Из уравнения (1) следует, что уравнение (6) § 279 было бы точным, если бы между p и ϱ имела место зависимость такого рода, что

$$\varrho^2 \frac{dp}{d\varrho} = \varrho_0^2 c^2. \tag{6}$$

Отсюда плоские волны конечной амплитуды могут распространяться, не меняя своего вида, в том и только в том случае, когда

$$p - p_0 = \varrho_0 c^2 \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}\right). \tag{7}$$

Однако, зависимость такого рода не имеет места ни для одной из известных жидкостей как при постоянной температуре, так и в том случае, когда не происходит потери тепла вследствие теплопроводности и излучения [1]. Поэтому звуковые волны конечной амплитуды безусловно должны изменять свой вид при своем распространении.

§ 282. Законы распространения волн конечной амплитуды в предположении, что давление p есть определенная функция от плотности ϱ, были исследованы Ирншоу и независимо от него Риманом. Мы приведем здесь только результаты их исследований; подробности можно найти в оригинальных работах, а также в очень полной обработке этого вопроса у Рэлея [2].

Уравнения Эйлера (1) и (2) § 277 можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + u\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} &= -c^2\frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\tilde{\omega} = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{dp}{\varrho}, \quad c = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}. \tag{2}$$

Величина c есть скорость распространения волн при малых амплитудах; в общем случае c есть функция от ϱ и потому является величиной переменной. Если мы напишем теперь

$$d\tilde{\omega} = c\,d\omega \text{ или } \omega = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2} \frac{d\varrho}{\varrho}, \tag{3}$$

то уравнения (1) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -c\frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} &= -c\frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[1]) Эта зависимость дала бы для p отрицательное значение, если бы плотность ϱ упала ниже некоторого определенного значения.

[2]) Rayleigh, Aerial Plane Waves of finite Amplitude, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 247 (1910) [Papers, V, 573]. См. также Theory of Sound, гл. XI.

Отсюда получаем в результате сложения и вычитания уравнения

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(\omega+u)=0 \tag{5}$$

и

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial}{\partial x}\right\}(\omega-u)=0. \tag{6}$$

Из этих уравнений видно, что величина $\omega+u$ остается постоянной для той геометрической точки, которая движется со скоростью

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}+u, \tag{7}$$

в то время как величина $\omega-u$ постоянна для точки, движущейся со скоростью

$$-\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}+u. \tag{8}$$

Это означает также, что когда данное значение величины $\omega+u$ движется со скоростью (7) вперед, то значение величины $\omega-u$ движется со скоростью (8) назад.

Таковы результаты, полученные Риманом[1]). Эти результаты достаточны, чтобы получить общее представление о природе движения в каждом отдельном случае. Если начальное возмущение ограничено областью между плоскостями $x=a$ и $x=b$, то мы можем принять, что как ω, так и u исчезают при $x<a$ и $x>b$. Область, в которой $\omega+u$ является переменной, будет двигаться вперед; область же, в которой $\omega-u$ является переменной, будет двигаться назад, и это будет происходить до тех пор, пока эти области не отделятся одна от другой; тогда в области между ними будем иметь $\omega=0$, $u=0$, т. е. жидкость будет находиться в покое и будет иметь нормальную плотность ϱ_0. Таким образом, первоначальное возмущение оказывается разложенным на две волны, движущиеся в противоположных направлениях. В волне, движущейся вперед, мы имеем $\omega=u$, так что как плотность, так и скорость частицы жидкости распространяются вперед и быстрота этого распространения определяется формулой (7). Эта скорость распространения, примем ли мы изотермический или адиабатический закон расширения, будет тем больше, чем больше будет значение ϱ. Закон распространения волн можно наглядно изобразить так: построим кривую, точки которой будут иметь абсциссами значения x, а ординатами — значения ϱ, и будем двигать вперед каждую точку этой кривой со скоростью, которая определяется выражением (7).

Так как частицы, имеющие бо́льшие ординаты, движутся более быстро, то кривая в некоторых точках может оказаться перпендику-

---

[1]) Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Gött. Abh., VIII, 43 (1858—1859) (Werke 2 изд., Лейпциг, 1892, стр. 157).

лярной к направлению оси x. В этом случае соответствующие значения $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$ делаются бесконечно большими, и наш метод не может дать какое-либо заключение о дальнейшем ходе движения (ср. § 187).

§ 283. Исследование Ирншоу[1]) приводит к подобным же результатам; однако, оно является несколько менее общим, так как применяется только к прогрессивным волнам, которые при этом предполагаются уже существующими.

Для определенности будем считать, что значения p и ϱ связаны между собой адиабатическим законом. Если положить $y = x + \xi$, так что y обозначает абсолютную координату для момента времени t частицы, имеющей в невозмущенном состоянии абсциссу x, то уравнение (5) § 281 примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}, \tag{1}$$

где

$$c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0}.$$

Это уравнение удовлетворится, если положить

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right), \tag{2}$$

причем функция $f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ должна удовлетворять уравнению

$$f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\pm c_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}}. \tag{3}$$

Отсюда первый интеграл уравнения (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} = C \mp \frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}}. \tag{4}$$

Определяя C так, что $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ на границах волны, где $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, мы будем иметь

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = \mp \frac{2c_0}{\gamma-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right\}, \tag{5}$$

так как

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varrho_0}{\varrho}.$$

---

[1]) Earnshaw, On the Mathematical Theory of Sound, Phil. Trans., CL, 133 (1858).

Чтобы найти скорость, с которой распространяется какое-либо частное значение u, заметим, что значение u, которое в момент времени t относится к частице x, в момент $t+\delta t$ будет относиться к частице $x+\delta x$, при условии, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta t+\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}\,\delta x=0; \tag{6}$$

отсюда и из равенств (2) и (3) следует

$$\delta x\pm c_0\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}\delta t=0. \tag{7}$$

Значения u и ϱ распространяются, таким образом, *от частицы к частице* со скоростью

$$\mp\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}c_0.$$

Для вывода формулы для скорости распространения в *пространстве* мы имеем

$$\delta y=\frac{\partial y}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial y}{\partial t}\,\delta t=\left\{\mp c_0\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}+u\right\}\delta t. \tag{8}$$

Нижний знак относится к волне, перемещающейся в положительном направлении оси x, а верхний — к волне, перемещающейся в отрицательном направлении оси x. Скорость распространения тем больше, чем больше плотность, что было также установлено и на основании исследований Римана. Из (8) следует, что в положительной волне соотношение между u и y имеет вид

$$u=F\left\{y-\left(c_0+\frac{\gamma+1}{2}u\right)t\right\}, \tag{9}$$

который представляет рэлеевское обобщение формулы, полученной Пуассоном [1]) в 1807 г. для изотермического закона ($\gamma=1$).

Что формула Пуассона включает в себя изменение в типе распространяющейся волны, было еще указано Стоксом [2]). Надо заметить, что если будем стремить γ к единице в (5), то получим

$$\left.\begin{aligned} u&=\pm c_0\log\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right),\\ \text{или}\qquad \varrho&=\varrho_0 e^{\mp\frac{u}{c_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$ [3])

§ 284. Условия распространения волн установившегося типа были очень простым способом исследованы Ранкином [4]).

---

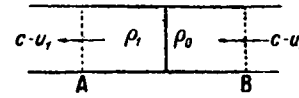
[1]) Poisson, Mémoire sur la théorie du son, Journ. de l'École Polytechn., VII, 367.

[2]) Stokes, On a Difficulty in the Theory of Sound, Phil. Mag. (3), XXIII, 349 (1848) [Papers, II, 51].

[3]) Этот результат вместе с аналогичным результатом для *длинных* волн в воде, кажется, впервые был указан Морганом. См. Airy, Phil. Mag. (3), XXXIV, 401 (1849).

[4]) Rankine, On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance, Phil. Trans., CLX, 277 (1870) [Papers, стр. 530].

