

где $\frac{\partial}{\partial z}$ обозначает пространственное дифференцирование вдоль нормали, направленной наружу. Первый член левой части, конечно, постоянен, и мы будем иметь, следовательно,

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g} + C, \quad (5)$$

где, как в § 213,

$$g = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi - \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{\omega}^2 \right) \right]. \quad (6)$$

Очевидно, g имеет здесь значение „кажущегося тяготения“; оно меняется, конечно, более или менее в зависимости от положения точки P на поверхности Земли.

Однако в теории приливов принято пренебречь малыми колебаниями значения g и влиянием эллиптичности невозмущенного уровня на значение Ω на поверхности. Таким образом, если положить

$$r = a, \quad g = \frac{yE}{a^2},$$

где E обозначает массу Земли, а a — средний радиус на поверхности Земли, то согласно (2) и (5)

$$\bar{\zeta} = H \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + C, \quad (7)$$

где

$$H = \frac{3}{2} \frac{M}{E} \left(\frac{a}{D} \right)^3 a, \quad (8)$$

как в § 180. Таким образом форма равновесия свободной поверхности есть гармонический сферионд второго порядка зонального типа, ось которого проходит через возмущающее тело.

с) Вследствие суточного вращения, а также вследствие собственного движения возмущающего тела то и дело изменяется положение приливного сферионда по отношению к Земле, так что уровень воды в каком-либо месте беспрестанно поднимается и падает. Мы исследуем характер этих изменений; пусть для определенного места P θ обозначает полюсное угловое расстояние, а φ — долготу на восток, считая от некоторого данного меридиана; через A обозначим угловое расстояние возмущающего тела от северного полюса и через a — часовой угол, считая на запад от того же самого меридиана. Тогда будем иметь

$$\cos \theta = \cos A \cos \theta + \sin A \sin \theta \cos (a + \varphi) \quad (9)$$

и, следовательно, согласно (7)

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} = \frac{3}{2} H \left(\cos^2 A - \frac{1}{3} \right) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} H \sin 2A \sin 2\theta \cos (a + \varphi) + \\ + \frac{1}{2} H \sin^2 A \sin^2 \theta \cos 2(a + \varphi) + C. \end{aligned} \quad (10)$$

Каждый из членов в правой части этого уравнения можно рассматривать как представляющий частный прилив; действия этих приливов налагаются друг на друга.

Первый член есть зональная сферическая функция второго порядка и дает приливный сферионд, симметричный относительно земной оси и имеющий в качестве узловых линий круги параллелей, для которых

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}, \text{ или } \theta = 90^\circ \pm 35^\circ 16'.$$

Высоты приливов для отдельных широт меняются, как $\cos^2 \Delta - \frac{1}{3}$. Для Луны главное колебание этого вида имеет период, равный приблизительно 14 суткам, следовательно, этому члену соответствует „четырнадцатисуточный лунный прилив“, или „прилив по склонению“. Если возмущающее тело есть Солнце, то мы будем иметь „полугодовой солнечный прилив“. Необходимо отметить, что среднее значение от $\cos^2 \Delta - \frac{1}{3}$ по отношению к времени не равно нулю и наклон орбиты возмущающего тела к экватору вызывает как следствие постоянное изменение среднего уровня; ср. § 183.

Второй член правой части (10) есть сферическая функция такого типа, который мы получили из (7) § 86, полагая $n=2$, $s=1$. Соответствующий приливный сферионд имеет в качестве узловых линий экватор и тот меридиан, который удален от возмущающего тела на 90° . Возмущение уровня имеет наибольшее значение в меридиане возмущающего тела в широтах, которые на 45° севернее и южнее экватора. Колебание в каком-нибудь месте завершает свой период одновременно с часовым углом a , т. е. в течение лунных или солнечных суток. Однако амплитуда не постоянна, а меняется медленно вместе с Δ , причем она меняет знак, когда возмущающее тело пересекает экватор. Этот член представляет „суточные“ лунный и солнечный приливы.

Третий член есть секториальная сферическая функция $n=2$, $s=2$ и дает приливный сферионд, имеющий узловыми линиями те меридианы, которые лежат на 45° восточнее и западнее от возмущающего тела. Колебание в каком-либо месте завершает свой период одновременно с $2a$, т. е. в течение половины (лунных или солнечных) суток, а амплитуда, будучи пропорциональна $\sin^2 \Delta$, достигает своего наибольшего значения, когда возмущающее тело находится над экватором. Следовательно, третий член представляет полусуточные лунный и солнечный приливы.

„Постоянная“ С определяется из того рассуждения, что вследствие неизменности объема мы должны иметь

$$\iint \bar{\zeta} dS = 0, \quad (11)$$

где интегрирование распространяется на полную поверхность моря. Если море покрывает весь земной шар, то согласно общему свойству сферических поверхностных функций, указанному в § 87, $C=0$. Тогда из (7) следует, что наибольшее возвышение над невозмущенным уровнем имеет место в точках $\vartheta=0$, $\vartheta=180^\circ$, т. е. в тех точках, где возмущающее тело находится в зените или в надире; это наибольшее возвышение равно $\frac{2}{3} H$. Наибольшее опускание будет там, где $\vartheta=90^\circ$, т. е. тогда, когда возмущающее тело находится на горизонте, и оно равно $\frac{1}{3} H$. Наибольшая разность уровней равна таким образом H .

В случае ограниченного моря С не обращается в нуль и имеет во всякий момент времени определенное значение, зависящее от положения возмущающего тела по отношению к Земле. Это значение может быть легко выведено из уравнений (10) и (11). Оно равно сумме сферических функций второго порядка от Δ и a с постоянными коэффициентами в форме интегралов по поверхности, значения которых зависят от распределения суши и воды на земном шаре. Колебания значения С, зависящие от относительного движения возмущающего тела, вызывают общее повышение и падение свободной поверхности с четырнадцатисуточным (для случая Луны), суточным и полусуточным периодами. Это уточнение статической теории, приведенное в обычной форме, было исследовано впервые полностью Томсоном и

Тем самым ¹⁾. Необходимость подобного уточнения для ограниченного моря была однако, осознана еще Даниилом Бернулли ²⁾.

Эта поправка имеет влияние на момент наступления высокой воды, который уже более не будет совпадать с моментом максимума возмущающей силы. Более того, интервал времени, на который высокая вода будет опаздывать или опережать, меняется в зависимости от места ³⁾.

д) До сих пор мы пренебрегали взаимным притяжением частиц воды. Чтобы ввести их в вычисления, мы должны к возмущающему потенциалу Ω прибавить еще потенциал тяготения поднятой воды. Для океана, покрывающего весь земной шар, корректирование легко сделать, как в § 200. Если положить $n=2$ в формулах указанного параграфа, то мы должны увеличить значение Ω на $-\frac{3}{5} \frac{\rho}{\rho_0} g \zeta$; отсюда легко найти

$$\bar{\zeta} = \frac{H}{1 - \frac{3}{5} \frac{\rho}{\rho_0}} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right); \quad (12)$$

следовательно, все приливы увеличены в $\left(1 - \frac{3}{5} \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-1}$ раз. При $\frac{\rho}{\rho_0} = 0,18$ это равно 1,12.

е) Вот все о статической теории. Для исследований кинетической теории § 213—224 необходимо значение величины $\bar{\zeta}$, даваемое формулой (10), предполагать разложенной в ряд простых гармонических функций от времени. Действительное разложение, при котором принимаются во внимание изменения A и a и изменения расстояния D возмущающего тела (последнее входит в выражение для H), есть довольно сложная задача физической астрономии, которой мы не будем касаться ⁴⁾.

Если не принимать во внимание константу C , которая исчезает в динамических уравнениях (1) § 215, так как неизменяемость объема обеспечена теперь уравнением неразрывности (2), то легко видеть, что члены формулы (10) будут троякого рода.

Во-первых, мы имеем приливы длинного периода, для которых

$$\bar{\zeta} = H' \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \cos(\sigma t + \varepsilon). \quad (13)$$

Наиболее важные приливы этого рода суть „четырнадцатисуточные лунные приливы“, для которых выраженная в угловых градусах $\sigma = 1,098^\circ$ в средний солнечный час, и „полугодовые солнечные приливы“, для которых $\sigma = 0,082^\circ$.

¹⁾ Thomson a. Tait, *Natural Philosophy*, § 808; см. также Darwin. On the Correction to the Equilibrium Theory of the Tides for the Continents, Proc. Roy. Soc., 1 апреля 1886 [Paper, I, 328]. Из числовых изысканий проф. Н. Н. Тигпера, приложенных к этой работе, следует, что при имеющемся в действительности распределении суши и воды эта поправка совершенно незначительна.

²⁾ Вегендорф D., *Traité sur le Flux et Reflux de la Mer*, гл. XI (1740). Эта работа, так же как и цитированные на стр. 386 работы Маклорена и сочинение Эйлера по тому же самому предмету перепечатаны в *Principia* Ньютона, изданных Le Seur и Jacquier.

³⁾ Thomson a. Tait, § 810. Это положение иллюстрируется формулой (3) § 184.

⁴⁾ Мы указываем на Laplace, *Mécanique céleste*, кн. XIII, § 2. Более полное разложение, которое служило основанием всем новейшим точным работам о приливах, принадлежит Дарвину и напечатано в его *Papers*, I. Это разложение является только квазигармоническим, причем некоторые элементы, которые изменяются только медленно, рассматриваются как постоянные, но время от времени они корректируются. Строгое гармоническое разложение проведено в последнее время Doodson, Proc. Roy. Soc. A. C, 305 (1921).

Во-вторых, мы имеем суточные приливы, для которых

$$\bar{\zeta} = H'' \sin \theta \cos \theta \cos (\sigma t + \varphi + \varepsilon), \quad (14)$$

где σ только немного отличается от угловой скорости ω вращения Земли. К этим приливам принадлежат „суточные лунные приливы“ ($\sigma = 13,943^\circ$), „суточные солнечные приливы“ ($\sigma = 14,959^\circ$) и „суточные лунно-солнечные приливы“ ($\sigma = \omega = 15,041^\circ$).

Наконец, мы имеем еще полусуточные приливы, для которых

$$\bar{\zeta} = H''' \sin^2 \theta \cos (\sigma t + 2\varphi + \varepsilon)^1, \quad (15)$$

где σ только немного отличается от 2ω . Последние включают „полусуточный лунный прилив“ ($\sigma = 28,984^\circ$), „полусуточный солнечный прилив“ ($\sigma = 30^\circ$) и „полусуточные лунно-солнечные приливы“ ($\sigma = \omega = 30,082^\circ$).

Более полное перечисление важнейших частных приливов и значения коэффициентов H' , H'' , H''' в различных случаях можно найти в уже цитированных исследованиях Дарвина. При гармоническом анализе наблюдений приливов, который составляет специальную тему рассматриваемых исследований, применяется только одна теорема динамической теории, именно общая теорема, что высота прилива в произвольном месте равна сумме ряда простых гармонических функций от времени, которые имеют такие же периоды, как различные члены в разложении возмущающего потенциала, так что эти периоды известны a priori. Амплитуды и фазы различных частных приливов для определенной гавани получаются тогда из сравнения наблюдений приливов за довольно длинный промежуток времени²). Так получают вполне пригодное для практических целей выражение, которое применяется к систематическому предсказанию приливов в соответствующей гавани.

f) Особенно интересно при гармоническом анализе определение приливов длинного периода. Уже было указано, что под влиянием сил трения они должны приближаться более или менее близко к своим значениям по статической теории. Для моря, покрывающего земной шар, по меньшей мере сомнительно, достаточно ли будет сил трения, чтобы вызвать заметное влияние в указанном направлении. Можно ожидать, следовательно, согласно рассмотренным в § 206, 214 динамическим основаниям, что амплитуды будут меньше, чем по статической теории. С другой стороны, эти соображения не годятся для действительного океана³), так как там влияние трения значительно больше. Таким образом мы можем принять, что приливы длинного периода должны быть иметь свои полные статические значения, если бы Земля была абсолютно твердой. Однако в действительности четырнадцатидневный лунный прилив, амплитуду которого только и можно получить вообще с некоторой уверенностью из наблюдений, приблизительно на одну треть меньше, чем дает значение, вычисленное согласно статической теории. Это противоречие объясняется упругой податливостью твердой оболочки Земли влиянию приливовозмущающих сил, происходящих от Луны.

¹⁾ Для малой, лежащей вблизи полюса части поверхности, которая практически может рассматриваться как плоская, из формул (14) и (15) очевидно следует, что $\bar{\zeta}$ будет пропорциональна $r \cos (\sigma t + \varphi + \varepsilon)$ и $\bar{\zeta}$ — пропорциональна $r^2 \cos (\sigma t + 2\varphi + \varepsilon)$ соответственно, где r и ω представляют полярные координаты на плоскости. Выражения этого вида были уже заранее использованы в § 211, 212.

²⁾ В связи с § 187 интересно, что измерители прилива, которые находятся в сравнительно мелкой воде, заметно подвергаются влиянию некоторых приливов второго порядка, которые поэтому должны быть приняты во внимание в общей схеме гармонического анализа.

³⁾ См. цитированную на стр. 446 работу Рэлея.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 227. Будем теперь рассматривать движение волн в жидкости в том случае, когда уже больше нельзя будет пренебречь вертикальным ускорением. Наиболее важный случай, который не был охвачен предшествующей теорией, есть движение волн на сравнительно глубокой воде, амплитуда которых, как мы увидим, очень быстро убывает с глубиной. Однако, как это будет выяснено, существует непрерывный переход к тем случаям, которые исследовались в предыдущей главе, если горизонтальное движение жидкости, начиная от поверхности вплоть до дна, будет в основном одинаковым.

Мы начнем с колебаний горизонтального слоя воды и ограничимся сначала случаями, при которых движение происходит в двух измерениях: в горизонтальном направлении (x) и в вертикальном направлении (y). Возвышения и опускания свободной поверхности представляют тогда ряд параллельных прямолинейных гребней и впадин, перпендикулярных к плоскости xy .

Предположим, что движение образовалось первоначально из состояния покоя под действием консервативной системы сил; в таком случае движение будет непременно безвихревым и потенциал скоростей φ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

с условием на неподвижной границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

Чтобы найти условия, которым надо удовлетворить на свободной поверхности ($p = \text{const.}$), возьмем начало координат на невозмущенном уровне и ось Oy направим вертикально вверх. Если положить $\Omega = gy$ в формуле (4) § 20 и, предполагая движение бесконечно малым, пренебречь квадратом скорости q , то получим

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy + F(t). \quad (3)$$

Пусть η обозначает возвышение поверхности над точкой $(x, 0)$ в момент t . Так как давление постоянно, то, включая функцию $F(t)$ и аддитивную постоянную в значение $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, будем иметь

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=0}. \quad (4)$$

С ошибкой порядка величин, которыми мы пренебрегаем, можно уравнение (4) написать в следующем виде:

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{y=0}. \quad (5)$$

Так как нормаль к свободной поверхности составляет бесконечно малый угол $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ с вертикалью, то условие, что нормальная компонента скорости жидкости на свободной поверхности равна нормальной компоненте скорости самой поверхности, с достаточным приближением выражается в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (6)$$

Действительно, это есть вид, который принимает общее условие на поверхности (3) § 9, если положить

$$F(x, y, z, t) \equiv y - \eta$$

и пренебречь малыми величинами второго порядка.

