§ 10.7. Общая квадратурная формула. Функционал

Понятие квадратурной формулы мы теперь обобщим. Зададим (на отрезке $[a, b]$) систему точек

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_N \leqslant b \tag{1}$$

и систему чисел

$$p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_N. \tag{2}$$

Положим для непрерывной на $[a, b]$ функции f

$$L(f) = \sum_0^N p_k f(x_k) \tag{3}$$

и чисто формально будем считать $L(f)$ приближенным выражением нашего интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L(f). \tag{4}$$

Приближенное равенство (4) называется *квадратурной формулой с узлами* (1) и весами (2).

Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает некоторое множество функций f и каждому $f \in \mathfrak{M}$ в силу определенного закона приведено в соответствие число $F(f)$; тогда говорят, что F есть *функционал*, определенный на $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ есть линейное множество (см. § 6.1) и F обладает свойством

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F(f_1) + \beta F(f_2),$$

каковы бы ни были числа α, β и функции f_1, $f_2 \in \mathfrak{M}$, то говорят, что *функционал* F (определенный на $\mathfrak{M}$) — *линейный*.

Множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций принято обозначать через $C = C(a, b)$. Это — линейное множество, потому что, если α, β — числа и $f_1, f_2 \in C$, то $\alpha f_1 + \beta f_2 \in C$. Интеграл $\int_a^b f dx$ есть, очевидно, линейный функционал, определенный на C. Выражение $L(f)$ (см. (3)) есть тоже, как легко видеть, линейный функционал, определенный на C. Отсюда следует, что если равенство (4) оказалось точным для непрерывных функций $f_1, \ldots, f_l$, взятых в конечном числе, то оно автоматически точно для функций $\sum_1^l \alpha_k f_k(x)$, где α_k — произвольные числа.

§ 10.8. Формула Симпсона *)

В этом параграфе мы вводим важную в прикладном анализе *квадратурную формулу Симпсона*. Она очень проста и в то же время обладает замечательным свойством: она точна для всех многочленов третьей степени.

Начнем с того, что решим задачу: требуется найти числа A, B, C такие, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1) \tag{1}$$

была точна для функций 1, x, x^2. Подставляя эти функции в (1) вместо f, получим систему уравнений

$$2 = A + B + C,\ 0 = -A + C,\ \frac{2}{3} = A + C,$$

откуда $A = C = 1/3$, $B = 4/3$. Но так как $A = C$, то легко проверяется, что полученная формула (1) точна и для функции x^3 и в силу линейности входящих в нее функционалов (см. предыдущий параграф) она точна для всех многочленов не выше третьей степени.

Более общая квадратурная формула имеет вид

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2}$$

Это простейшая квадратурная формула Симпсона, соответствующая отрезку $[a, b]$.

Докажем, что она точна для многочленов третьей степени. В самом деле, полагая в (2)

$$x = \frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2},\quad F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + t\,\frac{b-a}{2}\right),$$

и сокращая на $(b-a)/2$, получим

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt \approx \frac{1}{3}\,(F(-1) + 4F(0) + F(1)). \tag{3}$$

Но формула (3) точна для многочленов от t не выше третьей степени, поэтому и формула (2) точна для многочленов от x не выше третьей степени — ведь подстановка $x = \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ переводит многочлены не выше 3-й степени в многочлены не выше 3-й степени.

*) Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N} k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2N)$$

и к отрезкам $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... применить формулу (2), то в результате получим (*усложненную*) *квадратурную формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + f(x_{2N})). \tag{4}$$

С точки зрения практических вычислений сложность вычислений по формуле Симпсона и прямоугольников одинакова. Но если функция f достаточно гладкая, то ошибка приближения по формуле Симпсона при больших N значительно меньше соответствующей ошибки при приближении методом прямоугольников (см. § 10.9).

§ 10.9. Общий метод получения оценок квадратурных формул

Формулу

$$\int_0^1 f(t)\,dt \approx \sum_0^n p_k f(t_k) = L(f) \tag{1}$$

для отрезка $[0, 1]$ мы будем называть *канонической квадратурной формулой с узлами*

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1 \tag{2}$$

и весами

$$p_0, \; p_1, \; \ldots, \; p_n. \tag{3}$$

Канонической формуле (1) соответствует квадратурная формула для отрезка $[c, d]$:

$$\int_c^d f(x)\,dx \approx (d-c)\sum_0^n p_k f(c + (d-c)t_k) = \\ = (d-c)\,L(f(c + (d-c)t)). \tag{4}$$

Узлы ее $c + (d-c)t_k$ делят отрезок $[c, d]$ в том же отношении, в каком узлы t_k канонической формулы делят $[0, 1]$, а веса равны $(d-c)p_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Если разделить отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{N} k \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$$

и к каждому отрезку $[x_k, x_{k+1}]$ применить формулу, соответствующую канонической,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right),$$

затем просуммировать ее левые и правые части по k, то получим формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right), \tag{5}$$

которую мы называем *усложненной квадратурной формулой, соответствующей канонической формуле* (1).

Чтобы получить оценку ошибки при помощи формулы (5), будем предполагать, что исходная каноническая формула точна для всех многочленов степени не выше $r-1$.

Обозначим через $W^r(a, b)$ класс функций f, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на нем непрерывную кусочно гладкую производную порядка $r-1$ (см. начало § 9.17).

Если функция $f \in W^r(0, 1)$, то для нее имеет место разложение по формуле Тейлора с остатком в интегральной форме (см. § 9.17)

$$f(t) = P(t) + R(t), \quad \text{где } P(t) = \sum_0^{r-1} a_k t^k,$$

$$R(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (t-u)^{r-1} f^{(r)}(u)\,du = \int_0^1 K(t-u) f^{(r)}(u)\,du,$$

$$K(u) = \begin{cases} 0 & (u \leqslant 0), \\ \dfrac{u^{r-1}}{(r-1)!} & (u > 0). \end{cases}$$

Подставим f в каноническую формулу (1), перенеся в ней правую часть в левую. Если учесть, что формула (1) точна для многочлена $P(t)$, то получим

$$\int_0^1 f(t)\,dt - L(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t-u) f^{(r)}(u)\,du\right) dt -$$

$$- \int_0^1 \left(\sum_0^n p_k K(t_k - u)\right) f^{(r)}(u)\,du = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t-u)\,dt\right) f^{(r)}(u)\,du -$$

$$- \int_0^1 \left(\sum_0^n p_k K(t_k - u)\right) f^{(r)}(u)\,du = \int_0^1 \Lambda(u) f^{(r)}(u)\,du\,^{*)},$$

*) Мы заменили порядок интегрирования, что обосновывается в теории кратных интегралов.

$$\int_0^1 K(t-u)\,dt = \frac{(1-u)^r}{r!},$$

$$\Lambda(u) = \frac{(1-u)^r}{r!} - \sum_0^n p_k K(t_k - u). \tag{6}$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\varkappa = \int_0^1 |\Lambda(u)|\,du, \tag{7}$$

$$\| f^{(r)} \| = \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} | f^{(r)}(u) |, \tag{8}$$

получим оценку

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt - L(f) \right| \leqslant \varkappa \| f^{(r)} \|. \tag{9}$$

Функция $\Lambda(t)$, а вместе с ней константа $\varkappa$, зависит от весов и расположения узлов в формуле (1), но не от f. Константа $\varkappa$ для данной канонической формулы может быть раз навсегда вычислена. Она точна — правая часть достигается для функции $f \in W^{(r)}(0, 1)$, имеющей производную $f^{(r)}(x) = \operatorname{sign} \Lambda(x)$.

Получим теперь оценку ошибки в формуле (4), соответствующей отрезку $[c, d]$, в предположении, что $f \in W^r(c, d)$. Перенеся второй член в (4) в левую часть и сделав подстановку

$$x = c + (d-c)t, \quad F(t) = f(c + (d-c)t),$$

и учтя, что $F^{(r)}(t) = (d-c)^r f^{(r)}(x)$, получим

$$\left| \int_c^d f(x)\,dx - (d-c)\,L(f(c+(d-c)\,t)) \right| =$$

$$= (d-c) \left| \int_0^1 F(t)\,dt - L(F) \right| \leqslant (d-c)\,\varkappa \| F^{(r)} \|_{(0,1)} =$$

$$= (d-c)^{r+1} \varkappa \| f^{(r)} \|_{(c,d)}, \tag{10}$$

где $\| \varphi \|_{(c,d)} = \sup\limits_{c \leqslant x \leqslant d} |\varphi(x)|$.

В оценку (10) входит в виде множителя прежняя константа $\varkappa$ и, кроме того, появился новый множитель $(d-c)^{r+1}$, зависящий от длины $d-c$ отрезка $[c, d]$. Последний стремится к нулю вместе с $d-c$, и тем более быстро, чем больше r.

Дадим, наконец, оценку для усложненной формулы (5) в предположении, что $f \in W^r(a, b)$. Так как в таком случае

$f \in W_{-}^{r}(x_k, x_{k+1})$ при любом k, то в силу (10)

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{N-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{N} L\left(f\left(x_k + \frac{b-a}{N} t\right)\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{b-a}{N}\right)^{r+1} \varkappa \left\| f^{(r)} \right\|_{(x_k, x_{k+1})} \leqslant \frac{(b-a)^{r+1}\varkappa}{N^r} \left\| f^{(r)} \right\|_{(a,b)}. \tag{11}$$

Будем говорить, что усложненная квадратурная формула имеет свойство T^{r-1}, если она точна для многочленов степени $r-1$. Мы только что доказали, что если функция $f \in W^r(a, b) = W^r$ и ее интеграл на $[a, b]$ приблизить при помощи усложненной квадратурной формулы (5) со свойством T^{r-1}, то оценка приближения имеет порядок N^{-r}.

Отметим без доказательства, что если $f \in W^k$ и формула имеет свойство T^{r-1}, то оценка приближения при $k < r$ и $k \geqslant r$ имеет соответственно порядок N^{-k}, N^{-r}.

Например, усложненная формула Симпсона имеет свойство T^3, поэтому при приближении при ее помощи функций $f \in W^k$ при $k \geqslant 4$ оценка имеет порядок N^{-4}, а при $k < 4$ — порядок N^{-k}.

В заключение сделаем еще следующее замечание. Зададим систему узлов $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$. Произвольный многочлен $P(x)$ степени r можно представить тождественно при помощи интерполяционной формулы Лагранжа (3), (4) § 10.5, где надо считать $n = r$.

Если положить

$$\lambda_k = \int_a^b Q_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, r),$$

то мы получим квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_0^r \lambda_k f(x_k),$$

точную для любого многочлена степени r.

§ 10.10. Еще о длине дуги

В дальнейшем без пояснений предполагается, что Γ есть непрерывная самонепересекающаяся кривая, определенная непрерывными функциями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad a \geqslant t \geqslant b, \tag{1}$$

Введем обозначения: ρ есть некоторое разбиение

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b \tag{2}$$

отрезка $[a, b]$.

$$\delta_\rho = \max_k \Delta t_k, \quad \sigma_\rho = \max_k \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2},$$

Γ_ρ — вписанная в Γ ломаная с вершинами, соответствующими значениям $t_j \in \rho$, и, наконец, $|\Gamma|$, $|\Gamma_\rho|$ — длины соответственно Γ и Γ_ρ. Если Γ не спрямляема, то считаем $|\Gamma| = \infty$.

Отметим свойства:

1. *Соотношения*

$$\delta_\rho \to 0, \tag{3}$$

$$\sigma_\rho \to 0 \tag{4}$$

вытекает одно из другого и, следовательно, длину непрерывной кривой Γ *можно определить при помощи одного из двух равенств*

$$|\Gamma| = \lim_{\delta_\rho \to 0} |\Gamma_\rho| = \lim_{\sigma_\rho \to 0} |\Gamma_\rho|. \tag{5}$$

В самом деле, из (3) следует (4), потому что функции φ, ψ, χ равномерно непрерывны на $[a, b]$. Далее, уравнения (1) определяют операцию, отображающую отрезок $[a, b]$ значений t на множество Γ точек (x, y, z). Она непрерывна, и потому Γ ограничено и замкнуто (см. теорему 1 § 12.20). В силу же самонепересекаемости Γ эта операция устанавливает взаимно однозначно соответствие $[a, b] \rightleftarrows \Gamma$, и потому (см. ту же теорему) обратная ей операция непрерывна, т. е. представляет собой непрерывную функцию $t = \Phi(x, y, z)$ на замкнутом ограниченном множестве Γ, следовательно, равномерно непрерывную на Γ.

2. *Если* $\rho \subset \rho'$, *т. е. все точки* $t_j \in \rho$ *принадлежат также* ρ', *то*

$$|\Gamma_\rho| \leqslant |\Gamma_{\rho'}|. \tag{6}$$

Это очевидно. Добавление к ρ еще одной точки t_j приводит к тому, что некоторое звено ломаной Γ_ρ заменяется на два звена, образующие с ним треугольник (возможно, и вырожденный).