Пусть A, B суть две точки воображаемой цилиндрической трубки (фиг. 75), которая имеет поперечное сечение, равное *единице*, и расположена в направлении движения волн; возьмем положительное направление оси x в том же направлении и обозначим давление, плотность и скорость частицы в точках A и B соответственно через p_1, ϱ_1, u_1 и p_0, ϱ_0, u_0.



Фиг. 75.

Если сообщить, как в § 175, всей массе жидкости скорость c, равную, но противоположную скорости распространения волн, то задача приведется к рассмотрению установившегося движения. Так как теперь через любое поперечное сечение какой-нибудь трубки в каждую единицу времени протекает одинаковое количество жидкости, то мы должны иметь соотношение

$$\varrho_1(c-u_1)=\varrho_0(c-u_0)=m; \tag{1}$$

здесь m обозначает массу жидкости, которая протекает в единицу времени через единицу площади плоскости, движущейся вместе с волной, если рассматривать задачу в ее первоначальной форме. Ранкин называет величину m „массовой скоростью" волны.

Далее, равнодействующая давлений в направлении BA, приложенных к массе жидкости, заключенной между сечениями A и B, равна p_0-p_1, а приращение количества движения этой массы в том же направлении в единицу времени равно

$$m(c-u_1)-m(c-u_0).$$

Отсюда следует

$$p_0-p_1=m(u_0-u_1). \tag{2}$$

Это равенство вместе с равенством (1) дает зависимость

$$p_1+\frac{m^2}{\varrho_1}=p_0+\frac{m^2}{\varrho_0}. \tag{3}$$

Таким образом, волна конечной амплитуды может распространяться, оставаясь неизменной, только в такой среде, для которой имеет место равенство

$$p+\frac{m}{\varrho^2}=\text{const. или } p+m^2v=\text{const.}, \tag{4}$$

где v обозначает объем единицы массы. К этому заключению другим путем мы уже пришли в § 281. Заметим, что соотношение (4) на диаграмме Уатта изображается *прямой линией*.

Если изменение плотности будет незначительным, то можно будет считать, что соотношение (4) в качестве приближенного годится при подходящем значении m и для действительных жидкостей. Полагая

$$\left.\begin{aligned}\varrho&=\varrho_0(1+s),\\ p&=p_0+\varkappa s,\\ m&=\varrho_0 c,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

получим, как в § 277,

$$c^2=\frac{\varkappa}{\varrho_0}. \tag{6}$$

Сначала Стокс[1]), а позднее и многие другие авторы показали, что в случае такого рода волн должны выполняться как условие постоянства массы, так и условие постоянства количества движения. Простейшим случаем будет тот, когда величины ϱ и u остаются всюду постоянными, кроме плоскости разрыва, где они претерпевают изменения. Если в предшествующих рассуждениях взять одно из сечений A, B позади, а другое — впереди этой плоскости, то на основании зависимости (3) будем иметь

$$m=\left(\frac{p-p_0}{\varrho_1-\varrho_0}\varrho_1\varrho_0\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$c-u_0=\frac{m}{\varrho_0}=\left(\frac{p_1-p_0}{\varrho_1-\varrho_0}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{1/2} \tag{8}$$

и

$$u_1-u_0=\frac{m}{\varrho_0}-\frac{m_1}{\varrho_1}=\pm\left[\frac{(p_1-p_0)(\varrho_1-\varrho_0)}{\varrho_1\varrho_0}\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Здесь следует брать верхний или нижний знак в зависимости от того, больше или меньше ϱ_1, чем ϱ_0, т. е. имеем ли мы дело с волной сгущения или разрежения. Полученные здесь результаты содержат только *разности* скоростей, что и следовало ожидать, так как мы можем сообщить всей массе рассматриваемой жидкости общую скорость, не изменяя характера волн.

Мы можем, например, принять, что величины p_0, ϱ_0, u_0, определяющие состояние среды перед волной, заданы произвольно и что плотность ϱ_1 воздуха в самой распространяющейся волне тоже задана. Далее необходимо заранее принять на основании физических соображений какое-либо соотношение между p_1, ϱ_1 и p_0, ϱ_0. Тогда остальные величины m, c, u_1 определятся равенствами (7), (8), (9). Формула (8) дает скорость, с которой волна вступает в лежащую перед ней область.

Против этих результатов можно, однако, сделать то возражение[2]), что для действительных жидкостей уравнение энергии не может иметь место одновременно с равенствами (1) и (2). Если мы вычислим избыток работы, которая производится в единицу времени силами давления, приложенными к жидкости, втекающей через сечение B в пространство AB, над той работой, которую за то же время производит давление жидкости, вытекающей через сечение A, и вычтем отсюда приращение кинетической энергии, то получим

$$p_0(c-u_0)-p_1(c-u_1)-\frac{1}{2}m\left\{(c-u_1)^2-(c-u_0)^2\right\},$$

или

$$p_1u_1-p_0u_0-\frac{1}{2}m(u_1^2-u_0^2),$$

---

[1]) Stokes, см. выше, стр. 604.

[2]) Rayleigh, Theory of Sound, § 253. Представляет интерес сравнение этого параграфа труда Рэлея с § 187 нашей книги.

или, наконец,

$$\frac{1}{2}(p_1+p_0)(u_1-u_0). \tag{10}$$

Эти выражения эквивалентны друг другу в силу динамического уравнения (2). Соответствующий результат *для единицы массы* получим, если разделим это выражение на m. Подставляя значение u_1-u_0 из формулы (1), получим

$$\frac{1}{2}(p_1+p_0)(v_0-v_1), \tag{11}$$

где буква v поставлена, как и раньше, вместо $\frac{1}{\varrho}$.

Если обозначить на диаграмме Уатта через A и B два состояния среды, то выражение (11) будет измерять площадь между прямой AB, осью v и ординатами точек A и B. Если бы переход от состояния B к состоянию A на каждой стадии процесса мог быть осуществлен без притока или потери тепла, то соответствующие точки диаграммы лежали бы на одной и той же „адиабатической кривой" и приращение внутренней энергии было бы представлено площадью, заключенной между этой кривой, осью v и крайними ординатами. Для действительных газов адиабата обращена вогнутостью кверху и потому последняя из названных площадей (по абсолютному значению) меньше, чем первая. Если мы обратим внимание на знак площади, то увидим, что для волны сгущения ($v_1<v_0$) работа внешнего давления была бы больше, чем приращение кинетической и внутренней энергии; в случае же волны разрежения ($v_1>v_0$), наоборот, отданная работа больше, чем соответствующая ей кажущаяся потеря энергии[1]).

---

[1]) В некоторых исследованиях Гюгонио (которые Адамар в своих „Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", Париж, 1903, развивает дальше) доказательство, приведенное в тексте, обращено. При *предположении* возможности волны разрыва оказывается, что уравнение энергии может быть удовлетворено, если выражение (10) положить равным приращению внутренней энергии [см. § 10 (8)]. На основании такого предположения Гюгонио делает заключение, что переход от одного состояния к другому происходит по закону

$$\frac{1}{2}(p_1+p_0)(v_0-v_1)=\frac{1}{\gamma-1}(p_1v_1-p_0v_0).$$

„Telle est la relation gu'Hugoniot a substituée à [$pv^\gamma=\text{const.}$] pour exprimer que la condensation ou dilatation brusque se fait sans absorption ni dégagement de chaleur. On lui donne actuellement le nom de *loi adiabatique dynamique*, la relation [$pv^\gamma=\text{const.}$], qui convient aux changements lents, etant désignée sous le nom de *loi adiabatique statique*" (Hadamard, p. 192), что в переводе означает: „Таково соотношение, которое Гюгонио поставил на место закона [$pv^\gamma=\text{const.}$], чтобы выразить, что внезапное сгущение или разрежение происходит без поглощения или выделения тепла. Эту зависимость называют *динамическим адиабатическим законом*, соотношение же [$pv^\gamma=\text{const.}$], которое имеет место в случае медленных изменений, называют *статическим адиабатическим законом*". Однако, для такого закона не даны какие-либо физические основания.

