

Условия (2) и (3) имеют такой же вид, как и в случае малой глубины, а поэтому мы можем сразу написать результаты для прямоугольного или круглого¹⁾ бассейна. Значения k и формы свободной поверхности при различных нормальных колебаниях будут те же, как в §§ 190, 191²⁾, но амплитуда колебания с увеличением глубины теперь убывает по закону (1); значение σ для каждой особой формы колебания будет даваться формулой (4). Если kh мало, то будем иметь, как и в названных параграфах,

$$\sigma^2 = k^2 gh.$$

В связи с этим упомянем случай длинного, узкого, прямоугольного бассейна, в котором вблизи центра находится одно или несколько цилиндрических препятствий с вертикальными образующими.

Возьмем начало координат в центре свободной поверхности, а ось x параллельно длине l ; вообразим проведенными две плоскости $x = \pm x'$, где x' довольно велико по сравнению с горизонтальным размером препятствий, но все же является малым по сравнению с длиной (l). Вне этих плоскостей приближенно будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + k^2 \varphi_1 = 0, \quad (6)$$

и, следовательно, для $x > x'$

$$\varphi_1 = A \sin kx + B \cos kx, \quad (7)$$

а для $x < -x'$

$$\varphi_1 = A \sin kx - B \cos kx, \quad (8)$$

так как при самом медленном колебании, которое только и должно здесь рассматриваться, φ должно быть нечетной функцией от x .

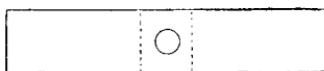
В области между плоскостями $x = \pm x'$ распределение линий

$$\varphi_1 = \text{const.}$$

в основном такое же, каким оно было бы, если положить в формуле (2) $k=0$, на том основании, о котором мы будем говорить в связи с другими задачами в § 290. Поскольку мы интересуемся этой областью, то эта задача тождественна с задачей о распространении электричества в металлическом стержне, который имеет форму бассейна, занимаемого жидкостью, где на месте препятствий имеются отверстия. Электрическое сопротивление между двумя плоскостями будет равно тогда электрическому сопротивлению стержня, лишенного отверстий, с одинаковым поперечным сечением с некоторой длиной $2x' + a$. Разность потенциалов между обеими плоскостями, на основании (7), может быть принята равной $2(kAx' + B)$, так как kx' мало; сила

¹⁾ Указания на оригинальные работы Пуассона и Рэля о волнах в круглом бассейне см. стр. 361. Проблема разрабатывалась также Мегиан, Über die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen, Basel, 1828 (см. Von der Mühl, Math. Ann., XXVII, 575) и Остроградским, Mémoire sur la propagation des ondes, dans un bassin cylindrique, Mém. des Savants Etrang., III (1862).

²⁾ Необходимо заметить, что каждая из обеих нарисованных на фиг. 42 форм колебаний может быть легко вызвана подходящим движением туда и сюда стакана воды в горизонтальном направлении.



Фиг. 67.

тока на единицу поперечного сечения приближенно будет равна kA . Следовательно,

$$2(kAx' + B) = (2x' + a)kA; \quad (9)$$

отсюда следует

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2}ka, \quad (10)$$

и для $x > x'$

$$\varphi_1 = A \left(\sin kx + \frac{1}{2}ka \cos kx \right). \quad (11)$$

Условие $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, которое должно выполняться для $x = \frac{1}{2}l$, дает

$$\cos \frac{1}{2}kl - \frac{1}{2}ka \sin kl \quad (12)$$

или, так как ka есть малая величина,

$$\cos \frac{1}{2}k(l+a) = 0. \quad (13)$$

Введение препятствий, таким образом, имеет тот же самый эффект, как и удлинение сосуда на величину a . Период самого медленного колебания поэтому будет равен

$$\frac{2\pi}{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{\pi l'}{g} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{l'}}, \quad (14)$$

где $l' = l + a$.

Значение a известно только в немногих случаях. Для круглого цилиндра радиуса b , который находится в центре бассейна, формулы (11) и (13) § 64 показывают, что φ_1 меняется практически как $x + C$ или как $x + \frac{\pi b^2}{a}$, когда x будет величиной порядка ширины a бассейна. Сравнивая с (11), видим, что

$$a = \frac{2\pi b^3}{\alpha}, \quad (15)$$

при условии, что $\frac{b}{a}$ приблизительно не превосходит $\frac{1}{4}$ ¹⁾.

Если на месте плоскости $x=0$ будем иметь тонкую твердую перегородку ширины a , которая в середине имеет вертикальную щель ширины c , то получим формулу

$$a = \frac{2a}{\pi} \ln \sec \frac{\pi(a-c)}{2a}. \quad (16)$$

§ 258. Число решенных до сих пор случаев движения при переменной глубине очень ограничено.

1. Мы рассмотрим сначала двумерные колебания воды в канале, поперечное сечение которого состоит из двух прямых, наклоненных под углом в 45° к вертикали ²⁾.

¹⁾ Формула (14) в этом случае хорошо согласуется с опытами [Lamb и Cooke, Phil. Mag. (6), XX, 343 (1910)]. Опыты были проведены главным образом с той целью, чтобы испробовать вышеизложенный приближенный способ, который имеет еще другие более важные возможности применения (см. § 306, 307).

²⁾ Kirchhoff, Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit, Berl. Monatsber., 15 мая 1879 г. [Ges. Abh., 428]; Greenhill, см. примечание на стр. 467.

Возьмем в плоскости поперечного сечения оси y и z соответственно по горизонтали и вертикали и положим

$$\varphi + i\psi = A \{ \operatorname{ch} k(y + iz) + \cos k(y + iz) \}, \quad (1)$$

причем зависящий от времени множитель $\cos(\sigma t + \epsilon)$ следует здесь подразумевать. Это дает

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= A (\operatorname{ch} ky \cos kz + \cos ky \operatorname{ch} kz), \\ \psi &= A (\operatorname{sh} ky \sin kz - \sin ky \operatorname{sh} kz). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Вторая формула тотчас же показывает, что прямые $y = \pm z$ образуют линию тока $\psi = 0$ и поэтому могут быть взяты в качестве неподвижных границ.

Условие на свободной поверхности будет, как в § 227,

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3)$$

Подставляя из (2), найдем, если h обозначает высоту поверхности над началом координат,

$$\sigma^2 (\operatorname{ch} ky \cos kh + \cos ky \operatorname{ch} kh) = gk (-\operatorname{ch} ky \sin kh + \cos ky \operatorname{sh} kh).$$

Это уравнение выполняется для всех значений y , если

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 \cos kh &= -gk \sin kh, \\ \sigma^2 \operatorname{ch} kh &= gk \operatorname{sh} kh; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

отсюда получаем

$$\operatorname{th} kh = -\operatorname{tg} kh. \quad (5)$$

Это уравнение определяет допустимые значения k ; соответствующие значения σ будут даны тогда одним из уравнений (4).

Так как φ , согласно (2), есть четная функция от y , то колебания, определяемые ею, будут симметричны по отношению к плоскости $y = 0$.

Асимметрические же колебания определяются из уравнений

$$\varphi + i\psi = iA \{ \operatorname{ch} k(y + iz) - \cos k(y + iz) \}, \quad (6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -A (\operatorname{sh} ky \sin kz + \sin ky \operatorname{sh} kz), \\ \psi &= A (\operatorname{ch} ky \cos kz - \cos ky \operatorname{ch} kz). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Линия тока $\psi = 0$ состоит, как и выше, из прямых $y = \pm z$; условие на поверхности (3) дает

$$\sigma^2 (\operatorname{sh} ky \sin kh + \sin ky \operatorname{sh} kh) = gk (\operatorname{sh} ky \cos kh + \sin ky \operatorname{ch} kh).$$

Это требует, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 \sin kh &= gk \cos kh, \\ \sigma^2 \operatorname{sh} kh &= gk \operatorname{ch} kh; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

отсюда следует

$$\operatorname{th} kh = \operatorname{tg} kh. \quad (9)$$

Уравнения (5) и (9) встречаются также в теории поперечных колебаний балки, свободной на обоих концах, и оба они могут быть включены в уравнение

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1, \quad (10)$$

если положить $m = 2kh$.

¹⁾ Ср. Rayleigh, Theory of Sound, I, 277, где подробно разобрано числовое решение уравнения.

Корень $kh=0$ уравнения (9) не имеет значения в упомянутой теории, но здесь он очень важен, именно, он соответствует самому медленному колебанию в рассматриваемой задаче. Если положить $Ak^2=B$ и, рассматривая k как бесконечно малое, восстановить множитель, зависящий от времени, а потом взять только действительные части, то формулы (7) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -2Byz \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \psi &= B(y^2 - z^2) \cos(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где, согласно уравнению (8),

$$\sigma^2 = \frac{g}{h}. \quad (12)$$

Соответствующий вид свободной поверхности будет

$$\zeta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=h} = 2\sigma Bhy \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (13)$$

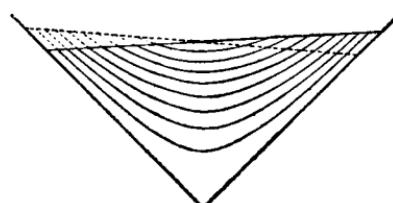
Следовательно, свободная поверхность при этом виде колебания есть всегда плоскость. Фиг. 68 показывает линии тока $\psi=\text{const}$. для ряда равноотстоящих значений ψ .

Следующее по медленности нормальное колебание будет симметричным и дается наименьшим, отличным от нуля, корнем уравнения (5). Этот корень будет $kh = 2,3650$, откуда следует

$\sigma = 1,5244 \left(\frac{g}{h} \right)^{1/2}$. Профиль свободной поверхности имеет теперь два узла, положения которых найдутся, если в (2) положить $\varphi=0$, $z=h$, откуда получим

$$\frac{y}{h} = 0,5516^{-1}.$$

Фиг. 68.



Следующее нормальное колебание соответствует наименьшему, отличному от нуля, корню уравнения (9) и т. д.¹⁾.

2. Гринхилл в названной в примечании 3 на стр. 467 работе исследовал симметрические колебания воды в канале, поперечное сечение которого состоит из двух прямых, наклоненных к вертикали под углом в 60° . Для наиболее аналитически простого колебания этого рода мы будем иметь, опустив множитель, зависящий от времени,

$$\varphi + i\psi = iA(y + iz)^3 + B, \quad (14)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= Az(z^2 - 3y^2) + B, \\ \psi &= Ay(y^2 - 3z^2); \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

последняя формула дает $\psi=0$ вдоль границы $y = \pm \sqrt{3}z$. Условие на поверхности (3) будет выполняться для $z=h$, если

$$\sigma^2 = \frac{g}{h}, \quad B = 2Ah^3. \quad (16)$$

¹⁾ Rayleigh, Theory of Sound, § 178.

²⁾ Экспериментальное подтверждение частот и положений петель (т. е. мест наибольшей вертикальной амплитуды) было дано для различных нормальных колебаний Kirchhoff и Hantemann, Über stehende Schwingungen des Wassers, Wied. Ann., X [Kirchhoff, Ges. Abh., стр. 442].

$x_2 = x_1$. Первый член в формулах (16) и (17) оказывается теперь бесконечно большим, в то время как остальная часть выражения дает конечное значение. Чтобы в этом случае получить результат, имеющий смысл, мы должны удержать коэффициент трения μ' .

Полагая $\mu' = 2\tilde{\omega}^2$, будем иметь

$$(k - \varkappa)^2 + i\mu' = \{k - (\varkappa + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})\} \{k - (\varkappa - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})\}, \quad (25)$$

так что интеграл (10) можно теперь положить равным

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k - (\varkappa - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})} dk - \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k - (\varkappa + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})} dk \right\}. \quad (26)$$

Формулы § 243 показывают, что когда величина $\tilde{\omega}$ будет малой, то главная часть этого выражения для достаточно удаленных точек по обе стороны от начала будет равна

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}} 2\pi i e^{i\kappa x}. \quad (27)$$

Возышение поверхности определяется теперь из уравнения

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{\pi}{\mu^{1/2}} \cos \left(\kappa x - \frac{1}{4} \pi \right). \quad (28)$$

§ 272. Исследование Рэля¹⁾, от которого только что проведенное здесь отличается главным образом способом представления определенных интегралов, было предпринято с целью найти более удовлетворительное объяснение для некоторых явлений, описанных Скоттом Ресселем²⁾ и Кельвином³⁾.

Когда препятствие незначительных размеров, например, леска от уочки, движется медленно в спокойной воде или (что, конечно, сводится к тому же) находится в покое в движущейся жидкости, то поверхность жидкости покрывается красивыми волнами, которые по отношению к препятствию остаются неподвижными. На стороне, лежащей вверх по течению, длина волн будет короче, и колебания, как показал Томсон, главным образом обусловливаются капиллярными силами. На стороне, расположенной по течению, волны оказываются длиннее и главным образом зависят от силы тяжести. Обе системы волн движутся с одинаковой относительной скоростью по отношению к воде, что необходимо для того, чтобы они могли сохранять неизменное положение относительно препятствия. Это же обстоятельство обусловливает и скорость, а вместе с тем и длину волны в той части системы волн, в которой гребни расположены наклонно к направлению движения. Если обозначить угол между направлением движения и нормалью к фронту волн через θ , то скоп-

¹⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 498.

²⁾ Scott Russel, On Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.

³⁾ Kelvin, см. прим. выше, стр. 574.

Если предположить, что θ изменяется пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, то получим

$$\sigma^2 = \frac{8\pi}{48 - 3\pi^2} \cdot \frac{g}{h}, \quad (3)$$

или $\sigma = 1,169 \left(\frac{g}{a} \right)^{1/2}$.

В случае прямоугольного поперечного сечения ширины $2a$ и глубины a частота определяется из (4) § 257, где мы должны положить $k = \frac{\pi}{2a}$, согласно § 178, и $h = a$. Это дает

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \pi \operatorname{th} \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{g}{a}, \quad (4)$$

или $\sigma = 1,200 \left(\frac{g}{a} \right)^{1/2}$. В рассматриваемой задаче частота будет меньше, так как кинетическая энергия, зависящая от данного движения поверхности, будет больше, в то время как потенциальная энергия данной деформации останется той же самой; см. § 45.

§ 260. Мы можем теперь рассмотреть свободные колебания воды между двумя поперечными перегородками в горизонтальном канале постоянного сечения. Перед тем как переходить к частным случаям, исследуем пока общий характер математической задачи.