Исключая η из уравнений (5) и (6), получим условие

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

которое должно удовлетворяться для $y = 0$. Оно равнозначно с условием

$$\frac{Dp}{Dt} = 0.$$

Для простых гармонических колебаний с временным множителем $e^{i(\sigma t + \varepsilon)}$ условие (7) принимает вид

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (8)$$

§ 228. Применим эти результаты к свободным колебаниям слоя воды или воды в прямолинейном канале постоянной глубины h . Пусть жидкость, неограниченная в направлении оси x , ограничена вертикальными плоскостями, параллельными плоскости xy .

Так как для всех значений x граничные условия одинаковы, то проще всего предположить, что φ есть простая гармоническая функция от x ; наиболее общий случай, совместимый с вышеизложенными условиями, может быть получен отсюда по теореме Фурье с помощью наложения.

Мы предположим, следовательно,

$$\varphi = P \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}, \quad (1)$$

где P есть функция только y . Уравнение (1) § 227 дает

$$\frac{d^2 P}{dy^2} - k^2 P = 0, \quad (2)$$

а отсюда следует

$$P = A e^{ky} + B e^{-ky}. \quad (3)$$

Условие, что на дне нет вертикального движения, будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = -h;$$

откуда

$$Ae^{-kh} = Be^{kh} = \frac{1}{2} C.$$

Это приводит к формуле

$$\varphi = C \operatorname{ch} kh (y + h) \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)}. \quad (4)$$

Значение σ определяется из уравнения (8) § 227, которое дает

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (5)$$

Если подставить (4) в (5) § 227, то найдем

$$\eta = \frac{i\sigma C}{g} \operatorname{ch} kh \cos kx \cdot e^{i(\sigma t + \varepsilon)} \quad (6)$$

или, если положить

$$a = -\frac{\sigma C}{g} \operatorname{ch} kh$$

и сохранить только действительную часть (6), то получим

$$\eta = a \cos kx \sin (\sigma t + \varepsilon). \quad (7)$$

Эта формула представляет систему стоячих волн с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ и вертикальной амплитудой a . Период $(\frac{2\pi}{\sigma})$ и длина волны связаны формулой (5). Числовые примеры для этого соотношения будут даны в ближайшем параграфе.

Выразив φ через a , будем иметь

$$\varphi = -\frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (8)$$

и из § 62 легко убедиться, что соответствующая функция тока будет

$$\psi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin kx \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

Обозначая через x , y координаты частицы по отношению к ее среднему положению (x, y) и пренебрегая разностями между компонентами скорости в точках (x, y) и $(x+x, y+y)$, как величинами второго порядка малости, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Сделав теперь подстановку из (8) и интегрируя по t , после незначительных упрощений согласно (5) найдем

$$\left. \begin{aligned} x &= -a \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \sin kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= a \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Движение каждой частицы будет прямолинейным и простым гармоническим; направление движения изменяется от вертикального в пучностях ($kx = m\pi$) до горизонтального в узлах ($kx = (m + \frac{1}{2})\pi$). Амплитуда вертикального движения падает от $a \cos kx$ на поверхности до 0 на дне, в то время как амплитуда горизонтального движения уменьшается в отношении $\operatorname{ch} kh : 1$.

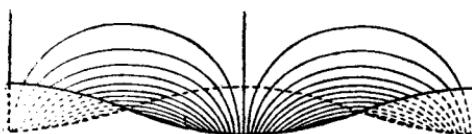
Если длина волны очень мала сравнительно с глубиной, то kh велико и, следовательно, $\operatorname{th} kh = 1^*$). Формулы (11) сводятся тогда к

$$\left. \begin{aligned} x &= -ae^{ky} \sin kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ y &= ae^{ky} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$\sigma^2 = gk. \quad (13)$$

Движение убывает от поверхности ко дну очень быстро; на глубине длины волны амплитуда уменьшается в отношении $e^{-2\pi}$, или 1:535. Вид линий тока $\psi = \text{const.}$ (колебательного движения) для этого случая представлен на фиг. 51.



Фиг. 51.

не накладывалось никаких ограничений. Однако формулы дают также продольные колебания и в канале конечной длины, если только для k подобрать подходящее значение. Если, например, жидкость ограничена вертикальными плоскостями

$$x = 0, \quad x = l,$$

то условие $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ выполняется на обоих концах, если

$$\sin kl = 0 \quad \text{или} \quad kl = m\pi,$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$. Длины волн нормальных колебаний даны, следовательно, формулой $\lambda = \frac{2l}{m}$; ср. § 178.

§ 229. В предыдущих параграфах мы рассматривали „стоячие“ волны, и было естественно дать их на первом месте, так как они представляют непосредственное применение обычного метода исследования свободных колебаний системы около положения равновесия.

*) Этот случай, конечно, легко исследовать совершенно независимо.

Если слой воды или канал постоянной глубины безграничен в обоих направлениях оси x , то наложением двух систем стоячих волн одинаковой длины волны мы получим систему прогрессивных волн, движущихся поступательно без изменения с постоянной скоростью. Для этого необходимо, чтобы гребни и впадины одной системы совпадали с узлами другой системы, чтобы амплитуды обеих систем были равны и, наконец, чтобы их фазы отличались на четверть периода. Следовательно, положив

$$\eta = \eta_1 \pm \eta_2, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = a \sin kx \cos \sigma t, \\ \eta_2 = a \cos kx \sin \sigma t, \end{array} \right\} \quad (2)$$

мы получим

$$\eta = a \sin (kx \pm \sigma t), \quad (3)$$

а это представляет бесконечную цепь волн, которые распространяются в отрицательном или положительном направлении оси x со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{g}{k} \operatorname{th} kh \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где σ определено из формулы (5) § 228. Выражая скорость через длину волны (λ), будем иметь

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Когда длина волны будет меньше удвоенной глубины, тогда с достаточной точностью будем иметь $\operatorname{th} kh = 1$ и, следовательно¹⁾,

$$c = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Если, с другой стороны, λ только немногим будет больше, чем h , то приближенно $\operatorname{th} kh = kh$ и скорость волны не будет зависеть от ее длины и, как в § 170, будет равна

$$c = (gh)^{1/2}. \quad (7)$$

Мы получили этот результат при допущении, что профиль волны есть синусоида; теорема Фурье показывает, однако, что это ограничение в значительной степени не является необходимым.

Если изобразим кривую $y = \frac{\operatorname{th} x}{x}$ или рассмотрим числовые значения данной на стр. 462 таблицы, то увидим, что для данной глубины h скорость волн все время возрастает с длиной волны от 0 до асимптотического значения (7).

¹⁾ Green, Note on the Motion of Waves in Canals, Camb. Trans. т. VII (1889) [Papers, стр. 279].

Рассмотрим для определенности цепь простых гармонических волн, распространяющихся в положительном направлении, т. е. возьмем нижний знак в формулах (1) и (3). Из сравнения с формулой (7) § 228 можно убедиться, что η_1 найдется, если положить $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ и отнять $\frac{1}{2}\pi$ от значения kx ¹⁾; η_2 найдется легко, если положить $\varepsilon = 0$. Этим самым доказываются условия, которые мы наложили выше на обе системы стоячих волн; так же мы можем написать сразу соответствующие изменения остальных формул предыдущего параграфа.

Таким способом мы найдем для компонент смещения частицы

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - x_2 = a \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kx - \sigma t), \\ y &= y_1 - y_2 = a \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \sin(kx - \sigma t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Это показывает, что каждая частица имеет эллиптическое колебание, период которого $(\frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\lambda}{c})$ равен времени, в течение которого возмущение передвигается на длину волны. Горизонтальные и вертикальные полуоси эллиптических орбит будут

$$a \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh} \quad \text{и} \quad a \frac{\operatorname{sh} k(y+h)}{\operatorname{sh} kh}.$$

Обе убывают от поверхности до дна ($y = -h$); на дне второе выражение обращается в нуль. Расстояние между фокусами для всех эллипсов одинаково и равно $n \operatorname{cosech} kh$. Сравнивая уравнения (8) и (3), легко видеть, что частица, находящаяся на поверхности, движется в направлении распространения волны, когда она находится на гребне, и в противоположном направлении, когда она находится во впадине²⁾.

Если глубина превосходит половину длины волны, то e^{-kh} будет очень малым, и формулы (8) сводятся к

$$\left. \begin{aligned} x &= ae^{ky} \cos(kx - \sigma t), \\ y &= ae^{ky} \sin(kx - \sigma t), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

так что каждая частица описывает окружность с постоянной угловой скоростью $\sigma = (\frac{2\pi g}{\lambda})^{1/2}$ *). Радиусы этих кругов равны ae^{ky} и, следовательно, очень быстро убывают с глубиной.

В первой из следующих таблиц второй столбец дает значения $\operatorname{sech} kh$, соответствующие различным значениям отношения $\frac{h}{\lambda}$. Эти зна-

¹⁾ Это означает не что иное, как смещение начальной точки, от которой отсчитывается x .

²⁾ Результаты § 228—229 для случая конечной глубины в существенном принадлежат A. Ig. Tides and Waves, § 160 (1845).

*) Green. см. выше.

чения выражают отношение горизонтального движения на дне к горизонтальному движению на поверхности. Третий столбец дает отношение вертикального диаметра к горизонтальному для эллиптической орбиты частицы на поверхности. Четвертый и пятый столбцы дают отношения скорости волны к скорости волн той же длины, но на бесконечной глубине, а также к скорости длинных волн при действительных глубинах.

Таблицы абсолютных значений периодов и скоростей волн (вторая и третья из нижеследующих таблиц) заимствованы из сочинения Эри¹⁾. Значение g , взятое им, равно $9,802 \text{ м/сек}^2$.

Возможность прогрессивных волн, движущихся вперед без изменения формы, ограничена теоретически случаем постоянной глубины; числовые результаты показывают, однако, что изменение глубины не оказывает заметного влияния, когда глубина всюду (приблизительно) превосходит половину длины волны.

$\frac{h}{\lambda}$	$\operatorname{sech} kh$	$\operatorname{th} kh$	$\frac{c}{V_{gk^{-1}}}$	$\frac{c}{V_{gh}}$
0,00	1,000	0,000	0,000	1,000
0,01	0,998	0,063	0,250	0,999
0,02	0,992	0,125	0,354	0,997
0,03	0,983	0,186	0,432	0,994
0,04	0,969	0,246	0,496	0,990
0,05	0,953	0,304	0,552	0,984
0,06	0,933	0,360	0,600	0,977
0,07	0,911	0,413	0,643	0,970
0,08	0,886	0,464	0,681	0,961
0,09	0,859	0,512	0,715	0,951
0,10	0,831	0,557	0,746	0,941
0,20	0,527	0,850	0,922	0,823
0,30	0,297	0,955	0,977	0,712
0,40	0,161	0,987	0,993	0,627
0,50	0,086	0,996	0,998	0,563
0,60	0,046	0,999	0,999	0,515
0,70	0,025	1,000	1,000	0,477
0,80	0,013	1,000	1,000	0,446
0,90	0,007	1,000	1,000	0,421
1,00	0,004	1,000	1,000	0,399
∞	0,000	1,000	1,000	0,000

¹⁾ Airy, Tides and Waves, § 169, 170.

Для следующих таблиц отметим, что один английский фут равен 0,30479 м.

Глубина воды в английских футах	Длина волны в английских футах				
	1	10	100	1000	10 000
Период в секундах					
1	0,442	1,873	17,645	176,33	1763,3
10	0,442	1,398	5,923	55,80	557,62
100	0,442	1,398	4,420	18,73	176,45
1000	0,442	1,398	4,420	13,98	59,23
10 000	0,442	1,398	4,420	13,98	44,20

Глубина воды в английских футах	Длина волны в английских футах					
	1	10	100	1000	10 000	∞
Скорость волны в английских футах и секундах						
1	2,262	5,399	5,667	5,671	5,671	5,671
10	2,262	7,154	16,88	17,92	17,93	17,93
100	2,262	7,154	22,62	53,39	56,67	56,71
1000	2,262	7,154	22,62	71,54	168,8	179,3
10 000	2,262	7,154	22,62	71,54	226,2	567,1

Наконец, заметим еще, что теория прогрессивных волн может быть получена непосредственно, не опираясь на теорию стоячих волн, если вместо формулы (1) § 228 принять сразу

$$\varphi = Pe^{i(\sigma t - kx)}, \quad (10)$$

где P должно удовлетворять тем же условиям, как раньше. Легко получить в действительной форме

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t), \quad (11)$$

$$\varphi = \frac{ga}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k(y+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx - \sigma t), \quad (12)$$

где σ имеет прежнее значение. Из уравнения (12) без труда получаются все прежние результаты о движении одной частицы.

§ 230. Энергию системы стоячих волн простого гармонического типа легко найти. Если мы вообразим две вертикальные плоскости, параллельные плоскости xy , на расстоянии единицы длины друг от друга, то потенциальная энергия жидкости, заключенной между этими плоскостями, на длине волны будет равна

$$\frac{1}{2} g \rho \int_0^{\lambda} \eta^2 dx.$$

Подставив значение η из (7) § 228, получим

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \sin^2(\sigma t + \varepsilon). \quad (1)$$

Кинетическая же энергия согласно (1) § 61 равна

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{\lambda} \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} dx.$$

Сделав подстановку из (8) § 228 и принимая во внимание соотношение между σ и k , получим

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda \cos^2(\sigma t + \varepsilon). \quad (2)$$

Полная энергия, будучи равной сумме (1) и (2), имеет постоянное значение $\frac{1}{4} g \rho a^2 \lambda$. Это можно выразить и так, что полная энергия на единицу поверхности воды равна $\frac{1}{4} g \rho a^2$.

Подобное вычисление можно провести и для прогрессивных волн или же можно применить более общий метод, изложенный в § 174. При помощи каждого из этих методов мы найдем, что в каждый момент времени энергия есть наполовину потенциальная и наполовину кинетическая и что их полная сумма на единицу площади равна $\frac{1}{2} g \rho a^2$. Другими словами, энергия системы прогрессивных волн амплитуды a равна работе, которая необходима, чтобы поднять слой жидкости толщины a на высоту $\frac{1}{2} a$.

§ 231. Рассмотрим колебания поверхности раздела двух расположенных друг над другом жидкостей, которые в остальных направлениях безграничны.