Оказывается, что уравнение энергии для волн разрыва не может удовлетворяться за исключением такой гипотетической среды, в которой адиабатами являются прямые линии. Это совпадает с тем условием, которое мы получили для возможности установившихся непрерывных волн.

В исследованиях, которые изложены выше, не принимались во внимание диссипативные силы, такие, как вязкость, теплопроводность и лучеиспускание. Практически же существование волны разрыва должно предполагать наличие конечной разности температур между частями жидкости, лежащими с обеих сторон плоскости разрыва; поэтому, если даже оставить в стороне вязкость, рассеяние энергии должно происходить вследствие тепловых явлений на плоскости разрыва. То обстоятельство, что установившаяся волна разрежения должна была бы дать выигрыш энергии, показывает, что такого рода волна невозможна. Отсюда следует, что такая волна, если даже она когда-либо возникла бы, оказалась бы неустойчивой.

Вопрос о том, можно ли соотношения между обоими состояниями при допущении рассеяния энергии согласовать с уравнением энергии, был подробно исследован Ранкином и (более подробно) Рэлеем[1]). При этих исследованиях предполагалось, что переход от одного установившегося состояния к другому происходит непрерывно, хотя и очень быстро. Так как температурный градиент $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$ впереди и позади волны есть нуль, то полное приращение тепла на единицу массы при переходе от состояния A к состоянию B равно нулю. Количество тепла, необходимое для того, чтобы вызвать бесконечно малые приращения δp и δv, определяется термодинамической формулой

$$\delta Q = \frac{v\,\delta p + \gamma p\,\delta v}{\gamma - 1}. \tag{12}$$

Так как на основании уравнения (4) имеем

$$\delta p = -m^2\,\delta v,$$

то формулу (12) можно представить в виде

$$\delta Q = \frac{\delta p}{(\gamma-1)\,m^2}\left\{p + m^2 v - (\gamma+1)\,p\right\}. \tag{13}$$

Отсюда, выражая, что

$$\int dQ = 0,$$

получим соотношение

$$p + m^2 v = \frac{1}{2}(\gamma+1)(p_0 + p_1). \tag{14}$$

---

[1]) Rayleigh, см. выше, стр. 601.

В частности имеем

$$\left.\begin{aligned} m^2 v_1 &= \frac{1}{2}(\gamma-1)\,p_1 + \frac{1}{2}(\gamma+1)\,p_0, \\ m^2 v_0 &= \frac{1}{2}(\gamma+1)\,p_1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)\,p_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из формул (13) и (14) получается

$$\delta Q = \frac{(\gamma+1)\,\delta p}{2(\gamma-1)\,m^2}\,(p_0 + p_1 - 2p), \tag{16}$$

а отсюда

$$Q = \frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)\,m^2}\,(p_1 - p)(p - p_0). \tag{17}$$

Эта формула дает полное количество тепла, которое получила единица массы жидкости к тому моменту, когда давление сделалось равным p.

Если принять во внимание только теплопроводность, то поток тепла в область, расположенную влево от плоскости, которая лежит между плоскостями A и B, равен $k\,\frac{d\theta}{dx}$, где k обозначает коэфициент теплопроводности, в то время как количество тепла, проходящее в единицу времени через плоскость вследствие конвекции, оказывается равным mQ. Так как область, расположенная с левой стороны, не получает и не теряет тепла, то имеем

$$k\,\frac{d\theta}{dx} = -mQ. \tag{18}$$

Ранкин исключает θ посредством формулы $pv = R\theta$ и находит таким способом зависимость между величинами x и p. Формула $pv = R\theta$ в соединении с формулой (14) дает соотношение

$$\theta = \frac{\left\{\frac{1}{2}(\gamma+1)(p_0+p_1) - p\right\} p}{m^2 R}. \tag{19}$$

Отсюда на основании формулы (18) следует

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{d\theta}{dp}}{\frac{d\theta}{dx}} = -\frac{(\gamma-1)\,k}{(\gamma+1)\,mR}\cdot\frac{(\gamma+1)(p_0+p_1) - 4p}{(p_1-p)(p-p_0)}. \tag{20}$$

Для некоторой точки волны вследствие предполагаемой непрерывности мы должны иметь $p = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$; в этой точке значение величины $\frac{dx}{dp}$ должно быть отрицательным. Кроме того, величина $\frac{dx}{dp}$ не должна менять знак, так как в противном случае мы имели бы два различных значения для p при одном и том же значении x.

Следовательно, мы должны иметь $p_0 < p_1$, и потому $v_0 > v_1$, т. е. волна должна быть волной сгущения. При возрастании x значения p непрерывно уменьшаются от p_1 до p_0, и потому знаменатель во второй дроби в правой части равенства (20) оказывается положительным. Для того чтобы числитель был положителен, должно выполняться равенство

$$\frac{p_1}{p_0} < \frac{\gamma+1}{3-\gamma}. \tag{21}$$

Для воздуха это предельное значение приблизительно равно $^3/_2$.

Интеграл от выражения (20) равен

$$x = \frac{k}{(\gamma+1)mC_v}\left\{\frac{(\gamma-1)(p_0+p_1)}{p_1-p_0}\log\frac{p_1-p}{p-p_0} - \right.$$
$$\left. - 2\log\frac{4(p_1-p)(p-p_0)}{(p_1-p_0)^2}\right\}, \tag{22}$$

если начало отсчета x взять в точке, где $p = \frac{1}{2}(p_0+p_1)$. Мы воспользовались при этом термодинамическим соотношением

$$R = (\gamma-1)C_v, \tag{23}$$

в котором C_v обозначает удельную теплоемкость при постоянном объеме. При изменении величины p от значения p_1 до значения p_0 значение x возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; однако, если отношение $\frac{p_1}{p_0}$ заметно отклоняется от *единицы*, то область, в которой практически имеет место этот переход, оказывается очень малой, и все обстоятельства оказываются очень близкими к тем, которые наблюдаются в случае разрыва[1]).

В случае воздуха мы можем положить в системе *CGS*

$$k = 5{,}22\cdot 10^{-5},\quad \gamma = 1{,}40,\quad C_v = 0{,}1715,$$
$$\varrho_0 = 0{,}00129,\quad p_0 = 1{,}013\cdot 10^6.$$

Отсюда, полагая для примера $\frac{p_1}{p_0} = 1{,}4$, мы находим из равенств (15) $m = 49{,}6$ и, следовательно,

$$\frac{k}{(\gamma+1)mC_v} = 2{,}559\cdot 10^{-6}.$$

Из этих данных мы заключаем, что давление изменяется

$$\text{от } \frac{9}{10}p_1 + \frac{1}{10}p_0 \text{ до } \frac{9}{10}p_0 + \frac{1}{10}p_1$$

на протяжении $2{,}7\cdot 10^{-5}$ *см*. Скорость распространения возмущения относительно покоящегося воздуха получается равной

$$\frac{m}{\varrho_0} = 3{,}84\cdot 10^4 \text{ см/сек}.$$

---

[1]) Rayleigh, см. выше. Независимо от Рэлея к подобным же результатам пришел Г. И. Тэйлор, The Conditions Necessary for Discontinuous Motion in Gases, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 371 (1910).

В том случае, когда и вязкость и теплопроводность будут приняты во внимание, исследование становится более сложным. Рэлеем было установлено, что общий характер полученных результатов не изменится, за исключением того, что область допустимых значений отношения $\frac{p_1}{p_0}$ значительно расширится. Его решение для случая учета одной только вязкости будет приведено позднее (§ 360а).

Сферические волны.