Если ось x будет параллельна длине, а начало координат взято на одном из концов, то потенциал скоростей, относящийся к одному из нормальных видов колебаний, может быть представлен по теории Фурье в виде

$$\varphi = (P_0 + P_1 \cos kx + P_2 \cos 2kx + \dots + P_s \cos skx + \dots) \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где $k = \frac{\pi}{l}$, если l обозначает длину секции. Коэффициенты P_s будут функциями от y и z . Если ось z проведем вертикально вверх, а ось y горизонтально, перпендикулярно к длине канала, то вид этих функций и допустимые значения σ будут определяться из уравнения непрерывности

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

и условий, что на стенках

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

а на свободной поверхности

$$\sigma^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4)$$

¹⁾ Lamb, Hydrodynamics, 2-е изд. (1895). Рэлей в качестве лучшего приближенного значения находит $\sigma = 1,1644 \left(\frac{g}{a} \right)^{1/2}$; см. Phil. Mag. (5), XLVII, 566 (1899) [Papers, IV, 407].

Так как $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ должно обращаться в нуль для $x=0$ и $x=l$, то, согласно известным теоремам 1), каждый член в выражении (1) должен удовлетворять условиям (2), (3), (4) независимо от других; поэтому мы должны иметь

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_s}{\partial z^2} - s^2 k^2 P_s = 0, \quad (5)$$

а на продольных границах

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

и на свободной поверхности

$$\sigma^2 P_s = g \frac{\partial P_s}{\partial z}. \quad (7)$$

Член P_0 представляет чисто поперечные колебания, такие, которые были рассмотрены в § 258. Другие члены $P_s \cos skx$ дают ряд нормальных колебаний с s узловыми линиями, направленными поперек канала, и узловыми линиями 0, 1, 2, 3, ..., параллельными его длине.

Для наших целей будет достаточно рассмотреть член $P_1 \cos kx$. Очевидно, что выражение

$$\varphi = P_1 \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (8)$$

с соответственно подобранный формой P_1 и тем значением σ , которое определяется по указанному выше способу, представляет потенциал скоростей возможной системы стоячих волн с произвольной длиной волны $\frac{2\pi}{k}$ в неограниченном канале заданного сечения. Как указано в § 129, наложением двух соответственно сопряженных систем стоячих волн этого типа мы теперь можем образовать систему прогрессивных волн, для которых

$$\varphi = P_1 \cos(kx \mp \sigma t). \quad (9)$$

Отсюда мы заключаем, что прогрессивные волны простого гармонического профиля с фиксированными длинами волн принадлежат к числу возможных для бесконечно длинного канала с произвольным постоянным сечением.

Мы можем итти и далее, подтверждая возможность бесконечного числа нормальных типов с произвольно заданной длиной волны и со скоростями распространения, изменяющимися от некоторого наименьшего значения до бесконечности. Однако, те типы, в которых имеют место продольные узловые линии на некотором расстоянии от боков, представляют с рассматриваемой точки зрения только подчиненное значение.

¹⁾ См. Stokes, On the Critical Values of the Sums of Periodic Series, Camb. Trans., VIII (1847) [Papers, I, 236].

Особо следует отметить два предельных случая, а именно тот, где длина волны очень велика, и тот, где она мала в сравнении с размерами поперечного сечения.

Наиболее интересен первый случай, не имеющий продольных узловых линий и охватываемый общей теорией „длинных“ волн, изложенной в §§ 169, 170. В этом случае мы можем получить только дополнительные сведения, например, о виде гребней волн в поперечном к каналу направлении.

В случае сравнительно коротких волн более важный тип есть тот, в котором гребни располагаются поперек канала с постепенно изменяющейся высотой и скорость распространения волн совпадает со скоростью свободных волн на глубокой воде, определяемой по формуле (6) § 229.

Имеются и другие короткие волны, которые проявляются тогда, когда берега будут наклонными; эти волны мы можем отличать названием „краевых волн“, так как их амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону при увеличении расстояния от берега. Действительно, если амплитуда на краях будет лежать в пределах, допускаемых нашим приближением, то она становится мало заметной на расстоянии, проекция которого на откос превышает длину волны. Скорость волны здесь будет *меньше* скорости волн той же длины на глубокой воде. Поэтому нет оснований считать этот тип волн очень важным.

Общая формула для этих краевых волн была дана Стоксом¹⁾. Выбирая начало на одном крае, ось z вертикально вверх, ось y перпендикулярно к каналу и рассматривая ширину как сравнительно бесконечно большую, указанную формулу можно представить в виде

$$\varphi = He^{-k(y \cos \beta - z \sin \beta)} \cos k(x - ct), \quad (10)$$

где β есть угол наклона берега к горизонту и

$$c = \left(\frac{g}{k} \sin \beta \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Читатель без труда сам может проверить этот результат.

§ 261. Приступим теперь к рассмотрению некоторых частных случаев. Мы будем исследовать вопрос только о стоячих волнах в бесконечно длинном канале или в его секции, ограниченной двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми есть кратное половине произвольной длины волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, но сами исследования можно легко видоизменить, подобно тому как в предшествующем параграфе, чтобы их распространить и на случай прогрессивных волн. Иногда будем формулировать результаты через скорость распространения волн.

¹⁾ Stokes, Report on Recent Researches in Hydrodynamics, Brit. Ass. Rep., 1846 [Papers, I, 167].

1. Решение для случая прямоугольного сечения при горизонтальном дне и вертикальных боковых сторонах может быть написано сразу на основании результатов §§ 190, 257. Узловые линии в этом случае суть продольные и поперечные, если только нет совпадения периодов двух различных типов, когда возможны более сложные формы. Последнее, например, будет встречаться в случае квадратного бассейна.

2. В случае канала, сечение которого состоит из двух прямолинейных отрезков, наклоненных под углом 45° к вертикали, мы будем иметь, прежде всего, тип, открытый Келланом, т. е. если ось x совпадает с линией дна канала, то

$$\varphi = A \operatorname{ch} \frac{ky}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \frac{kz}{\sqrt{2}} \cos kx \cos (\sigma t + \epsilon). \quad (1)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$ и для $y = \pm z$ соответственно дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Условие на поверхности [(4) § 260] тогда будет давать

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{kh}{\sqrt{2}}, \quad (3)$$

где h — возвышение свободной поверхности над линией дна. Если мы положим $\sigma = kc$, то скорость волны будет представляться формулой

$$c^2 = \frac{g}{k \sqrt{2}} \operatorname{th} \frac{kh}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а λ — длина волны.

Когда $\frac{h}{\lambda}$ будет мало, формула (4) приводится к выражению

$$c = \left(\frac{1}{2} gh \right)^{1/2}, \quad (5)$$

что находится в согласии с (13) § 170, так как средняя глубина теперь обозначается через $\frac{1}{2} h$ ¹⁾. Если же, с другой стороны, $\frac{h}{\lambda}$ будет значительно большим, то будем иметь

$$c^2 = \frac{g}{k \sqrt{2}}. \quad (6)$$

Формула (1) в этом случае обнаруживает быстрое возрастание амплитуды при подходе к боковым стенкам. В действительности мы будем иметь здесь пример „краевых волн“, и скорость волны будет совпадать с той скоростью, которую мы получим из формулы Стокса, полагая в ней $\beta = 45^\circ$.

Остальные типы колебаний, симметричные по отношению к срединной плоскости $y = 0$, будут представляться формулой

$$\varphi = C (\operatorname{ch} ay \cos \beta z + \cos \beta y \operatorname{ch} az) \cos kx \cos (\sigma t + \epsilon), \quad (7)$$

при соответственном подборе a , β , σ . Это выражение удовлетворяет условию (2), а уравнение непрерывности будет давать

$$a^2 - \beta^2 = k^2. \quad (8)$$

Границное условие (4) § 260 будет удовлетворено для $z=h$, если потребовать

$$\sigma^2 \operatorname{ch} ah = g\alpha \operatorname{sh} ah, \quad \sigma^2 \cos \beta h = -g\beta \sin \beta h. \quad (9)$$

Отсюда получаем

$$ah \operatorname{tg} h ah + \beta h \operatorname{tg} \beta h = 0. \quad (10)$$

Таким образом, значения α и β определяются из соотношений (8) и (10), а соответственное значение σ будет даваться тем или другим уравнением (9). Если мы на момент положим

$$x = ah, \quad y = \beta h, \quad (11)$$

то корни уравнений (8) и (10) будут представляться точками пересечения кривой

$$x \operatorname{tg} hx + y \operatorname{tg} y = 0, \quad (12)$$

общий вид которой легко начертить, с гиперболой

$$x^2 - y^2 = k^2 h^2. \quad (13)$$

Действительных решений будет бесконечное число, причем соответствующие значения βh располагаются во втором, четвертом, шестом ... квадрантах. Последние и дают соответственно 2, 4, 6, ... продольные узлы свободной поверхности. Если $\frac{h}{k}$ будет значительно большим, то приближенно $\operatorname{th} ah = 1$ и βh будет (при простейшем типе колебаний этого класса) немножко превышать значение $\frac{\pi}{2}$. Два продольных узла в этом случае очень близко подходят к краям с уменьшением λ , тогда как скорость волны становится практически равной скорости волны длины λ на глубокой воде. В качестве числового примера положим $\beta h = 1,1 \cdot \frac{\pi}{2}$, тогда найдем

$$ah = 10,910, \quad kh = 10,772, \quad c = 1,0064 \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2}.$$

Расстояние одной из узловых линий от ближайшего края будет тогда $0,12h$.

Мы можем, далее, рассмотреть асимметричные типы. Решение такого типа, аналогичное типу Келланда, было замечено Гринхиллом (см. выше). Оно представляется в виде

$$\varphi = A \operatorname{sh} \frac{ky}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{kz}{\sqrt{2}} \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (14)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{gk}{V^2} \operatorname{ctgh} \frac{kh}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Когда kh мало, последнее дает $\sigma^2 = \frac{g}{h}$, так что частота будет значительно больше в сравнении с той, которая получается из теории „длинных“ волн. В действительности будут иметь место главным образом по-перечные колебания с очень постепенным изменением фаз при продвижении вдоль канала. И, конечно, средняя линия поверхности будет узловой. Если, с другой стороны, kh будет велико, то мы получим „краевые волны“, как и в случае решения Келланда.

Остальные асимметричные колебания представляются формулой

$$\varphi = A (\sin \alpha y \sin \beta z + \sin \beta y \sin \alpha z) \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon). \quad (16)$$

Из этой формулы тем же способом, что и раньше, получим

$$\alpha^2 - \beta^2 = k^2; \quad (17)$$

и

$$\alpha^2 \sin \alpha h = g\alpha \cosh \alpha h, \quad \alpha^2 \sin \beta h = g\beta \cos \beta h, \quad (18)$$

где

$$\alpha h \operatorname{ctgh} \alpha h = \beta h \operatorname{ctg} \beta h. \quad (19)$$

Имеется бесконечное число решений, для которых значения βh лежат в третьем, пятом, седьмом, ... квадрантах и представляют 3, 5, 7, ... продольные узлы, один из которых является центральным.

3. Случай канала с боковыми сторонами, наклоненными к вертикали под углом в 60° , был изучен Макдональдом ¹⁾. Он установил очень широкий тип, к которому можно притти следующим образом.

Выражение

$$\varphi = P \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (20)$$

где

$$P = A \operatorname{ch} kz + B \operatorname{sh} kz + \operatorname{ch} \frac{ky \sqrt{3}}{2} \left(C \operatorname{ch} \frac{kz}{2} + D \operatorname{sh} \frac{kz}{2} \right), \quad (21)$$

очевидно, удовлетворяет уравнению неразрывности. Легко показать, что оно для $y = \pm \sqrt{3}z$ дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \pm \sqrt{3} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

при условии

$$C = 2A, \quad D = -2B. \quad (22)$$

Границное условие (4) § 260 будет тогда удовлетворено, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma^2}{gk} (A \operatorname{ch} kh + B \operatorname{sh} kh) &= A \operatorname{sh} kh + B \operatorname{ch} kh, \\ \frac{2\sigma^2}{gk} \left(A \operatorname{ch} \frac{kh}{2} - B \operatorname{sh} \frac{kh}{2} \right) &= A \operatorname{sh} \frac{kh}{2} - B \operatorname{ch} \frac{kh}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Первое из них эквивалентно соотношениям

$$A = H \left(\operatorname{ch} kh - \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} kh \right), \quad B = H \left(\frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{ch} kh - \operatorname{sh} kh \right), \quad (24)$$

а последнее приводится тогда к уравнению

$$2 \left(\frac{\sigma^2}{gk} \right)^2 - 3 \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{ctgh} 3 \frac{kh}{2} + 1 = 0. \quad (25)$$

Таким образом, подставляя из (22) и (24) в (21), получим

$$\begin{aligned} P = H &\left\{ \operatorname{ch} k(z-h) + \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} k(z-h) \right\} + \\ &+ 2H \operatorname{ch} \frac{ky \sqrt{3}}{2} \left\{ \operatorname{ch} k \left(\frac{z}{2} + h \right) - \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} k \left(\frac{z}{2} + h \right) \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Mac donald, Waves in Canals, Proc. Lond. Math. Soc., XXV, 101 (1894);

Формулы (25) и (26) и были установлены Макдональдом, но другим способом. Границное значение P представляется в виде

$$P = H \left\{ 1 + 2 \operatorname{ch} \frac{ky\sqrt{3}}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{3kh}{2} - \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{sh} \frac{3kh}{2} \right) \right\}. \quad (27)$$

Уравнение (25) является квадратным относительно $\frac{\sigma^2}{gk}$. В случае волны, длина которой $(\frac{2\pi}{k})$ велика по отношению к h , будем иметь приближенно

$$\operatorname{ctgh} \frac{3kh}{2} = \frac{2}{3kh},$$

и корни (25) будут тогда приближенно равны

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{2} kh \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{kh}. \quad (28)$$

Если мы положим $\sigma = kc$, то первый результат дает $c^2 = \frac{1}{2} gh$ в согласии с обычной теорией „длинных волн“ (§§ 169, 170). В этом случае формула (27) дает приближенно $P = 3H$; последнее не зависит от y ; это значит, что гребни волны будут почти прямолинейными. Второй корень (28) дает $c^2 = \frac{g}{kh}$, т. е. представляет значительную большую „фазовую скорость“, но ничего парадоксального в этом нет. *Групповая* скорость на самом деле будет сравнительно малой. При дальнейшем исследовании можно найти, что поперечные сечения волны будут по форме параболическими и что имеются две узловые линии, параллельные длине канала. Период колебаний будет почти в точности совпадать с периодом симметричных поперечных колебаний, о которых шла речь в § 258.