3. *Справедливы соотношения*

$$\sup_\rho |\Gamma_\rho| = \lim_{\delta_\rho \to 0} |\Gamma_\rho| = |\Gamma|. \tag{7}$$

Число $|\Gamma|$, которое они определяют, может быть конечным, и тогда кривая Γ спрямляема и $|\Gamma|$ — ее длина (см. § 6.7). Если же $|\Gamma| = +\infty$, то кривая Γ не спрямляема.

Чтобы доказать (7), положим $\Lambda = \sup |\Gamma_\rho|$ и зададим произвольные числа Λ', Λ'' такие, что $\Lambda' < \Lambda'' < \Lambda$. В силу свойства точной верхней грани существует разбиение $\rho_* = \{a = t_0^* < t_1^* < \ldots < t_N^* = b\}$ такое, что $\Lambda'' < |\Gamma_{\rho*}|$.

Зададим положительное $\varepsilon < \Lambda'' - \Lambda'$ и подберем, пользуясь равномерной непрерывностью функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ на $[a, b]$, такое $\delta > 0$, что для всех t, $t + \Delta t \in [a, b]$, $|\Delta t| < \delta$, выполняется неравенство

$$\lambda = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} < \varepsilon/2N,$$

где λ — длина хорды, соединяющей точки Γ, соответствующие t и $t + \Delta t$.

Для произвольного разбиения ρ отрезка $[a, b]$ с $\delta_\rho < \delta$ имеют место неравенства (пояснения ниже)

$$\Lambda'' < |\Gamma_{\rho*}| < |\Gamma_{\rho+\rho*}| < |\Gamma_\rho| + \varepsilon, \tag{8}$$

или $\Lambda' < |\Gamma_\rho|$.

Третье неравенство в цепи (8) объясняется следующим образом.

Пусть AA' — хорда, соединяющая две соседние вершины Γ_ρ, а дуга $\smile{AA'} \subset \Gamma$ содержит внутри себя вершины $\Gamma_{\rho*}$, число которых пусть будет ν. Впишем в $\smile{AA'}$ ломаную $\gamma_{AA'}$ с вершинами, совпадающими с указанными вершинами $\Gamma_{\rho*}$. Количество звеньев этой ломаной равно $\nu+1$, а каждое звено имеет длину, не превышающую $\varepsilon/2N$, поэтому длина $\gamma_{AA'}$ не больше чем $\dfrac{\varepsilon(\nu+1)}{2N}$.

Если произвести такую замену хорд $\overline{AA'} \subset \Gamma_\delta$ на соответствующие ломаные $\gamma_{AA'}$ для всех дуг $\smile{AA'}$, внутри которых имеются точки $\Gamma_{\rho*}$, то в результате Γ_ρ превратится в $\Gamma_{\rho+\rho*}$, и, так как количество вершин $\Gamma_{\rho*}$, которые могут попасть в ту или иную дугу $\gamma_{AA'}$, не больше чем N, то

$$|\Gamma_{\rho+\rho*}| < |\Gamma_\rho| + \varepsilon,$$

т. е. выполняется третье неравенство (8).

Мы доказали, что для любого числа $\Lambda' < \Lambda$ найдется $\delta > 0$ такое, что выполняются неравенства $\Lambda' < |\Gamma_\rho| \leqslant \Lambda$ для всех Γ_δ с $\delta_\rho < \delta$.

Этим доказано (7), где $|\Gamma| = \Lambda$.

4. *Если Γ спрямляема на $[a, b]$, то и на $[a, c]$ и на $[c, b]$, $a < c < b$; и наоборот, если Γ спрямляема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то и на $[a, b]$. При этом*

$$|\Gamma| = |\Gamma_{ac}| + |\Gamma_{cb}|. \tag{9}$$

Доказательство. Зададим последовательность разбиений ρ^k отрезка $[a, b]$ с $\delta_{\rho^k} \to 0$ $(k \to \infty)$. Предполагаем, что Γ_{ρ^k} при любом k содержит в себе точку c. Тогда Γ_{ρ^k} индуцирует на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно разбиения ρ_1^k и ρ_2^k с $\delta_{\rho_1^k}$, $\delta_{\rho_2^k} \to 0$ $(k \to \infty)$ и

$$|\Gamma_{\rho^k}| = |\Gamma_{\rho_1^k}| + |\Gamma_{\rho_2^k}| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Если Γ спрямляема, то $|\Gamma| < \infty$ и $|\Gamma_{\rho_k}| \to |\Gamma|$. Но тогда последовательности $|\Gamma_{\rho_1^k}|$ и $|\Gamma_{\rho_2^k}|$ ограничены, и так как $\delta_{\rho_1^k}$, $\delta_{\rho_2^k} \to 0$, то они стремятся соответсвенно к конечным пределам $|\Gamma_{ac}|$, $|\Gamma_{cb}|$. Таким образом, Γ_{ac} и Γ_{cb} спрямляемы и из (10) после перехода к пределу при $k \to \infty$ следует (9).

Наоборот, если Γ_{ac} и Γ_{cb} спрямляемы, то $|\Gamma_{\rho_1^k}| \to |\Gamma_{ac}|$, $|\Gamma_{\rho_2^k}| \to |\Gamma_{cb}|$, но тогда в силу (10) существует предел $|\Gamma_{\rho^k}|$, и так как $\delta_{\rho^k} \to 0$, то в силу свойства 3 кривая Γ спрямляема.

5. *Пусть $\Gamma_\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{2}\right)$ обозначает дугу Γ, соответствующую отрезку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Если Γ_ε спрямляема при любом указанном ε, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\Gamma_\varepsilon| = |\Gamma|. \tag{11}$$

Таким образом, для спрямляемости Γ необходима и достаточна конечность предела в (11).

Доказательство. Впишем в Γ_ε ломаную Γ'_ε со звеньями, не превышающими ε, такую, что

$$|\Gamma_\varepsilon| - \varepsilon < |\Gamma'_\varepsilon| \leqslant |\Gamma_\varepsilon|, \tag{12}$$

и пусть Γ''_ε — полученная добавлением к Γ'_ε двух звеньев ломаная, вписанная в Γ.

В силу непрерывности Γ

$$|\Gamma''_\varepsilon| - |\Gamma'_\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{13}$$

Очевидно, что $|\Gamma_\varepsilon|$ не убывает при монотонном стремлении ε к нулю. Поэтому предел (11), конечный или бесконечный, существует и равен на основании (12), (13)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma'_\varepsilon| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma''_\varepsilon| = |\Gamma|,$$

где последнее равенство следует из (7).

§ 10.11. Число π. Тригонометрические функции

Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$. Верхняя ее полуокружность Γ описывается непрерывной функцией $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Но производная $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ непрерывна только на интервале $(-1, 1)$. Поэтому формулу длины дуги § 10.3, (4) в данном случае законно пока применить только к отрезку $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$, на котором f непрерывна вместе со своей производной:

$$|\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1 + f'(x^2)^2}\, dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Но функция $(1 - x^2)^{-1/2}$ интегрируема на отрезке $[-1, +1]$, если интеграл понимать в несобственном смысле, поэтому по свойству § 10.10, (11)

$$|\Gamma| = \lim_{\varepsilon\to 0} |\Gamma_\varepsilon| = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \infty, \tag{1}$$

и мы доказали, что полуокружность Γ спрямляема и длина ее выражается числом, равным интегралу справа (1). Это число называется числом π:

$$\pi = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2}$$

Мы дали обоснование существования этого важного предела со всей строгостью, предъявляемой в современном математическом анализе. В элементарной геометрии дается корректное определение длины дуги окружности, но существование ее обосновывается в общем при помощи интуитивных соображений, хотя и сопровождается логическими выкладками. Функция $\arccos x$ может быть определена при помощи равенства

$$\theta = \arccos x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

где θ есть длина дуги $\smile{AB}$ (рис. 10.6), а x есть абсцисса точки B верхней полуокружности Γ.

Мы видим, что в силу свойств интеграла как функции нижнего предела функция $\arccos x$ непрерывна, строго убывает на отрезке $[-1, +1]$ и имеет производную

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Ясно также, что $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos(-1) = \pi$.

В таком случае существует обратная к $\arccos x$, определенная на отрезке $[0, \pi]$ непрерывная, монотонно убывающая функция $x = \cos\theta$, называемая косинусом дуги θ (выраженной в радианах!).

Понятие длины дуги θ окружности обычным образом распространяется на всю действительную ось $(-\infty < \theta < \infty)$. Соответственно распространяется $\cos\theta$. Именно, мы полагаем, что $\cos\theta(-\infty < \theta < \infty)$ есть четная периода 2π функция, определенная на $[0, \pi]$ как выше. Это определение соответствует обычному определению, в силу которого $\cos\theta$ есть абсцисса

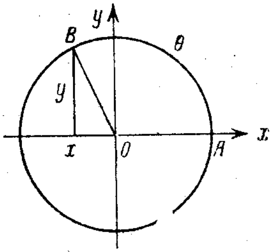

Рис. 10.6.

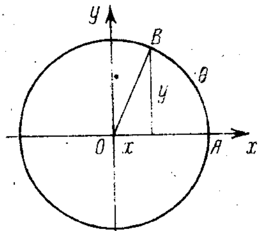

Рис. 10.7.

точки B окружности, имеющей дуговую координату θ. Из этого определения и свойств $\cos\theta$ на $[0, \pi]$ легко следует непрерывная дифференцируемость $\cos\theta$ на всей оси $(-\infty < \theta < \infty)$. Кроме того, из формулы (3) легко устанавливается, что $\cos\theta$ есть функция нечетная относительно $\theta = \frac{\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)$.

Будем теперь считать, что подвижная точка B принадлежит правой половине окружности (рис. 10.7),

$$x = \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Функция

$$\theta = \arcsin y = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \tag{4}$$

выражает длину дуги $\smile{AB}$ с соответствующим знаком. Она, очевидно, непрерывна, нечетна, строго возрастает на $[-1, +1]$ и удовлетворяет свойствам $\theta(-1) = -\pi/2$, $\theta(0) = 0$, $\theta = \pi/2$. При этом она непрерывно дифференцируема на $(-1, +1)$. Обратная к ней функция

$$y = \sin\theta$$

строго возрастает и непрерывна на $[-\pi/2, +\pi/2]$. Ее продолжают на всю действительную ось, полагая четной относительно прямой $x = \pi/2 (\sin((\pi/2)+u) = \sin((\pi/2)-u))$ и периодической периода 2π. Легко проверяется, что $\sin\theta$ есть непрерывная на $(-\infty, \infty)$ функция, равная ординате точки B единичной окружности, имеющей дуговую координату θ.

Ясно, что $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $-\infty < \theta < \infty$, ведь $\cos\theta$ и $\sin\theta$ суть соответственно абсцисса и ордината одной и той же точки единичной окружности.

Имеет место равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2},$$
$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

выражающее геометрически, что для любого $x \in [-1, +1]$ дуга, принадлежащая $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которой равен x, плюс дуга, принадлежащая $[0, \pi]$, косинус которой равен x, составляют в сумме число $\pi/2$.

Если $\theta \in [0, \pi]$ и $x = \cos\theta$, то $\theta = \arccos x$, а в силу (5) $\arcsin x = (\pi/2) - \theta$, следовательно,

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{6}$$

Аналогично, если $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $x = \sin\theta$, то $\theta = \arcsin x$, $\frac{\pi}{2} - \theta = \arccos x$, следовательно,

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{7}$$

Равенства (6), (7), если воспользоваться симметрическим и периодическим свойствами $\cos\theta$ и $\sin\theta$, легко распространить на любые θ.

Справедливы также равенства

$$(\sin\theta)' = \cos\theta, \quad (\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{8}$$

Ведь, например, из (4) следует $\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$, откуда и получается первое равенство (8):

$$(\sin\theta)' = \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta$$

для $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, но тогда и для всех θ в силу указанных периодических и симметрических свойств функций $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Пользуясь формулами (8) и тем фактом, что $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, можно вычислить производные высших порядков от функций $\cos\theta$, $\sin\theta$ в точке $\theta = 0$ и представить эти функции по формуле Тейлора с остаточными членами, соответствующими как угодно большому n, как это уже делалось в § 5.10. К тому же, пользуясь ограниченностью высших производных от наших функций $\left(\left|\frac{d^n\cos\theta}{d\theta^n}\right|, \left|\frac{d^n\sin\theta}{d\theta^n}\right| \leqslant 1\right)$, мы, как в § 5.10, можем заключить, что их тейлоровы остаточные члены стремятся при $n \to \infty$ к нулю для любого θ. Но тогда мы приходим к разложениям наших функций в степенные ряды

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \ldots, \tag{9}$$

с помощью которых можно получить (см. далее § 11.13) основные тригонометрические формулы

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Конечно, формулы (10) можно получить и непосредственно из (3) и (4).