§ 285. Общие уравнения малых колебаний имеют следующий вид

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1}$$

Если положим

$$p = p_0 + \varkappa s, \quad c^2 = \frac{\varkappa}{\varrho_0} \tag{2}$$

и проинтегрируем уравнения (1) по t, то получим

$$\left.\begin{aligned} u = -c^2 \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t s\,dt + u_0, \qquad v = -c^2 \frac{\partial}{\partial y}\int_0^t s\,dt + v_0, \\ w = -c^2 \frac{\partial}{\partial z}\int_0^t s\,dt + w_0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где u_0, v_0, w_0 суть значения u, v, w в точке (x, y, z) в момент $t = 0$. Если в начальный момент движение было безвихревым и обладало потенциалом скоростей φ_0, то будем иметь

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{4}$$

где

$$\varphi = c^2 \int_0^t s\,dt + \varphi_0. \tag{5}$$

Такое непрерывное существование потенциала скоростей мы доказали в более общем виде в §§ 17 и 33.

Из равенства (5) получается

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{6}$$

Мы будем теперь предполагать, что возмущение симметрично относительно некоторой неподвижной точки, которую будем принимать за начало. Движение в данном случае необходимо должно быть безвихревым, так что должен существовать потенциал скоростей φ, который в нашем случае зависит только от расстояния r от начала и от времени t.

Чтобы составить уравнение непрерывности, заметим, что масса жидкости, заключенная между сферами r и $r+\delta r$, вследствие разности потоков через внутреннюю и внешнюю поверхности увеличится в единицу времени на величину

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(4\pi r^2 \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\delta r.$$

Так как это же количество может быть выражено также через $\frac{\partial \varrho}{\partial t} 4\pi r^2 \delta r$, то имеем

$$r^2 \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Это уравнение можно было бы также получить непосредственно из общего уравнения непрерывности (5) § 7. Для случая бесконечно малых движений из уравнения (7) следует

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right); \tag{8}$$

отсюда на основании формулы (6) получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right). \tag{9}$$ [1]

Это уравнение можно привести к более удобной форме

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}; \tag{10}$$

решение его имеет вид

$$r\varphi = f(r-ct) + F(r+ct). \tag{11}$$

Движение складывается, таким образом, из двух систем сферических волн, из которых одна распространяется со скоростью c наружу, а другая с такой же скоростью внутрь.

Если мы рассмотрим теперь только первую систему, то на основании равенства (6) будем иметь

$$cs = -\frac{1}{r} f'(r-ct);$$

это показывает, что сгущение распространяется со скоростью c наружу, причем во время движения значение его убывает, так как оно оказывается обратно пропорциональным расстоянию от начала координат.

---

[1]) Если мы примем закон Бойля, то точное уравнение симметричных сферических волн будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\,\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right).$$

Скорость в одном и том же ряду волн равна

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{1}{r}f'(r-ct)+\frac{1}{r^2}f(r-ct).$$

С возрастанием r второй член становится все меньше по сравнению с первым, так что скорость в конце концов распространяется по тому же закону, как и сгущение.

Если имеются налицо только расходящиеся или только сходящиеся волны, то из равенства (11) имеем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)=\mp cs; \tag{12}$$

это соответствует формуле (11) § 277.

Для наших целей удобнее представить формулу для расходящихся волн в следующем виде

$$4\pi r\varphi=f\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{13}$$

Так как отсюда получается

$$\lim_{r=0}\left[-4\pi r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]=f(t), \tag{14}$$

то можно считать, что эти волны возбуждаются источником интенсивности $f(t)$, находящимся в начале; ср. § 196.

Если источник действует только в течение конечного промежутка времени, то значение φ, данное формулою (13), будет исчезать за границами волн. Отсюда на основании формулы (6) следует

$$\int s\,dt=0, \tag{15}$$

где интеграл распространяется на весь тот промежуток времени, который необходим для того, чтобы возмущение прошло через рассматриваемую точку. То обстоятельство, что расходящаяся сферическая волна должна обязательно содержать как сгущенную, так и разреженную части, было в первый раз замечено Стоксом[1]), ср. § 197.

Энергия конечной системы расходящихся сферических волн так же, как и в случае плоских прогрессивных волн, состоит наполовину из кинетической энергии, наполовину из потенциальной.

Это следует из общих рассуждений § 174, но может быть получено и независимо от них следующим образом. Имеем тождество

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2=\left\{\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}\right\}^2-\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^2).$$

---

[1]) Stokes, On some Points in the Received Theory of Sound, Phil. Mag. (3), XXXIV, 52 (1849) [Papers, II, 82]. См. также Rayleigh, Theory of Sound, § 279.

Если положим

$$q = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad c^2 s = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{16}$$

то это тождество на основании формулы (12) дает для случая расходящейся системы волн зависимость

$$r^2 q^2 = c^2 r^2 s^2 - \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^2).$$

Отсюда следует

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\varrho q^2 4\pi r^2\, dr = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varrho c^2 s^2 4\pi r^2\, dr, \tag{17}$$

так как $r\varphi^2$ исчезает на внешней и внутренней границе системы волн[1]).

§ 286. Определение функций f и F в формуле (11) из начальных условий для неограниченного пространства можно выполнить следующим способом.

Будем считать, что распределение скорости и плотности в момент t дается формулами

$$\varphi = \psi(r), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \chi(r), \tag{18}$$

где ψ, χ обозначают произвольные функции.

При сравнении с формулами (11) получим

$$f(z) + F(z) = z\psi(z), \tag{19}$$

$$-f'(z) + F'(z) = \frac{z}{c}\chi(z).$$

Второе из этих уравнений дает после интегрирования

$$-f(z) + F(z) = \frac{1}{c}\int_0^z z\chi(z)\, dz + C. \tag{20}$$

Далее, из того условия, что в начале волн не происходит никакого возникновения или исчезания жидкости, т. е. $r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \to 0$, когда $r \to 0$, следует

$$f(-z) + F(z) = 0. \tag{21}$$

Формулы (19) и (20) определяют функции f и F для положительных значений z, после чего формула (21) определяет f для отрицательных значений z[2]).

---

[1]) Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXV, 160 (1902).
[2]) Rayleigh, Theory of Sound, § 279.

Окончательный результат можно написать в виде

$$r\varphi = \frac{1}{2}(r-ct)\psi(r-ct) + \frac{1}{2}(r+ct)\psi(r+ct) + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} z\chi(z)\,dz \qquad (22)$$

или

$$r\varphi = -\frac{1}{2}(ct-r)\psi(ct-r) + \frac{1}{2}(ct+r)\psi(ct+r) + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r} z\chi(z)\,dz, \qquad (23)$$

смотря по тому, будет ли r больше или меньше, чем ct. Эти формулы могут быть непосредственно проверены.

В качестве очень простого примера рассмотрим тот случай, когда воздух вначале находится в покое и начальное возмущение представляет собой сгущение s_0, постоянное внутри шара радиуса a. Тогда мы будем иметь $\psi(z)=0$, в то время как $\chi(z)=c^2s_0$ или 0, смотря по тому $z \lessgtr a$. На расстоянии $r\,(>a)$ от начала координат движение начнется в момент $t=\frac{r-a}{c}$ и закончится в момент $t=\frac{r+a}{c}$. Для промежуточных моментов времени мы будем иметь

$$r\varphi = \frac{1}{4}cs_0\left\{a^2-(r-ct)\right\}^2 \qquad (24)$$

и

$$\frac{s}{s_0} = \frac{r-ct}{2r}. \qquad (25)$$

Возмущение оказывается заключенным в пространстве между двумя концентрическими сферами с разностью радиусов $2a$, и коэфициент сгущения s остается положительным для внешней половины этого пространства и отрицательным для внутренней половины

Нам потребуется скоро выражение, которое дает значение φ в начале координат как функцию t, выраженную через начальные данные. На основании формул (11) и (21) имеем

$$[\varphi]_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{f(r-ct)+F(r+ct)}{r} =$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{F(ct+r)-F(ct-r)}{r} = 2F'(ct)$$

или на основании формулы (19) и последующей

$$[\varphi]_{r=0} = \frac{d}{dt}[t\psi(ct)] + t\chi(ct). \qquad (26)$$

Например, в только что рассмотренной специальной задаче имеет место равенство $\psi=0$ для всех значений переменного, в то время как $\chi(r)=c^2s_0$ или 0 при $r \lessgtr a$. В начальной точке мы имеем, таким образом, $\varphi=c^2s_0t$ или 0

для $ct \lesseqgtr a$. Когда $ct = a$, то значение φ изменяется скачком от acs_0 до 0, так что значение s в центре на одно мгновение обращается в отрицательную бесконечность. Мы можем избежать обращения φ в бесконечность, если примем, что начальное значение s вблизи значения $r = a$ изменяется непрерывно, но быстро от s_0 до 0.