Если, с другой стороны, длина волны будет короткой в сравнении с поперечными размерами канала, то kh будет велико и приближенно $\operatorname{ctgh} \frac{3}{2} kh = 1$. Тогда корни уравнения (25) будут приближенно

$$\frac{\sigma^2}{gk} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{gk} = \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Первый корень дает примерно $P = H$, т. е. гребни волн будут прямолинейными, обнаруживая только небольшое изменение высот в направлении к боковым стенкам. Частота $\sigma = (gk)^{1/2}$ в точности есть та частота, которую мы могли бы ожидать на основании общей теории волн на сравнительно глубокой воде.

Если мы в этом случае перенесем начало на один край, полагая $z+h$ вместо z и $y-\sqrt{3}h$ вместо y , и затем устремим h к бесконечности, то получим случай системы волн, перемещающихся параллельно берегу, который наклонен в сторону течения под углом в 30° к горизонту. В результате имеем,

$$\varphi = H \left\{ e^{kz} + e^{-\frac{1}{2} k(y\sqrt{3}+z)} - 3e^{-\frac{1}{2} k(y\sqrt{3}-z)} \right\} \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (30)$$

где $\sigma = (gk)^{1/2}$. Эта формула допускает непосредственную проверку. На расстоянии длины волны или на таком же расстоянии от берега значение φ вблизи поверхности практически будет приводиться к выражению

$$\varphi = He^{kz} \cos kx \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (31)$$

что согласуется с § 228. Вблизи края возвышение изменяет знак, так как там имеется продольная узловая линия, для которой

$$\sqrt{\frac{3}{2}} ky = \ln 2, \quad (32)$$

или $\frac{y}{\lambda} = 0,127$.

Второй из двух корней (29) дает систему краевых волн, и результаты будут эквивалентны тем результатам, которые получатся, полагая $\beta = 30^\circ$ в формуле Стокса ¹⁾.

Колебания сферической массы жидкости.

§ 262. Теорией гравитационных колебаний массы жидкости относительно ее сферической формы мы обязаны Кельвину ²⁾.

Выбирая начало в центре и обозначая радиус-вектор произвольной точки свободной поверхности через $a + \zeta$, где a — радиус в невозмущенном состоянии, мы принимаем

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n, \quad (1)$$

где ζ_n есть поверхностная сферическая функция целого порядка n . Уравнение неразрывности $\nabla^2 \varphi = 0$ удовлетворяется выражением

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} S_n, \quad (2)$$

где S_n — сферическая поверхностная функция, а кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

будучи удовлетворено при $r = a$, дает

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = - \frac{n}{a} S_n. \quad (4)$$

На свободной поверхности гравитационный потенциал (см. § 200) имеет значение

$$\Omega = - \frac{4\pi \gamma \varrho a^3}{3r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi \gamma \varrho a}{2n+1} \zeta_n, \quad (5)$$

¹⁾ О распространении на другие углы наклона берега смотреть Hanson, Proc. Roy. Soc., A, CXI, 491 (1926).

²⁾ W. Thomson, Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid, Phil. on Trans., 1863 [Papers, 11, 384].

где γ есть гравитационная постоянная. Полагая

$$g = \frac{4}{3} \pi \gamma \rho a, \quad r = a + \sum \zeta_n,$$

получим

$$\Omega = \text{const.} + g \sum_1^{\infty} \frac{2(n-1)}{2n+1} \zeta_n. \quad (6)$$

Подставляя из (2) и (6) в уравнение давлений

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega + \text{const.} \quad (7)$$

и принимая p постоянным вдоль поверхности, мы получим

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = \frac{2(n-1)}{2n+1} g \zeta_n. \quad (8)$$

Исключая S_n из (4) и (8), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial t^2} + \frac{2n(n-1)}{2n+1} \frac{g}{a} \zeta_n = 0. \quad (9)$$

Последняя формула показывает, что ζ_n пропорционально $\cos(\sigma_n t + \varepsilon)$, где

$$\sigma_n^2 = \frac{2n(n-1)}{2n+1} \frac{g}{a}. \quad (10)$$

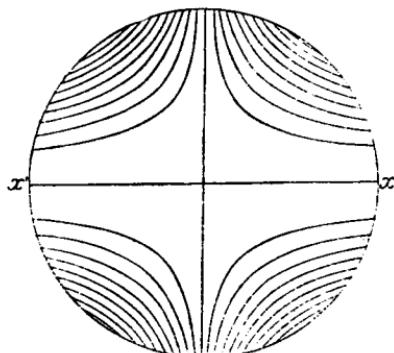
При одинаковой плотности жидкости g пропорционально a ; это значит, что частота не зависит от размера шара.

Формула дает $\sigma_1 = 0$, как и следовало ожидать, так как при малых деформациях, представляемых сферической функцией первого порядка, поверхность остается сферической и период, следовательно, будет бесконечно длинным.

Для случая $n=2$, или при эллипсоидальной деформации, длина изохронного простого маятника становится равной $\frac{4}{5}a$ или составляет один с четвертью радиуса Земли для однородного жидкого шара той же массы и того же диаметра, что и Земля; следовательно, для этого

случая или для какого-либо однородного шара с $5\frac{1}{2}$ -кратной плотностью воды полупериод будет равен 47 мин. 12 сек.

„Стальной шар тех же размеров без взаимного притяжения своих частиц вряд ли мог бы колебаться так быстро, так как скорость плоских волн возмущения в стали составляет приблизительно только 3090 м



Фиг. 69.

в секунду; с такой скоростью расстояние, равное диаметру Земли, нельзя пройти в меньшее время, чем 1 час 8 мин. 40 сек.¹⁾.

Когда поверхность совершает колебания вида зонального гармонического сфероида второго порядка, тогда уравнение линий тока представляется в виде $x\omega^2 = \text{const.}$, где ω обозначает расстояние какой-либо точки от оси симметрии, которая принимается за ось x [см. (11) § 95]. Вид этих линий для ряда эквидистантных значений постоянного показан на фиг. 69.

§ 263. Эта проблема может быть также изучена очень компактно методом „нормальных координат“ (§ 168).

Кинетическая энергия представляется формулой

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS, \quad (11)$$

где dS есть элемент поверхности $r = a$. Отсюда, если поверхность совершает колебания в виде $r = a + \zeta_n$, то, подставляя из формул (2) и (4) в (11), мы найдем

$$T = \frac{1}{2} \frac{\varrho a}{n} \int \int \zeta_n^2 dS. \quad (12)$$

Чтобы найти потенциальную энергию, мы можем допустить, что внешняя поверхность сдавливается, чтобы принимать последовательно формы $r = a + \theta \zeta_n$, где θ изменяется от 0 до 1. В каком-либо состоянии этого процесса гравитационный потенциал на поверхности, согласно (6), будет

$$\Omega = \text{const.} + \frac{2(n-1)}{2n+1} g \theta \zeta_n. \quad (13)$$

А тогда работа, потребная для приращения слоя толщины ζ_n и $\delta\theta$, будет равна

$$\theta \delta\theta \frac{2(n-1)}{2n+1} g \varrho \int \int \zeta_n^2 dS. \quad (14)$$

Интегрируя от $\theta = 0$ до $\theta = 1$, мы найдем

$$V = \frac{n-1}{2n+1} g \varrho \int \int \zeta_n^2 dS. \quad (15)$$

Результаты, отвечающие общей деформации (1), получаются представлением знака \sum суммирования по n в формулы (12) и (15), так как члены с произведениями поверхностных сферических функций разных порядков будут, согласно § 87, исчезать.

¹⁾ W. Thomson, см. выше. Точная теория колебаний упругой сферы для самого медленного колебания стального шара с размерами Земли дает период в 1 час 18 мин. См. работу „On the Vibrations of an Elastic Sphere“, Proc. Lond. Math. Soc., XIII, 212 (1882). Вибрации сферы с несжимаемым веществом при совместном влиянии притяжения и упругости были исследованы Brounwich, Proc. Lond. Math. Soc., XXX, 98 (1898). Влияние сжимаемости изучено Love, Some Problems of Geodynamics (Adams Prize Essay), Cambridge (1911), стр. 126.

Тот факт, что общие выражения для T и V приводятся к сумме квадратов, показывает, что деформация, отвечающая произвольной поверхности-сферической функции, принадлежит к „нормальному типу“. Таким образом, принимая ζ_n пропорциональной $\cos(\sigma_n t + \varepsilon)$, на основании того, что энергия $T + V$ должна быть постоянной, мы снова приходим к результату (10).

В случае вынужденных колебаний, отвечающих потенциалу возмущения $\Omega' \cos(\sigma t + \varepsilon)$, который во всех точках внутри жидкости удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \Omega' = 0$, мы должны предполагать Ω' разложенной в ряд по объемным сферическим функциям. Если $\bar{\zeta}_n$ будет равновесное возвышение, отвечающее члену порядка n , то при вынужденном колебании, согласно (14) § 168, мы будем иметь

$$\zeta_n = \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}} \bar{\zeta}_n, \quad (16)$$

где σ — частота вынужденных колебаний, а σ_n — частота свободных колебаний того же типа, который представлен формулой (10).

Числовые результаты, приведенные выше для случая $n = 2$, показывают, что для невращающегося жидкого шара с теми же размерами и с той же средней плотностью, что и у Земли, вынужденные колебания, характер и периоды которых совпадают с действительными лунными и солнечными приливами, будут иметь практически те амплитуды, которые фигурируют в статической теории.

§ 264. Исследование легко распространить на случай океана произвольной постоянной глубины, покрывающего симметричное сферическое ядро.

Пусть b — радиус ядра и a — радиус внешней поверхности. Пусть вид поверхности представляется уравнением

$$r = a + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n, \quad (1)$$

тогда для потенциала скоростей мы принимаем

$$\varphi = \left\{ (n+1) \frac{r^n}{b^n} + n \frac{b^{n+1}}{r^{n+1}} \right\} S_n, \quad (2)$$

где коэффициент подобран так, чтобы для $r = b$ получилось $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$.

Условие, что для $r = a$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

дает

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t} = -n(n+1) \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^n - \left(\frac{b}{a} \right)^{n+1} \right\} \frac{S_n}{a}. \quad (4)$$

Для гравитационного потенциала на свободной поверхности (1) мы будем иметь

$$\Omega = -\frac{4\pi\gamma\rho_0 a^3}{3r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi\gamma\rho a}{2n+1} \zeta_n, \quad (5)$$

где ρ_0 — средняя плотность всей массы. Отсюда, полагая $g = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0 a$, мы найдем

$$\Omega = \text{const} + g \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \zeta_n. \quad (6)$$

Условие для давления на свободной поверхности тогда будет давать

$$\left\{(n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^n + n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right\} \frac{\partial S_n}{\partial t} = \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) g \zeta_n. \quad (7)$$

При исключении S_n из уравнений (4) и (7) получим

$$\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial t^2} + \sigma_n^2 \zeta_n = 0, \quad (8)$$

где

$$\sigma_n^2 = \frac{n(n+1) \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \right\}}{(n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^n + n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}} \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{g}{a}. \quad (9)$$

Случай $n=1$ является исключением, так как при вычислениях ядро предполагалось неподвижным. Однако, оказывается, что σ_1 обращается в нуль при $\rho=\rho_0$ и становится минимум при $\rho>\rho_0$, как и следовало ожидать. Поправка едва ли будет значительной, но все же можно показать, что если ядро не будет закреплено, то результат, получаемый из уравнения (9)

$$\sigma_1^2 = \frac{1 - \frac{b^3}{a^3}}{1 + \frac{b^3}{a^3}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{g}{a}, \quad (10)$$

должен быть увеличен в отношении

$$\frac{1 + \frac{b^3}{2a^3}}{1 + \frac{b^3}{2a^3} - \frac{m}{M}},$$

где M есть вся масса, а m — масса только одного океана. Заключение же об устойчивости остается неизменным.

Если в выражении (9) положить $b=0$, то мы воспроизведем результат предшествующего параграфа. С другой стороны, если глубина океана будет мала в сравнении с радиусом, то, полагая $b=a-h$ и пренебрегая квадратом h/a , мы найдем

$$\sigma_n^2 = n(n+1) \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{gh}{a^2}. \quad (11)$$

при условии, что n будет малым по отношению к a/h . А это согласуется с результатом Лапласа, полученным более прямым способом в § 200.

Но если n будет сравнимым с a/h , то мы будем иметь, полагая $n = ka$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(1 - \frac{h}{a}\right)^{-ka} = e^{kh},$$

а тогда (9) приводится к тому же выражению, как и в § 228,

$$\sigma^2 = gk \tanh kh. \quad (12)$$

Более того, выражение (2) для потенциала скоростей, если мы положим $r = a + z$, принимает вид

$$\varphi = \varphi_1 \operatorname{ch} k(z + h), \quad (13)$$

где φ_1 есть функция координат на поверхности, которую теперь мы можем рассматривать как плоскость (ср. § 257).

Формулы для кинетической и потенциальной энергии, легко устанавливаемые по тому же методу, как и в предшествующем параграфе, будут

$$T = \frac{1}{2} \rho a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) \left(\frac{a}{b}\right)^n + n \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{n(n+1) \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \right\}} \iint \zeta_n^2 dS, \quad (14)$$

$$V = \frac{1}{2} g \rho \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2n+1} \frac{\rho}{\rho_0} \right) \iint \zeta_n^2 dS. \quad (15)$$

Последний результат снова показывает, что равновесная конфигурация есть конфигурация с минимальным значением потенциальной энергии и будет, следовательно, наверно устойчивой, если только $\rho < \rho_0$.

В случае, когда глубина является относительно малой, а n является конечным, полагая $b = a - h$, мы получим

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho a^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \iint \zeta_n^2 dS, \quad (16)$$

тогда как выражение для V , естественно, остается неизменным.

Если амплитуды гармоник ζ_n рассматривать как обобщенные координаты, то формула (16) показывает, что при сравнительно малых глубинах "коэффициенты инерции" изменяются обратно пропорционально глубине. Мы имели и другие иллюстрации эффекта связей при нашем рассмотрении приливных волн.