Если мы возьмем начало на среднем уровне поверхности раздела, то можем написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= G e^{ky} \cos kx e^{i\omega t}, \\ \varphi' &= C' e^{-ky} \cos kx e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где штрихи относятся к верхней жидкости. Эти выражения удовлетворяют уравнению (1) § 227 и обращаются в нуль соответственно для $y = -\infty$ и для $y = +\infty$. Написав уравнение возмущенной поверхности в виде

$$\eta = a \cos kx e^{i\omega t}, \quad (2)$$

мы должны иметь согласно (6) § 227

$$-kC = kC' = i\sigma a. \quad (3)$$

Из формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \\ \frac{p'}{\rho'} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gy \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

получаем условие для непрерывности давления на поверхности раздела:

$$\varrho(i\sigma C - ga) = \varrho'(i\sigma C' - ga). \quad (5)$$

Подставив значения C и C' из (3), будем иметь

$$\sigma^2 = gk \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'}. \quad (6)$$

Скорость распространения волн длины $\frac{2\pi}{k}$ определяется, следовательно, формулой

$$C^2 = \frac{g}{k} \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'}. \quad (7)$$

Присутствие верхней жидкости вызывает, таким образом, уменьшение скорости распространения волн произвольной длины в отношении $\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2}$, где s обозначает отношение плотности верхней жидкости к плотности нижней. Это уменьшение скорости имеет двоякое основание: потенциальная энергия деформации поверхности раздела уменьшается в отношении $1-s$, в то время как инерция возрастает в отношении $1+s$ ¹⁾. В качестве числового примера можно указать, что для слоя воды, лежащего над ртутью ($s^{-1} = 13,6$), скорость волн уменьшается в отношении 0,929.

Необходимо заметить, что в этой и других подобных задачах на поверхности раздела имеет место разрывность движения. Нормальная компонента $(-\frac{\partial \phi}{\partial y})$ скорости, конечно, непрерывна, но тангенциальная компонента $(-\frac{\partial \phi}{\partial x})$ меняет свой знак, когда пересекается поверхность раздела; другими словами, мы имеем перед собой (§ 151) вихревой слой. Это представляет прекрасный пример для сделанного в § 17 замечания, что свободные колебания жидкости переменной плотности не должны быть обязательно свободными от вихрей.

¹⁾ Это объясняет, почему собственные периоды колебаний поверхности раздела двух жидкостей приблизительно одинаковой плотности по сравнению с периодами колебаний свободной поверхности, простирающейся аналогично, очень длинны. Этот факт был замечен Веньямином Франклином для масла и воды, см. письмо, относящееся к 1762 г. [Complete Works, London, II, 142].

Вблизи устья некоторых норвежских фьордов находится слой пресной воды над соленой водой. Вследствие сравнительно небольшой потенциальной энергии, которая обусловлена данной деформацией поверхности раздела, на этой граничной поверхности легко развиваются волны значительной высоты. Этой причиной объясняют ненормальное сопротивление, которое иногда испытывают суда в этих водах. См. E k m a n, On Dead-Water, Scientific Results of the Norwegian North Polar Expedition, часть XV, Christiania, 1904. Укажем также на работу автора On Waves due to a Travelling Disturbance with an application to Waves in Superposed Fluids, Phil. Mag. (6), XXXI, 3 (1916).

В действительности, если бы разрыв мог когда либо образоваться, он будет немедленно уничтожаться вязкостью, а вихревая пленка будет замещаться вихревым слоем¹).

Если $\varrho < \varrho'$, то значение σ будет мнимым. Невозмущенная конфигурация равновесия тогда неустойчива.

Если обе жидкости заключены между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями

$$y = -h, \quad y = h',$$

то вместо (1) мы примем

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= C \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= C' \operatorname{ch} k(y-h') \cos kx e^{i\sigma t}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

так как эти выражения дают на этих плоскостях соответственно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует

$$-kC \operatorname{sh} kh = kC' \operatorname{sh} kh' = i\sigma a. \quad (9)$$

Из непрерывности давления следует

$$\varrho(i\sigma C \operatorname{ch} kh - ga) = \varrho'(i\sigma C' \operatorname{ch} kh' - ga). \quad (10)$$

Исключая C и C' , получим

$$\sigma^2 = \frac{gk(\varrho - \varrho')}{\varrho \operatorname{cth} kh + \varrho' \operatorname{cth} kh'}. \quad (11)$$

Когда kh и kh' оба очень велики, то это выражение приводится к виду (6). Когда kh' велико, а kh мало, то будем иметь приближенно

$$C^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) gh. \quad (12)$$

Главное влияние наличия верхней жидкости заключается в уменьшении потенциальной энергии деформации. Кинетическая энергия верхней жидкости будет малой по сравнению с кинетической энергией нижней жидкости.

Когда верхняя поверхность верхней жидкости является свободной, то мы можем написать

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= C \operatorname{ch} k(y+h) \cos kx e^{i\sigma t}, \\ \varphi' &= (A \operatorname{ch} ky + B \operatorname{sh} ky) \cos kx e^{i\sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Кинематическое условие тогда будет иметь вид

$$-kC \operatorname{sh} kh = -B = i\sigma a. \quad (14)$$

Условие непрерывности давления на пограничной поверхности будет

$$\varrho(i\sigma C \operatorname{ch} kh - ga) = \varrho'(i\sigma A - ga). \quad (15)$$

Условие постоянства давления на свободной поверхности дается формулой (8) § 227, если только после дифференцирования положить $y = k'$. Таким образом мы получаем

$$\sigma^2 (A \operatorname{ch} kh' + B \operatorname{sh} kh') = gk (A \operatorname{sh} kh' + B \operatorname{ch} kh'). \quad (16)$$

¹) Решение с учетом вязкости было дано H a g g i s o n, Proc. Lond. Math. Soc. (2), VI, 396 (1908).

Исключив A , B , C из (14), (15), (16), получим

$$\sigma^4 (\varrho \operatorname{cth} kh \operatorname{cth} kh' + \varrho') - \sigma^2 \varrho (\operatorname{cth} kh' + \operatorname{cth} kh) gk + (\varrho - \varrho') g^2 k^2 = 0. \quad (17)$$

Так как это уравнение является квадратным относительно σ^2 , то для каждого данного периода $\left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)$ имеются две возможные системы волн. Этого и следовало ожидать, так как система имеет при заданной длине волны две степени свободы, так что возможны два независимые друг от друга вида колебаний около положения равновесия. Для предельного случая, например, когда $\frac{\varrho'}{\varrho}$ мало, один вид состоит главным образом в колебании верхней жидкости, которое происходит почти таким образом, как если бы нижняя жидкость отвердела; другое колебание можно рассматривать как колебание нижней жидкости, которое происходит почти таким образом, как если бы поверхность раздела была свободной поверхностью.

Для отношения амплитуды на верхней свободной пограничной поверхности к амплитуде на поверхности раздела получаем

$$\frac{kc^2}{kc^2 \operatorname{ch} kh' - g \operatorname{sh} kh'}. \quad (18)$$

Из различных возможных частных случаев наиболее интересный тот, при котором kh велико, т. е. при котором глубина нижней жидкости по сравнению с длиной волны велика. Если положить $\operatorname{cth} kh = 1$, то увидим, что один корень уравнения (17) будет равен

$$\sigma^2 = gk, \quad (19)$$

т. е. в точности тому же, как в случае одной жидкости бесконечной глубины, и что отношение амплитуд будет равно e^{kh} . Это есть ни более ни менее, как только частный случай общей установленной в конце § 233 теоремы; действительно, можно показать, что на поверхности раздела обеих жидкостей в этом случае скольжение уже не будет иметь места.

Второй корень уравнения (17) при том же самом предположении будет равен

$$\sigma^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho \operatorname{cth} kh' + \varrho'} gk, \quad (20)$$

и для него отношение (18) получает следующее значение:

$$-\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - 1\right) e^{-kh}. \quad (21)$$

Если в формулах (20) и (21) положить $kh' = \infty$, то придем к одному из прежних случаев. Если же, с другой стороны, будем считать kh' малым, то получим

$$\frac{\sigma^2}{k^2} = \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho}\right) gh, \quad (22)$$

и отношение амплитуд будет равно

$$-\left(\frac{\varrho}{\varrho'} - 1\right). \quad (23)$$

Эти задачи впервые были исследованы Стоксом ¹⁾. Случай произвольно большого числа лежащих друг под другом слоев различной плотности был рассмотрен Веббом ²⁾ и Гринхиллем ³⁾.

§ 232. Предположим, что две жидкости с плотностями ϱ , ϱ' движутся друг над другом со скоростями U , U' , параллельными оси x , причем поверхность раздела (в невозмущенном состоянии) является плоской и горизонтальной. Это есть фактически задача малых колебаний около состояния установившегося движения.

Положим

$$\varphi = -Ux + \varphi_1, \quad \varphi' = -U'x + \varphi'_1, \quad (1)$$

где φ_1 , φ'_1 предполагаем малыми.

Скорость каждой из жидкостей на поверхности раздела может рассматриваться как составленная из скорости самой поверхности и из скорости жидкости по отношению к поверхности. Если обозначить через η ординату возмущенной поверхности, то мы найдем при рассмотрении вертикальных компонент уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U' \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2) \text{ } ^4)$$

в качестве кинематических условий, которые выполняются для $y = 0$.

Уравнение давления для нижней жидкости будет

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(U - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} - gy + \dots$$

или

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - gy + \dots, \quad (3)$$

причем мы опустили все члены, которые являются либо членами второго порядка, либо не имеют значения для рассматриваемого вопроса. Таким образом условие непрерывности давления имеет следующий вид:

$$\varrho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - g\eta \right) = \varrho' \left(\frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} + U' \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - g\eta \right). \quad (4)$$

Мы уже видели при различных случаях, что при колебаниях около стационарного движения не обязательно должна иметь место одинаковость фаз внутри всей системы, а в рассматриваемом случае

¹⁾ Stokes, On the Theory of Oscillatory Waves, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers, I, 212].

²⁾ Webb, Math. Tripos. Papers, 1884.

³⁾ Greenhill, Wave Motion in Hydrodynamics, Amer. Journ. of Math., IX (1887).

⁴⁾ Эти уравнения представляют частные случаи общего пограничного условия (3) § 9, как легко заметить, если положить $F = y - \eta$ и пренебречь малыми членами второго порядка.

при подобном допущении невозможно удовлетворить наличным условиям. Предполагая, что глубины обеих жидкостей неограничены, мы должны положить

$$\varphi_1 = Ce^{hy+i(\sigma t-kx)}, \\ \varphi'_1 = C'e^{-hy+i(\sigma t-kx)}, \quad (5)$$

и

$$\eta = ae^{(\sigma t-kx)}. \quad (6)$$

Условия (2) дают тогда

$$\left. \begin{array}{l} i(\sigma - kU)a = -kC, \\ i(\sigma - kU')a = -kC' \end{array} \right\} \quad (7)$$

в то время как из (4) следует

$$\varrho \{i(\sigma - kU)C - ga\} = \varrho' \{i(\sigma - kU')C' - ga\}. \quad (8)$$

Отсюда следует

$$\varrho(\sigma - kU)^2 + \varrho'(\sigma - kU')^2 = gk(\varrho - \varrho'), \quad (9)$$

или

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{\varrho U + \varrho' U'}{\varrho + \varrho'} \pm \left\{ \frac{g}{k} \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} - \frac{\varrho \varrho'}{(\varrho + \varrho')^2} (U - U')^2 \right\}^{1/2}. \quad (10)$$

Первый член в правой части этого уравнения можно назвать средней скоростью обоих течений. Относительно этой средней скорости волны обладают скоростями распространения $\pm c$, которые даны формулой

$$c^2 = C_0^2 - \frac{\varrho \varrho'}{(\varrho + \varrho')^2} (U - U')^2, \quad (11)$$

где C_0 обозначает скорость волны при отсутствии течений (§ 231). Необходимо отметить, однако, что значения σ , данные формулой (9), будут мнимыми, когда

$$(U - U')^2 > \frac{g}{k} \frac{\varrho^2 - \varrho'^2}{\varrho \varrho'}. \quad (12)$$

Таким образом общая граница при достаточно малых длинах волны является неустойчивой. Это показывает, что, при отсутствии других влияний, даже при небольшом дуновении ветра на поверхности воды будет появляться рябь. В дальнейшем мы дадим более полное исследование этой проблемы, при котором будут приняты во внимание капиллярные силы, влияющие в сторону устойчивости. Если $\varrho = \varrho'$ или если $g = 0$, то плоская форма поверхности (согласно нашему теперешнему рассуждению) будет неустойчивой для всех длин волны. Это иллюстрирует положение, высказанное в § 79, относительно неустойчивости поверхностей разрыва¹⁾.

¹⁾ Эта неустойчивость была впервые замечена Гельмгольцем, см. примечание на стр. 38.

Случай $\varrho = \varrho'$ при $U = U'$ представляет интерес, потому что он объясняет, как развиваются паруса и флаги¹⁾. Удобнее упростить задачу, положив $U = U' = 0$; произвольная общая скорость в случае необходимости может быть наложена потом. При этих предположениях уравнение (8) сводится к уравнению $\sigma^2 = 0$. Благодаря двойному корню решение нужно дополнить, согласно обыкновенным методам решения дифференциальных уравнений, излагаемым в учебниках. Таким путем мы получаем два независимых решения

$$\eta = ae^{ikx}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1' = 0, \quad (13)$$

и

$$\eta = ate^{ikx}, \quad \varphi_1 = -\frac{a}{k} e^{ky} e^{ikx}, \quad \varphi_1' = \frac{a}{k} e^{-ky} e^{ikx}. \quad (14)$$

Первое решение представляет состояние равновесия, второе решение дает систему стационарных волн, амплитуда которых растет пропорционально времени. При таком виде проблемы сначала не имеется физической поверхности раздела, но если произвести искусственно небольшой разрыв движения, например, подействовать импульсом на тонкую мембрану, мысленно затем опять как жидкую мембрану, то разрыв сохранится, и высота желобков, как мы видели, будет непрерывно возрастать.