Общее уравнение звуковых волн.

§ 287. Мы переходим теперь к общему случаю распространения звуковых волн. Как и прежде, мы будем пренебрегать малыми величинами второго порядка, так что уравнение движения, как в § 285, будет иметь вид

$$c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{1}$$

Подставляя $\varrho = \varrho_0(1+s)$ в общее уравнение непрерывности, будем иметь с тою же степенью приближения

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Исключение s из уравнений (1) и (2) дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

или, при нашем прежнем способе обозначения,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi. \tag{4}$$

Так как это уравнение линейное, то оно будет удовлетворяться средним арифметическим произвольного числа частных решений φ_1, φ_2, φ_3, ... Как в § 38, представим себе бесконечное число прямоугольных систем осей, равномерно распределенных около точки P как около начала; пусть функции φ_1, φ_2, φ_3, ... суть потенциалы скоростей тех движений, которые по отношению к этим системам оказываются такими же, как первоначальное движение по отношению к системе x, y, z. Тогда среднее арифметическое $\bar{\varphi}$ функций φ_1, φ_2, φ_3 будет потенциалом скоростей движения, симметричного по отношению к точке P; поэтому к функции $\bar{\varphi}$ можно будет применить результаты исследования § 286, если через r обозначить расстояние произвольной точки от точки P. Другими словами, если $\bar{\varphi}$ есть функция от r и t, определяемая уравнением

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi \, d\tilde{\omega}, \tag{5}$$

где φ обозначает произвольное решение уравнения (4), а $\delta\tilde{\omega}$ — телесный угол, под которым из P виден элемент шаровой поверхности

радиуса r с центром в P, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 r\bar{\varphi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 r\bar{\varphi}}{\partial r^2}. \tag{6}$$ [1]

Отсюда следует

$$r\bar{\varphi} = f(r-ct) + F(r+ct). \tag{7}$$

Таким образом, среднее значение φ для шара, имеющего центр в произвольной точке среды, следует такому же закону, как потенциал скоростей симметрической шаровой волны. Мы видим сразу, что значение φ в точке P в момент t зависит от средних значений, которые функции φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ имели первоначально в точках сферы с радиусом ct и с центром в P; возмущение поэтому распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью c. Таким образом, если первоначальное возмущение распространялось только на конечную часть Σ области, то возмущение в точке P, лежащей вне Σ, начинается по истечении промежутка времени $\frac{r_1}{c}$, продолжается в течение времени $\frac{r_2-r_1}{c}$, а потом совершенно прекращается; r_1, r_2 обозначают радиусы двух сфер с центрами в P, из которых одна охватывает Σ, а другая ее исключает.

Чтобы дать математическое выражение решению уравнения (4), в существенных чертах уже полученному, положим, что значения функций φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ в момент $t=0$ даются формулами

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \psi(x, y, z), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \chi(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Средние значения этих функций в шаре радиуса r с центром в точке (x, y, z) суть

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi}\iint \psi(x+lr,\ y+mr,\ z+nr)\,d\tilde{\omega},$$

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\iint \chi(x+lr,\ y+mr,\ z+nr)\,d\tilde{\omega},$$

где l, m, n обозначают направляющие косинусы произвольного радиуса этого шара и $d\tilde{\omega}$ есть соответствующий элементарный телесный угол.

---

[1]) Этот результат другим путем был найден Пуассоном, Mémoire sur la théorie du son, Journ. de l'École Polytechn., VII, 334—338 (1807). Замечание, что это приводит также к полному решению уравнения (4), принадлежит Лиувиллю, Journ. de Math., I, 1 (1856).

Полагая

$$l = \sin\theta\cos\omega,$$

$$m = \sin\theta\sin\omega,$$

$$n = \cos\theta,$$

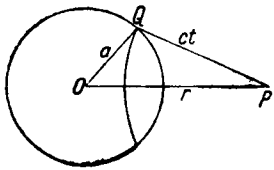
получим

$$\delta\widetilde{\omega} = \sin\theta\,\delta\theta\,\delta\omega.$$

Если мы сравним этот результат с формулой (26) § 286, то увидим, что значение φ в точке (x, y, z) для какого-либо следующего момента времени t определится формулой

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}t\iint\psi(x+ct\sin\theta\cos\omega,\ y+ct\sin\theta\sin\omega,\ z+\\ +ct\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\omega+\\ +\frac{t}{4\pi}\iint\chi(x+ct\sin\theta\cos\omega,\ y+ct\sin\theta\sin\omega,\ z+\\ +ct\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\omega;\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

эта формула была дана Пуассоном[1]).



Фиг. 76.

Простое приложение этих результатов представляет рассмотренная в § 280 специальная задача; в этой задаче начальное условие заключалось в том, что начальное возмущение s_0 было постоянно внутри сферы с радиусом a (фиг. 76) и с центром в начале координат. Если сферическая поверхность с радиусом $PQ = ct$ и с центром в точке P, лежащей вне первой сферы, пересекает сферу $r = a$, то расположенная внутри этой последней часть поверхности шара радиуса PQ будет равна $2\pi PQ^2(1-\cos OPQ)$, и среднее значение начальных значений s на всей поверхности шара $4\pi PQ^2$ оказывается равным

$$\frac{1}{2}(1-\cos OPQ)\,s_0 = \frac{a^2-(ct-r)^2}{4ctr}\,s_0,\qquad(10)$$

где $r = OP$. Отсюда получается

$$\varphi_P = \frac{cs_0}{4r}\,[a^2-(ct-r)^2],\qquad(11)$$

как в (24) § 286.

В случае возмущения, продолжающегося лишь некоторое время и распространяющегося в неограниченном пространстве, среднее значе-

---

[1]) Poisson, Mémoire sur l'intégration de quelques equations linéaires aux différences partielles et particulièrement de l'équation général du mouvement des fluides élastiques, Mém. de l'Acad. des Sciences, III, 121 (1819). Другие доказательства имеются у Кирхгофа, Mechanik, гл. XXIII и Рэлея, Theory of Sound, § 273.

ние во времени коэфициента уплотнения s в каждой точке равно нулю. В самом деле, из (1) следует уравнение

$$c^2 \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

и два других аналогичных уравнения. Отсюда получается

$$\frac{\partial}{\partial x} \int s\, dt = -\left[\frac{u}{c^2}\right] = 0 \text{ и т. д.,}$$

так как u, v, $w = 0$ при обоих пределах интеграции по t. Интеграл $\int s\, dt$ имеет поэтому для всех точек пространства одно и то же значение, и если мы рассмотрим бесконечно удаленные точки, в которых волны вследствие расхождения ослаблены, то увидим, что это значение есть нуль, ср. (15) § 285.

§ 288. Выражение для кинетической энергии жидкости, содержащейся в произвольной области, имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \varrho_0 \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt} = \varrho_0 \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

где $\dot{\varphi}$ стоит вместо $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. На основании формулы Грина § 43 это соотношение может быть написано в виде

$$\frac{dT}{dt} = -\varrho_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \varrho_0 \iiint \dot{\varphi} \Delta \varphi\, dx\, dy\, dz =$$

$$= -\varrho_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{\varrho_0}{c^2} \iiint \dot{\varphi} \ddot{\varphi}\, dx\, dy\, dz.$$

Отсюда, обозначая

$$W = \frac{1}{2} \varkappa \iiint s^2\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{c^2} \iiint \dot{\varphi}^2\, dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

имеем

$$\frac{d}{dt}(T + W) = -\varrho_0 \iint \dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \tag{3}$$

Мы видели (§ 280), что при известных условиях W представляет внутреннюю энергию.

