1}$$

Поставим задачу: требуется найти многочлен*) $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, степени n совпадающий с $f(x)$ в указанных точках, т. е. чтобы выполнились равенства

$$f(x_k) = P(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Чтобы решить эту задачу, введем многочлены

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

*) Коэффициенты многочлена могут быть любыми числами, в частности, может быть $a_n = 0$.

Очевидно, что Q_k для каждого $k=0, 1, \ldots, n$ есть многочлен степени n, равный 1 в точке x_k и 0 в остальных точках системы (1): $Q_k(x_j)=\delta_{kj}$ $(k, j=0, 1, \ldots, n)$.

Символ δ_{kj} (Кронекера) определяется равенством:

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Положим

$$P(x)=\sum_{0}^{n} Q_k(x)\, f(x_k). \tag{4}$$

$P(x)$ есть многочлен степени n, обладающий свойствами

$$P(x_j)=\sum_{0}^{n} Q_k(x_j)\, f(x_k)=Q_j(x_j)\, f(x_j)=f(x_j) \quad (j=0, 1, \ldots, n),$$

т. е. он решает поставленную задачу и притом единственным образом, потому что, если допустить, что существует еще другой многочлен $P_1(x)$ степени n, решающий эту задачу, то разность $P(x)-P_1(x)$ была бы многочленом степени n, имеющим $n+1$ корней. Но тогда $P(x)-P_1(x)\equiv 0$.

Отметим, что если исходная функция f сама есть многочлен степени n, то $f(x)\equiv P(x)$ тождественно, потому что два многочлена, совпадающие в $n+1$ различных точках, тождественно равны.

§ 10.6. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f. Если известна ее первообразная, то для этого естественно применить формулу Ньютона — Лейбница. Но далеко не всегда первообразная известна и возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из определения последнего. Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k=a+k\frac{b-a}{N} \qquad (k=0, 1, \ldots, N) \tag{1}$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{0}^{N-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

где знак $\approx$ выражает приближенное равенство.

Выражение (2) называется *квадратурной формулой прямоугольников*. В случае рис. 10.4 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, приближенно равна сумме площадей изображенных там прямоугольников.

Мы знаем, что для непрерывной на $[a, b]$ функции предел при $N \to \infty$ правой части приближенной формулы (2) точно равен левой, что дает основание считать, что при большом N ошибка квадратурной формулы (2), т. е. абсолютная величина разности правой и левой ее частей, мала.

Однако возникает вопрос об оценке ошибки. Ниже мы узнаем, как эту оценку получить, если потребовать, чтобы функция f, кроме непрерывности, удовлетворяла некоторым условиям гладкости.

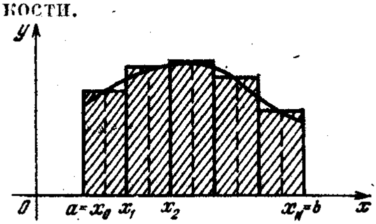

Рис. 10.4.

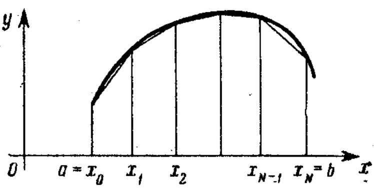

Рис. 10.5.

Очень важно заметить, что если функция $f(x) = Ax + B$ есть линейная функция, то для нее *формула* (2) *точна* — правая часть (2) в точности равна левой. Так как линейная функция есть многочлен первой степени, то мы можем сказать, что *квадратурная формула прямоугольников точна для всех многочленов не выше первой степени.*

Дадим еще второй естественный способ приближенного вычисления определенного интеграла, приводящий к *квадратурной формуле трапеций.* Он заключается в том, что отрезок $[a, b]$ делится на равные части точками системы (1) и полагается приближенно, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\right) = \frac{b-a}{2N}\bigl(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots$$
$$\ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\bigr). \quad (3)$$

В формуле трапеций площадь рассмотренной выше криволинейной фигуры приближенно исчерпывается трапециями (рис. 10.5). Важно отметить, что *формула трапеций точна для линейных функций* $Ax + B$ (A, B — постоянные), т. е. для многочленов не выше первой степени; если подставить такую функцию в (3) вместо $f(x)$, то получится точное равенство. В этом смысле формула трапеций не имеет преимущества перед формулой прямоугольников, обе они точны для линейных функций.