Представляет интерес применение того же метода к случаю струи толщины $2b$, протекающей внутри покоящейся жидкости той же плотности²⁾. Выбирая начало в средней плоскости, мы принимаем для возмущенной струи $\varphi = -Ux + \varphi_0$, а для жидкости с обеих сторон $\varphi = \varphi_1$ для $y > b$ и $\varphi = \varphi_2$ для $y < -b$. Обозначим смещения по нормали к обеим поверхностям $y = b$ и $y = -b$ соответственно через η_1 и η_2 . В таком случае подойдут следующие предположения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 e^{-ky} e^{i(\sigma t - kx)}, & \varphi_2 &= A_2 e^{ky} e^{i(\sigma t - kx)}, \\ \eta_1 &= C_1 e^{i(\sigma t - kx)}, & \eta_2 &= C_2 e^{i(\sigma t - kx)}, \\ \varphi_0 &= (A_0 \operatorname{ch} ky + B_0 \operatorname{sh} ky) e^{i(\sigma t - kx)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Очевидно, имеются два типа возмущений: при одном из них $\eta_1 = \eta_2$, а при втором $\eta_1 = -\eta_2$. В первом случае мы будем иметь $C_1 = C_2$, $A_0 = 0$, $A_2 = -A_1$. Кинематические условия (2) на поверхности $y = b$ тогда дают

$$i\sigma C_1 = kA_1 e^{-kh}, \quad i(\sigma - kU) C_1 = -kB_0 \operatorname{ch} kh, \quad (16)$$

тогда как, если опустить влияние силы тяжести, непрерывность давления требует выполнения соотношения

$$(\sigma - kU) B_0 \operatorname{sh} kh = \sigma A_1 e^{-kh}. \quad (17)$$

Отсюда

$$(\sigma - kU)^2 \operatorname{tgh} kh + \sigma^2 = 0. \quad (18)$$

Если толщина $2b$ будет мала в сравнении с длиной волны возмущения, то приближенно будем иметь

$$\sigma = \pm ikU \sqrt{kh}, \quad (19)$$

что указывает на сильно возрастающую неустойчивость, как это в действительности часто можно наблюдать на примере струйки дыма от папиросы.

¹⁾ Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), X, 4 (1879) [Papers, I, 361].

²⁾ Rayleigh, см. примечание выше.

В симметричном случае ($\eta_1 = -\eta_2$) вместо соотношения (18) будет иметь место соотношение

$$(\sigma - kU)^2 \operatorname{ctgh} kh + \sigma^2 = 0. \quad (20)$$

§ 233. Теорию прогрессивных волн можно также изложить в очень сжатой форме при помощи метода § 175¹⁾.

Обозначая через φ , ψ функцию скоростей и функцию тока, после того как задача сведена к установившемуся движению, положим

$$\frac{\varphi + i\psi}{c} = -(x + iy) +iae^{ik(x+iy)} + i\beta e^{-ik(x+iy)},$$

откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x - (ae^{-ky} - \beta e^{ky}) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + (ae^{-ky} + \beta e^{ky}) \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы представляют равномерное течение со скоростью c , на которое наложено движение, периодическое относительно x . Мы предполагаем, что ka и $k\beta$ суть величины малые, другими словами, амплитуда возмущения мала сравнительно с длиной волны.

Профиль свободной поверхности должен быть линией тока. Пусть для нее будет $\psi = 0$. Ее вид определяется тогда формулой (1), и в первом приближении мы будем иметь, следовательно,

$$y = (a + \beta) \cos kx. \quad (2)$$

Это уравнение показывает, что начало лежит на среднем уровне свободной поверхности. Далее, на дне ($y = -h$) мы также должны иметь $\psi = \text{const}$; это требует, чтобы

$$\alpha e^{kh} + \beta e^{-kh} = 0.$$

Уравнения (1) в таком случае представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + C \operatorname{ch} k(y + h) \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + C \operatorname{sh} k(y + h) \cos kx. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формула же для давления будет

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const} - gy - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} = \\ &= \text{const} - gy - \frac{c^2}{2} (1 - 2kC \operatorname{ch} k(y + h) \cos kx), \end{aligned}$$

если пренебречь $k^2 C^2$. Так как для линии тока $\psi = 0$ приближенно имеем

$$y = C \operatorname{sh} kh \cos kx, \quad (4)$$

¹⁾ Rayleigh, см. примечание на стр. 328.

то вдоль этой линии будет

$$\frac{p}{e} = \text{const} + (kc^2 \operatorname{ctgh} kh - g) y.$$

Условие для свободной поверхности таким образом будет выполнено, если

$$c^2 = gh \frac{\operatorname{tgh} kh}{kh}. \quad (5)$$

Это соотношение определяет длину волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ возможных стационарных волн в потоке данной постоянной глубины h и данной скорости c . Легко видеть, что значение kh будет действительно или мнимо, смотря по тому, будет ли c меньше или больше чем $(gh)^{1/2}$.

Если мы сообщим всему потоку скорость c параллельно оси x , то получим прогрессивные волны на спокойной воде; уравнение (5) дает тогда формулу для скорости волны, как в § 229.

Если отношение глубины к длине волны достаточно велико, то формулы (1) при небольшой погрешности принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\varphi}{c} = -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} = -y + \beta e^{ky} \cos kx \end{array} \right\} \quad (6)$$

и дают

$$\frac{p}{e} = \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2} \{1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx + k^2 \beta^2 e^{2ky}\}. \quad (7)$$

Пренебрегая $k^2 \beta^2$, последнее уравнение можно написать в виде

$$\frac{p}{e} = \text{const.} + (kc^2 - g) y + kc\psi. \quad (8)$$

Отсюда, если

$$c^2 = \frac{g}{k}, \quad (9)$$

давление будет постоянным не только на верхней поверхности, но также и вдоль каждой линии тока $\psi = \text{const}$ ¹). Это представляет довольно важную теорему; в самом деле она показывает, что решение, данное с помощью выражений (6) и (9), можно также применить к произвольному числу жидкостей различных плотностей, расположенных в горизонтальных слоях друг над другом, при условии, что верхняя ограничивающая поверхность есть свободная поверхность, а общая глубина бесконечна. Так как толщина слоев ничем не ограничивается, то решение пригодно и для неоднородной, неожидаемой жидкости, плотность которой непрерывно меняется с глубиной; ср. § 235.

¹) Необходимо заметить, что это заключение, впервые высказанное Пуассоном (ср. цитату стр. 481), ограничивается случаем бесконечной глубины.

Чтобы найти скорость распространения волн на горизонтальной поверхности раздела двух в остальном неограниченных жидкостей, мы полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx, \\ \frac{\psi'}{c} &= -y + \beta e^{-ky} \cos kx, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где штрихи относятся к верхней жидкости. При этих допущениях условие для безвихревого движения удовлетворяется: $\Delta\psi = 0$, и они дают постоянную скорость с на большом расстоянии ниже и выше поверхности раздела, на которой $\psi - \psi' = 0$, и, следовательно, приближенно $y = \beta \cos kx$.

Уравнения давления будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2} (1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx), \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - gy - \frac{c^2}{2} (1 + 2k\beta e^{-ky} \cos kx), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и на поверхности раздела с обычным приближением мы получим из них

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - (g - kc^2) y, \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - (g + kc^2) y. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как на этой поверхности $p = p'$, то получаем, как в § 231,

$$c^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}. \quad (13)$$

§ 234. В качестве следующего примера применения данного метода рассмотрим два течения, расположенные друг над другом, которые мы уже изучали прямым методом в § 232.

Предположим, что жидкости в вертикальном направлении не ограничены, и допустим

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -U \{y - \beta e^{ky} \cos kx\}, \\ \psi' &= -U' \{y - \beta e^{-ky} \cos kx\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

соответственно для нижней и верхней жидкости. Начало берем на среднем уровне поверхности раздела, причем последнюю мы считаем стационарной и определяем уравнением

$$y = \beta \cos kx. \quad (2)$$

Уравнения давления дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} - gy - \frac{1}{2} U^2 (1 - 2k\beta e^{ky} \cos kx), \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - gy - \frac{1}{2} U'^2 (1 + 2k\beta e^{-ky} \cos kx); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

отсюда следует для поверхности раздела

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \text{const.} + (kU^2 - g)y, \\ \frac{p'}{\rho'} &= \text{const.} - (kU'^2 + g)y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как на этой поверхности должно быть $p = p'$, то будем иметь

$$\rho U^2 + \rho' U'^2 = \frac{g}{k} (\rho - \rho'). \quad (5)$$

Это есть условие для стационарных волн на поверхности раздела обоих течений U и U' . Оно может быть написано в виде

$$\left(\frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \right)^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} - \frac{\rho \rho'}{(\rho + \rho')^2} (U - U')^2, \quad (6)$$

эквивалентность которого с (10) § 232 легко заметить.

Если оба течения будут ограничены неподвижными горизонтальными плоскостями

$$y = -h, \quad y = h,$$

то мы принимаем

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -U \left\{ y - \beta \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh kh} \cos kx, \right. \\ \psi' &= -U' \left\{ y + \beta \frac{\sinh k(y-h')}{\sinh kh'} \cos kx \right. \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

В качестве условия для стационарных волн на поверхности раздела тогда получается

$$\rho U^2 \operatorname{ctgh} kh + \rho' U'^2 \operatorname{ctgh} kh' = \frac{g}{k} (\rho - \rho'). \quad (8)$$

§ 235. Рассмотрим кратко теорию волн в *неоднородной* жидкости ради сравнения ее с случаем однородной жидкости.

В состоянии равновесия значение плотности ρ_0 должно зависеть только от вертикальной координаты y .

Поэтому мы полагаем

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (1)$$

где p_0 обозначает статическое давление; уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial y} - g\rho, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

¹⁾ Greenhill, см. выше, стр. 467.

принимают тогда вид

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{\partial p'}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= - \frac{\partial p'}{\partial y} = g\rho', \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

если опустить малые величины второго порядка. Так как жидкость несжимаема, то уравнение неразрывности сохраняет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

и мы можем написать

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Исключая p' и ρ' , можно найти ¹⁾

$$\Delta \ddot{\psi} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} = 0. \quad (8)$$

На свободной поверхности должно иметь место

$$\frac{Dp}{Dt} = 0.$$

или

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -v \frac{\partial p_0}{\partial y} = g\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9)$$

Отсюда и из (4) следует, что на этой поверхности должно быть

$$\frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial y} = g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Чтобы рассмотреть волновое движение, положим

$$\psi \text{ пропорционально } e^{i(\sigma t - kx)}. \quad (11)$$

Уравнение (8) принимает тогда вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{gk^2}{\sigma^2} \psi \right) = 0, \quad (12)$$

а условие на поверхности будет

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{gk^2}{\sigma^2} \psi = 0. \quad (13)$$

Эти уравнения при всяком вертикальном распределении плотности будут удовлетворены допущением, что ψ пропорционально e^{ky} и при этом

$$\sigma^2 = gk. \quad (14)$$

Тогда для жидкости с бесконечной глубиной соотношение между длиной волны и периодом будет тем же самым, как и в однородной жидкости (ср. § 229), и само движение будет безвихревым.

¹⁾ Ср. Love, Wave Motion in a Heterogeneous Heavy Liquid, Proc. Lond. Math. Soc., XXII, 307 (1891).

Для дальнейших исследований необходимо сделать некоторые предположения относительно зависимости между φ_0 и y . Простейшее состоит в том, что

$$\varphi_0 \text{ пропорционально } e^{-\beta y}. \quad (15)$$

В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial k^2}{\sigma^2} \psi \right) = 0. \quad (16)$$

Решение его будет

$$\psi = (Ae^{\lambda_1 y} + Be^{\lambda_2 y}) e^{i(\sigma t - kx)}, \quad (17)$$

где λ_1, λ_2 обозначают корни уравнения

$$\lambda^2 - \beta \lambda + \left(\frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) k^2 = 0. \quad (18)$$

Мы вначале применим это к колебаниям жидкости, наполняющей замкнутый прямоугольный сосуд ¹⁾. Величина k может быть произвольным кратным от $\frac{\pi}{l}$, где l обозначает длину. Если написать уравнения для горизонтальных границ

$$y = 0, \quad y = h,$$

то условие $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ дает

$$A + B = 0, \quad Ae^{\lambda_1 h} + Be^{\lambda_2 h} = 0, \quad (19)$$

откуда

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)h} = 1 \text{ или } \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2is\pi}{h} \quad (20)$$

где s есть целое число. Отсюда из (18) следует

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \beta + \frac{is\pi}{h}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \beta - \frac{is\pi}{h} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) k^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4} \beta^2 + \frac{s^2 \pi^2}{h^2}. \quad (22)$$

Отсюда мы замечаем, что σ будет действительным или мнимым, т. е. конфигурация равновесия будет устойчивой или неустойчивой, смотря по тому, будет ли β положительно или отрицательно, или, что то же самое, смотря по тому, уменьшается или увеличивается плотность снизу вверх ²⁾.

Случай, когда жидкость (глубины h) имеет свободную поверхность, может служить в качестве иллюстрации теории тепловых сейш в озерах ³⁾. Предполагая корни уравнения (18) комплексными, скажем

$$\lambda = \frac{1}{2} \beta \pm im. \quad (23)$$

¹⁾ Rayleigh, Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Liquid of Variable Density, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIV, 170 [Papers, II, 200]. Необходимо также указать на работу автора On Atmospheric Oscillation, Proc. Roy. Soc. LXXXIV, 566, (571) (1910), где был исследован другой закон плотности.

²⁾ Волны в жидкости конечной глубины были рассмотрены Лявом, см. примечание выше; см. также Burgers, On the Small Wave-Motions of a Heterogeneous Fluid under Gravity, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XX, 392 (1889).

³⁾ Исследовались Wedderburn, Trans. R. S. Edin., XI.VII, 619 (1910) и XLVIII (1912).

где

$$m^2 = \left(\frac{g\beta}{\sigma^2} - 1 \right) k^2 - \frac{\beta^2}{4}; \quad (24)$$

мы будем иметь

$$\psi = Ce^{1/2\beta y} \sin my, \quad (25)$$

причем начало взято на дне. Условие (13) на поверхности дает

$$\frac{1}{2} \beta \sin mh + m \cos mh = \frac{gk^2}{\sigma^2} \sin mh. \quad (26)$$

Пользуясь равенством (24), последнее можно представить в виде

$$\operatorname{tg} mh = \beta h - \frac{mh}{m^2 h^2 + k^2 h^2 - \frac{1}{4} \beta^2 h^2}, \quad (27)$$

откуда можно определить значения mh . Они могут быть получены графически из пересечений кривых

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \frac{\mu x}{x^2 a^2}, \quad (28)$$

где $\mu = \beta h$, $a^2 = k^2 h^2 - 1/4 \beta^2 h^2$. Интерес представляет только тот случай, когда βh будет мало. В этом случае приближенно мы имеем $mh = s\pi$ и, следовательно,

$$\sigma^2 = g\beta \frac{k^2 h^2}{s^2 \pi^2 + k^2 h^2}. \quad (29)$$

Последнее соотношение будет совпадать с (22), если пренебречь квадратом от βh . На самом деле, из (25) вытекает, что вертикальное движение на свободной поверхности будет очень слабым. Наибольшее вертикальное возмущение будет на уровне $y = (s - 1/2)\pi$.

В случае, когда корни (18) будут действительными, можно будет установить только небольшую поправку к формуле $\sigma^2 = gk \operatorname{tgh} kh$, которая имеет место для однородной жидкости.