Полное истолкование формулы (3) мы предоставляем читателю. В различных важных случаях, как, например, в случае неподвижных $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0\right)$ или свободных границ ($\dot{\varphi} = 0$), поверхностный интеграл будет исчезать, и мы будем иметь тогда равенство

$$T + W = \text{const}. \tag{4}$$

Этот результат позволяет дать доказательство однозначности определения движения по заданному начальному распределению скоростей и плотностей. В самом деле, если бы φ_1, φ_2 были две различные формы потенциала скоростей, соответствующие одним и тем же начальным условиям, то для движения с потенциалом скоростей $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ сумма $T+W$ должна была бы все время быть равной нулю, ибо она должна исчезать в начальный момент. Но так как каждый элемент в выражениях для T и W существенно положителен, то это требует, чтобы производные от φ по x, y, z, t все исчезали, а это обозначает, что φ_1 и φ_2 могут различаться между собой только на абсолютное постоянное [1]).

Этот ход доказательства годится, естественно, для всех тех случаев, для которых можно утверждать, что поверхностный интеграл в равенстве (3) исчезает.

Простые гармонические колебания.

§ 289. В случае простого гармонического движения с множителем времени $e^{i\sigma t}$ уравнение (4) § 287 принимает вид

$$(\Delta+k^2)\varphi=0, \tag{1}$$

где

$$k=\frac{\sigma}{c}. \tag{2}$$

Сравнение с § 280 показывает, что $\frac{2\pi}{k}$ есть длина волны плоских волн с данным периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$.

В случае симметрии относительно начала из уравнения (10) § 258 или после преобразования уравнения (1) будем иметь

$$\frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2}+k^2 r\varphi=0. \tag{3}$$

Решение этого уравнения можно написать в виде

$$\varphi=A\frac{\sin kr}{kr}+B\frac{\cos kr}{kr}\,^{2)}. \tag{4}$$

Если в начале координат источника нет, то должно быть $B=0$, и выражение (4) приводится к виду

$$\varphi=A\frac{\sin kr}{kr}. \tag{5}$$

Следует заметить, что это решение можно получить наложением системы плоских волн с равномерно распределенными направлениями

---

[1]) Kirchhoff, Mechanik, гл. XXIII.

[2]) Множитель, зависящий от времени, здесь, как и в других случаях, ради краткости отброшен.

движения. В самом деле, для системы плоских волн, направление движения которых составляет с данным радиусом-вектором r угол θ, имеем

$$\varphi = e^{-ikr\cos\theta}, \tag{6}$$

и среднее значение этой величины для всевозможных направлений, проходящих через начало, есть

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta}\, 2\pi\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin kr}{kr}. \tag{7}$$

На основании выражения (5) мы можем вывести заключение относительно общего случая, для которого имеет место уравнение (1). Из уравнения (6) § 287 следует, что среднее значение функции φ на поверхности сферы с радиусом r и с произвольным центром O удовлетворяет уравнению вида (3). Поэтому будем иметь, пользуясь обозначениями § 287,

$$\bar{\varphi} = \frac{\sin kr}{kr}\varphi_0, \tag{8}$$

где φ_0 — значение функции φ в точке O. При этом предполагается, что φ не имеет особенностей внутри сферы, к которой относится r [1]), ср. § 38.

Возвращаясь к случаю симметрии, заметим, что решение (4) может быть также написано в виде

$$\varphi = C\frac{e^{-ikr}}{kr} + D\frac{e^{ikr}}{kr}. \tag{9}$$

Принимая во внимание равенство (13) § 285, тотчас же видим, что формула

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \tag{10}$$

представляет систему расходящихся волн, происходящую от единичного источника в начале координат.

Чтобы вычислить энергию, излучаемую изолированным источником в свободное пространство, мы воспользуемся выражением в действительной форме

$$4\pi\varphi = \frac{\cos k(ct - r)}{r}. \tag{11}$$

Работа в единицу времени, произведенная над массою жидкости, находящеюся вне поверхности сферы радиуса r, равна

$$\left(p_0 + \varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)4\pi r^2. \tag{12}$$

---

[1]) Этот результат был дан Г. Вебером, Crelle, LXIX (1868).

Если мы подставим сюда значение φ из формулы (11) и возьмем средние значения тригонометрических членов, то получим

$$\frac{\varrho_0 k^2 c}{8\pi}. \tag{13}$$

Этот результат можно также получить из § 280, так как сферические волны с возрастанием радиуса приближаются по форме к плоским волнам [1]).

Подобным же образом второй член в формуле (9) представляет сток, в котором энергия поглощается в количестве (13) в единицу времени. Однако, представление о стоке энергии является для акустики очень искусственным и в действительности не применяется.

Потенциал скоростей диполя можно получить на основании § 56. Так, например, если ось симметрии совпадает с осью x, то мы можем написать

$$4\pi\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{14}$$

или в действительной форме

$$4\pi\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos k(ct-r)}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos k(ct-r)}{r}\cos\theta, \tag{15}$$

где θ — угол наклона радиуса-вектора r к оси x. Для больших значений kr имеем приближенное равенство

$$4\pi\varphi = -\frac{k\sin k(ct-r)}{r}\cos\theta. \tag{16}$$

Среднее значение энергии, излучаемой в единицу времени, тогда будет равно

$$\frac{\varrho_0 k^4 c}{24\pi}. \tag{17}$$

Это выражение можно получить или способом, указанным выше, или из теории плоских волн.

Напомним здесь, что эти вычисления имеют силу только в случае изолированного источника в свободном пространстве. Присутствие же препятствий в значительной степени может изменить приведенные результаты. Например, в случае простого источника, находящегося вблизи от бесконечной плоской стенки, амплитуда колебаний в любой точке удваивается вследствие отражения, и явление протекает таким образом, как если бы это отражение приходило от зеркального изображения источника, между тем как излучение энергии оказывается увеличившимся в четыре раза. Наоборот, источник, со всех сторон окруженный твердыми стенками, не производит вообще никакой работы, так как энергия газа остается постоянной.

---

[1]) Величина a § 280 в этом случае равна $\frac{1}{4\pi cr}$. Подставляя это значение в формулу (9) § 280 и умножая на $4\pi r^2$, получим выражение (13).

§ 290. Общая теория функций, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \tag{1}$$

была развита Гельмгольцем [1]), Рэлеем [2]) и другими авторами [3]). Она во многих отношениях аналогична теории уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$; в самом деле, последнее уравнение есть специальный случай, который получается, если положить $c = \infty$ или $\sigma = 0$.

Типичное решение уравнения (1), из которого можно получить все другие, есть решение, соответствующее единичному источнику, именно

$$\varphi = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \tag{2}$$

где r обозначает расстояние от источника.

На основании теоремы Грина получается следующее: если φ, φ' — две произвольные функции, конечные и однозначные вместе со своими первыми и вторыми производными в какой-либо конечной области, то имеем

$$\iint\left(\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n} - \varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \iiint(\varphi'\Delta\varphi - \varphi\Delta\varphi')\,dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

Если, кроме того, как φ, так и φ' будут удовлетворять уравнению (1), то правая часть формулы (3) будет исчезать, и мы получим

$$\iint\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,dS = \iint\varphi'\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \tag{4}$$

Отсюда тем же способом [4]), как в § 57, мы получаем формулу

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \tag{5}$$

которая выражает значение φ в произвольной точке P области через значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе. Буква r обозначает здесь расстояния отдельных элементов поверхности от точки P, и мы видим, что значение φ получается таким, как если бы оно соответствовало некото-

---

[1]) Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden, Crelle, LVII, 1 (1859) (Wiss. Abh., II, 303).