Пусть, например $0 < \alpha$, β и $\alpha+\beta \leqslant \pi$. Тогда (пояснения ниже: $\varkappa = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$)

$$\beta = \int\limits_{\cos\beta}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{\varkappa}^{\cos\alpha} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \int\limits_{\varkappa}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} - \int\limits_{\cos\alpha}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} \tag{11}$$

и $\alpha+\beta = \int\limits_{\varkappa}^{1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}$. Отсюда в силу (3) получим первую формулу для указанных α, β.

Второе равенство цепи (11) получено путем замены переменной $x' = x\cos\alpha - \sqrt{1-x^2}\sin\alpha$. Равенство

$$\frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

следует из того, что

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\cos\alpha\sqrt{1-x^2} + x\sin\alpha\right) dx$$

и $1 - x'^2 = \left(\cos\alpha\sqrt{1-x^2} + x\sin\alpha\right)^2$. Надо еще учесть, что в этом равенстве выражение в скобках неотрицательное. Полагая $x = \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \beta$, запишем это выражение в виде $\cos\alpha\sin u + \cos u\sin\alpha$. Ясно, что оно не отрицательное, если α, $u \leqslant \pi/2$. Если же $\alpha < \pi/2$, $u > \pi/2$, то, учитывая, что $\sin t$ и $\cos t$ убывают на $[u, \pi-\alpha]$, получим

$$\begin{aligned} \cos\alpha\sin u + \cos u\sin\alpha \geqslant \cos\alpha\sin(\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha)\sin\alpha = \\ = \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

Другой случай, $u < \pi/2$, $\alpha > \pi/2$, доказывается также путем замены местами u и α.

В заключение отметим, что в приведенном здесь изложении неравенство (см. § 4.2, пример 5)

$$|\sin\theta| \leqslant |\theta| \tag{12}$$

можно доказать так:

$$|\theta| = \left| \int\limits_0^{\sin\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \geqslant \int\limits_0^{|\sin\theta|} 1\,dt = |\sin\theta|, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и так как $\pi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant \int\limits_{-1}^{1} dt = 2$ и $|\sin\theta| \leqslant 1$, то (12) верно и для всех θ. Далее неравенство (см. § 4.9) $\theta \leqslant \operatorname{tg}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ можно получить, воспользовавшись теоремой Лагранжа: $\operatorname{tg}\theta - \theta = \theta(\sec^2\theta_1 - 1) \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi/2.$$

Глава 11

РЯДЫ

§ 11.1. Понятие ряда

Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2, \ldots, \tag{1}$$

где числа u_k (*члены ряда*), вообще комплексные, зависят от индексов $k = 0, 1, 2, \ldots$, называется *рядом*. Этому выражению мы не приписали никакого числа, потому что сложение бесконечного числа слагаемых не имеет смысла. Ряд (1) еще записывают так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{0}^{\infty} u_k. \tag{2}$$

Эта чисто формальная запись часто более удобна, чем запись (1).

Числа

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

называются *n-ми частичными суммами ряда* (1).

По определению, ряд (1) сходится, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

В этом случае пишут

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$

и называют S суммой ряда, т. е. выражениям (1) или (2) приписывают число S. Говорят еще, что ряд (3) сходится к S.

В силу условия Коши (верного и для комплексных чисел) *для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, чтобы для всех натуральных $n > N$ и любого натурального p выполнялось неравенство*

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности (полагая $p = 1$), следует, что если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$

Но условие (4), будучи необходимым, не является достаточным для сходимости ряда, как это будет видно из дальнейших примеров.

Рассмотрим еще ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{5}$$

Так как условие Коши сходимости рядов (1) и (5) формулируется совершенно одинаково, то они одновременно либо сходятся либо расходятся (не сходятся). Если они сходятся, то сумма ряда (5) равна

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty}(S_{n+m}-S_n) = S - S_n.$$

Если члены ряда (1) неотрицательны (таким образом, действительны), то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots$, поэтому, если эта последовательность ограничена,

$$S_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant M.$$

Если же она неограничена, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Пример 1. Ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

имеет (при $z \neq 1$) частичную сумму $S_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$. Если $|z| < 1$, то $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$, т. е. $z^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$; если $|z| > 1$, то $|z^{n+1}| \to \infty$ и наконец, если $|z| = 1$, то ряд (6) расходится, потому что в этом случае его общий член, имеющий модуль, равный единице ($|z^{n+1}| = 1$), не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, ряд (6) сходится и имеет сумму, равную $(1 - z)^{-1}$ на открытом круге $|z| < 1$, а для остальных точек z комплексной плоскости он расходится.

§ 11.2. Действия с рядами

Если ряды $\sum\limits_0^\infty u_k$ *и* $\sum\limits_0^\infty v_k$ *сходятся и* α *— число, то ряды* $\sum\limits_0^\infty \alpha u_k$, $\sum\limits_0^\infty (u_k \pm v_k)$ *также сходятся и*

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k, \tag{1}$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k. \tag{2}$$

Действительно,

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k,$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k \pm \lim \sum_0^n v_k =$$

$$= \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k.$$

Подчеркнем, что из сходимости ряда, стоящего слева в (2), вообще не следует сходимость каждого из рядов, стоящих справа в (2). Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots, \tag{3}$$

сходится (все его члены равны 0), но выражение $\sum\limits_0^\infty 1 - \sum\limits_0^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

Если ряд

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{4}$$

сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например, так:

$$u_0+(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\ldots,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S, потому что его частичные суммы образуют подпоследовательность сходящейся последовательности частичных сумм ряда (4).

Наоборот, раскрывать скобки в ряду, вообще говоря, незаконно, например, после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3) получается расходящийся ряд $1-1+1-\ldots$ Впрочем, если внутри скобок всюду стоят только неотрицательные или неположительные числа, то раскрытие в таком ряду скобок не изменяет сходимости ряда и величины его суммы.

§ 11.3. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1 (признаки сравнения рядов). *Пусть даны два ряда:*

$$1)\ \sum_0^\infty u_k, \qquad 2)\ \sum_0^\infty v_k$$

с неотрицательными членами

а) *Если* $u_k \leqslant v_k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, *то из сходимости ряда* 2) *следует сходимость ряда* 1), *а из расходимости ряда* 1) *следует расходимость ряда* 2).

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=A>0, \tag{1}$$

то ряды 1) *и* 2) *одновременно сходятся или расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд 2) сходится и S — его сумма. Тогда

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \leqslant S \qquad (n=0, 1, \ldots),$$

т. е. частичные суммы ряда 1) ограничены и ряд 1) сходится. Его сумма S' удовлетворяет неравенству $S' \leqslant S$.

Пусть теперь ряд 1) расходится: тогда (см. § 11.1) его частичная сумма неограниченно возрастает вместе с n, что в силу неравенства

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

влечет также неограниченное возрастание частичных сумм ряда 2), т. е. расходимость последнего.

Пусть теперь имеет место равенство (1). Тогда на самом деле $v_k>0$, и для положительного $\varepsilon<A$ найдется N такое, что $A-\varepsilon<u_k/v_k<A+\varepsilon$ $(k>N)$, откуда

$$v_k(A-\varepsilon)<u_k<(A+\varepsilon)v_k. \tag{2}$$

Если ряд 2) сходится, то сходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)v_k$, в силу второго неравенства (2) сходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}u_k$, а вместе с ним и ряд 1). Если же ряд 2) расходится, то расходится также ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}v_k(A-\varepsilon)$, а вместе с ним ряд $\sum\limits_{N+1}^{\infty}u_k$. Но тогда расходится также ряд (1).

Теорема доказана.

Теорема 2 (признаки Даламбера). *Пусть дан ряд*

$$\sum_0^{\infty} u_k \tag{3}$$

с положительными членами.

а) *Если*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant q<1 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

то ряд (3) *сходится; если же*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

то расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q, \tag{6}$$

то ряд (3) *при* $q < 1$ *сходится, а при* $1 < q \leqslant \infty$ *расходится, и его общий член* $u_k \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0} \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому из (4) следует, что

$$u_n \leqslant u_0 q^n, \quad q < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и так как ряд $\sum\limits_1^\infty u_0 q^n$ сходится, то вместе с ним и ряд (3). Из (5) следует, что

$$u_n \geqslant u_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и так как ряд $u_0 + u_0 + \ldots$ расходится, то и ряд (3) расходится.

Если теперь выполняется свойство (6) и $q < 1$, то для положительного ε такого, что $q + \varepsilon < 1$, $u_{k+1}/u_k < q + \varepsilon < 1$ $(k \geqslant N)$, где N достаточно велико. В силу признака (4) в таком случае ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$ сходится, а вместе с ним и ряд (3).

Если же $q > 1$, то возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon > 1$. Но $u_{k+1}/u_k > q - \varepsilon$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N, поэтому для $N \leqslant n_0 < n$ получим

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0} > (q-\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0} \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Это показывает, что $u_n \to \infty$ и ряд (3) расходится.

Теорема 3 (признаки Коши). *Пусть дан ряд* (3) *с положительными членами.*

а) *Если*

$$\sqrt[k]{u_k} < q < 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

то он сходится; если же

$$\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

то он расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q \qquad (0 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{9}$$

то при $q < 1$ ряд (3) сходится, а при $q > 1$ расходится, и при этом $u_k \to \infty$.

в) *Если верхний предел*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} = q \qquad (0 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{9'}$$

то ряд (3) при $q < 1$ сходится, а при $q > 1$ расходится и при этом общий член u_k ряда не ограничен.

Доказательство. Из неравенства (7) следует, что $u_k < q^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, и так как в случае $q < 1$ ряд $\sum\limits_0^\infty q^k$ сходится, то сходится и ряд (3). Из неравенства же (8) следует, что $u_k \geqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и так как ряд $1 + 1 + \ldots$ расходится, то расходится и ряд (3). Утверждение а) доказано.

Пусть $q < 1$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q < q + \varepsilon < 1$. Из свойства (9) при $q < 1$ следует, что

$$\sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon < 1 \qquad (k \geqslant N) \tag{10}$$

при достаточно большом N, откуда

$$u_k < (q + \varepsilon)^k \quad (k \geqslant N),$$

и так как ряд $\sum\limits_N^\infty (q + \varepsilon)^k$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$, а вместе с ним ряд (3). Если же $q > 1$, то можно указать q' такое, что $q > q' > 1$. Тогда из свойства (9) при $q > 1$ вытекает, что $u_k > (q')^k$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N. Следовательно, $u_k \to \infty$ и ряд (3) расходится. Мы доказали б).

Из свойства (9′) так же, как из свойства (9) при $q < 1$, вытекает (10). Далее рассуждения ведутся как при доказательстве б) при $q < 1$. Если же $q > 1$, то берем q' такое, что $q > q' > 1$ и из (9′) заключаем, что $\sqrt[k_s]{u_{k_s}} > q'$ для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_k\}$. Но тогда

$$u_{k_s} > (q')^{k_s} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots), \qquad u_{k_s} \to \infty \; (s \to \infty).$$

Это показывает, что ряд (3) расходится и его общий член не ограничен. Этим утверждение в) доказано.

Замечание 1. Ряд с общим членом $u_n = n^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. § 9.15, (5)*)). При этом в обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \tag{11}$$

так же как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1. \tag{12}$$

Таким образом, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками (11) или (12).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ называется *гармоническим рядом.*

Замечание 2. Если для последовательности положительных чисел u_n существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q, \qquad 0 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{13}$$

то отсюда автоматически вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q. \tag{14}$$

Поэтому, рассуждая теоретически, предельный признак Даламбера (т. е. (6)) ничего нового сравнительно с предельным признаком Коши (т. е. (9)) не дает. Но на практике признак Даламбера часто очень удобен.

Докажем высказанное утверждение. Пусть имеет место (13) пока для $q > 0$ конечного. Тогда для любого положительного $\varepsilon < q$ найдется такое n, что $q - \varepsilon < u_{n+k}/u_{n+k-1} < q + \varepsilon$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Но тогда

$$(q-\varepsilon)^p < \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdots \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < (q+\varepsilon)^p,$$

т. е. $(q-\varepsilon)^p < \dfrac{u_{n+p}}{u_n} < (q+\varepsilon)^p$, откуда

$$u_n^{1/(n+p)} (q-\varepsilon)^{p/(n+p)} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{1/(n+p)} (q+\varepsilon)^{p/(n+p)},$$

и после перехода к пределу при $p \to \infty$ получим

$$q - \varepsilon \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leqslant q + \varepsilon.$$

Но $\varepsilon > 0$ произвольно мало и потому

$$q = \underline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}.$$

Если $q = 0$, то в этих выкладках всюду в левых частях неравенств надо формально заменить $q - \varepsilon$ на 0, а в правых — считать $q = 0$.