§ 236. Исследования § 227—234 касаются частного типа волн, когда профиль просто гармонический и волны простираются в бесконечность по обоим направлениям. Но так как все наши уравнения (до тех пор, пока мы ограничиваемся первым приближением) являются линейными, то мы можем, согласно теореме Фурье, наложением получить решение, обусловленное произвольными начальными условиями. Так как результирующее движение, вообще говоря, будет составлено из систем волн всех возможных длин, распространяющихся в том и в другом направлении, причем всякая отдельная волна распространяется со скоростью, свойственной ее длине, то форма свободной поверхности будет постоянно меняться. Единственное исключение представляет случай, когда длина волны каждой системы заметной амплитуды велика сравнительно с глубиной жидкости. Скорость распространения, именно \sqrt{gh} , не зависит тогда от длины волны, так что в случае волн, которые распространяются только в одном направлении, профиль волны во время своего движения вперед остается неизменным (§ 170).

Мы исследуем сейчас влияние местного возмущения поверхности для случая бесконечной глубины; однако сначала следует ввести очень важное понятие „групповой скорости“, которое имеет применение не только для волн жидкости, но также и для всякого волнового движения, при котором скорость распространения простой гармонической цепи меняется с длиной волны.

Часто замечали, что в случае, когда изолированная группа волн с приблизительно одинаковой длиной распространяется на сравнительно глубокой воде, скорость группы как целого меньше, чем скорость отдельных волн, ее составляющих. Если наблюдать отдельную волну, то можно заметить, что она перемещается внутри группы, постепенно уменьшая свою высоту по мере приближения ее к передней стороне группы, тогда как ее прежние места в группе занимают теперь последовательно другие волны, которые идут от задней стороны ¹⁾ вперед.

Простейшее аналитическое представление подобной группы можно получить наложением двух систем волн с одинаковой амплитудой и с приблизительно, но не вполне, равной длиной волны. Соответствующее уравнение свободной поверхности будет иметь вид

$$\eta = a \sin(kx - \sigma t) + a \sin(k'x - \sigma' t) = 2a \cos\left\{\frac{1}{2}(k - k')x - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma')t\right\} \sin\left\{\frac{1}{2}(k + k')x - \frac{1}{2}(\sigma + \sigma')t\right\}. \quad (1)$$

Если k и k' приблизительно равны, то в этом выражении косинус меняется очень медленно вместе с x , так что профили отдельных волн в каждый момент времени приближенно имеют вид синусоидальных кривых, амплитуды которых колеблются между значениями 0 и $2a$. Поверхность представляет, таким образом, ряд групп волн, которые отделены равными полосами почти спокойной воды. Движение каждой группы тогда не испытывает заметного влияния от присутствия другой. Так как расстояние между серединами двух последовательных групп равно $\frac{2\pi}{k - k'}$ и так как время, которое необходимо системе, чтобы продвинуться на это расстояние, равно $\frac{2\pi}{\sigma - \sigma'}$, то групповая скорость U имеет значение $\frac{\sigma - \sigma'}{k - k'}$ или, окончательно,

$$U = \frac{d\sigma}{dk}. \quad (2)$$

Выражая это через длину волны λ ($= \frac{2\pi}{k}$), мы будем иметь

$$U = \frac{d(kc)}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}, \quad (3)$$

где c обозначает скорость волны.

¹⁾ Scott Russel, Report on Waves, Brit. Ass. Rep. 1844, стр. 369. Существует интересное письмо об этом предмете, принадлежащее Фруду; это письмо перепечатано у Stokes, Scientific Correspondence, Cambridge, 1907, II, 156.

Этот результат имеет место для любых волн, которые распространяются в однородной среде. В рассматриваемом случае имеем

$$c = \left(\frac{g}{k} \operatorname{tgh} kx \right)^{1/2}, \quad (4)$$

и, следовательно, для групповой скорости получим

$$\frac{d(kc)}{dk} = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \right). \quad (5)$$

Отношение групповой скорости к скорости волны c возрастает, когда kh уменьшается; оно равно $\frac{1}{2}$, когда глубина велика, и равно 1, когда глубина очень мала по сравнению с длиной волны.

Повидимому, это изложение впервые было дано Стоксом ¹⁾. Распространение на более общий род групп было проведено Рэлеем ²⁾ и Гуйем ³⁾.

Существует еще другой вывод формулы (3), может быть, более наглядный. В некоторой среде, такой же, как мы рассматривали, где скорость волны меняется с частотой, ограниченное начальное возмущение вызывает, вообще говоря, некоторую систему волн, в которой волны различной длины, распространяющиеся с различными скоростями, постепенно отделяются друг от друга (§ 238—239). Если мы будем рассматривать длину волны λ как функцию от x и t , то имеет место

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + U \frac{\partial \lambda}{\partial k} = 0, \quad (6)$$

так как λ вблизи некоторой геометрической точки, движущейся со скоростью U , не меняется; а это и есть в действительности определение U . Если мы, далее, вообразим другую геометрическую точку, которая движется вместе с *волнами*, то будем иметь

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + c \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \frac{dc}{dx} = \lambda \frac{dc}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}; \quad (7)$$

второй член и представляет как раз величину скорости, с которой два следующие друг за другом гребня волны удаляются друг от друга. Если мы соединим уравнения (6) и (7), то снова получим формулу (3) ⁴⁾.

¹⁾ Stokes, Smith's Prize Examination, 1876 [Papers, V, 362]; см. также Rayleigh, Theory of Sound, § 191.

²⁾ Rayleigh, Nature, XXV, 52 (1881) [Papers, I, 540].

³⁾ Gouy, Sur la vitesse de la lumière, Ann. de Chim. et de Phys., XVI, 262 (1889). Недавно было найдено, что до известного предела теория была уже предвидена Гамильтоном, который в 1839 г. подошел к ней с точки зрения оптики; см. Havelock, Cambridge Tracts, № 17 (1914), стр. 6.

⁴⁾ См. Lamb, On Group-Velocity, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 473 (1904). Вопрос был исследован дальше Грином — G. Green, On Group-Velocity, and on the Propagation of Waves in a Dispersive Medium, Proc. R. S. Edin., XXIX, 445 (1909).

Формуле (3) можно дать простое геометрическое толкование¹⁾. Если начертить кривую с абсциссой λ и ординатой c , то отрезок, отсекаемый касательной на оси c , и будет изображать групповую скорость. На фиг. 52. PN представляет таким образом скорость волны для длины волны ON , а OT — групповую скорость. Заметим еще, что частота колебания представляется тангенсом угла PON .

Для тяжелых волн на глубокой воде c пропорционально $\lambda^{1/2}$; кривая имеет формулу параболы $y^2 = 4ax$ и $OT = \frac{1}{2} PN$; это значит, что групповая скорость равна половине скорости волны.

§ 237. Групповая скорость имеет помимо геометрического еще и динамический смысл. Это было впервые показано Осборном Рейнольдсом²⁾ для волн на глубокой воде при помощи подсчета энергии, которая переносится через вертикальную плоскость. При бесконечной глубине потенциал скоростей, соответствующий просто гармоническим волнам

$$\eta = a \sin k(x - ct), \quad (8)$$

будет

$$\varphi = ace^{ky} \cos k(x - ct), \quad (9)$$

в чем легко убедиться, если принять во внимание, что должно быть $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ для $y = 0$. Если пренебречь членами второго порядка, то переменная часть давления равна $\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Таким образом работа, совершаемая в единицу времени над жидкостью, находящейся направо от плоскости x , равна

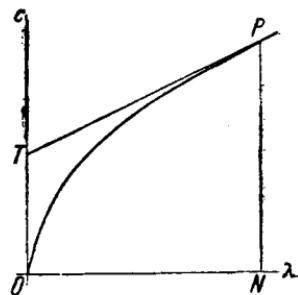
$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^0 p \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy &= \varrho a^2 k^2 c^3 \sin^2 k(x - ct) \int_{-\infty}^0 e^{2ky} dy = \\ &= \frac{1}{2} \varrho a^2 c \sin^2 k(x - ct), \end{aligned} \quad (10)$$

так как $c^2 = \frac{g}{k}$. Среднее значение этой работы равно $\frac{1}{4} \varrho a^2 c$. Принимая во внимание сказанное в § 230, видим, что это есть в точности половина энергии тех волн, которые проходят рассматриваемую плоскость в единицу времени. В случае изолированной группы, следо-

¹⁾ Lamb. Manch. Mem., XLIV, № 6 (1900).

²⁾ Osborne Reynolds, On the Rate of Progression of Groups of Waves, and the Rate at which Energy is Transmitted by Waves, Nature, XVI, 343 (1877) [Papers, I, 198].

Рейнольдс построил также модель, которая очень отчетливо показывает разницу между скоростью волны и групповой скоростью для поперечных колебаний ряда одинаковых маятников, шары которых связаны одною нитью.



Фиг. 52.

вательно, приток энергии только тогда будет достаточен, когда группа передвигается вперед с половинной скоростью отдельных волн.

Подобным же образом легко показать, что для случая конечной глубины h средняя энергия, переносимая в единицу времени, будет равна¹⁾

$$\frac{1}{4} g \rho a^2 c \left(1 + \frac{2kh}{\sin h 2kh} \right), \quad (11)$$

а это согласно (5) тождественно с

$$\frac{1}{2} g \rho a^2 \frac{d(kc)}{dk}. \quad (12)$$

Поэтому скорость переноса энергии пропорциональна групповой скорости $\frac{d(kc)}{dk}$, выражение для которой мы нашли другим независимым путем.

Это отождествление кинематической групповой скорости, о которой шла речь в предыдущем параграфе, со скоростью переноса энергии легко распространить на любой вид волн. Оно следует, в самом деле, из теории интерференционных групп (стр. 477), которая носит общий характер. Пусть P есть середина одной из этих групп, Q — середина той покоящейся области, которая лежит в направлении распространения P ; в течение промежутка времени τ , превышающего несколько периодов, но не превосходящего времени прохождения группы, середина группы продвинется в точку P' , так что

$$PP' = U\tau,$$

и область между P и Q получит соответствующее количество энергии. Другой способ доказательства, который не использует понятия интерференции, был дан Рэлеем (см. выше).

С физической точки зрения групповая скорость, пожалуй, важнее, чем скорость волны. Последняя может быть больше или меньше, чем первая, и даже возможно представить такую среду, в которой обе имеют различное направление; это будет тогда обозначать, что какое-то возмущение могло бы распространяться из некоторой средней точки во внешнее пространство в виде группы, в то время как отдельные волны, из которых состоит группа, сами будут двигаться в обратном направлении, зарождаясь на передней стороне и затухая при приближении к задней стороне²⁾. Необходимо, кроме того, указать на то, что даже при наиболее простых явлениях акустики и оптики скорость волны, главным образом, поскольку имеет значение, поскольку она совпадает с групповой скоростью. В случае необходимости более строгого различия мы можем заимствовать из новейшей физики термин „фазовая скорость“ для обозначения того, что мы в большей своей части в настоящем руководстве именуем скоростью волны.

¹⁾ Rayleigh, On Progressive Waves, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IX, 21 (1877) [Papers, I, 322]; Theory of Sound, I. Приложение.

²⁾ Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 473.

§ 238. Теория волн на глубокой воде, появившихся от местного возмущения свободной поверхности, была разработана Коши¹⁾ и Пуассоном²⁾ в двух классических работах. Долгое время эту проблему считали трудной и даже неясной, но по меньшей мере в ее двухмерном виде эту теорию можно изложить сравнительно просто.

Из §§ 40, 41 следует, что начальное состояние жидкости будет вполне определено, если известна форма границы и граничные значения нормальной компоненты $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ скорости или граничные значения потенциала скоростей φ . Задачу можно поставить таким образом двояко: можно исходить из начального возвышения свободной поверхности без начальной скорости или же можно исходить из невозмущенной (и, следовательно, горизонтальной) поверхности и некоторого начального распределения импульсивных давлений на поверхности ($\rho \varphi_0$).

Если начало лежит на невозмущенной поверхности, а ось y направлена вертикально вверх, то типичное решение для случая начального возвышения будет

$$\eta = \cos \sigma t \cos kx, \quad (1)$$

$$\varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx, \quad (2)$$

где

$$\sigma^2 = gk, \quad (3)$$

в согласии с обычновенной теорией „стоячих“ волн просто гармонического профиля (§ 228).

Если это обобщить с помощью интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(x-a) da, \quad (4)$$

то согласно начальным условиям

$$\eta = f(x); \quad \varphi_0 = 0, \quad (5)$$

где индекс нуль соответствует значению на поверхности $y=0$, мы будем иметь

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(x-a) da, \quad (6)$$

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \sigma t}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \cos k(x-a) da. \quad (7)$$

¹⁾ Cauchy, см. примечание на стр. 33.

²⁾ Poisson, Mémoire sur la théorie des ondes, Mém. de L'Acad. roy. des Sciences, 1 (1816).

Пусть начальное возвышение ограничено непосредственной близостью с началом, так что $f(a)$ обращается в нуль для всех небескочисленных значений a . Полагая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a) da = 1, \quad (8)$$

будем иметь

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx dk. \quad (9)$$

Используя (3), можно выражение для φ разложить в ряд

$$\varphi = \frac{gt}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \frac{gt^2}{3!} k + \frac{(gt^2)^2}{5!} k^2 - \dots \right\} e^{ky} \cos kx dk. \quad (10)$$

Положив

$$-y = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta, \quad (11)$$

будем иметь для отрицательного $y^1)$

$$\int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx k^n dk = \frac{n!}{r^{n+1}} \cos(n+1)\theta, \quad (12)$$

так что (10) примет вид

$$\varphi = \frac{gt}{\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} gt^2 \right) \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{2} gt^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\}, \quad (13)$$

что можно легко проверить. Отсюда, согласно (5) § 227 получим значение η , если положить $\theta = \pm 1/2\pi$. Следовательно, для $x > 0$

$$\eta = \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^3 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^5 - \dots \right\}. \quad (14)^2)$$

Непосредственно видно, что каждая отдельная фаза возмущения поверхности, например, нулевое значение, максимум или минимум η , связана с определенным значением выражения $\frac{1}{2} \frac{gt^2}{x}$, и, следовательно, рассматриваемая фаза передвигается на поверхности с постоянным ускорением. Значение этого несколько удивительного результата сейчас обнаружится (§ 240).

¹⁾ Эту формулу можно опустить. Достаточно вычислить значение φ для точек вертикальной оси симметрии; значение для других точек можно тогда сразу написать с помощью известного свойства гармонических функций (ср. Thomson a. Tait, § 498).

²⁾ Рассматривая размерности, можно предвидеть, что влияние сконцентрированного начального возвышения, площадь поперечного сечения которого равна Q представляется формулой

$$\eta = \frac{Q}{x} f \left(\frac{gt^2}{x} \right).$$

Ряд в формуле (14) по сути своей тождествен с рядом, встречающимся в теории интегралов Френеля, применяемых в теории дифракции; он обыкновенно обозначается через $M^1)$. В рассматриваемом виде он употребляется только тогда, когда мы ограничиваемся начальными стадиями возмущения. Когда $\frac{1}{2} \frac{gt^2}{x}$ перестает быть малым, этот ряд сходится очень медленно. Другой вид решения можно получить следующим образом.