[2]) Rayleigh, Theorie of Sound, II.

[3]) Относительно новой математической теории см. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Лейпциг, 1891 и Sommerfeld, см. выше стр. 83.

[4]) Это показывает, что мы полагаем $\varphi' = \frac{e^{-ikr}}{r}$, где r обозначает расстояние от некоторой постоянной точки, и исключаем эту точку (если она лежит в рассматриваемой области) при помощи некоторой сферы малого радиуса.

рому распределению простых источников и диполей [1]) на граничной поверхности.

Если далее r' обозначает расстояние от точки P', лежащей вне области, то имеем

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{e^{-ikr'}}{r'}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS + \frac{1}{4\pi}\iiint \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr'}}{r'}\,dS. \qquad (6)$$

Следует заметить, что, как и в § 58, какое-то частное распределение источников на границе, выражаемое формулой (5), представляет только одно из бесконечного числа возможных распределений, которые дают точно такое же значение функции φ для *внутренних* точек области. Так, например, в результате сложения равенств (5) и (6) мы получим другое подобное же распределение, которое, кроме того, может быть изменено бесчисленным множеством способов путем изменения положения точки P'[2]).

Формулы (5) и (6) сохраняют также силу для бесконечной области, ограниченной изнутри одной или несколькими замкнутыми поверхностями, в предположении, что функция φ с увеличением расстояния R от начала приближается к виду

$$\varphi = C\frac{e^{-ikR}}{R}. \qquad (7)$$

Эта формула выражает то обстоятельство, что в бесконечности мы не имеем никаких источников звука.

Можно *при некоторых условиях* несколько далее провести аналогию с теорией обыкновенного потенциала и выразить значение φ в произвольной точке заданной области при помощи распределения только одних простых источников или только одних диполей по границе; в самом деле имеем

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{\partial\varphi'}{\partial n'}\right)dS, \qquad (8)$$

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\iint (\varphi - \varphi')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS, \qquad (9)$$

где вспомогательная функция φ' вместе со своими первыми и вторыми производными предполагается конечной и удовлетворяющей уравнению (1) внутри остальной области, являющейся внешней и заданной, тогда как на границе в зависимости от случая должно быть

$$\varphi' = \varphi \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi'}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \qquad (10)$$

Также предполагается, что φ' стремится асимптотически к виду (7), когда область, к которой она относится, расширяется до бесконеч-

---

[1]) Helmholtz, см. выше, стр. 623.
[2]) Larmor, см. выше, стр. 82.

ности. Нет необходимости доказывать это, так как это доказательство повторяло бы ход рассуждений § 58.

Было бы, однако, неправильно считать, что так же, как в случае обыкновенного потенциала, необходимо должна существовать функция φ, которая удовлетворяет уравнению (1) внутри заданной конечной области и в то же время удовлетворяет условию, что φ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе должны принимать *произвольные* заданные значения. Хотя приведенная теорема существования *обычно* имеет место, однако, она теряет силу для ряда определенных значений k, отвечающих нормальным колебаниям воздушной массы, заполняющей некоторую область, если граничные условия имеют вид соответственно $\varphi=0$ или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$.

На том же основании формулы (8) и (9) нельзя применять без каких-либо ограничений к случаю бесконечной области, так как определение вспомогательной функции может оказаться невозможным.

Для иллюстрации этих результатов положим, что внутри шара с радиусом a и с центром в начале O мы имеем

$$\varphi=\frac{\sin kR}{R}, \tag{11}$$

где R обозначает теперь расстояние от точки O. Если для внешней области положим

$$\varphi'=\frac{e^{-ik(R-a)}}{R}-\sin ka, \tag{12}$$

то условия применимости формулы (8) будут выполнены, и мы находим

$$\varphi=\frac{ke^{ika}}{4\pi a}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS. \tag{13}$$

Легко показать a posteriori, что при $R<a$ эта формула равносильна формуле (11), а при $R>a$ — формуле (12).

Найдем теперь поверхностное распределение простых источников, которое дает для пространства, лежащего вне сферы, значение φ в виде

$$\varphi=\frac{e^{-ikR}}{R}. \tag{14}$$

Значение φ' для внутренней области, совпадающее на границе с значением (14), равно

$$\varphi'=\frac{e^{-ika}}{\sin ka}\cdot\frac{\sin kR}{R}, \tag{15}$$

и мы получаем

$$\varphi'=\frac{k}{4\pi a\sin ka}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\,dS. \tag{16}$$

Однако определение φ' становится невозможным, когда k есть корень уравнения $\sin ka=0$. В самом деле, оказывается, что в этом случае равномерное распределение простых источников по поверхности шара с радиусом a не оказывает никакого действия на внешние точки.

Частный случай будем иметь, когда рассматриваемая область является полубесконечной, будучи ограничена плоскостью. Предположим, что это будет область на положительной стороне от плоскости $x=0$. Если мы примем $\varphi'(-x, y, z)=\varphi(x, y, z)$, то на границе $\varphi'=\varphi$ и $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, так что формула (8) приводится к виду

$$\varphi_P=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \tag{17}$$

С другой стороны, если мы предположим $\varphi'(-x, y, z)=-\varphi(x, y, z)$, то на границе $\varphi'=-\varphi$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ и, следовательно,

$$\varphi_P=\frac{1}{2\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS. \tag{18}$$

Если все размеры рассматриваемой области малы по сравнению с длиной волны, то мы можем в формуле (5) приближенно положить $e^{-ikr}=1$, и формула, как в § 57, принимает вид

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS. \tag{19}$$

Таким образом, для расстояний, малых по сравнению с длиной волны, можно вычислять изменения φ так, как если бы удовлетворялось уравнение $\Delta\varphi=0$. Это правило оказывается очень полезным для приближенного решения различных акустических задач (ср. §§ 299 300).

Заметим, наконец, что формула (8) после введения множителя, зависящего от времени, может быть написана в виде

$$\varphi_P=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,dS. \tag{20}$$

Этот результат можно обобщить, применяя теорему Фурье о двойном интеграле, которую мы можем представить в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,e^{i\sigma(t-\tau)}\,dt. \tag{21}$$

Обозначая через $\varphi(t)$ значение φ в точке (x, y, z) на границе области в момент t и через $f(t)$ соответствующее значение $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, получим значение φ для внутренней точки P

$$\varphi_P(t)=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\,dS, \tag{22}$$

причем в последнем члене пространственное диференцирование относится только к явно входящему r. Эта замечательная формула выражает значение φ в точке P для произвольного момента времени через предшествующие значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ в точках поверхности, заключающей внутри себя точку P; она была получена первоначально Кирхгофом[1]) другим путем из общего уравнения (4) § 287.

Некоторые авторы считали, что эта формула содержит точную математическую формулировку „принципа Гюйгенса" в акустике; однако, как мы это заметили уже в связи со специальным случаем (5), представление функции таким способом оказывается в значительной степени произвольным и неопределенным.

§ 291. Авторы, названные на стр. 623, исследовали также решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\varphi = \Phi, \tag{1}$$

где Φ обозначает данную функцию от x, y, z, исчезающую вне некоторой конечной области.