Капиллярность.

§ 265. Роль, которую играет в некоторых случаях движение жидкости молекулярное сцепление, признавалась давно в общих чертах, но только сравнительно недавно этот вопрос был подчинен точному математическому анализу. Мы приведем некоторые результаты замечательных исследований Кельвина и Рэлея в этом вопросе.

В нашу задачу не входит дать физическую теорию этого вопроса¹⁾. Для наших целей достаточно будет знать, что свободная

¹⁾ См. Максвелл, Encyc. Britann., статья "Capillary Action" [Papers, Cambridge, 1890, II, 541], где есть ссылки на более ранних авторов. Далее, Rayleigh, On the Theory of Surface Forces, Phil. Mag. (5), XXX, 285, 456 (1890). [Papers, III, 397].

поверхность жидкости или, в более общем случае, поверхность раздела двух несмешивающихся жидкостей ведет себя так, как если бы она находилась в состоянии равномерного *натяжения*, причем натяжение между двумя соседними частями поверхности, отнесенное к единице длины общей линии раздела, зависит только от природы обеих жидкостей и от температуры. Мы будем обозначать это так называемое „поверхностное натяжение“ буквой T_1 . Размерность этой величины в абсолютной системе единиц есть MT^{-2} . Значение ее в системе единиц *CCS* (дина на сантиметр) для поверхности раздела вода — воздух при температуре 20°C оказывается приблизительно равным 74¹⁾; при возрастании температуры это значение несколько убывает. Соответствующее значение для поверхности раздела ртуть — воздух приблизительно равно 540.

Можно высказать следующее положение, равносильное тому, что было изложено:

„Свободная“ энергия каждой системы, к которой принадлежит рассматриваемая поверхность, содержит член, пропорциональный площади поверхности, причем значение этой „поверхностной энергии“ (как она обычно называется), отнесенное к единице поверхности, равно T_1 ²⁾. Так как условие устойчивости равновесия заключается в том, что свободная энергия должна быть наименьшей, то поверхность стремится сокращаться до тех пор, пока это оказывается совместимым с другими условиями задачи.

Существенное изменение в наших прежних методах, которое оказывается необходимым, если мы принимаем во внимание поверхностное натяжение, заключается в предложении, что давление жидкости на поверхности раздела испытывает теперь разрыв; именно, мы будем иметь

$$p - p' = T_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где p , p' обозначают давления на обеих сторонах поверхности, близи от нее, а R_1 , R_2 суть главные радиусы кривизны поверхности, причем радиус нужно считать отрицательным, когда соответствующий центр кривизны лежит на стороне, отмеченной значком штрих.

Эту формулу можно легко получить, определяя компоненты в направлении нормали к поверхности сил, действующих на прямоугольный элемент тонкого поверхностного слоя, ограниченный линиями кривизны; но здесь нет необходимости приводить это доказательство, которое можно найти почти во всех современных учебниках по гидростатике.

1) Rayleigh, On the Tension of Water-Surfaces, Clean and Contaminated, investigated by the method of Ripples, Phil. Mag. (5), XXX, 386 (1890) [Papers, III, 394]; Pedersen, Phil. Trans. A, CCVII, 341 (1907); Böhr, Phil. Trans. A, CCIX, 281 (1909).

2) Различие между „свободной“ и „внутренней“ энергией основывается на термодинамических принципах. В процессах с постоянной температурой и свободным теплообменом речь идет о свободной энергии.

§ 266. Простейшая задача, с которой мы можем начать, есть задача о волнах на плоской поверхности, образующей общую границу двух покоющихся жидкостей.

Если мы возьмем начало на этой плоскости, а ось u перпендикулярно к ней, то можем положить потенциалы скоростей, отвечающих простым гармоническим колебаниям поверхности раздела, равными

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= Ce^{ky} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \\ \varphi' &= C'e^{-ky} \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем первое равенство относится к той стороне, где y отрицательно, а второе — к той стороне, где y положительно. В самом деле, эти выражения удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\varphi' = 0$$

и дают для $y = \mp \infty$ скорость, равную нулю.

Соответствующие перемещения точек поверхности в направлении оси u будут иметь вид

$$\eta = a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (2)$$

а условие что при $y = 0$ должно быть

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y},$$

даст

$$\sigma a = -kC = kC'. \quad (3)$$

Если мы на мгновение оставим в стороне силу тяжести, то переменная часть давления будет дана равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{e} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 a}{k} e^{ky} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ p' &= \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 a}{k} e^{-ky} \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти условие, которому должно удовлетворять давление на общей поверхности, вычислим силы, действующие в направлении оси u на отрезок шириной δx . Давления жидкости на обеих сторонах имеют результирующую $(p' - p) \delta x$, разность же напряжений, параллельных оси u , для обоих краев равна $\delta \left(T' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$. Мы получаем, таким образом, уравнение

$$p - p' + T_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

которое должно иметь место, когда приближенно $y = 0$. Можно было бы прямо написать это уравнение как частный случай обще-

то граничного условия (§ 265). Подставляя из (2) и (4) в (5), находим

$$\sigma^2 = \frac{T_1 k^2}{\rho + \rho'} ; \quad (6)$$

это уравнение определяет скорость для колебаний с длиной волны $\frac{2\pi}{k}$.

Кинетическая энергия жидкости, отнесенная к длине волны, если жидкость заключена между двумя плоскостями, параллельными плоскостям xy и отстоящими друг от друга на единицу длины, равна

$$T = -\frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{y=0} dx - \frac{1}{2} \rho' \int_0^\lambda \left[\varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right]_{y=0} dx. \quad (7)$$

Если мы примем

$$\eta = a \cos kx, \quad (8)$$

где a зависит только от t , и положим, имея в виду кинематические условия,

$$\begin{cases} \varphi = -k^{-1} a e^{ky} \cos kx, \\ \varphi' = k^{-1} a e^{-ky} \cos kx, \end{cases} \quad (9)$$

то получим

$$T = \frac{1}{4} (\rho + \rho') k^{-1} a^2 \lambda. \quad (10)$$

Далее, потенциальная энергия, соответствующая растяжению поверхности раздела, будет равна

$$V = T_1 \int_0^\lambda \left\{ 1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} dx - T_1 \lambda = \frac{1}{2} T_1 \int_0^\lambda \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (11)$$

Подставляя значение η из (8), получим

$$V = \frac{1}{4} T_1 k^2 a^2 \lambda. \quad (12)$$

Чтобы получить среднюю энергию как кинетическую, так и потенциальную на единицу площади поверхности раздела, мы должны отбросить множитель λ .

Если предположим, что a пропорционально $\cos(\sigma t + \varepsilon)$, где σ определяется формулой (6), то увидим, что полная энергия $T + V$ будет постоянной. С другой стороны, полагая

$$\eta = \sum (a \cos kx + \beta \sin kx). \quad (13)$$

легко увидим, что выражения для T и V приведутся к суммам квадратов α , β и, соответственно, a , β с постоянными коэффициентами, так что величины α , β суть „нормальные координаты“. Тогда общая теория § 168 независимо приводит к формуле (6) для скорости.

Если мы объединим вместе, как в § 229, две системы стоячих волн, то получим прогрессивную систему волн

$$\eta = a \cos(kx \mp \sigma t), \quad (14)$$

которая движется со скоростью

$$c = \frac{\sigma}{k} = \left(\frac{T_1 k}{\varrho + \varrho'} \right)^{1/2}; \quad (15)$$

выражая скорость через длину волны, будем иметь

$$c = \left(\frac{2\pi T_1}{\varrho + \varrho'} \right)^{1/2} \lambda^{-1/2}. \quad (16)$$

Заслуживает замечания отличие этого результата от результата § 229; если длина волны убывает, то период убывает еще быстрее, так что волновая скорость *возрастает*.

Так как c изменяется как $\lambda^{-1/2}$, то групповая скорость на основании (3) § 236 равна

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = \frac{3}{2} c. \quad (17)$$

Представляет интерес проверка соотношения между групповой скоростью и скоростью переноса энергии.

Полагая

$$\eta = a \cos k(ct - x), \quad (18)$$

находим на основании формул (10), (12) для общей энергии на единицу поверхности раздела выражение

$$\frac{1}{4} (\varrho + \varrho') k c^3 a^3 + \frac{1}{4} T_1 k^2 a^2 = \frac{1}{2} (\varrho + \varrho') k c^3 a^2. \quad (19)$$

Средняя работа, произведенная в единицу времени давлением жидкости на плоскость, перпендикулярную к оси x , может быть найдена при помощи вычисления, подобного вычислениям § 237, и оказывается равной

$$\frac{1}{4} (\varrho + \varrho') k c^3 a^2. \quad (20)$$

Работа поверхностного натяжения на такой плоскости, отнесенная к единице времени, будет равна

$$T_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = T_1 k^2 c a^2 \sin^2 k(ct - x),$$

и среднее значение ее есть

$$-\frac{1}{2} T_1 k^2 c a^2 = \frac{1}{2} (\varrho + \varrho') k c^3 a^2. \quad (21)$$

Если сложим это выражение с выражением (20) и разделим потом на правую часть формулы (19), то в частном получится $\frac{3}{2} c$, в согласии с формулой (17).

То обстоятельство, что групповая скорость для капиллярных волн превосходит скорость самих волн, помогает объяснить некоторые интересные явления, о которых речь будет позднее (§§ 271, 272).

В качестве числового примера рассмотрим случай свободной поверхности воды.

Полагая

$$\varrho = 1, \quad \varrho' = 0, \quad T_1 = 74,$$

получим следующие результаты (в сантиметрах и секундах)¹⁾:

§ 267. Если ввести в рассмотрение силу тяжести, то общая поверхность в состоянии равновесия будет, конечно, горизонтальной плоскостью. Направив положительную ось y вверх, получим для определения давления на возмущенной поверхности раздела следующие приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy = \left(\frac{\sigma^2}{k} - g \right) a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ p' &= \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gy = - \left(\frac{\sigma^2}{k} + g \right) a \cos kx \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

После подстановки в уравнение (5) § 266 получится

$$\sigma^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} gk + \frac{T_1 k^3}{\varrho + \varrho'}. \quad (2)$$

Если положим $\sigma = kc$, то найдем для квадрата скорости ряда прогрессивных волн выражение

$$c^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} \frac{g}{k} + \frac{T_1}{\varrho - \varrho'} k = \frac{1-s}{1+s} \left(\frac{g}{k} + T' k \right), \quad (3)$$

где обозначено

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = s, \quad \frac{T_1}{\varrho - \varrho'} = T'. \quad (4)$$

В частных случаях $T_1 = 0$ и соответственно $g = 0$ мы опять получаем результаты §§ 231 и 266.

По отношению к формуле (3) нужно сделать несколько замечаний. Прежде всего, хотя значение σ постоянно возрастает, когда длина

1) Ср. W. Thomson, Papers, III, 520.

Изложенная теория дает объяснение той ряби, которую можно наблюдать на поверхности воды в стакане, когда этот стакан легкими ударами смоченным пальцем о край приводится в колебание. Следует, однако, заметить, что частота капиллярных волн в этом опыте оказывается *двое* больше частоты колебаний самого стакана; см. Rayleigh, On Maintained Vibrations. Phil. Mag. (5) XV. 229 (1883) [Papers, II, 188; Theory of Sound, 2 изд., гл. 20].

волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ убывает от ∞ до 0, однако, скорость волн, после того как она упадет до известного минимума, начинает опять возрастать. Значение этого минимума, которое мы обозначим c_m , определяется равенством

$$c_m^2 = \frac{1-s}{1+s} 2(gT')^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

и отвечает длине волны

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2\pi \sqrt{\frac{T'}{g}}. \quad (6)^1)$$

Формулу (3), если ввести в нее λ_m и c_m , можно записать в виде

$$\frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right); \quad (7)$$

это показывает, что для каждого заданного значения c , большего c_m , существует два допустимых (взаимных) значения $\frac{\lambda}{\lambda_m}$. Например, значениям

$$\frac{c}{c_m} = 1,2, \quad 1,4, \quad 1,6, \quad 1,8, \quad 2,0$$

отвечают значения

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \begin{cases} 2,476, & 3,646, & 4,917, & 6,322, & 7,873 \\ 0,404, & 0,274, & 0,203, & 0,158, & 0,127 \end{cases}$$

добавим к этому еще значения

$$\arcsin \frac{c_m}{c} = 56^\circ 26', \quad 45^\circ 35', \quad 38^\circ 41', \quad 33^\circ 45', \quad 30^\circ,$$

которыми мы воспользуемся позднее.

Для достаточно больших значений λ первый член в формуле (3) для c^2 оказывается большим по сравнению с вторым членом; поэтому силой, обуславливающей волновое движение, будет являться главным образом сила тяжести. Если же величина λ очень мала, то становится преобладающим второй член, и движение определяется, как в § 266, главным образом силами сцепления. Чтобы указать порядок входящих в рассмотрение величин, заметим, что для $\frac{\lambda}{\lambda_m} > 3$ влияние сил сцепления на длину волны можно оценить примерно в 5%, а влияние

¹⁾ Теория минимума скорости волн так же, как и большая часть содержания §§ 266, 267, принадлежит W. Thomson, Hydrokinetic Solutions and Observations, Phil. Mag. (1) XLII, 374 (1871) [Papers, IV, 76]; см. также Nature V. I (1871).

силы тяжести оказывается в такой же степени незначительным, когда $\frac{\lambda}{\lambda_m} < \frac{1}{3}$.

Кельвин предложил называть рябью волны, длина которых меньше, чем λ_m .

Подставляя значение для $\frac{dc}{d\lambda}$ из формулы (7) в общую формулу для групповой скорости [§ 236 (3)], находим

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \lambda_m^2}{\lambda^2 + \lambda_m^2} \right). \quad (8)$$

Групповая скорость, таким образом, будет больше или меньше скорости самих волн, смотря по тому, какое из двух неравенств $\lambda \leq \lambda_m$ имеет место. Для достаточно длинных волн групповая скорость практически равна $\frac{1}{2}c$, в то время как для коротких волн она приближается к значению $\frac{3}{2}c$ ¹.