Значение φ на поверхности, согласно (9), будет

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \cos kx \, d\sigma = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma t \right) d\sigma - \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma t \right) d\sigma \right\}. \quad (15)\end{aligned}$$

Если положить

$$\zeta = \frac{x^{1/2}}{g^{1/2}} \left(\sigma \pm \frac{gt}{2x} \right), \quad (16)$$

то получим

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma t \right) d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}} \int_{-\omega}^\infty \sin (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma t \right) d\sigma = \frac{g^{1/2}}{x^{1/2}} \int_{-\omega}^\infty \sin (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (18)$$

где

$$\omega = \left(\frac{gt^2}{4x} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Следовательно, можно написать

$$\varphi_0 = - \frac{2g^{1/2}}{\pi x^{1/2}} \int_0^\omega \sin (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (20)$$

а отсюда согласно (5) § 227 можно получить η , именно

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{g^{1/2} t}{\pi x^{3/2}} \int_0^\omega \cos (\zeta^2 - \omega^2) d\zeta = \\ &= \frac{g^{1/2} t}{\pi x^{3/2}} \left\{ \cos \omega^2 \int_0^\omega \cos \zeta^2 d\zeta + \sin \omega^2 \int_0^\omega \sin \zeta^2 d\zeta \right\}. \quad (21)\end{aligned}$$

Это совпадает с результатом, полученным Пуассоном. Определенные

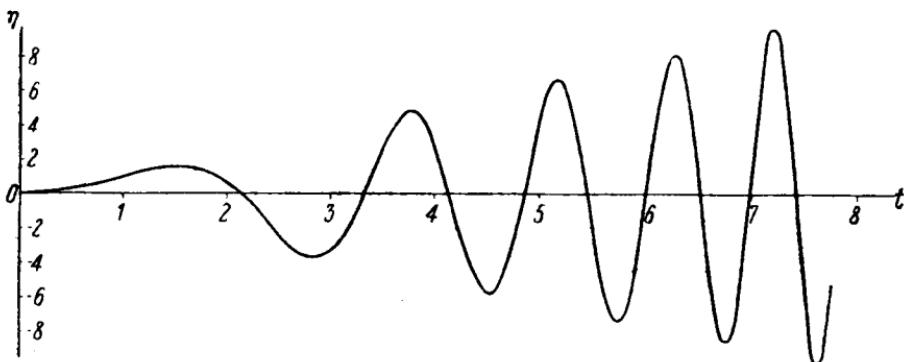
¹⁾ Ср. Rayleigh [Papers, III, 129].

интегралы практически являются интегралами вида Френеля¹⁾, и, следовательно, могут рассматриваться как известные функции.

Ломмель в своих исследованиях о явлениях дифракции²⁾ дает таблицу функции, встречающейся в (14):

$$1 - \frac{z^2}{3 \cdot 5} + \frac{z^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \quad (22)$$

для всех значений z между 0 и 60. Следовательно, мы в состоянии представить с большой легкостью первые девять или десять волн. Фиг. 53 показывает зависимость η от времени для определенного



Фиг. 53. За единицу горизонтального масштаба принято $\sqrt{\frac{2x}{g}}$, а вертикального $\frac{Q}{\pi x}$, где Q обозначает площадь поперечного сечения первоначально поднятой жидкости.

места. Для различных мест интервалы времени между двумя определенными фазами пропорциональны \sqrt{x} , в то время как соответствующие возвышения обратно пропорциональны x . Напротив, фиг. 54 показывает профиль волны в определенный момент времени; для различных моментов времени горизонтальные расстояния между соот-

1) В употребительном обозначении мы имеем

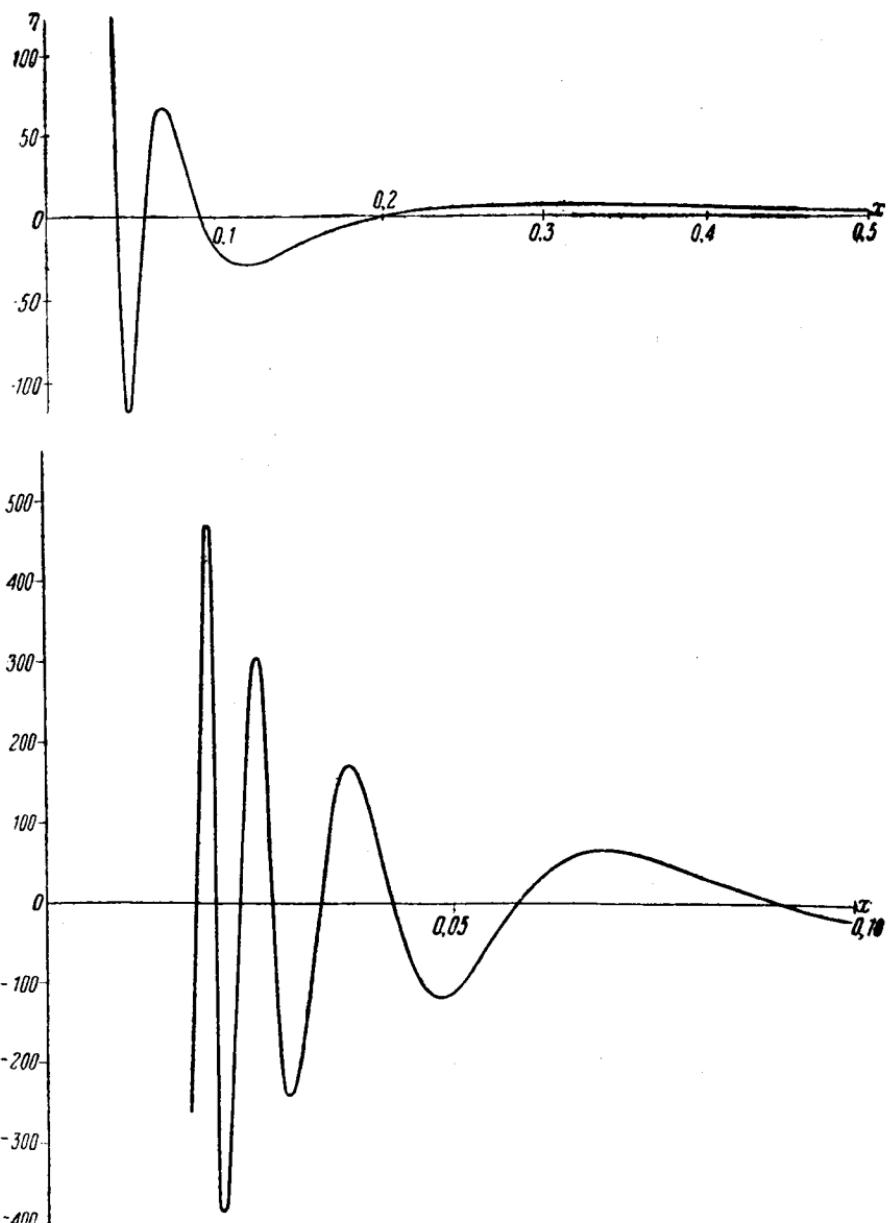
$$\int_0^\infty \cos \zeta^2 d\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} C(u), \quad \int_0^\infty \sin \zeta^2 d\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} S(u),$$

где

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{1}{2} \pi u^2 du, \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{1}{2} \pi u^2 du$$

с верхним пределом интеграла $u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega$. Таблицы для $C(u)$ и $S(u)$, вычисленные Гильбертом и другими, можно найти во многих книгах по физической оптике. Более обстоятельные таблицы, данные Ломмелем, переведены Watson, Theory of Bessel Functions, стр. 744—745.

²⁾ Lommel, Die Beugungerscheinungen geradlinig begrenzter Schirme, Abb. d. k. Bayer Akad. d. Wiss., 2 Kl; XV (1886).



Фиг. 54. За единицу горизонтального масштаба принято $\frac{1}{2}gt^2$,
а вертикального $\frac{2Q}{\pi gt^2}$.

ветствующими точками пропорциональны квадрату времени, протекавшему от начала возмущения, в то время как соответствующие возвышения обратно пропорциональны квадрату этого времени.

Если $\frac{gt^2}{4x}$ будет велико, то мы возвращаемся снова к формуле (21), которая дает приближенно

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{2^{3/2} \pi^{1/2} x^{3/2}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right), \quad (23)$$

что и было установлено Пуассоном и Коши. При этом были использованы известные формулы:

$$\int_0^\infty \cos \zeta^2 d\zeta = \int_0^\infty \sin \zeta^2 d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad (24)$$

Названные авторы дали также выражения для остатка. Таким образом по существу Пуассон получает полусходящееся разложение

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{g^{1/2} t}{2^{3/2} \pi^{1/2} x^{3/2}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right) - \\ & - \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{2x}{gt^2} - 1 \cdot 3 \cdot 5 \left(\frac{2x}{gt^2} \right)^3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \left(\frac{2x}{gt^2} \right)^5 - \dots \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Это можно вывести следующим образом. Последовательным интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i(\zeta^2 - \omega^2)} d\zeta = & \int_0^\infty e^{i(\zeta^2 - \omega^2)} d\zeta - \int_0^\infty e^{i(\zeta^2 - \omega^2)} d\zeta = \\ = & \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-i\left(\omega^2 - \frac{1}{4}\pi\right)} + \frac{1}{2i\omega} + \frac{1}{(2i)^2 \omega^3} + \frac{1 \cdot 3}{(2i)^3 \omega^5} + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

а подставив действительную часть этого выражения в (21), получим формулу (25).

§ 239. Когда на горизонтальную поверхность действуют начальные импульсы типичное решение будет

$$\varrho\varphi = \cos \sigma t e^{kv} \cos kx, \quad (27)$$

$$\eta = -\frac{\sigma}{g\varrho} \sin \sigma t \cos kx, \quad (28)$$

где, как раньше, $\sigma^2 = gk$. Если, следовательно, начальные условия будут

$$\varrho\varphi_0 = F(x), \quad \eta = 0,$$

то мы будем иметь

$$\varphi = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{ky} dk \int_{-\infty}^{+\infty} F(a) \cos k(k-a) da, \quad (30)$$

$$\eta = -\frac{1}{\pi \rho g} \int_0^{\infty} \sigma \sin \sigma t dk \int_{-\infty}^{+\infty} F(a) \cos k(x-a) da. \quad (31)$$

Для импульсивного давления, сконцентрированного в точке $x=0$ поверхности, положив

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a) da = 1, \quad (32)$$

получим

$$\varphi = \frac{1}{\pi \rho} \int_0^{\infty} \cos \sigma t e^{ky} \cos kx dk. \quad (33)$$

Этот интеграл вычисляется подобным же образом, как (9), однако, ясно, что его можно получить также и непосредственно, если операцию $\frac{1}{\pi \rho} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ применить к результатам § 238. Таким образом из (13) и (14) получим

$$\varphi = \frac{1}{\pi \rho} \left\{ \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{2} g t^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \left(\frac{1}{2} g t^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \right\}, \quad (34)$$

$$\eta = \frac{t}{\pi \rho x^2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^2 + \frac{5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^4 - \dots \right\}. \quad (35)^1$$

Ряд (35) связан с функцией

$$\frac{z}{1 \cdot 3} - \frac{z^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{z^5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \dots, \quad (36)$$

которая была также табулирована Ломмелем. Обозначив ряды (22) и (36) через \sum_1 и \sum_2 , получим

$$1 - \frac{3z^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5z^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots = \frac{1}{2} (1 + \sum_1 - z \sum_2), \quad (37)$$

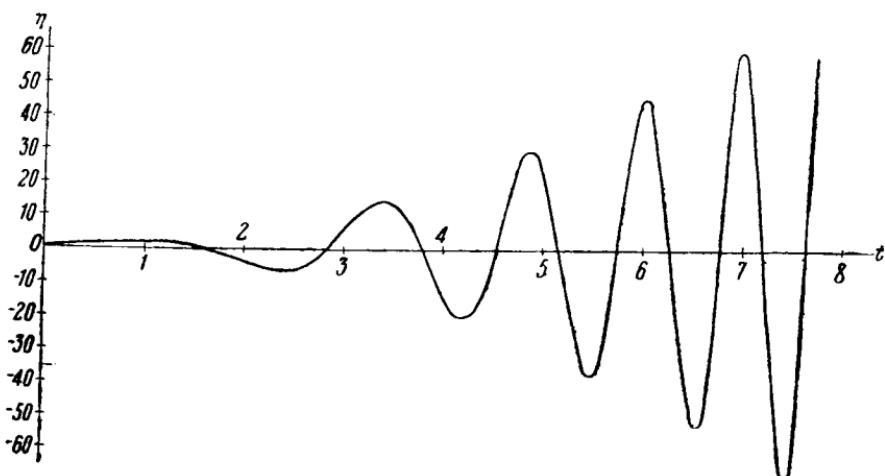
так что легко нарисовать вид нескольких первых волн.

Фиг. 55 показывает возвышения и понижения поверхности в определенном месте; для различных мест интервалы времени между двумя

¹⁾ С помощью теории „размерности“ а priori можно усмотреть, что влияние концентрированного начального импульса P (для единицы ширины) представляется обязательно в следующем виде:

$$\eta = \frac{Pt}{\rho x^2} f\left(\frac{gt^2}{x}\right).$$

определенными фазами относятся, как \sqrt{x} , так же как в предыдущем случае, соответствующие же возвышения обратно пропорциональны $x^{3/2}$. На фиг. 56, которая дает моментальное изображение профиля волны, горизонтальное расстояние между соответствующими



Фиг. 55. За единицу горизонтального масштаба принято $\sqrt{\frac{2x}{g}}$, а вертикального $\frac{P}{\pi q x} \sqrt{\frac{2}{gx}}$, где P — общий начальный импульс.