*) В § 9.15 мы пользовались понятием ряда только в пределах сведений, изложенных в § 11.1.

Если же $q = \infty$, то надо всюду в правых частях неравенств заменить $q + \varepsilon$ на ∞, а в левых частях считать, что $q - \varepsilon$ есть произвольное положительное число. Далее, выражение «но $\varepsilon > 0$ произвольно мало» надо заменить на «но $q - \varepsilon$ произвольно велико».

Обратное утверждение уже неверно: предел (14) может существовать, а предел (13) — нет. Например, пусть $u_n = q^{n \pm \sqrt{n}}$, где «+» ставится при n четном, а «—» — при n нечетном. Тогда $\sqrt[n]{u_n} = q^{1 \pm n^{-1/2}} \to q \ (n \to \infty)$, а с другой стороны,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} q^{1+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} & (\text{при } n \text{ нечетном}), \\ q^{1-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} & (\text{при } n \text{ четном}). \end{cases}$$

При $q \neq 1$ отношение u_{n+1}/u_n не ограничено и, таким образом, не стремится к конечному пределу.

Примеры.

$$1) \ \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}; \quad 2) \ \sum_1^\infty \frac{x^k}{k^\alpha} \ (\alpha > 0); \quad 3) \ \sum_1^\infty (e^{1/k} - 1);$$

$$4) \ \sum_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right); \quad 5) \ \sum_1^\infty q^{k+\sqrt{k}} \quad (q > 0).$$

Ряды 1), 2), очевидно, сходятся при $x = 0$. Но ряд 1) также сходится для любого $x > 0$, потому что тогда $u_{k+1}/u_k = x/(k+1) \to 0$, $k \to \infty$. Ряд же 2) сходится при $0 < x < 1$ и расходится для $x > 1$, потому что для него $u_{k+1}/u_k = x(k/(k+1))^\alpha \to x$, $k \to \infty$; при $x = 1$ см. выше замечание 1. Ряды 3) и 4) расходятся, потому что $e^{1/k} - 1 \approx 1/k \ (k \to \infty)$ и $\ln(1 + (1/k)) \approx 1/k \ (k \to \infty)$ («$\approx$» — знак асимптотического равенства, см. § 4.10), а ряд $\sum\limits_0^\infty \frac{1}{k}$ расходится. Ряд 5) сходится при $0 \leqslant q < 1$ и расходится при $q > 1$, потому что для него $\sqrt[k]{u_k} = q^{1+k^{-1/2}} \to q \quad (k \to \infty)$. При $q = 1$ он тоже расходится — общий его член в этом случае равен 1.

Теорема 4. *Пусть ряд*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{15}$$

с неотрицательными членами сходится и имеет сумму S. Тогда полученный в результате произвольной перестановки его членов новый (заново перенумерованный) ряд

$$u_0' + u_1' + u_2' + u_3' + \ldots \tag{16}$$

также сходится и имеет ту же сумму S.

Доказательство. Пусть

$$S_n' = u_0' + u_1' + \ldots + u_n'$$

— частичная сумма ряда (16). Члены ее находятся в ряде (15) под некоторыми номерами $k_0, \ldots, k_n$. Пусть N — наибольшее число среди них и S_N есть N-я частичная сумма его. Очевидно,

$S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (16) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (15) и (16) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 11.4. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), называется *рядом Лейбница*.

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда очевидно следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 5.11, (5)).

§ 11.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \tag{2}$$

модулей его членов.

Абсолютно сходящийся ряд сходится. В самом деле, пусть ряд (1) абсолютно сходится, тогда сходится ряд (2) и в силу признака Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\varepsilon > |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|$ для всех значений p и $n > N$. Тем более, тогда $\varepsilon > |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}|$. Поэтому в силу критерия Коши ряд (1) сходится.

Сходящиеся ряды с неотрицательными членами тривиальным образом сходятся абсолютно. Ряд $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots (\alpha > 0)$ сходится, потому что он есть ряд Лейбница. Однако абсолютно он сходится только при $\alpha > 1$.

Теорема 1. *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов абсолютная сходимость полученного нового ряда не нарушается и его сумма остается прежней.*

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда члены ряда u_k действительные числа.

Положим (для действительных u_k)

$$u_k^+ = \begin{cases} u_k, & \text{если } u_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k < 0, \end{cases} \quad u_k^- = \begin{cases} -u_k, & \text{если } u_k \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } u_k > 0; \end{cases} \tag{3}$$

числа u_k^+ и u_k^-, очевидно, неотрицательные и

$$u_k = u_k^+ - u_k^-. \tag{4}$$

Наряду с рядом (1) будем рассматривать два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \text{ и } \sum_0^\infty u_k^- \tag{5}$$

(с неотрицательными членами).

Пусть ряд (1) абсолютно сходится и члены его — действительные числа u_k. Тогда ряды (5) также сходятся, потому что, очевидно, $u_k^+ \leqslant |u_k|$, $u_k^- \leqslant |u_k|$.

Пусть ряд, полученный после перестановки исходного ряда (1), имеет вид $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ Для его членов введем, как выше, числа v_k^+ и v_k^-. Тогда (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty \left(u_k^+ - u_k^-\right) = \sum_0^\infty u_k^+ - \sum_0^\infty u_k^- =$$
$$= \sum_0^\infty v_k^+ - \sum_0^\infty v_k^- = \sum_0^\infty \left(v_k^+ - v_k^-\right) = \sum_0^\infty v_k.$$

Первое равенство в этой цепи следует из (4), второе — из § 11.2, (2), если учесть, что ряды (5) сходятся, третье следует из того, что сходящиеся ряды с неотрицательными членами перестановочны, четвертое из § 11.2, (2) и, наконец, пятое,— потому, что $v_k = v_k^+ - v_k^-$. Теорема для действительных u_k доказана.

Пусть теперь $u_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексные числа, а числа v_k имеют прежний смысл. Так как $|\alpha_k| \leqslant |u_k|$, $|\beta_k| \leqslant |u_k|$, то ряды с (действительными членами) $\sum\limits_0^\infty \alpha_k$ и $\sum\limits_0^\infty \beta_k$ абсолютно сходятся, и члены их, как сейчас было доказано, можно переставлять, поэтому, считая, что $v_k = \gamma_k + i\delta_k$, получим

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_0^\infty \alpha_k + i\sum_0^\infty \beta_k =$$
$$= \sum_0^\infty \gamma_k + i\sum_0^\infty \delta_k = \sum_0^\infty (\gamma_k + i\delta_k) = \sum_0^\infty v_k.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть ряды* $\sum\limits_0^\infty u_k$ *и* $\sum\limits_0^\infty v_l$ *абсолютно сходятся и произведения* $u_k v_l$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ *перенумерованы каким-либо способом (при помощи одного индекса) и обозначены* $w_0, w_1, w_2, \ldots$ *Тогда справедливо равенство*

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \sum_0^\infty w_k,$$

где ряд справа абсолютно сходится.

Доказательство. Положим

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n |u_k|, \quad \sigma_n = \sum_{l=0}^n v_l, \quad \tilde{\sigma}_n = \sum_{l=0}^n |v_l|.$$

Имеем (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty |u_k| \times \sum_0^\infty |v_l| = \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n \cdot \lim_{n\to\infty} \tilde{\sigma}_n = \lim_{n\to\infty} (\tilde{s}_n \tilde{\sigma}_n) =$$
$$= \tilde{s}_0\tilde{\sigma}_0 + (\tilde{s}_1\tilde{\sigma}_1 - \tilde{s}_0\tilde{\sigma}_0) + (\tilde{s}_2\tilde{\sigma}_2 - \tilde{s}_1\tilde{\sigma}_1) + \ldots =$$
$$= |u_0v_0| + (|u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0|) + (|u_0v_2| +$$
$$+ |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + |u_2v_0|) + \ldots =$$
$$= |u_0v_0| + |u_0v_1| + |u_1v_1| + |u_1v_0| + |u_0v_2| + |u_1v_2| + \ldots =$$
$$= |w_0| + |w_1| + |w_2| + \ldots \qquad (6)$$

Ряды с членами $|u_k|$, $|v_l|$ по условию сходятся и потому первое равенство (6) имеет смысл. Так как пределы $\tilde{s}_n$ и $\tilde{\sigma}_n$ (при $n \to \infty$) существуют, то существует предел $\tilde{s}_n\tilde{\sigma}_n$ и равен их произведению — это выражено вторым равенством. В третьем предел $\tilde{s}_n\tilde{\sigma}_n$ заменен на сумму соответствующего ряда, членами которого являются выражения в скобках. В четвертом равенстве эти выражения записываются через суммы произведений $|u_k v_l|$. При составлении этих сумм может помочь рис. 11.1 (в скобки попадают слагаемые $|u_k v_l|$, соответствующие целочисленным точкам (k, l), лежащим на непрерывных жирных линиях вида ABC). В пятом раскрываются скобки. В силу того, что внутри скобок стоят суммы неотрицательных слагаемых, после их раскрытия полученный ряд продолжает сходиться к той же сумме. В последнем, шестом равенстве в ряду с неотрицательными членами переставлены члены, что законно.

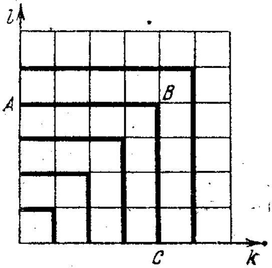

Рис. 11.1.

Подобные преобразования сделаем для исходных рядов:

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \lim_{n\to\infty} s_n \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_n\sigma_n) =$$
$$= s_0\sigma_0 + (s_1\sigma_1 - s_0\sigma_0) + \ldots = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + \ldots =$$
$$= u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + u_0v_2 + \ldots = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \tag{6'}$$

В предпоследнем равенстве после формального раскрытия скобок получается сходящийся, даже абсолютно, ряд, как это выяснено при рассмотрении (6). В последнем равенстве переставлены члены в абсолютно сходящемся ряде, что законно.

Важный пример (пояснения ниже):

$$\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} \times \sum_0^\infty \frac{v^l}{l!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{v}{1} + \frac{z^2}{2!} + zv + \frac{v^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} +$$
$$+ \frac{z^2v}{2!} + \frac{zv^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \ldots = 1 + \frac{1}{1!}(z+v) + \frac{1}{2!}(z+v)^2 +$$
$$+ \frac{1}{3!}(z+v)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^\infty \frac{(z+v)^k}{k!}.$$

Перемножаемые ряды абсолютно сходятся для любых комплексных z и v, поэтому их можно (на основании теоремы 2) перемножить, как если бы это были многочлены. При этом произведения $\frac{z^k v^l}{k!\,l!}$ можно расположить в любом порядке, составленный из них ряд абсолютно сходится. В данном случае выгодно члены $\frac{z^k}{k!}\frac{v^l}{l!}$ сгруппировать так, чтобы в n-ю группу попали произведения, соответствующие целочисленным парам (k, l), где $k + l = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

§ 11.6. Условно и безусловно сходящиеся ряды с действительными членами

Пусть задан ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

с действительными членами. Определим для него, как в предыдущем параграфе, два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \text{ и } \sum_0^\infty u_k^- \tag{2}$$

(с неотрицательными членами).

Если ряд (1) абсолютно сходится, то, как мы знаем, сходятся также ряды (2). Очевидно, и наоборот,— из сходимости двух рядов (2) следует абсолютная сходимость ряда (1), потому что

$$|u_k| = u_k^+ + u_k^- .$$

Таким образом, для того чтобы ряд (1) абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы порождаемые им ряды (2) оба сходились.

Пусть теперь ряд (1) сходится, но не абсолютно. Тогда один из рядов (2), пусть для определенности первый, расходится, т. е. $\sum\limits_0^\infty u_k^+ = \infty$ (ведь $u_k^+ \geqslant 0$). Но

$$\sum_0^n u_k^- = \sum_0^n u_k^+ - \sum_0^n u_k. \tag{3}$$

Первая сумма в правой части (3) неограниченно возрастает вместе с n, а вторая стремится к конечному пределу, потому что ряд (1) сходится, поэтому левая часть (3) неограниченно возрастает вместе с n. Таким образом, оба ряда (2) расходятся.

Заметим еще, что из сходимости ряда (1) следует, что $u_k \to 0$, а тогда, очевидно, и u_k^+, $u_k^- \to 0$.

Мы показали, что если ряд (1) сходится, но не абсолютно, то порождаемые им ряды (2) оба расходятся, но при этом u_k^+, $u_k^- \to 0$.

Это утверждение можно еще переформулировать так:

1) *Для того чтобы ряд был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно чтобы ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, были сходящимися.*

Впрочем, может оказаться, что один из этих рядов на самом деле есть конечная сумма или вообще отсутствует.