Относительная важность тяжести и сцепления в зависимости от значения λ может быть обнаружена на виде выражения для потенциальной энергии при деформации типа

$$\eta = a \cos kx. \quad (9)$$

Та часть энергии, которая получается в результате растяжения граничной поверхности и относится к единице площади, имеет своим значением

$$\frac{\pi^2 T_1 a^2}{\lambda^2}, \quad (10)$$

в то время как относящаяся к тяжести часть равна

$$\frac{1}{2} g (\varrho - \varrho') a^2. \quad (11)$$

При уменьшении λ выражение (10) становится все более и более важным во сравнении с выражением (11).

При тех же числовых данных, как и выше, и при $g = 981$ находим для поверхности воды из формул (5) и (6)

$$\lambda_m = 1,73, \quad c_m = 23,2,$$

причем за единицы взяты сантиметр и секунда. Это значит, что минимум скорости волн приблизительно равен 23 см/сек или 830 м/час при длине волны 1,73 см. Вместе с уже полученными числовыми результатами это дает для

$$c = 27,8 \quad 32,5 \quad 37,1 \quad 41,8 \quad 46,4$$

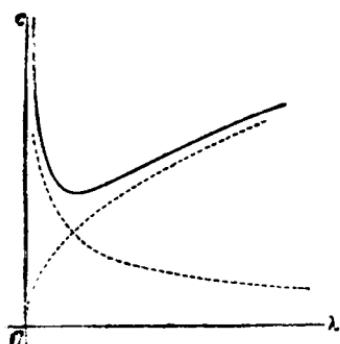
и для

$$\lambda = \begin{cases} 4,3 & 6,3 & 8,5 & 10,9 & 13,6 \\ 0,70 & 0,47 & 0,35 & 0,27 & 0,22 \end{cases}$$

в сантиметрах и секундах.

¹⁾ Ср. Rayleigh, см. прим. выше, стр. 429.

Фиг. 70 представляет зависимость между длиной и скоростью волн; пунктирные кривые относятся к тому случаю, когда тяжесть и капиллярность действуют отдельно, в то время как кривая, обозначенная сплошной линией, представляет совместное их действие. Как объяснено в § 236, групповая скорость выражается отрезком, который касательная отсекает на оси U .



Фиг. 70.

Так как из каждой точки этой оси, расстояние которой от точки O превосходит некоторое определенное значение, можно провести к кривой две касательные, то каждому произвольно заданному значению групповой скорости U отвечают две скорости самих волн. Эти два значения λ совпадают для некоторого (минимального) значения U , соответствующего точке пересечения оси Uc с касательной к кривой в ее точке перегиба; легко можно показать, что в этом случае

$$\frac{\lambda}{\lambda_m} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = 2,542,$$

$$U = 0,767 c_m,$$

если c_m , как и выше, обозначает минимальную скорость волн.

Обратим внимание еще на дальнейшее следствие из формулы (2). До сих пор мы молчаливо предполагали, что жидкость, находящаяся внизу, обладает большей плотностью (т. е. $\varrho > \varrho'$), что в действительности необходимо для устойчивости, если пренебречь величиной T_1 . Названная формула показывает, однако, что устойчивость имеет место также для $\varrho < \varrho'$, если предположить, что

$$\lambda < 2\pi \left(\frac{T_1}{g(\varrho' - \varrho)} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

т. е., что значение λ должно быть меньше, чем длина волны, отвечающей минимальной скорости в том случае, когда более плотная жидкость находится внизу. Для случая воды, расположенной над воздухом, максимум длины волн, совместимой с устойчивостью, оказывается равным 1,73 см. Если обе жидкости заключены между двумя параллельными вертикальными стенками, то это обстоятельство обуславливает границу для допустимой длины волн; в результате мы приходим к выводу, что устойчивость в этом случае (в случае задачи двух измерений) будет иметь место тогда, когда расстояние между стенками не превосходит 0,86 см.

В этом заключается в основном объяснение известного опыта, при котором вода атмосферным давлением удерживается в опрокинутом стакане или в каком-либо другом сосуде, когда отверстие его затянуто достаточно частой сеткой¹⁾.

§ 268. Рассмотрим теперь случай волн на горизонтальной плоскости, представляющей общую границу двух параллельных потоков U , U' ²⁾.

¹⁾ Задача для того случая, когда жидкости заключены в цилиндрической трубе, была решена Максвеллом, Encyc. Britann. Art. Capillary Action [Papers, II, 585], и результаты были сравнены с некоторыми опытами Дупреца (Duprez). Совпадение оказалось лучше, чем можно было ожидать, если учесть, что не было принято во внимание особое условие, которое должно быть выполнено на линии соприкосновения поверхности со стенкой.

²⁾ Ср. W. Thomson, см. прим. выше, стр. 574.

Если мы применим метод § 234, то найдем без затруднений, что условие для стационарного профиля волн будет иметь теперь вид

$$\varrho U^2 + \varrho' U'^2 = \frac{g}{k} (\varrho - \varrho') + k T_1, \quad (1)$$

где последний член получается из измененной формы условия, которому должно удовлетворять давление на граничной поверхности. Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\varrho U + \varrho' U'}{\varrho + \varrho'} \right)^2 = \frac{g}{k} \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} + \frac{k T_1}{\varrho + \varrho'} - \frac{\varrho \varrho'}{(\varrho + \varrho')^2} (U - U')^2. \quad (2)$$

Относительная скорость волн, которая накладывается на среднюю скорость потоков (§ 232), будет равна $\pm c$, причем

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\varrho \varrho'}{(\varrho + \varrho')^2} (U - U')^2, \quad (3)$$

где c_0 обозначает скорость волн при отсутствии течения.

Различные следствия, которые можно получить из соотношения (3), будут в общем теми же, как в указанном выше параграфе, но со следующим существенным отличием: так как c_0 теперь может иметь минимальное значение, именно, значение c_m из (5) § 267, то равновесие плоской поверхности будет устойчивым для возмущений всех длин волн, пока имеет место неравенство

$$U - U' < \frac{1+s}{s} c_m, \quad (4)$$

где $s = \frac{\varrho'}{\varrho}$.

Если относительная скорость обоих потоков превосходит это значение, то значение c для длины волн, которые лежат внутри известных границ, будет мнимым.

Ясно, что множитель, зависящий от времени $e^{i\omega t}$ в методе § 232, принимает здесь вид

$$e^{\pm a t + i \beta t},$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \left\{ \frac{s}{(1+s)^2} (U - U')^2 - c_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} k, \\ \beta &= \frac{s}{1+s} k |U - U'|. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Действительная часть показательной функции указывает на возможность появления возмущения с постоянно возрастающей амплитудой.

В случае воздуха, расположенного над водой, мы имеем $s = 0,0012^3$, $c_m = 23,2$ (см/сек); вместе с тем максимальное значение функции $|U - U'|$, совместимое с устойчивостью, оказывается равным приблизительно 646 см в секунду или круглым числом 23,25 км/час¹⁾.

¹⁾ Скорость ветра, при которой поверхность воды начинает рябиться вследствие образования капиллярных волн настолько, что теряет способность отражать, оказывается значительно меньше, чем приведенное в тексте значение, и это обусловливается другими причинами. Мы возвратимся несколько позже к этому вопросу (XI глава).

При несколько больших значениях имеет место неустойчивость, которая проявляется в первый момент в образовании мелких волн с длиной приблизительно в 17 мм, амплитуды которых постепенно возрастают, пока не пре-
войдут предельных значений, которыми ограничиваются наши приближен-
ные формулы.

§ 269. Волны, которые возникают на поверхности покоящейся воды благодаря местному возмущению, могут быть до некоторой степени исследованы применением метода Кельвина (§ 241).

Так как на поверхности имеем $\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, то результат действия единичного импульса, приложенного в начале координат, выражается формулами

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi \rho} \int_0^\infty \cos \sigma t e^{ky} \cos kx dx, \\ \eta &= -\frac{1}{\pi \rho} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \cos kx k dk. \end{aligned} \right| \quad (1)$$

Чтобы иметь согласие с формулой (6) § 241, мы должны положить

$$\varphi(k) = \frac{ik}{\rho \sigma}. \quad (2)$$

Если в формуле (2) § 267 положить $\varrho' = 0$ и обозначить для краткости

$$\frac{T_1}{\rho} = T', \quad (3)$$

то будем иметь

$$\sigma^2 = gk + T'k^3. \quad (4)$$

Предположим прежде всего, что влияние оказывает только капиллярность, так что

$$\sigma^2 = T'k^3. \quad (5)$$

Так как

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{3}{2} T'^{1/2} k^{1/2}, \quad \frac{d^2\sigma}{dk^2} = \frac{3}{4} T'^{1/2} k^{-1/2}, \quad (6)$$

то находим

$$k = \frac{4}{9} \frac{x^2}{T'^{1/2}}, \quad \sigma = \frac{8}{27} \frac{x^3}{T' t^3}, \quad t \frac{d^2\sigma}{dk^2} = \frac{9}{8} \frac{T' t^2}{x}. \quad (7)$$

Способ, изложенный в § 241, тогда дает

$$\eta = \frac{1}{\pi^{1/2} \rho T'^{1/2} x^{1/2}} \sin \left(\frac{4x^3}{27 T' t^2} - \frac{1}{4} \pi \right). \quad (8)$$

Критическое значение дроби (10) § 241 в данном случае имеет порядок величины $\frac{T'^{1/2} t}{x^{3/2}}$; приближение в этом случае не может претендовать на высокую степень точности, за исключением начальных

стадий возмущения в какой-либо точке. Далее получается из формулы (8), что длина волны и период в произвольной точке сначала имеют бесконечно малые значения, а потом постепенно возрастают. Все эти обстоятельства находятся в полном контрасте с тем, что имело место для тяжелых волн (§ 240).

Мы видели в § 267, что если ввести в вычисления силу тяжести, то каждому заданному значению групповой скорости U , превосходящему минимальное значение U_0 , соответствуют две длины волны. Отдельные длины волн, которые отвечают данным значениям x и t , можно найти при помощи геометрических методов § 241. Аналитически они определяются, если положить $\frac{d\sigma}{dk} = U = \frac{x}{t}$, действительными значениями k , удовлетворяющими уравнению

$$(g + 3T'k^2)^2 = 4\sigma^2 \left(\frac{d\sigma}{dk} \right)^2 = \frac{4x^2}{t^2} (gk + T'k^3). \quad (9)$$

Приближенное значение для η будет соответственно с этим составлено из двух членов типа (9) § 241, так что мы получим две наложенные друг на друга системы волн. Для $x < U_0 t$ метод Кельвина показывает, что возмущение оказывается незначительным¹⁾.

Для достаточно больших значений $\frac{x}{U_0 t}$ приближенные значения действительных решений уравнения (9) будут

$$k = \frac{1}{4} \frac{gt^2}{x^2}, \quad k = \frac{4}{9} \frac{x^2}{T't^2}, \quad (10)$$

т. е. действительные решения таковы, как если бы сила тяжести и капиллярные силы действовали отдельно. Условия приложимости в этом случае приближенного метода Кельвина, заключающиеся в том, что значения $\frac{gt^2}{x^2}$ и $\frac{x^2}{T't^2}$ должны быть большими, до некоторой степени противоречат друг другу; они, однако, согласуются друг с другом, если как x , так и t одновременно достаточно велики. Длина волн в каждом из этих случаев должна быть мала по сравнению с x .

Эффект движущегося возмущения можно непосредственно представить на основании общих формул § 248. Если выражения $\frac{2\pi}{z_1}$, $\frac{2\pi}{z_2}$ обозначают две длины волн, соответствующие волновой скорости C , то из фиг. 67 следует, что для $z_1 < z_2$ должны иметь место неравенства $U_1 < c$, $U_2 > c$.

В результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\varphi(z_1)}{c - U_1} e^{iz_1 x} & (x > 0), \\ \eta &= \frac{\varphi(z_2)}{U_2 - c} e^{iz_2 x} & (x < 0). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

¹⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXI, 18 (1911) [Papers, VI, 9].

Если положить

$$\varphi(k) = \frac{iP}{\varrho\sigma}, \quad (12)$$

то далее увидим, что эти результаты можно рассматривать как приближенное выражение результатов последующего более полного исследования.

§ 270. Возобновим по методам §§ 242, 243 более формальные исследования тех явлений, которые получаются в результате постоянного возмущения давления на поверхности движущегося потока, причем теперь мы примем во внимание влияние капиллярных сил. Это даст нам вместе с ранее полученными результатами объяснения (по крайней мере в принципе) той ряби, которая появляется впереди твердого тела, движущегося с умеренной скоростью в спокойной воде, а также наблюдается в движущемся равномерно потоке в местах, расположенных вверх по течению от места возмущения.

Мы начнем с простого гармонического распределения давления и положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi}{c} &= -x + \beta e^{ky} \sin kx, \\ \frac{\psi}{c} &= -y + \beta e^{ky} \cos kx, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем верхняя поверхность должна совпадать с линией тока $\psi = 0$, приближенное уравнение которой имеет вид

$$y = \beta \cos kx. \quad (2)$$

Для точки, расположенной непосредственно под этой поверхностью, находим, как в (8) § 242, в качестве переменной части давления выражение

$$p_0 = \beta \varrho \{ (kc^2 - g) \cos kx + \mu c \sin kx \}, \quad (3)$$

где μ — коэффициент трения. В соседней точке, расположенной непосредственно над поверхностью, должно иметь место равенство

$$p'_0 = p_0 + T_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = \beta \varrho \{ (kc^2 - g - k^2 T') \cos kx + \mu c \sin kx \}, \quad (4)$$

где T' написано вместо $\frac{T_1}{e}$. Это равно действительной части выражения

$$\beta \varrho (kc^2 - g - k^2 T' - i \mu c) e^{ikx}.$$

Отсюда заключаем, что приложенному извне давлению

$$p_0 = C \cos kx \quad (5)$$

соответствует форма поверхности, выраженная уравнением

$$oy = C \frac{(kc^2 - g - k^2 T') \cos kx - \mu c \sin kx}{(kc^2 - g - k^2 T')^2 + \mu^2 c^2}. \quad (6)$$

Предположим вначале, что скорость c потока превосходит минимальное значение (c_m) волновой скорости, полученное в § 267. В таком случае мы можем написать

$$kc^2 - g - k^2 T' = T'(k - z_1)(z_2 - k), \quad (7)$$

где z_1, z_2 суть два значения k , соответствующие волновой скорости c в спокойной воде; другими словами, величины $\frac{2\pi}{z_1}, \frac{2\pi}{z_2}$ суть длины волн тех двух систем свободных волн, которые могли бы занять стационарное положение в пространстве на свободной поверхности движущейся жидкости. Мы будем считать, что $z_2 > z_1$.