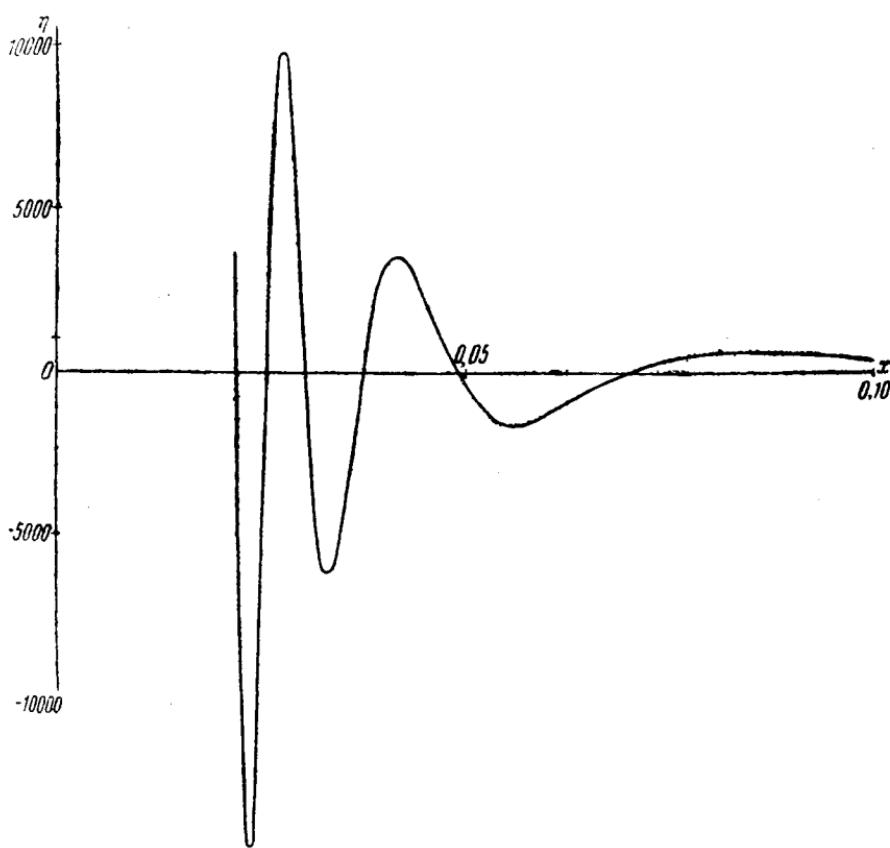
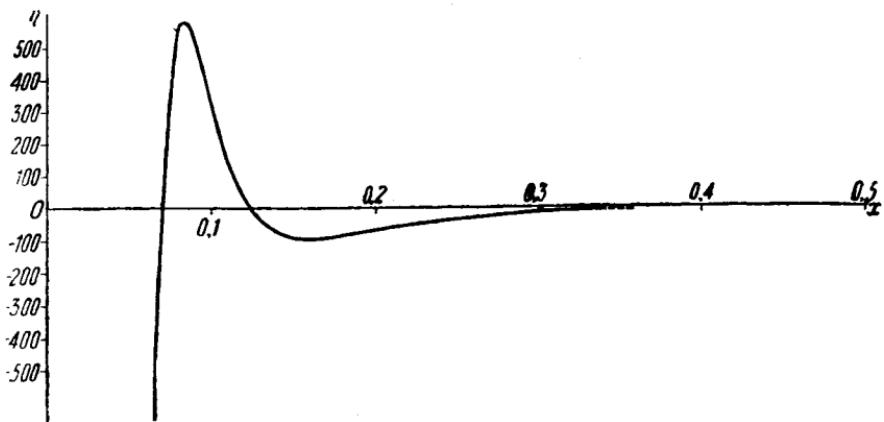
точками пропорционально квадрату времени, в то время как соответствующие ординаты обратно пропорциональны кубу времени.

Если мы к (23) применим операцию $\frac{1}{gq} \frac{d}{dt}$, то для больших значений $\frac{1}{2} \frac{gt^2}{x}$ найдем приближенно

$$\eta = \frac{g^{1/2} t^2}{2^{6/2} \pi^{1/2} q x^{6/2}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} - \sin \frac{gt^2}{4x} \right). \quad (38)$$

§ 240. Остается рассмотреть значение и следствия полученных результатов. Достаточно рассмотреть главным образом случай § 238, где было принято, что первоначальное возвышение сосредоточено в одной точке поверхности в рассматриваемой плоскости.

Во всякий следующий момент t поверхность захватывается системой волн, наиболее продвинувшиеся вперед части которой изображены на фиг. 51. Для достаточно малых значений x вид волны дается формулой (23); следовательно, при приближении к началу волны беспрерывно уменьшаются в длине и увеличиваются в высоте, причем то и другое происходит беспрепятственно.



Фиг. 56. За единицу горизонтального масштаба принято $\frac{1}{2} gt^2$, а вертикального $\frac{4P}{\pi \rho g^{3/2}}$. Если продолжить верхнюю кривую вправо, то она пересечет ось x в точке, которую трудно отметить при выбранном масштабе.

Когда t растет, система волн растягивается в горизонтальном направлении пропорционально квадрату времени, а вертикальные ординаты укорачиваются в той же мере, так что площадь

$$\int \eta dx$$

между профилем волны, осью x и ординатами, соответствующими двум определенным фазам (т. е. двум определенным значениям ω), будет постоянной¹⁾. Последнее утверждение следует непосредственно из вида выражений (14) или (21).

Колебания уровня в определенном месте представлены на фиг. 50. Они следуют друг за другом все быстрее с нарастающей амплитудой. Для достаточно больших значений t ход этих колебаний определяется формулой (23).

В области применимости этой формулы, длины и высоты от волны к волне, в каждый определенный момент, меняются очень медленно, и если взять значительное число следующих друг за другом волн, то они могут быть приближенно представлены синусоидой. Действительно, все соотношения воспроизводятся приближенно, когда $\frac{gt^2}{4x}$ возрастает на

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 2\pi. \quad (39)$$

Если, следовательно, будет меняться только t и если положить $\Delta t = \tau$ то для периода колебаний получим

$$\tau = \frac{4\pi x}{gt^2}, \quad (40)$$

если же, наоборот, меняется только x и если положить $\Delta x = -\lambda$, где λ обозначает длину волны, то мы находим

$$\lambda = \frac{8\pi x^2}{gt^2}. \quad (41)$$

Скорость волн определяется из уравнения

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 0. \quad (42)$$

Это дает согласно (41)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2x}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (43)$$

как в случае бесконечно длинного ряда просто гармонических волн длины λ .

¹⁾ Эта теорема не годится для случая начального импульса. Соответствующее заключение в этом случае будет:

$$\int \varphi_0 dx,$$

взятый между указанными значениями ω , постоянен. Это следует из уравнения (34).

Мы видим теперь своего рода обоснование того факта, что каждая волна постоянно ускоряется. Передние волны длиннее, чем задние, и поэтому двигаются быстрее. Вследствие этого все волны вытягиваются по длине, так что их скорости распространения беспрерывно возрастают по мере их продвижения. Однако, чем больше номер волны в их последовательности, тем меньше ее ускорение.

До сих пор мы исследовали распространение отдельных волн. Если мы теперь обратимся к *группе волн*, которая (приближенно) характеризуется данной длиной волны λ , то увидим, что скорость этой группы определяется согласно (43) формулой

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (44)$$

т. е. группа распространяется с постоянной скоростью, равной *половине* скорости отдельных составляющих волн. Однако группа при своем распространении не сохраняет постоянной амплитуды; легко видеть из (23), что для данного значения λ амплитуда обратно пропорциональна \sqrt{x} .

Таким образом область в непосредственной близости от начала можно рассматривать как своего рода источник, который посылает в каждую сторону бесконечный ряд волн с постоянно растущей амплитудой и частотой; последующее движение этих волн регулируется выше рассмотренными законами. Предположение о такой продолжающейся деятельности источника следует из нашего допущения о начальном накоплении конечного объема поднятой жидкости на бесконечно узком основании, что обуславливает неограниченный запас энергии.

Практически, однако, начальное возвышение может распределяться на некоторой полосе конечной ширины l . Полное возмущение в некоторой точке P будет тогда состоять из частей, обусловленных различными элементами *да* ширины l ; эти части вычисляются по предыдущим формулам, а интегрируются по ширине полосы. В результате тогда исчезают как математически бесконечные, так и другие, лишенные смысла особенности, которые присущи допущению концентрированного линейного источника. Было бы легко дать соответственные формулы, но так как они не очень удобны и, кроме того, не дают ничего, что не содержалось бы в вышеизложенном, то мы от этого откажемся. Будет поучительнее разобрать в общем виде, как можно дополнить вышеизложенные результаты.

Начальные стадии возмущения на некотором расстоянии x , сравнительно большом с l , очевидно, будут в существенном теми же самыми, как при прежнем допущении; части возмущения, зависящие от различных элементов *ад*, будут просто взаимно усиливать друг друга, и результат можно достаточно хорошо представить с помощью (14) или (23), если мы умножим его на

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a) da,$$

т. е. на площадь поперечного сечения первоначально поднято жидкости. В частности, формула (23) в случае, когда $\frac{1}{2} \frac{gl^3}{x}$ велико, будет сохранять свою пригодность до тех пор, пока длина волны в рассматриваемой точке велика сравнительно с l , т. е., согласно (41), пока $\frac{1}{2} \frac{gl^3}{x} l$ будет мало. Но когда длина волны в точке x при возрастающем l будет сравнима с l или меньше, чем l , то различные части l нельзя более рассматривать как имеющие приблизительно одинаковые фазы, и тогда мы будем иметь явление, аналогичное „интерференции“ в смысле оптики. Результат, конечно, будет зависеть от вида начального распределения значений $f(a)$ на отрезке l^1), но ясно, что возрастание амплитуды должно когда-нибудь прекратиться, и возмущение в конце концов будет постепенно затухать.

То своеобразие, которое обычно имеют более поздние стадии, мы должны рассмотреть более углубленно, так как оно было причиной некоторых неясностей; дело идет о колебании амплитуды волны, которое легко может быть объяснено на основании принципов „интерференции“. В качестве примера достаточно рассмотреть случай, когда начальное возвышение равномерно распределено по ширине l и когда рассматриваемая стадия возмущения является настолько поздней, что значение λ вблизи рассматриваемой точки x становится малой сравнительно с l . Мы имеем тогда, очевидно, ряд групп волн, разделенных полосами сравнительно спокойной воды, причем середины этих полос имеют место там, где l есть кратное от λ , т. е. $l = n\lambda$. Если мы сделаем подстановку в (41), то найдем

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gl}{2n\pi}} . \quad (45)$$

т. е. эти полосы движутся вперед с постоянной скоростью, которая в действительности и есть групповая скорость, соответствующая средней длине волны в окрестности рассматриваемого места²⁾:

¹⁾ Ср. Burnside, On Deep-water Waves resulting from a Limited Original Disturbance, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XX, 22 (1888).

²⁾ На это колебание впервые указал Пуассон, именно в частном случае, когда начальное возвышение (или быстрое опускание) имеет параболическую очертание.

Вышеизложенные исследования имеют значение, выходящее за пределы рассматриваемого предмета, так как они показывают, насколько сильно действия одного начального импульса в рассеивающей среде (т. е. в среде, в которой скорость волны зависит от длины волны) отличаются от тех, которые совершаются при звуковых волнах или при колебаниях твердого упругого тела. Рассмотренное выше исследование с некоторыми изменениями заимствовано из работы Lamb, On Deep-water Waves, Proc. Lond. Math. Soc. (2), II, 371 (1904), где также исследуется действие локального периодического давления.

Решение, данное в § 238, годное для идеального случая, ничего не говорит относительно того, что происходит в самом начале координат. Чтобы разрешить этот вопрос для какого-либо частного случая, предположим, что

$$f(a) = \frac{Q}{\pi} \frac{b}{b^2 + a^2}, \quad (46)$$

тогда по формуле (7)

$$\varphi = \frac{gQ}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{k(v-b)} \cos kx dk. \quad (47)$$

Возвышение поверхности в начале будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{-kb} dk = \frac{2Q}{\pi g} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{-\frac{\sigma^2 b}{g}} \sigma d\sigma = \\ &= \frac{2Q}{\pi g} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \sin \sigma t e^{-\frac{\sigma^2 b}{g}} d\sigma. \end{aligned} \quad (48)$$

По известной формуле имеем¹⁾

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2\beta x dx = e^{-\beta^2} \int_0^\beta e^{x^2} dx. \quad (49)$$

Если мы положим

$$\sigma^2 = \frac{gt^2}{4b}, \quad (50)$$

то получим

$$\eta = \frac{Q}{\pi b} \frac{d}{dt} e^{-\omega^2} \int_0^\omega e^{x^2} dx = \frac{Q}{\pi b} \left(1 - 2\omega e^{-\omega^2} \int_0^\omega e^{x^2} dx \right). \quad (51)$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{d\omega} (\eta e^{\omega^2}) = - \frac{2Q}{\pi b} \int_0^\omega e^{x^2} dx, \quad (52)$$

а это показывает, что ηe^{ω^2} с возрастанием t постоянно убывает. Таким образом η может менять знак только один раз. Вид интегралов в (43) показывает, что η в конце концов стремится к пределу нуль, и можно показать, что главный член его асимптотического значения равен $-\frac{2Q}{\pi g t^2}$.

¹⁾ Эта формула получается как побочный результат при вычислении интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$$

с помощью интегрирования по контуру.

²⁾ Определенный интеграл в уравнении (52) табулирован Dawson. Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXIX, 519 (1898), а функция в уравнении (49) табулирована Terazawa, Science Reports of the Univ. of Tokio, VI, 171 (1917).

В вышеизложенных задачах следует отметить то обстоятельство, что возмущение *мгновенно* распространяется от начала на любое расстояние, как бы велико оно ни было. Аналитически это объясняется тем, что мы имеем дело с совокупностью волн всех возможных длин, а для бесконечных длин скорость волн бесконечно велика. Однако Рэлем¹⁾ было показано, что *мгновенный* характер дальнейшего продвижения сохраняется и в воде конечной глубины, несмотря на то, что в этом случае скорость волн имеет верхний предел. Физическое основание этой особенности состоит в несжимаемости рассматриваемой жидкости, так что изменения давления распространяются с бесконечной скоростью (ср. § 20). Если в вычислениях принять во внимание сжимаемость, то протекает конечный, хотя, быть может, и очень малый, промежуток времени, прежде чем возмущение появится в какой-либо другой точке²⁾.

§ 241. Обстоятельность, с которой мы провели вышеизложенные исследования, оправдывается их историческим интересом и тем фактом, что вопрос в них шел об одной из немногих вполне разрешаемых проблем. Однако Кельвин показал, что можно получить приближенное представление о наиболее интересных особенностях этого явления более простым способом, который, помимо того, имеет достаточно общее применение³⁾.

Метод основывается на приближенном вычислении интегралов типа

$$u = \int_a^b \varphi(x) e^{if(x)} dx. \quad (1)$$

Предполагается, что тригонометрическая функция в промежутке интегрирования имеет большое число периодов, в то время как $\varphi(x)$ меняется сравнительно медленно, или, более точно, предполагается, что когда $f(x)$ меняется на 2π , то $\varphi(x)$ меняется только на малую дробь своего значения. При этих условиях различные элементы интеграла по большей части будут взаимно уничтожаться за исключением элементов вблизи тех значений x , —если такие имеются,— для которых $f(x)$ имеет стационарное значение. Полагая $x = a + \xi$, где α есть значение x внутри области интегрирования, для которой $f'(a) = 0$, мы для малых значений ξ получим приближенно

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \xi^2 f''(a). \quad (2)$$

¹⁾ Rayleigh, On the Instantaneous Propagation of Disturbance in a Dispersive Medium..., Phil. Mag. (6), XVIII, I (1909) [Papers, V, 514]; см. также Piddock, On the Propagation of a Disturbance in a Fluid under Gravity, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIII, 347 (1910).

²⁾ Piddock, The Wave-Problem of Cauchy and Poisson for Finite Depth and slightly Compressible Fluid, Proc. Roy. Soc. A, LXXXVI, 396 (1912).