2) *Если ряд сходится не абсолютно, то ряды, составленные только из положительных и только из отрицательных его членов, расходятся, а их общие члены стремятся к нулю.*

Существует следующая терминология. Говорят, что ряд сходится *безусловно*, если он сходится и любая перестановка его членов не нарушает его сходимости, и ряд сходится условно, если он сходится, но существует перестановка его членов, нарушающая его сходимость, т. е. делающая переставленный ряд расходящимся.

Из доказанной в предыдущем параграфе теоремы о перестановочности абсолютно сходящегося ряда следует, что а) *абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно.*

Из утверждения же 2) и теоремы, которую мы доказываем ниже, следует, что б) *сходящийся не абсолютно ряд сходится условно.*

Из утверждений а) и б) тогда следует, что *для того, чтобы ряд сходился безусловно, необходимо и достаточно, чтобы он был абсолютно сходящимся.*

После сказанного самому понятию безусловной сходимости можно дать другую, эквивалентную формулировку: *сходящийся ряд называется безусловно сходящимся, если ряд, полученный после любой перестановки его членов, продолжает сходиться и имеет прежнюю сумму.*

Но перейдем к теореме, о которой шла речь.

Теорема 1 (Римана). *Пусть заданы два расходящихся ряда $\sum\limits_0^\infty \alpha_k$ и $\sum\limits_0^\infty \beta_k$ с положительными членами, стремящимися к нулю при $k\to\infty$ $(\alpha_k\to 0,\ \beta_k\to 0)$.*

Тогда, каково бы ни было $S(-\infty\leqslant S\leqslant\infty)$, можно сконструировать ряд вида

$$\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{k_1}-\beta_0-\ldots-\beta_{k_1'}+\alpha_{k_1+1}+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{k_2}-\beta_{k_1'+1}-\ldots-\beta_{k_2'}+\alpha_{k_2+1}+\ldots, \qquad (4)$$

имеющий сумму S.

Таким образом, при $S=+\infty$, $-\infty$ он будет расходиться. В этот ряд входят все α_k и β_k, и притом по одному разу.

Доказательство. Пусть для определенности S положительное число конечное. Числа $k_1<k_2<\ldots$, $k_1'<k_2'<\ldots$ подбираются как наименьшие натуральные числа, для которых выполняются последовательно неравенства:

$$1)\ A_1=\sum_0^{k_1}\alpha_j>S, \qquad 2)\ A_2=A_1-\sum_0^{k_1'}\beta_j<S,$$

$$3)\ A_3=A_2+\sum_{k_1+1}^{k_2}\alpha_j>S, \quad 4)\ A_4=A_3-\sum_{k_1'+1}^{k_2'}\beta_j<S.$$

Возможность подобрать такие числа k_l, k'_l каждый раз следует из расходимости рядов $\sum\limits_0^\infty \alpha_j$ и $\sum\limits_0^\infty \beta_j$. Теперь тот факт, что ряд (4) сходится к S, следует из того, что α_k, $\beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Чтобы получить теорему при $S = \infty$, можно в правых частях неравенств 1), 2) ... поставить вместо S соответственно числа 2, 1, 4, 3, 6, 5, ...

§ 11.7. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_k(\mathbf{x})\}$, определенных на некотором множестве точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства. Они могут принимать комплексные значения $(f_k(\mathbf{x}) = \alpha_k(\mathbf{x}) + i\beta_k(\mathbf{x}))$. Можно считать также, что $\mathbf{x}$ — коплексные точки $(\mathbf{x} = \xi + i\eta)$, пробегающие множество E точек комплексной плоскости и тогда $f_k(x)$ — функции комплексной переменной $\mathbf{x}$.

Пусть для каждого $\mathbf{x} \in E$ последовательность $\{f_k(\mathbf{x})\}$ стремится к числу $f(\mathbf{x})$ (функции от x). Обозначим через

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \tag{1}$$

верхнюю грань модулей уклонений $f_n(\mathbf{x})$ от $f(\mathbf{x})$, распространенную на множество E. Будем предполагать, что ρ_n для каждого n конечно $(\rho_n < \infty)$.

Говорят, что *последовательность* $\{f_n(\mathbf{x})\}$ *равномерно сходится на* E *к* $f(\mathbf{x})$, если $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Дадим другое эквивалентное определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится к $f(\mathbf{x})$ на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \text{ для всех } \mathbf{x} \in E. \tag{2}$$

Если выполняется первое определение, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что $\rho_n < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \rho_n < \varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{x} \in E$ и $n > N$, т. е. выполняется второе определение. Если же выполняется второе определение, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ выполняется неравенство (2). Взяв верхнюю грань его левой части по $\mathbf{x} \in E$, получим $\rho_n \leqslant \varepsilon$ $(n > N)$, откуда $\rho_n \to 0$, т. е. выполняется первое определение.

Верно также третье (эквивалентное) определение: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E к $f(x)$, если существует последовательность $\{\alpha_n\}$ положительных чисел (не зависящих от $\mathbf{x}$) такая, что $\alpha_n \to 0$ и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ для всех $\mathbf{x} \in E$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В самом деле, если верно первое определение, то, положив $\alpha_n = \rho_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получим третье определение. Обратно, из третьего определения, следует

$$\rho_n = \sup_{\mathbf{x}\in E} \left| f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right| \leqslant \alpha_n$$

и $\rho_n \to 0$, $n \to \infty$.

Например, пусть функции $f(x)$, $f_n(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$. График функции $y = f(x)$ изображен на чертеже (рис. 11.2). Кроме того, там изображена полоска Π_ε толщиной 2ε

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

состоящая из точек (x, y), удаленных от этого графика в направлении оси y на величину меньшую, чем $\varepsilon > 0$.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно на $[a, b]$ стремится к $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что все графики Γ_n функций f_n с $n > N$ попадут полностью в Π_ε.

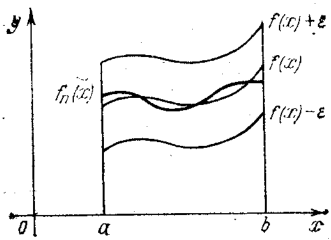

Рис. 11.2.

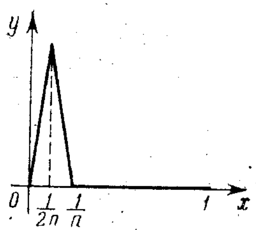

Рис. 11.3.

Но могут быть такие последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящиеся к $f(x)$ для любого $x \in [a, b]$, что для некоторых $\varepsilon > 0$ не существует такое N, чтобы графики $f_n(x)$ с $n > N$ попадали полностью в Π_ε. В этом случае мы говорим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f на $[a, b]$ неравномерно (см. далее пример 2 и рис. 11.3).

Можно еще дать четвертое определение равномерной сходимости в духе Коши: последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon \tag{4}$$

при любых $n > N$ и $p > 0$ и для всех $\mathbf{x} \in E$.

Из того, что последовательность равномерно сходится в смысле второго определения, следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и любых p выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant |f_{n+p}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < 2\varepsilon$$

для всех $\mathbf{x} \in E$,

т. е. выполняется четвертое определение. С другой стороны, пусть выполняется четвертое определение; тогда для каждого отдельного значения $x \in E$ выполняется, очевидно, обычный признак Коши сходимости последовательности, поэтому она сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$. Зададим теперь $\varepsilon > 0$, и подберем N так, как указано в четвертом определении. В неравенстве (4), где $n > N$ фиксировано, перейдем к пределу при $p \to \infty$; в результате получим

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \quad (\mathbf{x} \in E),$$

откуда

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,$$

и так как $n > N$ можно взять любым, то $\rho_n \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е. выполняется первое определение.

Нетрудно видеть, что если α — число, а $\{f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ — две последовательности функций, равномерно сходящиеся на E, то последовательности $\{\alpha f_k(\mathbf{x})\}$ и $\{f_k(\mathbf{x}) \pm \varphi_k(\mathbf{x})\}$ также равномерно сходятся на E. Нетрудно также видеть, что если последовательность функций равномерно сходится на E, то она равномерно сходится и на $E' \subset E$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Заметим еще, что каждой последовательности функций $\{f_n(\mathbf{x})\}$ соответствует ряд

$$f_0(\mathbf{x}) + (f_1(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})) + (f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})) + \ldots,$$

n-е частичные суммы которого соответственно равны $f_n(\mathbf{x})$.

Пусть теперь задан ряд

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}) + \ldots, \tag{5}$$

члены которого, вообще говоря, комплексные функции от $\mathbf{x} \in E$, где E — по-прежнему некоторое множество точек n-мерного пространства или комплексной плоскости.

По определению, *ряд* (5) *равномерно сходится на множестве E к функции $S(\mathbf{x})$*, если последовательность $\{S_k(\mathbf{x})\}$ его частичных сумм равномерно сходится на E к $S(\mathbf{x})$.

В частности, определение равномерной сходимости ряда, очевидно, можно высказать так: ряд (5) равномерно сходится на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и $p > 0$ и всякого $\mathbf{x} \in E$ выполняется неравенство $|u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})| < \varepsilon$.

Следующая теорема дает важный критерий равномерной сходимости ряда.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Если члены ряда* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$|u_k(\mathbf{x})| \leqslant \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

где $\mathbf{x} \in E$, а α_k — числа (не зависящие от x), и если ряд с члена-

ми α_k сходится, то ряд (5) *сходится на множестве E абсолютно и равномерно.*

В самом деле, из сходимости ряда с членами α_k и из (6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при любых $n > N$ и $p > 0$ и произвольном $\mathbf{x} \in E$

$$\varepsilon > \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} \geqslant |u_{n+1}(\mathbf{x})| + \ldots + |u_{n+p}(\mathbf{x})| \geqslant \\ \geqslant |u_{n+1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{n+p}(\mathbf{x})|,$$

а это и значит, что ряд (5) равномерно сходится на E. Абсолютная его сходимость очевидна.

Докажем лемму, которая нам пригодится в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть комплекснозначная функция $F(\mathbf{x})$, определенная на множестве $E \subset R_n$, в точке $\mathbf{x}^0 \in E$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U(\mathbf{x}^0) \subset \subset E$ (например, $U(\mathbf{x}^0)$ есть пересечение E с некоторым открытым шаром $V_{\mathbf{x}^0}$ с центром в $\mathbf{x}^0$, т. е. $U(\mathbf{x}^0) = EV_{\mathbf{x}^0}$) такую, что $F(\mathbf{x})$ можно представить в виде суммы двух функций*

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}), \tag{7}$$

из которых F_1 непрерывна в $\mathbf{x}^0$ (относительно E), а F_2 удовлетворяет неравенству

$$|F_2(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0).$$

Тогда функция F непрерывна в $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем разложение (7) и окрестность $U(\mathbf{x}^0)$, как это сказано в формулировке леммы; так как функция F_1 непрерывна в $\mathbf{x}^0$, то найдется окрестность $U_1(\mathbf{x}^0)$, которую можно считать принадлежащей $U(x^0)$ $(U_1(x^0) \subset \subset U(\mathbf{x}^0))$, такая, что

$$|F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon, \quad \mathbf{x} \in U_1(\mathbf{x}^0).$$

Но тогда

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^0)| \leqslant |F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}^0)| + |F_2(\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{x}^0)| \leqslant \\ \leqslant |F_1(\mathbf{x}) - F_1(\mathbf{x}^0)| + |F_2(\mathbf{x})| + |F_2(\mathbf{x}^0)| < \\ < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad x \in U_1(\mathbf{x}^0),$$

а это доказывает непрерывность F в $\mathbf{x}^0$.

Докажем вторую важную теорему.

Теорема 2. *Если последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f, и f_n непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$ (относительно E), то f также непрерывна в $\mathbf{x}^0$.*

На языке рядов эта теорема гласит: *сумма равномерно сходящегося на E ряда функций, непрерывных в точке $\mathbf{x}^0 \in E$, есть непрерывная функция в этой точке.*

Доказательство. Функцию f представим в виде

$$f(\mathbf{x}) = f_n(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})],$$

где n — некоторое натуральное число. В силу равномерной сходимости f_n к f на E существует n такое, что

$$|f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

для всех $\mathbf{x} \in E$, тем более для всех x, принадлежащих некоторой окрестности $U(\mathbf{x}^0) \subset E$ точки $\mathbf{x}^0$. При этом, по условию, f_n непрерывна в $\mathbf{x}^0$. Но тогда на основании доказанной леммы и функция f непрерывна в $\mathbf{x}^0$.

Приведем еще более тонкие признаки равномерной сходимости рядов, основанные на применении к ряду так называемого *преобразования Абеля* (аналога операции интегрирования по частям).

Рассмотрим ряд

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots, \tag{8}$$

где α_k, β_k — функции от $x \in E$ (или постоянные числа).