После подстановки этих величин формула (6) может быть представлена в виде

$$gy = \frac{C}{T'} \frac{(k - z_1)(z_2 - k) \cos kx - \mu' \sin kx}{(k - z_1)^2(z_2 - k)^2 + \mu'^2}, \quad (8)$$

где положено $\mu' = \frac{\mu c}{T'}$. Отсюда следует, что для малых значений μ^2 давление на гребнях имеет наименьшее значение, а во впадинах — наибольшее значение, когда k больше, чем z_2 , или меньше, чем z_1 , и будет обратное, когда k лежит между z_1 и z_2 . В случае возмущения, распространяющегося по спокойной поверхности воды, эти результаты совпадают, очевидно, с результатами (14) § 168.

§ 271. Из формулы (8) мы можем, как в § 243, вывести некоторые заключения о том действии, которое производит давление, сосредоточенное вначале и имеющее общую величину P ; мы находим

$$y = \frac{P}{\pi T_1} \int_0^\infty \frac{(k - z_1)(z_2 - k) \cos kx - \mu' \sin kx}{(k - z_1)^2(z_2 - k)^2 + \mu'^2} dk. \quad (9)$$

Этот определенный интеграл есть действительная часть интеграла

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx} dk}{(k - z_1)(z_2 - k) - i\mu'}. \quad (10)$$

Коэффициент рассеяния μ' введен единственно с той целью, чтобы сделать задачу определенной; поэтому мы можем воспользоваться этим и для упрощения в дальнейшем предположить μ' величиной бесконечно малой. В этом случае корни знаменателя в выражении (10) суть

$$k = z_1 + ir, \quad k = z_2 - ir,$$

где

$$r = \frac{\mu'}{z_2 - z_1}.$$

Интеграл (10), таким образом, будет равен

$$\frac{1}{z_2 - z_1 - 2ir} \left\{ \int_0^r \frac{e^{ikx} dk}{k - (z_1 + ir)} - \int_0^\infty \frac{e^{ikx} dk}{k - (z_2 - ir)} \right\}. \quad (11)$$

Эти интегралы имеют вид, разобранный в § 243. Так как $\kappa_2 > \kappa_1$, то y будет положительным и, следовательно, для положительных значений x первый интеграл будет равен

$$2\pi ie^{i\kappa_1 x} + \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_1} dk, \quad (12)$$

а второй получит вид

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_2} dk. \quad (13)$$

Для отрицательных значений x , напротив, первый интеграл приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_1} dk, \quad (14)$$

а второй интеграл будет равен

$$-2\pi ie^{i\kappa_2 x} + \int_0^\infty \frac{e^{-ikx}}{k + \kappa_2} dk. \quad (15)$$

Мы упростили здесь формулу тем, что после преобразования положили $\nu = 0$.

Если теперь отбросить мнимые части наших выражений, то получим следующие результаты.

Если μ' бесконечно мало, то уравнение (9) дает для положительных значений x

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{2\pi}{\kappa_2 - \kappa_1} \sin \kappa_1 x + F(x), \quad (16)$$

а для отрицательных значений x

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{2\pi}{\kappa_2 - \kappa_1} \sin \kappa_2 x + F(x), \quad (17)$$

где

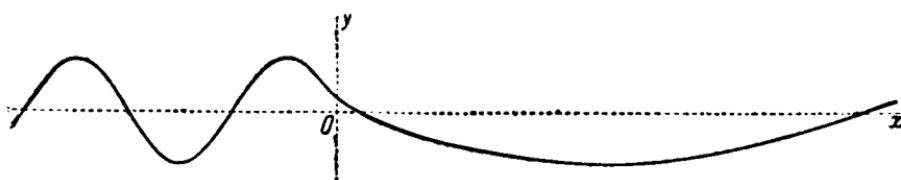
$$F(x) = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \left\{ \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k + \kappa_1} dk - \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k + \kappa_2} dk \right\}. \quad (18)$$

Функция $F(x)$ может быть выражена на основании (30) § 243 через известные функции

$$\text{Ci } \kappa_1 x, \quad \text{Si } \kappa_1 x, \quad \text{Ci } \kappa_2 x, \quad \text{Si } \kappa_2 x.$$

Выражаемое этими функциями возмущение уровня оказывается очень малым для всех тех положительных и отрицательных значений x , которые превосходят примерно половину наибольшей длины волны $(\frac{2\pi}{\kappa_1})$.

Отсюда следует, что вне таких значений x поверхность оказывается покрытой вниз по течению правильной последовательностью простых гармонических волн длиной $\frac{2\pi}{x_1}$, а вверх против течения последовательностью таких же волн с меньшей длиной волны $\frac{2\pi}{x_2}$. Из числовых результатов § 267 тогда получается, что, если скорость течения c значительно превосходит минимальное значение волновой скорости (c_m), то первая система волн происходит главным образом от действия силы тяжести, а вторая система волн получается в результате действия капиллярных сил.



Фиг. 71.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что теперь, в противоположность случаю, рассмотренному в § 243, возвышение для $x=0$ оказывается конечным; мы имеем, в самом деле,

$$\frac{\pi T_1}{Q} y = \frac{1}{x_2 - x_1} \log \frac{x_2}{x_1}, \quad (19)$$

как это получается без затруднений из формул (16) и (18).

Фиг. 71 показывает переход от одной системы волн к другой для случая $x_2 = 5x_1$.

Общее исследование явлений, которые наблюдаются при движении по спокойной поверхности воды изолированного точечного источника возмущения давления видоизменяется теперь тем фактом, что заданному значению c скорости отвечают две системы волн различной длины. Для одной из этих систем волн, именно для более коротких волн, групповая скорость оказывается больше, чем c , в то время как для другой системы групповая скорость меньше c . Отсюда можно понять, почему волны с меньшей длиной волны находятся впереди, а волны с большей длиной находятся позади источника возмущения давления.

Заметим, что формулы (16), (17) дают для высоты капиллярных волн, расположенных вверх по течению, то же значение, как и для высоты гравитационных волн, расположенных вниз по течению; однако, этот результат существенно меняется, когда давление будет распределено по полосе конечной ширины вместо того, чтобы быть сосредоточенным на математической линии. Если, например, ширина полосы не будет превосходить четверти длины волн, расположенных вниз по течению, но будет значительно больше, чем длина

волн ряби, расположенной вверх по течению, что может случиться при небольшой скорости, то различные части этой полосы в отношении их действия на часть жидкости, расположенную ниже по течению, будут усиливать друг друга; в части же жидкости, лежащей вверх по течению, может произойти „интерференция“, и результатирующая амплитуда окажется сравнительно небольшой.

Чтобы пояснить этот результат, предположим, что общее давление P на поверхности распределено по закону

$$p' = \frac{P}{\pi} \frac{b}{b^2 + x^2}. \quad (20)$$

Это распределение распространяется тем дальше, чем больше оказывается b . Способ вычисления вытекает из § 244. В результате получаем для стороны, лежащей вниз по течению,

$$y = - \frac{2P}{\rho T' (\kappa_2 - \kappa_1)} e^{-\kappa_1 b} \sin \kappa_1 x + \dots, \quad (21)$$

а для противоположной стороны

$$y = - \frac{2P}{\rho T' (\kappa_2 - \kappa_1)} e^{-\kappa_2 b} \sin \kappa_2 x + \dots, \quad (22)$$

причем в этих выражениях опущены те члены, которые оказываются мало заметными на расстоянии от начала, равном, примерно, половине длины волн. Показательные множители указывают на уменьшение высоты, получающееся вследствие распределения давления; и это уменьшение оказывается больше со стороны капиллярных волн, так как $\kappa_2 > \kappa_1$.

Если скорость течения c меньше, чем минимальное значение скорости волн, то множители при

$$kc^2 - g - k^2 T'$$

оказываются мнимыми. При этом не получится никакой неопределенности, если с самого начала положить $\mu = 0$. Форма поверхности в этом случае определяется интегралом

$$y = - \frac{P}{\pi \rho} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k^2 T' - kc^2 + g} dk. \quad (23)$$

Этот интеграл можно преобразовать прежним способом, но очевидно, что его значение при возрастании x очень быстро стремится к нулю вследствие все более и более быстрых изменений знака $\cos kx$. Возмущение уровня поверхности ограничивается поэтому только некоторой окрестностью около начала. Для $x = 0$ находим

$$y = - \frac{P}{(c_m^4 - c^4)^{1/2} \rho} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{c^2}{c_m^2} \right). \quad (24)$$

Остается, наконец, рассмотреть еще критический случай, когда c оказывается в точности равным минимуму волновой скорости, т. е.

$\chi_2 = \chi_1$. Первый член в формулах (16) и (17) оказывается теперь бесконечно большим, в то время как остальная часть выражения дает конечное значение. Чтобы в этом случае получить результат, имеющий смысл, мы должны удержать коэффициент трения μ' .

Полагая $\mu' = 2\tilde{\omega}^2$, будем иметь

$$(k - \chi)^2 + i\mu' = \{k - (\chi + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})\} \{k - (\chi - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})\}, \quad (25)$$

так что интеграл (10) можно теперь положить равным

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}} \left(\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k - (\chi - \tilde{\omega} + i\tilde{\omega})} dk - \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k - (\chi + \tilde{\omega} - i\tilde{\omega})} dk \right). \quad (26)$$

Формулы § 243 показывают, что когда величина $\tilde{\omega}$ будет малой, то главная часть этого выражения для достаточно удаленных точек по обе стороны от начала будет равна

$$\frac{1+i}{4\tilde{\omega}} 2\pi i e^{i\chi x}. \quad (27)$$

Возышение поверхности определяется теперь из уравнения

$$\frac{\pi T_1}{P} y = -\frac{\pi}{\mu^{1/2}} \cos \left(\chi x - \frac{1}{4}\pi \right). \quad (28)$$

§ 272. Исследование Рэля¹⁾, от которого только что проведенное здесь отличается главным образом способом представления определенных интегралов, было предпринято с целью найти более удовлетворительное объяснение для некоторых явлений, описанных Скоттом Ресселем²⁾ и Кельвином³⁾.

Когда препятствие незначительных размеров, например, леска от удочки, движется медленно в спокойной воде или (что, конечно, сводится к тому же) находится в покое в движущейся жидкости, то поверхность жидкости покрывается красивыми волнами, которые по отношению к препятствию остаются неподвижными. На стороне, лежащей вверх по течению, длина волны будет короче, и колебания, как показал Томсон, главным образом обусловливаются капиллярными силами. На стороне, расположенной по течению, волны оказываются длиннее и главным образом зависят от силы тяжести. Обе системы волн движутся с одинаковой относительной скоростью по отношению к воде, что необходимо для того, чтобы они могли сохранять неизменное положение относительно препятствия. Это же обстоятельство обусловливает и скорость, а вместе с тем и длину волны в той части системы волн, в которой гребни расположены наклонно к направлению движения. Если обозначить угол между направлением движения и нормалью к фронту волн через θ , то ско-

¹⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 498.

²⁾ Scott Russel, On Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.

³⁾ Kelvin, см. прим. выше, стр. 574.

рость распространения волн будет равна $v_0 \cos \theta$, где v_0 обозначает скорость жидкости по отношению к неподвижному, препятствию".

Томсон показал, что скорость распространения волн по поверхности, какова бы ни была длина волны, никогда не может быть меньше примерно 23 см/сек. Скорость же текущей воды должна быть несколько больше этого предельного значения, чтобы волны могли образоваться. Все же и в этом случае угол θ подчинен ограничению, которое определяется равенством $v_0 \cos \theta = 23$, и искривленный фронт волн имеет соответствующую асимптоту".

"Погруженная часть препятствия возмущает течение жидкости независимо от деформации свободной поверхности, и это обстоятельство делает задачу в ее первоначальной постановке чрезвычайно трудной. Мы можем, однако, не меняя существа дела, предположить, что возмущение произведено в одной точке поверхности давлением, несколько отличающимся от нормального, как это может произойти в результате электрического притяжения или при ударе о поверхность тонкой воздушной струи. И действительно, каждым из этих способов, в особенности последним, можно получить очень красивые волны"¹⁾.

Характер волн можно выяснить, пользуясь методом, изложенным в конце § 256. Если ввести в вычисления только капиллярные силы, то формула (19) указанного параграфа на основании § 266 дает

$$c^2 \cos^2 \theta = V^2 = \frac{2\pi T'}{\lambda}; \quad (1)$$

форма гребней определяется при этом уравнением

$$p = a \sec^2 \theta. \quad (2)^2)$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sec \theta (1 - 2 \operatorname{tg}^2 \theta), \\ y &= 3a \sec \theta \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если мы примем во внимание как силу тяжести, так и капиллярные силы, то на основании § 267 получим

$$c^2 \cos^2 \theta = V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T'}{\lambda}. \quad (4)$$

Полагая

$$c_m = (4gT')^{\frac{1}{4}}, \quad b = 2\pi \left(\frac{T'}{g} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

будем иметь

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{b} + \frac{b}{\lambda} \right), \quad (6)$$

где

$$\cos a = \frac{c_m}{c}. \quad (7)$$

¹⁾ Rayleigh, см. прим. выше.

²⁾ Так как теперь $U > V$, то из (20) § 256 получается, что постоянная C должна быть отрицательной.

Соотношение между p и θ принимает поэтому вид

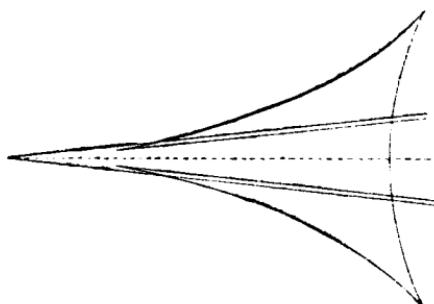
$$\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \left(a \frac{p}{\cos^2 \alpha} + \frac{a \cos^2 \alpha}{p} \right) \quad (8)$$

Или

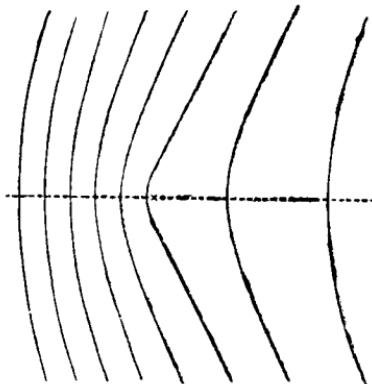
$$\frac{p}{a} = \cos^2 \theta \pm \sqrt{\cos^4 \theta - \cos^4 \alpha}. \quad (9)$$

Четыре прямые, для которых $\theta = \pm \alpha$, суть асимптоты определенной таким образом кривой. Значения выражения $\frac{1}{2} \pi - \alpha$ для нескольких значений отношения $\frac{c}{c_m}$ были даны в § 267.