³⁾ W. Thomson, On the Waves produced by a Single Impulse in Water of any Depth, or in a Dispersive Medium, Proc. R. S., XLII, (80) (1887) [Papers, IV, 303]. Способ использовать интегралы типа (1) был, однако, предложен еще Стоксом в его работе Stokes, On the Numerical Calculation of a Class of Definite Integrals and Infinite Series, Camb. Trans., IX (1850) [Papers, II, 341, примечание].

Главная часть интеграла, соответствующая значениям x вблизи a , будет равна, следовательно, приближенно

$$\varphi(a) e^{if(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1/6 \xi f''(a) \xi^2} d\xi; \quad (3)$$

расширение пределов до пределов от $-\infty$ до $+\infty$ вследствие колебания подинтегральной функции не повлечет заметной ошибки. Мы имеем теперь согласно известной формуле (24) § 238

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm im^2 \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{1 \pm i}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{m}} e^{\pm \frac{1}{4} i\pi}, \quad (4)$$

и, следовательно, формула (3) напишется

$$\frac{\sqrt{\pi} \varphi(a)}{\sqrt{\frac{1}{2} |f''(a)|}} e^{i \left\{ f(a) \pm \frac{1}{4} \pi \right\}}; \quad (5)$$

в показателе надо взять верхний или нижний знак, смотря по тому, будет ли $f''(a)$ положительно или отрицательно.

Если a совпадает с одним из пределов интегрирования в формуле (1), то пределы в (3) нужно изменить на 0 и ∞ или $-\infty$ и 0 и результат (5) разделить пополам.

Если мы будем продолжать приближения в формуле (2), то получим следующий член в виде $1/6 \xi^3 f'''(a)$. Предыдущий метод таким образом только тогда будет законен, когда $\xi \frac{f'''(a)}{f''(a)}$ будет мало, и даже тогда, когда $\xi^3 f''(a)$ есть небольшое кратное от 2π . Этого требует малость отношения

$$\frac{f'''(a)}{\left| f''(a) \right|^{\frac{3}{2}}}.$$

Предположим теперь, что в некоторой произвольной среде начальное, состоящее из некоторого импульса или из некоторого смещения, возмущение, по величине пропорциональное $\cos kx$ на единицу длины, производит колебание типа

$$\eta = \varphi(k) \cos kx e^{iat}; \quad (6)$$

σ обозначает здесь некоторую функцию от k , определенную согласно теории свободных волн. Влияние начального единичного возмущения, концентрированного на некоторой линии, определится формулой Фурье

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(k) e^{i(\sigma t - kx)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(k) e^{i(\sigma t + kx)} dk; \quad (7)$$

само собой понятно, что в конце вычислений мы должны оставить только действительную часть выражения (7).

Оба члена в правой части (7) представляют результат наложения движений при распространении ряда просто гармонических волн всех возможных длин как в положительном, так и отрицательном направлении оси x . Если мы, используя симметрию, ограничим наше внимание областью, лежащей направо от начала, то, как правило¹⁾, только одна показательная функция в первом интеграле допускает стационарное значение (или значения), и именно тогда, когда

$$t \frac{d\sigma}{dk} = x. \quad (8)$$

Это уравнение определяет k и, следовательно, σ , как функцию от x и t , и мы находим тогда в согласии с (5)

$$\eta = - \sqrt{\frac{\varphi(k)}{2\pi t \left| \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|}} \cos(\sigma t - kx \pm \frac{1}{4}\pi); \quad (9)$$

знак перед $\frac{1}{4}\pi$ совпадает со знаком перед $\frac{d^2\sigma}{dk^2}$. Приближение предполагает малость отношения

$$\frac{d^2\sigma}{dk^2} : \sqrt{t \left| \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|^3}. \quad (10)$$

Так как согласно (8), имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma t - kx) &= \left(t \frac{d\sigma}{dk} - x \right) \frac{\partial k}{\partial x} - k = -k, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\sigma t - kx) &= \left(t \frac{d\sigma}{dk} - x \right) \frac{\partial k}{\partial t} + \sigma = \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

то для длины волны и для периода вблизи точки x в момент t мы получим соответственно $\frac{2\pi}{k}$ и $\frac{2\pi}{\sigma}$. Соотношение (8) показывает, что длина волны такова, что соответствующая *групповая скорость* (§ 236) имеет значение $\frac{x}{t}$.

Вышеизложенный процесс и результаты можно иллюстрировать различными графическими построениями²⁾. Легкое изменение фиг. 52 представляет с некоторой точки зрения наиболее простое построение. Мы строим (фиг. 57) кривую с абсциссой λ и ординатой ct , где t обозначает время, прошедшее от начала возмущения. Чтобы уяснить природу системы воли вблизи какой-нибудь точки x , нанесем отрезок $OQ=x$ на ось ординат. Если PN есть ордината, соответствующая некоторой произвольной абсциссе λ , то фаза возмущения в x , происходящая от элементарного ряда волн с длиной λ , будет определяться углом наклона прямой QP ; в самом деле, проведя QR параллельно ON , будем иметь

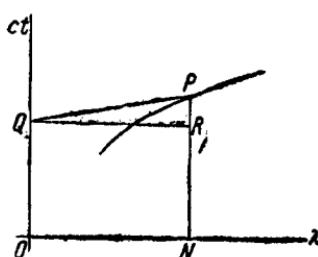
$$\frac{PR}{QR} = \frac{PN - OQ}{ON} = \frac{ct - x}{\lambda} = \frac{\sigma t - kx}{2\pi}. \quad (12)$$

¹⁾ Если групповая скорость будет отрицательной, как это и было в некоторых искусственных случаях § 237, то важнейшим будет второй интеграл.

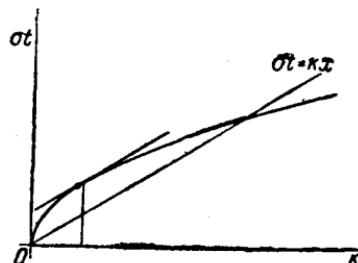
²⁾ Lamb, Proc. of the 5th Intern. Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, том II, стр. 281.

Фаза таким образом будет стационарной, если QP есть касательная к кривой; преобладающие длины волн в точке x даются абсциссами точек, в которых различные возможные касательные, проведенные из Q , касаются кривой. Для этих точек характерно что в них групповая скорость имеет заданное значение $\frac{x}{t}$.

Вообразив точку Q двигающейся по прямой OQ , мы получим картину распределения длин волн в момент t , для которого кривая была начертена. Если мы будем следить за изменениями, которые происходят с течением времени в некоторой данной точке x , то мы можем считать меняющимися или координаты, соответственно различным временем, или же мы можем представить, что точка Q приближается к точке O таким образом, что OQ изменяется обратно пропорционально времени.



Фиг. 57.



Фиг. 58.

Только что проведенное построение имеет тот недостаток, что оно не дает никаких указаний относительно амплитуд в различных частях системы волн. Чтобы получить эти указания, начертим кривую, которая представляет зависимость между σt как ординаты и k как абсциссы (фиг. 58). Если мы, начертим прямую с наклоном x , проходящую через начало, то фаза $\sigma t - kx$ проходящая от частного элементарного ряда волн, будет представляться разностью ординат кривой и прямой. Эта разность будет стационарной, когда касательная к кривой параллельна прямой, т. е. когда $t \frac{d\sigma}{dk} = x$, как это мы уже установили. Далее ясно, что разность фаз для элементарных рядов, длины волн которых мало различны, в конце концов будет пропорциональна квадрату приращения k . Ясно также, что ряд значений k , для которых фазы мало отличаются друг от друга, будет тем больше, и следовательно, получающееся возмущение будет тем интенсивнее, чем больше будет радиус кривизны кривой. Это объясняет появление величины $t \frac{d^2\sigma}{dk^2}$ в знаменателе формулы (9).

В гидродинамической задаче § 238 мы имеем¹⁾

$$\varphi(k) = 1, \quad \sigma^2 = gk, \quad (13)$$

¹⁾ Трудность доказательства сходимости в этом случае отпадает, если мы заметим, что по формуле (9) § 238

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{ky} \cos \sigma t \cos kx dk,$$

где y перед переходом к пределу является отрицательным

откуда получается

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} g^{1/2} k^{-1/2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dk^2} = -\frac{1}{4} g^{1/2} k^{-3/2}, \quad \frac{d^3\sigma}{dk^3} = \frac{3}{8} g^{1/2} k^{-5/2}. \quad (14)$$

Отсюда и из (8) следует

$$k = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad \sigma = \frac{gt}{2x}, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{\sqrt{2\pi x^{3/2}}} e^{i\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right)}$$

или, если отбросить мнимую часть,

$$\eta = \frac{g^{1/2} t}{(2\pi)^{1/2} x^{3/2}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (16)$$

Определив отношение (10), мы видим, что оно есть величина порядка $\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^{1/2}$, следовательно, приближение годится только для тех времен и мест, для которых $1/2 gt^2$ велико сравнительно с x .

Эти результаты согласуются с более полными исследованиями § 238. Случай § 239 трактуется подобным же образом.

Из (16) или из приведенного выше геометрического построения (причем кривая здесь есть парабола, как в § 236) следует, что при распространении волн длина волны в некоторый произвольный момент непрерывно уменьшается при переходе от передней стороны к задней и что волны, проходящие через произвольно заданную точку, имеют постоянно убывающие длины¹⁾.

§ 242. Теперь мы можем вычислить действие произвольного, но установленвшегося давления, приложенного к поверхности некоторого потока. Мы рассмотрим только состояние стационарного движения, которое наступает в конце концов под влиянием сил трения, как бы малы они ни были²⁾. Сначала мы рассмотрим вопрос прямо; более краткий способ получить главнейшие результаты изложен в § 248.

Необходимо отметить, что при отсутствии сил трения задача до известной степени является неопределенной, так как мы можем всегда

¹⁾ Дальнейшие применения см. Havelock, The Propagation of Waves in Dispersive Media..., Proc. Roy. Soc., LXXI, 398 (1908).

²⁾ Первые шаги данного исследования заимствованы из работы Rayleigh, The Form of Standing Waves on the Surface of Running Water, Proc. Lond. Math. Soc., XV, 69 (1883) [Papers, II, 258], но упрощены тем, что пока не принята во внимание капиллярность. Встречающиеся определенные интегралы рассматриваются, однако, в несколько общем виде, и обсуждение результатов поэтому проводится с различных точек зрения. Эта задача еще рассматривалась Поповым, Solution d'un problème sur les ondes régulières, Liouville (2), III, 251 (1858); его анализ безупречен, только не отмечена неопределенность задачи (при отсутствии сил трения), и результаты поэтому не доводятся до практического толкования.

наложить бесконечный ряд свободных волн, имеющих произвольную амплитуду, и длина которых выбрана таким образом, что их скорость по отношению к воде равна и противоположна скорости потока, так что они сохраняют в пространстве неизменное положение. Чтобы избежать этой неопределенности, мы воспользуемся приемом, принадлежащим Рэлею, и предположим, что отклонения частицы жидкости из состояния установившегося потока тормозятся силой, пропорциональной относительной скорости.

Этот закон трения совершенно не претендует быть вполне тождественным с действительностью, но он достаточен для того, чтобы грубо характеризовать влияние малых сил трения, и имеет математическое преимущество, так как не нарушает безвихревого характера движения. Действительно, подставив в уравнение § 6

$$\left. \begin{array}{l} X = -\mu(u - c), \\ Y = -g - \mu v, \\ Z = -\mu w, \end{array} \right\} \quad (1)$$

где c обозначает скорость потока в направлении положительной оси x , и применяя метод § 33 к замкнутой кривой, получим

$$\left(\frac{D}{Dt} + \mu \right) \int (u dx + v dy + w dz) = 0, \quad (2)$$

откуда следует

$$\int (u dx + v dy + w dz) = C e^{-\mu t}. \quad (3)$$

Если, следовательно, циркуляция по некоторой замкнутой кривой, движущейся вместе с жидкостью, сделается хоть раз равной нулю, то она всегда будет равна нулю. Мы имеем теперь

$$\frac{p}{q} = \text{const.} - gy + \mu(cx + \varphi) - \frac{1}{2} q^2, \quad (4)$$

а это есть тот вид, который принимает формула (2) § 21, если положить

$$\Omega = gy - \mu(cx + \varphi) \quad (5)$$

в согласии с формулой (1).

Чтобы вычислить действие простого гармонического распределения давлений, положим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p}{c} = -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{v}{c} = -y + \beta e^{ky} \cos kx. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Если пренебречь квадратом $k\beta$, то уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{p}{c} = \dots - gy + \beta e^{ky} (kc^2 \cos kx + \mu c \sin kx). \quad (7)$$

Следовательно, на поверхности ($\psi = 0$) переменная часть давления будет равна

$$p_0 = \varrho\beta \{ (kc^2 - g) \cos kx + \mu c \sin kx \}, \quad (8)$$

а это равно действительной части от $\varrho\beta(kc^2 - g - i\mu c)e^{ikx}$. Полагая коэффициент при e^{ikx} равным C , можно сказать, что давлению

$$p_0 = Ce^{ikx} \quad (9)$$

соответствует форма поверхности

$$goy = \frac{\kappa}{k - \kappa - i\mu_1} Ce^{ikx}, \quad (10)$$

где для краткости мы полагаем $\frac{\mu}{c} = \mu_1$ и $\kappa = \frac{g}{c^2}$; следовательно, $\frac{2\pi}{\kappa}$ есть длина тех свободных волн, которые могут удержаться на месте, противостоя течению.

Если взять действительные части, то мы найдем, что давление на поверхности

$$p_0 = C \cos kx \quad (11)$$

производит форму волны

$$goy = \kappa C \frac{(k - \kappa) \cos kx - \mu_1 \sin kx}{(k - \kappa)^2 + \mu_1^2}. \quad (12)$$

Это показывает, что для малого μ в местах наибольшего давления на поверхности находятся гребни волн, а в местах наименьшего давления — углубления, если длина волны меньше чем $\frac{2\pi}{\kappa}$; в противоположном случае будет иметь место обратное. Это находится в согласии с общим принципом. Если всему потоку сообщить скорость $-c$, параллельную оси x , то результат, — как видно, если в (12) положить $\mu_1 = 0$, — есть частный случай (14) § 168.

В критическом случае $k = \kappa$ будем иметь

$$goy = -\frac{\kappa C}{\mu_1} \sin kx, \quad (13)$$

а это показывает, что избыток давления находится теперь на тех склонах волн, которые идут вниз по течению. Это грубым образом объясняет, как при помощи подходящим образом выбранного распределения давления на склонах система прогрессивных волн может сохраняться, противостоя взятым нами силам трения.

§ 243. Решение, выраженное формулой (12), можно обобщить, во-первых, прибавлением произвольной постоянной к x и, во-вторых, суммированием по k . Таким образом мы можем представить действие любого распределения давления

$$p_0 = f(x) \quad (14)$$

с помощью теоремы Фурье [§ 238 (4)].