Положим $B_k = \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \ldots + \beta_{n+k}$ и к усеченной сумме ряда (8) применим преобразование (Абеля):

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}\beta_{n+p} = \\ = \alpha_{n+1}B_1 + \alpha_{n+2}(B_2 - B_1) + \ldots + \alpha_{n+p}(B_p - B_{p-1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})\,B_1 + \\ + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})\,B_2 + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})\,B_{p-1} + \alpha_{n+p}B_p = \\ = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1})\,B_k + \alpha_{n+p}B_p.\end{aligned} \tag{9}$$

Легко теперь установить следующие два критерия равномерной сходимости (в случае постоянных α_k, β_k — просто сходимости) ряда (8).

Теорема 3 (признак Дирихле равномерной сходимости ряда). *Если частные суммы ряда*

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots \tag{10}$$

ограничены в совокупности, а действительная функция $\alpha_k(\mathbf{x})$ *(с возрастанием* k*) равномерно (относительно* $\mathbf{x}$*) на* E *стремится к нулю, убывая, то ряд* (8) *сходится равномерно.*

В самом деле, пусть константа M превышает модули частных сумм σ_n ряда (10). Тогда при любых n и k,

$$|B_k| = |\sigma_{n+k} - \sigma_n| \leqslant |\sigma_{n+k}| + |\sigma_n| \leqslant 2M.$$

Поэтому в силу (9) и того факта, что α_s равномерно стремится к нулю, убывая, выполняется неравенство

$$\left|\sum_1^p \alpha_{n+k}\,\beta_{n+k}\right| \leqslant 2M \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \alpha_{n+p}2M = 2M\alpha_{n+1} < \varepsilon,$$

для любых $n > N$ и p и любых $\mathbf{x} \in E$, если только N достаточно велико. Следовательно, ряд (8) равномерно сходится. Последнее неравенство в этой цепи верно для всех $x \in E$ в силу равномерного стремления $\alpha_{n+1}(x)$ к нулю:

Теорема 4 (признак Абеля равномерной сходимости ряда). *Если действительные функции α_k монотонно убывают (с возрастанием k) и ограничены в совокупности, а ряд (10) равномерно сходится на E, то и ряд (8) сходится равномерно на E.*

В самом деле, пусть $M \geqslant |\alpha_k|$ ($k = 0, 1, \ldots$) (функции α_k могут быть и отрицательными!). В силу равномерной сходимости ряда (10) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что $|B_k| < \varepsilon$ для любых $n > N$ и k. Поэтому в силу (9) и монотонности α_s для любых $n > N$ и p

$$\left|\sum_1^p \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| =$$

$$= \varepsilon(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p}) + \varepsilon|\alpha_{n+p}| \leqslant 3\varepsilon M,$$

т. е. ряд (8) равномерно сходится.

Пример 1. Ряд

$$1 + (x - 1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{11}$$

сходится на отрезке [0, 1], но неравномерно. В самом деле, n-я его частичная сумма равна $S_n(x) = x^n$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1), \\ 0 & (0 \leqslant x < 1). \end{cases}$$

Поэтому $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1)} |x^n| = 1$, и ρ_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

С другой стороны, ряд (11) равномерно сходится на любом отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$, так как в этом случае

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,q]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[0,q]} |x^n| = q^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Сумма ряда (11) разрывна в точке $x = 1$, хотя члены ряда — непрерывные функции на [0, 1]. Это показывает, что сумма неравномерно сходящегося ряда непрерывных функций не обязательно есть непрерывная функция. Однако существуют неравномерно сходящиеся ряды (последовательности) непрерывных функций, сходящиеся к непрерывным же функциям, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть (рис. 11.3) функция

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0 \text{ и } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \\ n & \text{при} \quad x = 1/2n \end{cases} \tag{12}$$

линейна и непрерывна на $[0, 1/2n]$ и $[1/2n, 1/n]$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

С другой стороны, сходимость на отрезке [0, 1] неравномерна, потому что $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = n \to \infty$. На всяком же отрезке $[\varepsilon, 1]$ сходимость равномерна, потому что $f_n(x) \equiv 0$ на $[\varepsilon, 1]$ при $n > 1/\varepsilon$.

Пример 3. Ряды

$$\sum_1^\infty \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \quad \sum_1^\infty \frac{\sin kx}{k^\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{13}$$

при $\alpha > 1$ равномерно и абсолютно сходятся на всей действительной оси $(-\infty < x < \infty)$, потому что абсолютные величины их k-х членов не превышают $k^{-\alpha}$, а при $\alpha > 1$ ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится. В этом рассуждении мы применили признак Вейерштрасса. При $\alpha \leqslant 1$ он уже не применим, так как в этом случае ряд $\sum k^{-\alpha}$ расходится. Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ наши ряды равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, каково бы ни было положительное ε, где $0 < \varepsilon < 2\pi - \varepsilon < 2\pi$. В самом деле, частные суммы рядов

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \ \sin x + \sin 2x + \ldots$$

соответственно равны (см. примеры в конце § 8.2)

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad K_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Они ограничены в совокупности на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$:

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin(\varepsilon/2)}, \quad |K_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

кроме того, $n^{-\alpha} \geqslant (n+1)^{-\alpha}$ и $n^{-\alpha} \to 0$, поэтому по признаку Дирихле ряды (13) равномерно сходятся на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

§ 11.8. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов на отрезке

Теорема 1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность* $\{f_n\}$ *(комплекснозначных) непрерывных функций, сходящаяся к функции* f. *Если сходимость равномерна на* $[a, b]$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

равномерно на $[a, b]$. *В частности (при* $x = b$*),*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. § 11.7, теорема 2), что предельная функция f непрерывна на $[a, b]$ и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| = r_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^x\left|f_n(t)-f(t)\right|dt\leqslant\int_a^b r_n\,dt=(b-a)\,r_n,$$

где правая часть не зависит от x и стремится при $n\to\infty$ к нулю, а это доказывает теорему.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся на отрезке* $[a, b]$ *ряд (комплекснозначных) непрерывных функций*

$$S(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots \tag{3}$$

можно почленно интегрировать $(a\leqslant x_0\leqslant b)$:

$$\int_{x_0}^x S(t)\;dt=\int_{x_0}^x u_0(t)\,dt+\int_{x_0}^x u_1(t)\,dt+\ldots \tag{4}$$

Полученный при этом ряд (4) *равномерно сходится на* $[a, b]$. *В частности,*

$$\int_a^b S(t)\;dt=\int_a^b u_0(t)\,dt+\int_a^b u_1(t)\,dt+\ldots \tag{5}$$

Доказательство. По условию сумма

$$S_n(x)=\sum_0^n u_k(x)$$

равномерно сходится к $S(x)$ на $[a, b]$. Поэтому на основании теоремы 1 выполняется равенство

$$\int_{x_0}^x S(t)\;dt=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x S_n(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n\int_{x_0}^x u_k(t)dt$$

равномерно относительно $x\in[a, b]$. Это показывает, что ряд (4) сходится равномерно относительно $x\in[a, b]$.

Теорема 3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задана последовательность (комплекснозначных) функций* $\{f_n\}$, *имеющих непрерывную производную. Если она сходится в точке* $x_0\in[a, b]$ *и, кроме того, соответствующая последовательность производных* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[a, b]$ *к функции* φ, *то последовательность* $\{f_n\}$ *тоже сходится равномерно на этом отрезке к некоторой функции* f *и*

$$f'(x)=\varphi(x),\quad x\in[a, b]. \tag{6}$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt\qquad (n=0, 1, 2, \ldots, x\in[a, b]), \tag{7}$$

потому что функции f_n непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$.

По условию существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A,$$

который мы обозначаем через A. Так как $f_n'(t) \to \varphi(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на $[a, b]$ и функции $f_n'(t)$ непрерывны, то и $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$ (см. § 11.7, теорему 2) и, кроме того, (см. теорему 1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

равномерно на $[a, b]$. Но тогда правая часть (7) при $n \to \infty$ равномерно на $[a, b]$ стремится к некоторой функции $f(x)$, определяемой равенством

$$f(x) = A + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt, \quad x \in [a, b]. \tag{8}$$

Таким образом, $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на $[a, b]$. Если учесть, что $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то из равенства (8) следует, что (см. § 9.9 (2)) $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$, равную $\varphi(x)$, т. е. выполняется равенство (6).

Теорема доказана.

Отметим следствие из теоремы 3.

Следствие. *Если функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots, n$, и выполняются свойства $f_n(x) \to f(x)$, $f_n'(x) \to \varphi(x)$, $n \to \infty$, равномерно на $[a, b]$, то*

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

На языке рядов теорема 3 имеет следующий аналог:

Теорема 3'. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задан ряд*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{9}$$

(комплекснозначных) функций, имеющих непрерывную производную.

Если ряд (9) сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ и, кроме того, формально продифференцированный ряд

$$u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \tag{10}$$

равномерно сходится на $[a, b]$, то ряд (9) равномерно сходится на $[a, b]$, и производная от его суммы $S(x)$ есть сумма ряда (10).

Таким образом,

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{11}$$

$$S'(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $u_0(x)+\ldots+u_n(x)=S_n(x)$, тогда

$$u_0'(x)+\ldots+u_n'(x)=S_n'(x).$$

На языке сумм S_n и S_n' условие теоремы 3′ гласит: существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, и последовательность непрерывных производных $\{S_n'(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Но тогда по теореме 3 последовательность $\{S_n(x)\}$, а вместе с ней ряд (11) сходится равномерно на этом отрезке к некоторой дифференцируемой функции $S(x)$ и производная $S'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x)$, т. е. $S'(x)$, есть сумма ряда (12).

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\Lambda_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}\qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{13}$$

При α четном это ряд вида

$$\text{а)}\quad \pm\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^\alpha},$$

а при α нечетном — вида

$$\text{б)}\quad \pm\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^\alpha}.$$

Так как $\frac{d}{dx}\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)=-k\cos\left(kx+(\alpha-1)\frac{\pi}{2}\right)$, то формально

$$\frac{d}{dx}\Lambda_\alpha(x)=-\Lambda_{\alpha-1}(x). \tag{14}$$

Но это равенство верно и по существу при $\alpha=3, 4, \ldots$ для любого действительного x, а при $\alpha=2$ — при любом действительном

$$x\neq 2k\pi\qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{15}$$

что следует из теоремы 3 и разобранных в примере 3 § 11.7 свойств рядов а), б). При доказательстве равенства (14) при $\alpha=2$ для какого-либо фиксированного x, удовлетворяющего неравенствам (15), берем отрезок $[a, b]$, содержащий строго внутри точку x, но не содержащий точки вида $2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$. На $[a, b]$ оба ряда (13) при $\alpha=1, 2$ сходятся равномерно, что дает возможность применить теорему 3.

Пример 2. Пусть функция

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \left(x=0,\ \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\right),\\ \alpha_n & \left(x=\frac{1}{2n}\right)\end{cases} \tag{16}$$

— линейная и непрерывная на $[0, 1/2n]$ и $[1/2n, 1/n]$, где a_n — любая последовательность чисел. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ для всех

$x \in [0, 1]$, а

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/2n} 2n\alpha_n x\,dx - \int_{1/2n}^{1/n} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n} - x\right)dx = \frac{\alpha_n}{2n}.$$

Очевидно, далее, что

$$r_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - 0| = \alpha_n.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha_n \to 0$. Равенство

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (f(x) \equiv 0) \tag{17}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha_n}{2n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Мы видим, что из равномерной сходимости f_n к $f = 0$ на $[0, 1]$ следует сходимость интегралов (17), что согласуется с теоремой 2. Но последовательность $\{f_n\}$ может сходиться неравномерно, в то время как свойство (17) все же соблюдается, например, при $\alpha_n = 1$. Но уже, например, при $\alpha_n = n$ последовательность $\{f_n\}$ не только сходится к нулю неравномерно, но и свойство (17) не соблюдается.

Пример 3. Из равенства $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ $(z = \rho e^{i\theta},\ \rho < 1)$ следует, что

$$\frac{1 + \rho e^{i\theta}}{2(1 - \rho e^{i\theta})} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{i2\theta} + \ldots,$$

и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$Q_\rho(\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \rho\sin\theta + \rho^2\sin 2\theta + \ldots$$

Функция $P_\rho(\theta)$ называется *ядром Пуассона*, а $Q_\rho(\theta)$ — *ему сопряженной функцией*.

Упражнение. Показать, что $P_\rho(\theta)$ и $Q_\rho(\theta)$ — гармонические функции (для $\rho < 1$), т. е. удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\Delta u = 0$; см. § 7.26, (15) и (17)). Для этого проверить, что $\rho^n \cos n\theta$ при любых n и $\rho \geqslant 0$ — гармоническая функция и применить теорему о почленном дифференцировании равномерно сходящихся рядов (то же для $\rho^n \sin n\theta$).