Если отношение $\frac{c}{c_m}$ достаточно велико, то α приблизительно будет равно $\frac{1}{2} \pi$, и асимптоты образуют с осью x очень острые углы. На фиг. 72 показана часть кривой, которую приходится рассматривать при физической задаче в случае $c = 10 c_m$ ¹⁾. Отношение длины волны самих „волн“ к длине



Фиг. 72.



Фиг. 73.

волн „ряби“ в плоскости симметрии естественно оказывается при этом очень большим. Кривая фиг. 72 может быть сравнена с кривой, которая образует основание фиг. 65 на стр. 543.

По мере того как отношение $\frac{c}{c_m}$ убывает, угол между асимптотами становится все больше и больше, в то время как оба заострения с обеих сторон приближаются друг к другу, сходятся и, наконец, исчезают²⁾. Система волн имеет при этом расположение такого вида, какой указан на фиг. 73; эта фигура представляет тот случай, когда отношение длин волн на оси симметрии равно $4 : 1$,

¹⁾ Все необходимые вычисления были выполнены Удалем (Woodall). Размеры фигуры 69 не позволяют провести асимптоты отдельно от кривой.

²⁾ Опытная диаграмма показала, что для $c = 2c_m$ ($\alpha = 60^\circ$) заострения почти совпадают.

что соответствует значению $a = 26^\circ 34'$ или $c = 1,12 c_m$ ¹⁾. Если $c < c_m$, то волнообразования исчезают.

§ 273. Другая очень интересная задача заключается в определении характера равновесия цилиндрического столба жидкости кругового сечения. Сюда же относится теория хорошо известных опытов Пидона, Савара и других о поведении струи, вытекающей под давлением из маленького отверстия в сосуде. Постоянная скорость в направлении оси струи, очевидно, не оказывает влияния на динамическую часть задачи и может быть поэтому при аналитическом рассмотрении оставлена без внимания.

Рассмотрим прежде всего колебания колонки жидкости в двух измерениях, предполагая движение во всех поперечных сечениях одинаковым. Применяя в плоскости поперечного сечения полярные координаты r, θ , начало которых лежит на оси, мы можем в согласии с § 63 написать

$$\varphi = A \frac{r^s}{a^s} \cos s\theta \cos (\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где a обозначает средний радиус. Уравнение границы для произвольного момента времени будет

$$r = a + \zeta, \quad (2)$$

где

$$\zeta = - \frac{sA}{\sigma a} \cos s\theta \sin (\sigma t + \varepsilon), \quad (3)$$

и зависимость между коэффициентами определяется условием, что для $r = a$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (4)$$

Для переменной части давления внутри колонки и вблизи от свободной поверхности имеем

$$\frac{p}{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \sigma A \cos s\theta \sin (\sigma t + \varepsilon). \quad (5)$$

Кривизна кривой, бесконечно мало отличающейся от окружности, имеющей свой центр в начале координат, находится элементарным способом и оказывается равной

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \frac{d^2 r}{d\theta^2}$$

или, в обозначениях формулы (2),

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right). \quad (6)$$

¹⁾ Фиг. 73 можно сравнить с той фигурой, которую построил из наблюдений Скотт Рассел, см. прим. на стр. 585.

Вместе с тем условие на поверхности

$$p = \frac{T_1}{R} + \text{const.} \quad (7)$$

дает после подстановки из формулы (5)

$$\sigma^2 = s(s^2 - 1) \frac{T_1}{\rho a^3}. \quad (8)^1$$

Для $s = 1$ будем иметь $\sigma = 0$; при нашей степени приближения поперечные сечения остаются круговыми, будучи только сдвинутыми, так что равновесие оказывается безразличным. Для всех других целочисленных значений s величина σ^2 будет положительной, так что равновесие при плоских деформациях оказывается абсолютно устойчивым. Это ясно à priori, так как круг есть фигура с наименьшим периметром и вместе с тем с наименьшей энергией при заданной площади поперечного сечения.

В случае струи, которая вытекает из отверстий, имеющих форму эллипса, равностороннего треугольника или квадрата, возмущение принимает преимущественно одну из форм $s = 2, 3$ или 4 . Так как в этом случае мы имеем стационарное движение, то на свободной струе образуется система стационарных волн, длина которых оказывается равной скорости струи, умноженной на период $(\frac{2\pi}{\sigma})^2$.

§ 274. Отбросим теперь ограничение задачи двумя измерениями и положим

$$\varphi = \varphi_1 \cos kz \cos(\sigma t + \varepsilon); \quad (9)$$

при этом предполагается, что ось z должна совпадать с осью цилиндра и φ_1 есть функция координат x, y . Подставляя это выражение в уравнение непрерывности $\Delta\varphi = 0$, получим

$$(A_1 - k^2)\varphi_1 = 0, \quad (10)$$

где

$$A_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Полагая $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, мы можем написать уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} - k^2 \varphi_1 = 0. \quad (11)$$

¹⁾ По поводу оригинальных исследований на применение энергетических методов см. Rayleigh, On the Instability of Jets, Proc. Lond. Math. Soc., X, 4 (1878) и On the Capillary Phenomena of Jets, Proc. Roy. Soc., XXIX, 71 (1879) [Papers, I, 361, 377; Theory of Sound, 2 изд., гл. XX]. Последняя из названных работ содержит сопоставление теории и опытов.

²⁾ Предполагается, что эта длина волны велика по отношению к периметру сечения струи. Иначе нужно было бы применить формулу (18) при $\sigma = kc$, где c обозначает скорость струи.

Это уравнение за исключением знака при k^3 имеет форму, разобранную в §§ 101, 191; решения, конечные при $r=0$, имеют поэтому такой вид:

$$\varphi_1 = \begin{cases} BI_s(kr) \cos s\theta \\ BI_s(kr) \sin s\theta \end{cases}; \quad (12)$$

при этом, как в (11) § 210,

$$I_s(z) = \frac{z^s}{2^s s!} \left\{ 1 + \frac{z^2}{2(2s+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2s+2)(2s+4)} + \dots \right\}. \quad (13)$$

Полагая поэтому

$$\varphi = BI_s(kr) \cos s\theta \cos kz \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (14)$$

получим на основании соотношения (4)

$$\zeta = -B \frac{ka I'_s(ka)}{\sigma a} \cos s\theta \cos kz \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (15)$$

Чтобы найти сумму главных кривизн, заметим, что на основании теорем Эйлера и Мене о кривизне поверхности кривизна произвольного сечения, наклоненного под бесконечно малым углом к нормальному главному сечению, будет равна с точностью до бесконечно малых первого порядка кривизне самого главного нормального сечения. Достаточно поэтому в рассматриваемой задаче вычислить кривизны поперечного и осевого сечения цилиндра. Эти сечения представляют собой главные сечения в невозмущенном состоянии, главные же сечения деформированной поверхности образуют с ними бесконечно малые углы. Для поперечного сечения будет справедлива формула (6), тогда как для осевого сечения кривизна будет равна $-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$; так что искомая сумма главных кривизн будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{a} - B \frac{ka I'_s(ka)}{\sigma a^3} (k^2 a^2 + s^2 - 1) \cos s\theta \cos kz \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее на поверхности имеем

$$\frac{p}{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\sigma BI_s(ka) \cos s\theta \cos kz \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (17)$$

Условие на поверхности § 265 дает поэтому

$$\sigma^2 = \frac{ka I'_s(ka)}{I_s(ka)} (k^2 a^2 + s^2 - 1) \frac{T_1}{\rho a^3}. \quad (18)$$

Для $s > 0$ величина σ^2 положительна; но в случае симметрии вокруг оси ($s > 0$) значение σ^2 становится отрицательным, если $ka < 1$; это значит, что равновесие оказывается неустойчивым для

возмущений, длина волны которых $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ больше, чем длина кривой поперечного сечения струи. Чтобы найти форму возмущения, для которой неустойчивость оказывается наибольшей, мы должны искать такое значение ka , которое соответствует максимуму выражения

$$\frac{k a I'_0(ka)}{I_0(ka)} (1 - k^2 a^2).$$

Рэлей нашел для этого случая значение $k^2 a^2 = 0,4858$ и отсюда получил для длины волны, соответствующей наибольшей неустойчивости, значение

$$\frac{2\pi}{k} = 4,508 \cdot 2a.$$

В этом случае образуются похожие на бусинки возвышения и желобки с постоянно нарастающими размерами, до тех пор пока струя не распадается окончательно на отдельные капли¹⁾.

§ 275. Эти результаты естественно побуждают к исследованию малых колебаний капли жидкости около ее шаровой формы²⁾. Мы несколько обобщим задачу, предполагая, что имеем жидкий шар с плотностью ρ , окруженный бесконечной массой другой жидкости с плотностью ρ' .

Возьмем начало координат в центре шара, пусть форма общей поверхности обеих жидкостей для некоторого произвольного момента времени задана уравнением

$$r = a + \zeta = a + S_n \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (1)$$

где a — средний радиус, а S_n — сферическая функция порядка n . Соответствующие значения потенциала скоростей будут тогда определены для внутренних точек функцией

$$\varphi = -\frac{\sigma a}{n} \frac{r^n}{a^n} S_n \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (2)$$

а для внешних точек функцией

$$\varphi' = -\frac{\sigma a}{n+1} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} S_n \cos(\sigma t + \varepsilon), \quad (3)$$

¹⁾ Доказательство этого состоит в том, что если мы имеем ряд возможных форм возмущения с временными факторами $e^{a_1 t}$, $e^{a_2 t}$, $e^{a_3 t}$, ..., где $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$, и если эти возмущения возбуждаются одновременно, то амплитуда первого из них по сравнению с амплитудами остальных будет возрастать в отношении $e^{(a_1 - a_2)t}$, $e^{(a_1 - a_3)t}$, ... Поэтому в конце концов преобладающее влияние будет иметь слагающая с наибольшим значением a .

Неустойчивость цилиндрической струи, окруженной другой жидкостью, была исследована Рэлем в мемуаре: On the Instability of Cylindrical Fluid Surfaces, Phil. Mag. (5), XXXIV, 177 (1892) [Papers, III, 594]. В случае струи воздуха в воде длина волны наибольшей неустойчивости оказывается равной 6,48·2a.

²⁾ Rayleigh, см. прим. выше, стр. 591; Webb, Mess. of Math., IX, 177 (1880).

так как эти функции для $r = a$ дают

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial r}.$$

Переменные части внутреннего и внешнего давления определяются тогда выражениями вида

$$\left. \begin{aligned} p &= \dots + \frac{\rho \sigma^2 a}{n} S_n \sin(\sigma t + \varepsilon), \\ p' &= \dots - \frac{\rho' \sigma^2 a}{n+1} S_n \sin(\sigma t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти сумму кривизн, воспользуемся следующим предложением из пространственной геометрии. Если λ , μ , ν обозначают направляющие косинусы нормали в точке (x, y, z) к поверхности семейства

$$F(x, y, z) = \text{const.},$$

проходящей через эту точку, т. е., если имеем

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \mu &= \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\ \nu &= \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \end{aligned}$$

то справедливо равенство

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}. \quad (5)$$

Так как квадратом ζ можно пренебречь, то уравнение (1) гармонического сфероида может быть записано в виде

$$r = a + \zeta_n, \quad (6)$$

где

$$\zeta_n = \frac{r^n}{a^n} S_n \sin(\sigma t + \varepsilon), \quad (7)$$

т. е. ζ_n есть *объемная* сферическая функция порядка n . Таким образом, находим

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial x} + n \frac{x}{r^2} \zeta_n, \\ \mu &= \frac{y}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} + n \frac{y}{r^2} \zeta_n, \\ \nu &= \frac{z}{r} - \frac{\partial \zeta_n}{\partial z} + n \frac{z}{r^2} \zeta_n; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

отсюда следует

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{r} + \frac{n(n+1)}{r^2} \zeta_n = \frac{2}{a} + \frac{(n-1)(n+2)}{a^2} S_n \sin(\sigma t + \varepsilon). \quad (9)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в общее граничное условие § 265, получим

$$\sigma^2 = n(n+1)(n-1)(n+2) \frac{T_1}{\{(n+1)\varrho + n\varrho'\} a^3}. \quad (10)$$

Полагая $\varrho' = 0$, будем иметь

$$\sigma^2 = n(n-1)(n+2) \frac{T_1}{\varrho a^3}. \quad (11)$$

Наиболее важный тип колебания соответствует случаю $n=2$, для которого будем иметь

$$\sigma^2 = \frac{8T_1}{\varrho a^3}.$$

Если мы положим для водяной капли $T_1 = 74$, $\varrho = 1$, то найдем для частоты значение

$$\frac{\sigma}{2\pi} = 3,87 a^{-\frac{3}{2}} \text{ колебаний в секунду,}$$

если a — радиус капли, выраженный в сантиметрах. Радиус шара, период колебания которого равен одной секунде, должен быть равен $a = 2,47$ см.

Случай шаровидного пузырька воздуха, окруженного жидкостью, получим, если в формуле (10) положим $\varrho = 0$; тогда будем иметь

$$\sigma^2 = (n+1)(n-1)(n+2) \frac{T_1}{\varrho' a^3}. \quad (12)$$

При одинаковой плотности жидкости частота данного нормального колебания благодаря уменьшению присоединенной массы оказывается в этом случае больше, чем в случае, которому соответствует формула (11); ср. (7), (8) § 91.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

§ 276. Учебник гидродинамики был бы неполным, если бы в нем не был затронут вопрос о звуковых волнах, хотя бы по той причине, что все действительные жидкости более или менее сжимаемы и что, только принимая во внимание сжимаемость жидкостей, мы можем избежать таких явно парадоксальных результатов, как в § 20, где было найдено, что изменение давления распространяется в жидкости *мгновенно*.