Пример 4. Будем исходить из равенства

$$\frac{1}{1 - x} = 1 - x + x^3 - \ldots \qquad (-1 < x < 1), \tag{18}$$

где ряд справа есть сумма убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(-x)$.

На основании теоремы Вейерштрасса ряд (18) равномерно сходится на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, потому что на этом отрезке

$$|(-1)^k x^k| \leqslant q \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы 2 ряд (18) законно проинтегрировать на $[0, x]$, где $x \in [-q, q]$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{19}$$

Так как положительное число $q < 1$ произвольно, то равенство (19) справедливо для всех $x \in (-1, 1)$.

При $x = -1$ обе части (19) не имеют смысла. Однако при $x = 1$ они имеют смысл: левая часть равна $\ln 2$, а правая есть сумма сходящегося ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ Возникает вопрос, верно ли равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

и, таким образом, верно ли равенство (19) не только на интервале $(-1, +1)$, но и на полуинтервале $(-1, +1]$.

Покажем, что это так. Ряд (19) на самом деле равномерно сходится на всем отрезке $[0, 1]$. Это следует из признака равномерной сходимости Абеля (см. теорему 4, § 11.7).

Действительно, общий член ряда (19) можно записать в виде

$$(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \alpha_k\beta_k, \quad \alpha_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad \beta_k = x^k \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

При этом числовой ряд $\sum \alpha_k$ сходится. Но его можно рассматривать как равномерно сходящийся ряд постоянных функций. С другой стороны, функции $\beta_k = x^k$ ограничены ($|x^k| \leqslant 1$, $x \in [0, 1]$) и образуют при возрастании k монотонную последовательность.

Итак, ряд (19) равномерно сходится на $[0, 1]$. Его члены непрерывные функции, поэтому его сумма есть некоторая непрерывная на $[0, 1]$ функция, которую мы обозначим через $\psi(x)$.

Возникла следующая ситуация. Функция $\psi(x)$ и $\ln(1+x)$ непрерывны на $[0, 1]$ и совпадают на $[0, 1)$. Тогда, очевидно, они совпадают при $x = 1$ тоже, т. е. $\ln 2 = \psi(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$.

Другое доказательство этих фактов было дано в §§ 5.10, 5.11.

§ 11.9. Кратные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{1}$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), зависящие от пар индексов k, $l = 0, 1, 2, \ldots$, называется *двойным* или *двукратным рядом*. Числа a_{kl} называются *членами*, а числа

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

— *частичными суммами ряда* (1).

По определению, ряд (1) сходится к числу S, называемому *суммой ряда* (1), если существует

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{3}$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$|S - S_{mn}| < \varepsilon$$

для всех m, $n > N$. В этом случае пишут

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}.$$

Остановимся на случае, когда члены ряда (1) неотрицательны ($a_{kl} \geqslant 0$). Положим

$$\Lambda = \sup_{m,n} S_{mn}. \tag{4}$$

Если $\Lambda < \infty$ — конечное число, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара m_0, n_0 такая, что $\Lambda - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant \Lambda$, а вследствие неотрицательности a_{kl}

$$S_{m_0 n_0} \leqslant S_{mn}, \quad m, n > N = \max(m_0, n_0).$$

Поэтому $\Lambda - \varepsilon < S_{mn} < \Lambda + \varepsilon$, m, $n > N$, и существует предел $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \Lambda$.

Если же $\Lambda = \infty$, то, очевидно (при $a_{kl} \geqslant 0$!), $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn} = S = \infty$. В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \infty.$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\infty} |a_{kl}|$. Как и в случае обычных рядов, доказывается (прибегая к условию Коши), что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Наряду с рядом (1) можно рассматривать еще выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right),$$

которому естественно приписать число A (если только оно существует), получаемое следующим образом: если для каждого $k = 0, 1, \ldots$ ряд, заключенный в скобки, сходится и имеет сумму A_k и ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} A_k$ сходится к числу A, то полагаем

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{5}$$

Теорема 1. *Если ряд* (1) *абсолютно сходится, то имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Допустим сначала, что a_{kl} неотрицательны. Пусть левая часть (6) (имеющая смысл!) равна числу S.

Для любых неотрицательных s и n при $s \leqslant m$

$$\sum_{l=0}^{n} a_{sl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant S, \tag{7}$$

откуда ряды $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{sl}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ сходятся; поэтому, если во втором неравенстве зафиксировать m и перейти к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant S$$

для любого m, откуда следует существование числа A (см. (5)) и тот факт, что $A \leqslant S$.

С другой стороны, если число A конечно, то при любых m, n

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant A,$$

и потому

$$S = \sup_{m,n} S_{mn} \leqslant A.$$

Равенство (6) при $a_{kl} \geqslant 0$ доказано.

Пусть теперь a_{kl} действительны. Положим

$$a_{kl}^{+} = \begin{cases} a_{kl} & (a_{kl} \geqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} < 0), \end{cases} \qquad a_{kl}^{-} = \begin{cases} -a_{kl} & (a_{kl} \leqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} > 0). \end{cases}$$

Тогда

$$a_{kl} = a_{kl}^{+} - a_{kl}^{-}, \quad a_{kl}^{+} + a_{kl}^{-} = |a_{kl}|.$$

Поэтому из сходимости ряда $\sum\sum |a_{kl}|$ следует сходимость рядов $\sum\sum a_{kl}^{+}$, $\sum\sum a_{kl}^{-}$ с неотрицательными членами и потому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum a_{kl}^{+} - \sum\sum a_{kl}^{-} =$$
$$= \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{+}\right) - \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{-}\right) = \sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

Наконец, если $a_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$ — комплексные числа и ряд $\sum\sum |a_{kl}|$ сходится, то сходятся также ряды $\sum\sum |\alpha_{kl}|$, $\sum\sum |\beta_{kl}|$, где α_{kl} и β_{kl} — действительные числа, поэтому

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum \alpha_{kl} + i\sum\sum \beta_{kl} = \\ = \sum_k\Big(\sum_l \alpha_{kl}\Big) + i\sum_k\Big(\sum_l \beta_{kl}\Big) = \sum_k\Big(\sum_l a_{kl}\Big).$$

Теорема доказана полностью.

Рассмотрим еще новый вопрос. Пусть задан двойной ряд (1), сходящийся и притом абсолютно. Его сумму S, так же как сумму S' ряда, составленного из абсолютных величин его членов, можно записать в виде пределов последовательностей

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n\sum_0^n a_{kl} = \lim_{n\to\infty} S_{nn}, \quad S' = \lim_{n\to\infty}\sum_0^n\sum_0^n |a_{kl}| = \lim_{n\to\infty} S'_{nn},$$

обычных, зависящих только от одного индекса n. Последовательностям $\{S_{nn}\}$, $\{S'_{nn}\}$ соответствуют сходящиеся ряды

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + \\ + (a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{12} + a_{02}) + (a_{30} + \ldots) + \ldots, \tag{8}$$

$$|a_{00}| + (|a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}|) + \\ + (|a_{20}| + |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{12}| + |a_{02}|) + \ldots \tag{9}$$

с членами, равными суммам чисел, стоящих в скобках. Но в скобках второго ряда стоят неотрицательные числа, поэтому сходимость его не изменится, если в нем скобки вычеркнуть:

$$|a_{00}| + |a_{10}| + |a_{01}| + |a_{20}| + \ldots \tag{10}$$

Но тогда ряд

$$a_{00} + a_{10} + a_{01} + a_{20} + \ldots, \tag{11}$$

полученный вычеркиванием в (8) всех скобок, абсолютно сходится, следовательно, сходится, очевидно к S.

Мы доказали, что если двойной ряд (1) сходится к числу S и притом абсолютно, то полученный из него обычный (однократный) ряд (11) сходится тоже к S и тоже абсолютно. Но члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять как угодно, не нарушая его сходимости и не изменяя суммы.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если члены двойного ряда* (1), *сходящегося к числу S и притом абсолютно, перенумеровать любым способом* ($v_0, v_1, v_2, \ldots$) *при помощи одного индекса, и составить ряд $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, то последний будет сходиться к тому же числу S* (*абсолютно*).

В заключение заметим, что можно рассматривать трех-, четырех- и вообще n-кратные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{klm}, \ \ldots, \ \sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n}.$$

Для них могут быть доказаны по аналогии теоремы, аналогичные теоремам 1—3.

§ 11.10. Суммирование рядов и последовательностей методом средних арифметических

Пусть задан числовой ряд

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{1}$$

Положим

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n, \tag{2}$$

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

По определению, ряд (1) (или последовательность $\{S_n\}$) суммируется методом средних арифметических к числу σ, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma. \tag{4}$$

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится к числу* S, *то он суммируется методом средних арифметических и притом к тому же числу* S.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится; тогда существует такое $M>0$, что

$$|S_j|\leqslant M \quad (j=0, 1, \ldots), \tag{5}$$

и такое достаточно большое натуральное n, которое мы будем считать фиксированным (а k, и в дальнейшем p — переменными), что

$$|S_{n+k}-S|<\varepsilon \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Имеем, далее,

$$S-\sigma_{n+p}=$$
$$=\left(S-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}\right)+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}-\frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n}S_k,$$

откуда, учитывая, что $\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{n+1}{p(n+p+1)}$, получим

$$|S-\sigma_{n+p}|<\varepsilon+\frac{n+1}{n+p+1}M+\frac{n+1}{n+p+1}M<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon \ (p>p_0),$$

если p_0 достаточно велико. Следовательно, $\sigma_{n+p}\to S$ $(p\to\infty)$ или, что все равно, $\sigma_j\to S$ $(j\to\infty)$, т. е. теорема верна.

Пример. Ряд $1-1+1-\ldots$ расходится, но он суммируется к числу $1/2$ методом средних арифметических.

§ 11.11. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

где a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — постоянные, вообще говоря, комплексные числа, а z — комплексная переменная, называется *степенным рядом* с коэффициентами a_k.

В теории степенных рядов центральное место занимает следующая основная теорема.

Теорема 1 (основная). *Для степенного ряда* (1) *существует неотрицательное число R, конечное или бесконечное* ($0 \leqslant R \leqslant \infty$), *обладающее следующими свойствами:*

1) *ряд сходится, и притом абсолютно, в открытом круге $|z| < R$ и расходится в точках z с $|z| > R$,*

2) *число R определяется по формуле*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2}$$

где в знаменателе стоит верхний предел (*см.* § 3.7).

Мы позволяем себе при этом считать, что $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Таким образом, если указанный верхний предел равен 0, то $R = \infty$, если же он равен ∞, то $R = 0$.

Открытый круг $|z| < R$ называется *кругом сходимости степенного ряда*. При $R = \infty$ он превращается во всю комплексную плоскость. При $R = 0$ степенной ряд имеет только одну точку сходимости, именно, точку $z = 0$.

Замечание 1. Число R, удовлетворяющее утверждению 1) теоремы 1, очевидно, единственно.

Замечание 2. Если для степенного ряда (1) существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Поэтому в этом случае

$$R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Читатель, не ознакомившийся с понятием верхнего предела, может проследить за ходом доказательства теоремы 1, предположив, что для рассматриваемого степенного ряда указанный предел существует. В этом случае всюду в проводимых ниже рассуждениях надо заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

Доказательство теоремы 1. Пусть число R определяется по формуле (2). В точке $z = 0$ степенной ряд сходится, поэтому теорема при $z = 0$, $|z| = 0 < R$, верна.

Будем далее считать, что $|z|>0$. Наряду с рядом (1) введем второй ряд, составленный из его модулей,

$$|a_0|+|a_1z|+|a_2z^2|+\ldots. \tag{1'}$$

Общий член второго ряда обозначим через

$$u_n=|a_nz^n| \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Согласно обобщенному признаку Коши сходимости ряда (см. § 11.3 теорема 3, в)), если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд (1′) сходится, если же $\overline{\lim}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд (1) расходится и его общий член не ограничен. Но

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_nz^n|}=\overline{\lim}\left(|z|\sqrt[n]{|a_n|}\right)=$$

$$=|z|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=|z|/R.$$

Здесь мы вынесли за знак верхнего предела конечное число $|z|>0$ (см. § 3.7, теорема 6).

Из сказанного следует:

Если $|z|<R$, т. е. $|z|/R<1$, то ряд (1′) сходится, а вместе с ним сходится, и притом абсолютно, ряд (1).

Если же $|z|>R$, т. е. $|z|/R>1$, то ряд (1) расходится и его общий член $|a_nz^n|$ не ограничен, поэтому общий член ряда (1) a_nz^n не стремится к нулю при $n\to\infty$ и для него не выполняется необходимый признак (см. § 11.1 (4)). Это показывает, что ряд (1) расходится.

Итак, мы доказали, что определяемое из равенства (2) число R обладает следующим свойством: если $|z|<R$, то ряд (1) сходится, если же $|z|>R$, то ряд (1) расходится.

Основная теорема доказана.

Будем в дальнейшем для краткости обозначать через σ_q замкнутый круг $|z|\leqslant q$ комплексной плоскости. Заметим, что наш степенной ряд сходится на открытом круге $|z|<R$, вообще говоря, неравномерно. Однако, верна следующая теорема:

Теорема 2. *Степенной ряд* (1) *абсолютно и равномерно сходится на любом круге* $\sigma_q=\{z\colon |z|\leqslant q\}$, *где* $q<R$, *а* R — *радиус сходимости ряда* (1).

Доказательство. В самом деле, пусть $q<R$, тогда q есть действительная, т. е. лежащая на оси x, точка, принадлежащая открытому кругу сходимости ряда (1). Поэтому в этой точке наш степенной ряд абсолютно сходится, т. е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nq^n|<\infty$. С другой стороны,

$$|a_nz^n|\leqslant|a_nq^n| \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad z\in\sigma_q.$$

Так как правые части этих неравенств не зависят от $z \in \sigma_q$, и ряд, составленный из правых частей, сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. § 11.7, теорема 1) степенной ряд (1) сходится на σ_q абсолютно и равномерно.

Из теоремы 2 как следствие вытекает

Теорема 3. *Сумма*

$$s(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

степенного ряда есть непрерывная функция на его открытом круге сходимости $|z| < R$.

В самом деле, члены нашего ряда — непрерывные функции от z, а сам ряд равномерно сходится на круге σ_q, $q < R$. Следовательно, по известной теореме из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.7, теорема 2) сумма ряда $s(z)$ есть непрерывная функция на σ_q, но тогда и на всем круге $|z| < R$, потому что $q < R$ произвольно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда в нашем распоряжении имеется формула (2), но часто на практике при вычислении R удобно бывает воспользоваться признаком Даламбера.

Пусть существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n|, \tag{4}$$

который мы пока обозначим через $1/R_1$. Тогда (см. (3))

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{R_1},$$

и, согласно признаку Даламбера (§ 11.3, теорема 2), если $|z| < R_1$, то ряд (1′), а вместе с ним и ряд (1), сходится, если же $|z| > R_1$, то $|u_n| \to \infty$ и ряд (1) расходится.

Но число R с такими свойствами может быть единственным, поэтому $R_1 = R$ (см. теорему 1).

Итак, мы доказали, что *если существует предел* (4), *то он равен* $1/R$:

$$\lim_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| = 1/R, \tag{5}$$

где R — радиус сходимости степенного ряда (1).

Заметим, что мы окольным путем доказали, что если предел (4) (конечный или бесконечный) существует, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. На самом деле имеет место более сильное утверждение, которое доказано в § 11.3 (замечание 2): существование предела (4) (конечного или бесконечного) влечет за собой существование равного ему предела $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание 3. В учебной литературе (также как в первом и втором изданиях нашего курса) обычно начинают изложение степенных рядов с теоремы Абеля, которая гласит:

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$ *комплексной плоскости, то он сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге* $|z| \leqslant q$, *где* q — *любое число, удовлетворяющее неравенствам* $0 < q < |z_0|$.

Доказательство. Эта теорема теперь уже является следствием из теорем 1 и 2. В самом деле, так как z_0 есть точка сходимости ряда (1), то $|z_0|$ не может быть бо́льшим, чем R. Поэтому $|z_0| \leqslant R$, $0 < q < |z_0| \leqslant R$ и $q < R$. Но тогда по теореме 2 степенной ряд (1) сходится на круге $|z| \leqslant q$ абсолютно и равномерно.

Примеры.

$$1 + z + z^2 + \ldots, \tag{6}$$

$$1 + \frac{z}{1^\alpha} + \frac{z^2}{2^\alpha} + \ldots \quad (\alpha > 0), \tag{7}$$

$$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \ldots, \tag{8}$$

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \tag{9}$$

С помощью формулы (2) заключаем, что радиус сходимости рядов (6) и (7) равен 1; для ряда (8) он равен 0 и для ряда (9) равен ∞.

Сумма ряда (6) (геометрической прогрессии) в открытом круге $|z| < 1$ равна $(1-z)^{-1}$, а остаток

$$r_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Однако сходимость на указанном круге неравномерна. Неравномерность сходимости имеет место уже для положительных $z = x$ на интервале $0 < x < 1$; неравенство

$$\varepsilon > \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

при любом заданном n нельзя удовлетворить для всех указанных x.

Ряд (7) при $\alpha > 1$ равномерно сходится на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ его сходимости, так как

$$z^k/k^\alpha \leqslant k^{-\alpha} \quad \text{и} \quad \sum k^{-\alpha} < \infty \quad (|z| \leqslant 1).$$

Если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то в точке $z = 1$ ряд (7), очевидно, расходится. Остальные точки z с $|z| = 1$ запишем следующим образом: $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$,

$$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

и

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}.$$

Оба полученные ряда (по косинусам и по синусам) для $0 < \theta < 2\pi$ сходятся (см. § 11.8 пример 3). Таким образом, ряд (7) сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, кроме $z = 1$.

Ряд (8) сходится только в точке $z = 0$, а ряд (9) схдоится во всех точках z комплексной плоскости, притом равномерно на любом круге $|z| \leqslant q < \infty$.

§ 11.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Радиусы сходимости степенного ряда*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

и ряда, полученного из него формальным дифференцированием

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots, \tag{2}$$

совпадают.

Доказательство. Пусть R есть радиус сходимости ряда (1), а R_1 — радиус сходимости ряда (2). Тогда (см. § 3.7, теорема 6)

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|(n+1)a_n|} = \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{n+1},\ \sqrt[n]{|a_n|}\right) =$$

$$= \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

и $R = R_1$.

Теорема 2. *Степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \qquad |z| < R \tag{3}$$

законно формально дифференцировать в пределах его (открытого) круга сходимости $|z| < R$, т. е. верна формула

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots, \qquad |z| < R. \tag{4}$$

Доказательство. Эту теорему мы докажем сначала в предположении, что $z = x$ есть действительная переменная; это даст нам возможность свести вопрос к хорошо известному факту из теории действительных рядов. Итак, степенной ряд (3) для действительной переменной $z = x$ имеет вид:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \qquad -R < x < R. \tag{3'}$$

Этот ряд теперь уже имеет не круг, а интервал сходимости $(-R, R)$.

Соответствующий формально продифференцированный ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \tag{4'}$$

Его сумму мы пока обозначили через $\varphi(x)$. Он сходится на интервале $(-R, R)$ на основании предыдущей теоремы, Оба ряда, как мы знаем, равномерно сходятся на отрезке $[-q, q]$, где $q < R$. При этом члены второго ряда непрерывны и являются производными от соответствующих членов первого. Но тогда на основании известной теоремы из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 11.8, теорема 3) выполняется равенство

$$\varphi(x) = f'(x) \tag{5}$$

на отрезке $[-q, q]$, следовательно, и на интервале $(-R, R)$, потому что $q < R$ произвольно.

Переходим к доказательству теоремы в общем случае — для комплексного z. Оно, конечно, годится и для действительных x. Пусть z — произвольная точка круга

$$|z| < R$$

и число (конечное!) R_1 удовлетворяет неравенству

$$|z| < R_1 < R.$$

Будем рассматривать только такие комплексные h, для которых

$$|h| < R_1 - |z| = \delta.$$

Тогда

$$|z + h| < R_1$$

и

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \alpha_1(h) + \alpha_2(h) + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\alpha_n(h) = a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = a_n\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\right)$$

$$(|h| > 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Положим еще

$$\alpha_n(0) = a_n \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = na_n z^{n-1}. \tag{7}$$

В силу этого допущения члены ряда (6) определены не только для $|h| > 0$, но и для $h = 0$, и притом они оказываются непрерывными функциями от h на круге

$$|h| \leqslant \delta.$$

Для них имеет место оценка

$$|\alpha_n(h)| \leqslant |a_n|\left(R_1^{n-1} + R_1^{n-2}R_1 + \ldots + R_1^{n-1}\right) = n|a_n|R_1^{n-1} \quad (|h| \leqslant \delta).$$

Положительные числа, стоящие в правых частях неравенства, не зависят от h, а ряд, составленный из них, сходится. Ведь R — радиус сходимости ряда (2), а $R_1 < R$. Но в таком случае по теореме Вейерштрасса ряд (6) функций, непрерывных на круге

$|h| \leqslant \delta$, равномерно сходится на этом круге. Это показывает, что сумма ряда (6) есть также непрерывная функция от h на этом круге, в частности, при $h=0$. Но тогда существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \ldots$$

при любом способе стремления комплексных h к нулю. Таким образом, для любого z с

$$|z| < R$$

существует производная $f'(z)$ (в смысле комплексного переменного), равная

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots,$$

что доказывает теорему для комплексных z.

Отметим, что в силу теоремы 1 ряд (1) законно почленно дифференцировать сколько угодно раз. На k-м этапе мы получим равенство

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + (k+1)k\ldots 2a_{k+1}z + \ldots,$$

справедливое для всех z с $|z| < R$. Если положить в нем $z=0$, то получим $f^{(k)}(0) = k!a_k$ или

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в частности, следует, что *разложение функции* $f(z)$ *в степенной ряд* (см. (1)) *в некотором круге* $|z| < R$ *(или в интервале* $(-R < x < R)$, *если речь идет о функции* $f(x)$ *действительного переменного* x) *единственно.*

Вопрос о почленном интегрировании степенных рядов во всей его полноте потребовал бы введения криволинейного интеграла от функции комплексной переменной. Мы ограничимся здесь рассмотрением этого вопроса только для степенных рядов

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{8}$$

от действительной переменной x $(z = x)$.

Если по-прежнему $R = 1 / \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ и $R > 0$, то для всех x, принадлежащих интервалу $(-R, R)$, называемому интервалом сходимости степенного ряда (8), этот ряд сходится, и притом абсолютно. Для всех же x с $|x| > R$ (при конечном R) общий член ряда не ограничен, и ряд расходится. Конечно, если $R=0$, то ряд (8) имеет единственную точку сходимости $x=0$.

Итак, пусть задан степенной ряд (8), сходящийся на интервале $-R < x < R$, где $0 < R \leqslant \infty$. Числа a_k могут быть действительными и комплексными. Зададим фиксированную точку $x_0 \in (-R, R)$ и переменную точку $x \in (-R, R)$ и подберем $q > 0$

так, чтобы $-R<-q<x_0$, $x<q<R$. Степенной ряд (8) равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$, находящемся строго внутри интервала сходимости ряда. Но тогда его можно почленно интегрировать (§ 11.8, теорема 2) на отрезке, соединяющем x_0 с x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x^2-x_0^2)+\frac{a_2}{3}(x^3-x_0^3)+\ldots$$

$$(-R<x, x_0<R). \tag{9}$$

В частности, при $x_0=0$ получим

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots \quad (-R<x<R). \tag{10}$$

Примеры.

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant 1), \tag{11}$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^5}{2^2 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^7}{2^3 7}+\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{12}$$

Для $x\in(-1, 1)$ эти равенства получаются соответственно почленным интегрированием на отрезке, соединяющем 0 и x известных равенств

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2!}\frac{x^4}{2^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\frac{x^6}{2^3}+\ldots \tag{13}$$

Ряд (11) при $x=1, -1$ сходится по признаку Лейбница. Само же равенство (11) справедливо на основании доказываемой ниже второй теоремы Абеля.

Ряд (13) при $x=1, -1$ не может сходиться, иначе его сумма по второй теореме Абеля была бы непрерывной функцией на $[-1, +1]$. Все же ряд (12) при $x=1, -1$ сходится, потому что в этом случае абсолютная величина его общего члена равна (пояснения ниже)

$$|u_n|=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}=\frac{(2n-1)!!\,(2n)!!}{((2n)!!)^2(2n+1)}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\approx$$

$$\approx\frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+(1/2)}e^{-2n}}{2^{2n}2\pi n^{2n+1}e^{-2n}(2n+1)}=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,(2n+1)}\quad(n\to\infty).$$

Мы пользуемся обозначениями, которые уже употреблялись в § 9.18. В четвертом соотношении ($\approx$) применена формула Стирлинга (§ 9.18, (6)). Ряд, общий член которого равен правой части нашей цепи, сходится, но тогда сходится и ряд $\sum u_n$ (см. § 11.3, (1)).

В силу второй теоремы Абеля сходимость ряда (12) при $x=\pm 1$ влечет непрерывность на $[-1, +1]$ его суммы $S(x)$. Но имеет место равенство $S(x)=\arcsin x$ на $(-1, +1)$, а $\arcsin x$ непрерывна на $[-1, +1]$, поэтому это равенство верно и на $[-1, +1]$.