Мы рассмотрим в этой главе общие законы распространения малых возмущений, не входя, однако, большей частью в такие подробности, которые относятся больше к акустике.

В большинстве случаев, которые мы будем рассматривать, изменения давления будут малы; их можно будет поэтому считать пропорциональными изменениям плотности, т. е. можно положить

$$\Delta p = \chi \frac{\Delta \rho}{\rho},$$

где $\chi (= \rho \frac{dp}{d\rho})$ есть некоторый коэффициент, называемый „объемной упругостью“. Для данной жидкости значение χ изменяется с температурой и (в очень малой степени) с давлением. Для воды при 15° С $\chi = 2,045 \cdot 10^{10}$ дин на квадратный сантиметр. Случай газов мы вскоре рассмотрим.

Плоские волны

§ 277. Рассмотрим прежде всего плоские волны в однородной среде.

Когда движение происходит только в направлении оси x , то уравнение движения при отсутствии внешних сил будет

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx}, \quad (1)$$

а уравнение непрерывности (5) § 7 приведется к следующему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0. \quad (2)$$

Если положить

$$\rho = \rho_0 (1 + s), \quad (3)$$

где ρ_0 есть плотность в невозмущенном состоянии, то s можно назвать „коэффициентом уплотнения“ в плоскости x . Подставляя выражение (3) в уравнения (1) и (2), находим, предполагая движение бесконечно малым,

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\chi}{\rho_0} \frac{ds}{dx} \quad (4)$$

и

$$\frac{ds}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5)$$

где, как и выше,

$$\chi = \left[\rho \frac{dp}{d\rho} \right]_{\rho = \rho_0}. \quad (6)$$

Исключая s , получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где

$$c^2 = \frac{\chi}{\rho_0} = \left[\frac{dp}{d\rho} \right]_{\rho = \rho_0}. \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет тот же вид, что и уравнение, разобранное в § 170; общее решение его будет

$$u = f(ct - x) + F(ct + x); \quad (9)$$

решение это представляет две системы волн, распространяющихся с постоянной скоростью c вдоль оси x ; одна в положительном, другая в отрицательном направлении. Из уравнения (5) получаем выражение для соответствующего значения s в виде

$$cs = f(ct - x) - F(ct + x). \quad (10)$$

Для одной волны будем иметь

$$u = \pm cs, \quad (11)$$

так как одна из функций f , F будет обращаться в нуль. В формуле (11) нужно брать верхний или нижний знак в соответствии с тем, распространяется ли волна в положительном или в отрицательном направлении. В этом случае легко показать, что приближение, заключающееся в формулах (4) и (5), оправдывается в том случае, когда u всюду мало по сравнению с c .

Между изложенной выше приближенной теорией и теорией „длинных“ тяжелых волн на поверхности воды имеется полная аналогия. Если мы напишем $\frac{\eta}{h}$ вместо s и gh вместо $\frac{x}{\varphi_0}$, то уравнения (4) и (5) совпадут с уравнениями (3) и (5) § 169.

§ 278. При данном в § 276 значении для x получим для воды при 15°C

$$c = 1430 \text{ м/сек.}$$

Колладон и Штурм¹⁾ на основании своих опытов на Женевском озере получили для c значение 1437 при температуре 8°C ²⁾.

В случае газа, предполагая, что температура остается постоянной, значение x определяется на основании закона Бойля

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}. \quad (1)$$

Получаем

$$x = p_0, \quad (2)$$

так что

$$c = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}. \quad (3)$$

¹⁾ Colladon und Sturm, Ann. de Chim. et de Phys., XXXVI (1827). Укажем, что скорость звука в воде, заполняющей трубу, благодаря податливости стенки может быть значительно меньше. См. Helmholz, Fortschritte d. Physik, IV, 119 (1848) (Wiss. Abh., 1, 242); Korteweg, Wied. Ann., V, 526 (1878); Lamb, Manch. Mem., XLII, Nr. 1 (1898).

²⁾ Новые опыты в морской воде дали для скорости c значение 1510 м/сек при температуре 17°C и обнаружили возрастание скорости приблизительно на 3,35 м/сек при возрастании температуры на 1°C [Wood и др. Proc. Roy. Soc. A, CIII, 284 (1923)].

Это есть так называемая „Ньютона“ скорость звука ¹⁾. Если обозначить через H высоту атмосферы, состоящей из газа одинаковой плотности и создающей давление p_0 , то будем иметь $p_0 = g\varrho_0 H$ и

$$c = (gH)^{1/2}. \quad (4)$$

Этот результат можно сравнить с формулой (13) § 170, которая дает скорость „длинных“ гравитационных волн в жидкостях. Для воздуха при 0°C соответствующие значения в системе абсолютных единиц *CGS* будут $p_0 = 76 \cdot 13,60 \cdot 981$, $\varrho_0 = 0,00129$; отсюда следует

$$c = 280 \text{ м/сек.}$$

Это значение для c значительно меньше найденного из непосредственных наблюдений.

Лаплас ²⁾ привел теоретические результаты в согласие с тем, что наблюдается в действительности. Если газ быстро сжать, то температура его поднимется, а потому давление возрастет в большей степени, чем это соответствует уменьшению объема; подобно этому дело обстоит и в случае расширения газа. Формула (1) годится только для того случая, когда сжатия и расширения происходят настолько медленно, что имеется достаточно времени для выравнивания температуры путем теплопроводности и лучеиспускания. В очень большом числе важных случаев изменения плотности совершаются чрезвычайно быстро; движение тепла от одной частицы к другой едва только начинается, как уже направление его меняется на обратное, так что практически каждая частица жидкости ведет себя так, как если бы ее запас тепла оставался постоянным.

По этой причине формула (1) должна быть заменена законом „адиабатического“ изменения давления

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\gamma, \quad (5)$$

где γ обозначает отношение удельных теплоемкостей газов: $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

Это дает

$$x = \gamma p_0 \quad (6)$$

и, следовательно,

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\varrho_0}} = \sqrt{\gamma g H}. \quad (7)$$

¹⁾ Newton, Principia, кни. II, секц. VIII, предлож. 48.

²⁾ Обыкновенно указывают на мемуар Лапласа: Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau, Ann. de chim. et de Phys., III, 238 (1816). [Mécanique Céleste, кни. 12, гл. III (1823)]. Однако, Пуассон уже в работе, помеченной 1807 годом (на которую будет ссылка ниже), указывает на это соглашение теории с опытом и прибавляет, что оно было дано Лапласом.

Если положим $\gamma = 1,402$ ¹⁾, то прежний результат нужно умножить на 1,184; отсюда получается

$$c = 332 \text{ м/сек},$$

что очень хорошо согласуется с лучшими результатами непосредственных измерений.

Вывод Лапласа пользуется таким полным доверием среди физиков, что теперь формулу (7) применяют с обратной целью, именно, чтобы получить значения γ для различных паров и газов из наблюдений над скоростью звука в них.

Строго говоря, подобное же различие следовало бы проводить и между „адиабатическими“ и „изотермическими“ коэффициентами упругости капельной жидкости или твердого тела; однако, разница в этом случае практически несущественна. Для воды, например, вычисленное отношение обоих объемных коэффициентов упругости равно 1,0012²⁾.

Влияние теплового лучеиспускания и теплопроводности теоретически было исследовано Стоксом³⁾ и Рэлеем⁴⁾. Если колебания совершаются слишком быстро для того, чтобы могло иметь место выравнивание температуры, но достаточно медленно для того, чтобы переход тепла между соседними частинами не мог быть совершенно исключен, то амплитуда волн по мере их распространения постепенно убывает вследствие происходящего при термических процессах рассеяния энергии. Влияние теплопроводности вместе с влиянием вязкости будет рассмотрено в следующей главе.

Согласно закону Шарля и Дальтона имеем

$$p = R\vartheta\theta, \quad (8)$$

где θ обозначает абсолютную температуру, а R — некоторую постоянную, зависящую от природы газов. Скорость звука будет изменяться, следовательно, как квадратный корень из θ . Для некоторых из более устойчивых газов, имеющих приблизительно одинаковые значения γ , формула (7) показывает, что скорость звука обратно пропорциональна квадратному корню из плотности, если только относительные плотности определены при одинаковых условиях давления и температуры.

§ 279. Теорию плоских волн можно также очень просто изложить в переменных Лагранжа (§§ 13, 14).

Если обозначить через ξ соответствующее моменту времени t перемещение частицы жидкости, абсцисса которой в невозмущенном состоянии есть x , то слой жидкости, первоначально заключенный

¹⁾ Это значение для γ получено в результате непосредственных опытов, произведенных в последнее время.

²⁾ Everett, Units and Physical Constants.

³⁾ Stokes, An Examination of the possible effect of the Radiation of Heat on the Propagation of Sound, Phil. Mag. (4), 1, 305 (1851) [Papers, III, 142].

⁴⁾ Rayleigh, Theory of Sound, § 247. См. § 360 нашей книги. В работе „On the Cooling of Air by Radiation and Conduction, and on the Propagation of Sound“, Phil. Mag. (5), XLVII, 308 (1899) [Papers, IV, 376]. Рэлей на основании опытных данных заключает, что влияние теплопроводности значительно больше в этом отношении, чем влияние лучеиспускания.

между плоскостями x и $x + \delta x$, к моменту времени $t + \delta t$ будет ограничен плоскостями

$$x + \xi \text{ и } x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \delta x,$$

так что уравнение непрерывности будет иметь вид

$$\varrho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \varrho_0, \quad (1)$$

где ϱ_0 — плотность в невозмущенном состоянии. Обозначая через s „коэффициент уплотнения“

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0},$$

получим

$$s = \frac{-\frac{\partial \xi}{\partial x}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}}. \quad (2)$$

Принимая во внимание силы, действующие на единицу поверхности рассматриваемого слоя, получим уравнение движения в виде

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

Уравнения эти являются точными, но в случае малых движений можно положить

$$p = p_0 + \kappa s \quad (4)$$

и

$$s = -\frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (3), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где $c^2 = \frac{\kappa}{\varrho_0}$. Решение уравнения (6) получается так же, как в §§ 170, 277.

§ 280. Кинетическая энергия системы плоских волн выражается так:

$$T = \frac{1}{2} \varrho_0 \int \int \int u^2 dx dy dz; \quad (1)$$

в этой формуле u обозначает скорость в точке (x, y, z) в момент t .

Вычисление *внутренней энергии* требует некоторой осторожности. Работа, которую совершил единица массы, когда объем ее возрастет от своего действительного значения v до нормального значения v_0 при условии, что v лишь мало отличается от v_0 , будет с точностью до малых второго порядка иметь значение

$$\frac{1}{2} (p + p_0)(v_0 - v),$$

как это непосредственно видно из диаграммы Уатта (фиг. 74). Полагая

$$p = p_0 + \kappa s, \quad v_0 - v = sv_0, \quad (2)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v) &= p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2}(p - p_0)(v_0 - v) = \\ &= p_0(v_0 - v) + \frac{1}{2}\kappa s^2 v_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если составить сумму соответствующих выражений для всех элементов массы системы, то член $p_0(v_0 - v)$ будет исчезать во всех тех случаях, когда имеют место условия, при которых полное изменение объема равно нулю. В этих случаях работа, которую совершают газ, заключающийся в произвольном данном объеме, когда он из своего действительного состояния переходит в нормальное состояние, определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} z \int \int \int s^2 dx dy dz. \quad (4)$$

До сих пор не было сделано никакого предположения относительно характера этого перехода, определяющего значение κ . Выражение (4), строго говоря, только в случае *адиабатического* расширения представляет внутреннюю энергию данного объема газа. Если же расширение происходит *изотермически*, то это выражение дает то, что в термодинамике известно под названием „свободной энергии“.

В прогрессивной плоской волне мы имеем $cs = \pm u$ и потому $T = W$. Равенство обеих энергий в этом случае можно вывести также из более общих соображений § 174.

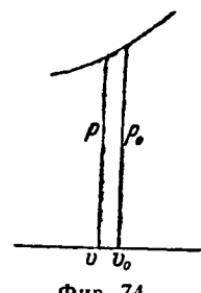
Для акустики особенный интерес, естественно, представляют простые гармонические колебания. Если a есть амплитуда прогрессивной волны, имеющей период $\frac{2\pi}{\sigma}$, то согласно (6) § 279 можем положить

$$\xi = a \cos(kx - \sigma t + \varepsilon), \quad (5)$$

где $k = \frac{\sigma}{c}$, а соответствующая длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Формулы (1) и (4) дают для энергии, заключающейся в призматической области с площадью поперечного сечения, равной единице, и длиной λ (в направлении оси x), значение

$$T + W = \frac{1}{2} \rho_0 \sigma^2 a^2 \lambda, \quad (6)$$

т. е. такое значение, какое имела бы кинетическая энергия всей рассматриваемой массы жидкости, если бы жидкость как целое двигалась со скоростью σa .



Фиг. 74.

Скорость переноса энергии через единицу площади той плоскости, которая движется вместе с лежащими на ней частицами, определяется равенством

$$p \frac{\partial \xi}{\partial t} = p \sigma a \sin(kx - \sigma t + \varepsilon). \quad (7)$$

Работа, совершаемая постоянной частью давления в течение полного периода, равна нулю. Для переменной же части давления будем иметь

$$\Delta p = \kappa s = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} = \kappa k a \sin(kx - \sigma t + \varepsilon). \quad (8)$$

Подставляя это значение в формулу (7), получим среднее значение скорости переноса энергии

$$\frac{1}{2} \kappa \sigma k a^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \sigma^2 a^2 c. \quad (9)$$

Таким образом, энергия, которая переносится в течение любого числа полных периодов через какую-нибудь плоскость, в точности равна энергии волны, проходящих через эту плоскость за тот же промежуток времени. Это и следовало ожидать, так как групповая скорость совпадает со скоростью волн в силу того, что с не зависит от λ (ср. § 237).

Волны конечной амплитуды

§ 281. Если давление p есть функция только плотности ρ , то из уравнений (1) и (3) § 279 мы получаем не приближенное, а точное уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\rho^2}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1)$$

В случае „изотермического“ процесса, при котором

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2)$$

уравнение (1) принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3}. \quad (3)$$

Подобным же образом при „адиабатическом“ процессе, когда

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad (4)$$

получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}. \quad (5)$$

Точные уравнения (3) и (5) можно сравнить с аналогичным уравнением [§ 173] для „длинных“ волн в канале постоянного сечения.