Решение это может быть получено на основании аналогии с теорией обыкновенного потенциала притяжения. Уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iiint \Phi' \frac{e^{-ikr}}{r}\, dx'\, dy'\, dz'; \tag{2}$$

здесь Φ'—значение Φ в точке (x', y', z'), r—расстояние этой точки от точки P, для которой отыскивается значение φ, и интеграция распространяется на область Σ. Если точка P лежит вне области Σ, то непосредственно видно, что правая часть формулы (2) представляет собой потенциал простых источников, распределенных в области Σ с объемной плотностью $-\Phi$. Чтобы проверить решение для случая, когда точка P лежит внутри области Σ, разделим область Σ на две части Σ_1 и Σ_2, из которых одна, например, Σ_2, пусть содержит внутри себя точку P и по своим линейным размерам в конце концов может сделаться бесконечно малой (по сравнению с k^{-1}). Так как P лежит вне Σ_1, то мы должны в интеграле (2) принимать во внимание только те элементы, которые относятся к пространству внутри Σ_2. Для этих элементов получаем после разложения в ряд показательной функции

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\Phi'}{r} dx', dy'\, dz' + \frac{ik}{4\pi}\iiint \Phi'\, dx'\, dy'\, dz' + \ldots \tag{3}$$

Как и в случае обыкновенного потенциала, первый член удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = \Phi$, но значение его может сделаться как

---

[1]) Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen, Berl. Ber., 1882, стр. 641 (Ges. Abh., II, 22). Некоторые другие доказательства были даны: сравнить Larmor, см. выше стр. 82 и Love, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 1, 37 (1903).

угодно малым. Второй и следующий члены не дают при предельном переходе никаких прибавок к значению φ или $\Delta\varphi$.

Можно показать, что функция (2) есть единственное решение уравнения (1), годное для всех точек пространства и исчезающее в бесконечности. В случае ограниченной области мы можем присоединить еще произвольное решение уравнения $(\Delta+k^2)\varphi=0$; благодаря этому оказывается возможным удовлетворить граничным условиям.

Мы можем воспользоваться изложенной здесь теорией, чтобы определить эффект, производимый действующими на среду периодическими внешними силами (X, Y, Z). Уравнения движения получаются в результате очевидного обобщения уравнений (4) и (5) § 277; таким способом мы получаем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-c^2\frac{\partial s}{\partial x}+X,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-c^2\frac{\partial s}{\partial y}+Y,\quad \frac{\partial w}{\partial t}=-c^2\frac{\partial s}{\partial z}+Z \tag{4}$$

вместе с уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{5}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=c^2\Delta s-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) \tag{6}$$

или, если принять в качестве множителя, зависящего от времени, e^{ikct}.

$$(\Delta+k^2)s=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Для случая неограниченной области решение принимает вид

$$s=-\frac{1}{4\pi c^2}\iiint\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\,dx'\,dy'\,dz', \tag{8}$$

причем предполагается, что X, Y, Z исчезают для расстояний от начала, превосходящих некоторое определенное конечное значение. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x'}r^{-1}=-\frac{\partial}{\partial x}\cdot r^{-1} \text{ и т. д.},$$

то формула (8) принимает следующий вид:

$$s=\frac{1}{4\pi c^2}\iiint\left(X'\frac{\partial}{\partial x'}+Y'\frac{\partial}{\partial y'}+Z'\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\,dx'\,dy'\,dz'. \tag{9}$$

Обращаясь к уравнениям (4), мы видим, что движение *вне* области, в которой действуют силы, свободно от вихрей и имеет потенциал скоростей

$$\varphi=-\frac{ics}{k}; \tag{10}$$

такой потенциал скоростей можно получить в результате некоторого распределения диполей.

Если мы предположим, например, что силы действуют на бесконечно малую область около начала и параллельны оси x, и обозначим

$$F = \varrho \iiint X' \, dx' \, dy' \, dz', \tag{11}$$

то получим

$$\varphi = -\frac{iF}{4\pi k c \varrho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{12}$$

где r обозначает расстояние от начала. Сосредоточенная сила Fe^{ikct} таким образом эквивалентна диполю интенсивности $\frac{iF}{kc\varrho}$.

Из формул (9) и (11) мы получаем, вводя опять множитель, зависящий от времени,

$$s = \frac{F}{4\pi\varrho c^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{i\sigma\left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}, \tag{13}$$

что соответствует силе $Fe^{i\sigma t}$. Этот результат можно так обобщить, что он окажется годным для произвольного закона силы как функции от времени. Если мы обозначим этот закон через $F(t)$, то получим

$$s = \frac{1}{4\pi\varrho c^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{F\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{14}$$

Приложения сферических функций.

§ 292. Если граничные условия относятся к сферическим поверхностям, то решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0 \tag{1}$$

можно получить следующим способом.

Мы можем предположить, что значение φ на произвольной сферической поверхности радиуса r с центром в начале координат разлагается в ряд поверхностных сферических функций, коэфициенты которого суть функции r. Мы можем, следовательно, написать

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \tag{2}$$

где φ_n есть объемная сферическая функция степени n и R_n есть функция только r.

Тогда будем иметь

$$\Delta(R_n\varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + 2\left(\frac{\partial R_n}{\partial x}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial R_n}{\partial y}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \frac{\partial R_n}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right) + R_n \Delta \varphi_n$$

или

$$\Delta(R_n\varphi_n) = \Delta R_n \varphi_n + \frac{2}{r}\frac{dR_n}{dr}\left(x\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right) + R_n \Delta \varphi_n, \tag{3}$$

но согласно определению объемной сферической функции

$$\Delta \varphi_n = 0$$

и

$$x\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = n\varphi_n.$$

Отсюда следует

$$\Delta(R_n\varphi_n)=\left(\Delta R_n+\frac{2n}{r}\frac{dR_n}{dr}\right)\varphi_n=\left(\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{2(n+1)}{r}\frac{dR_n}{dr}\right)\varphi_n. \quad (4)$$

Если подставить значение φ из формулы (2) в уравнение (1), то отдельные члены в выражении (2) должны для каждого n удовлетворять уравнению независимо один от другого, а это дает

$$\frac{d^2R_n}{dr^2}+\frac{2(n+1)}{r}\frac{dR_n}{dr}+k^2R_n=0. \quad (5)$$

Это уравнение можно интегрировать степенными рядами. Если мы положим

$$R_n=\sum C_m(kr)^m,$$

то найдем следующую рекуррентную формулу

$$m(2n+1+m)C_m+C_{m-2}=0.$$

Это дает два ряда, расположенных по возрастающим степеням r, из которых один начинается со значения $m=0$, а другой со значения $m=-2n-1$; таким образом, имеем

$$R_n=A_n\left(1-\frac{k^2r^2}{2(2n+3)}+\frac{k^4r^4}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}-\ldots\right)+$$
$$+B_nr^{-2n-1}\left(1-\frac{k^2r^2}{2(1-2n)}+\frac{k^4r^4}{2\cdot4(1-2n)(3-2n)}-\ldots\right),$$

где A_n, B_n — произвольные постоянные. Если теперь мы положим $\varphi_n=r^nS_n$, так что S_n будет поверхностной сферической функцией порядка n, то общее решение уравнения (1) можем написать в виде

$$\varphi=\sum\{A_n\psi_n(kr)+B_n\Psi_n(kr)\}r^nS_n, \quad (6)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\psi_n(\zeta)&=\frac{1}{1\cdot3\cdot\ldots(2n+1)}\left(1-\frac{\zeta^2}{2(2n+3)}+\frac{\zeta^4}{2\cdot4(2n+3)(2n+5)}-\ldots\right),\\ \Psi_n(\zeta)&=\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{\zeta^{2n+1}}\left(1-\frac{\zeta^2}{2(1-2n)}+\frac{\zeta^4}{2\cdot4(1-2n)(3-2n)}-\ldots\right)\end{aligned}\right\}(7)^{1)}$$

---

[1]) Этот способ обозначения уклоняется несколько от способа, примененного в книге Heine, Kugelfunktionen, 1, 82. Следует заметить, что формула (6) дает непосредственное доказательство предложения (8) § 289.

Функции (7) имеют следующую связь с функциями Бесселя дробного порядка:

$$\zeta^n\psi_n(\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\,I_{n+1/2}(\zeta),$$

$$\zeta^n\Psi_n(\zeta)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}}\,I_{-n-1/2}(\zeta).$$

Таблицы функций Бесселя порядка $\pm\frac{1}{2}(2m+1)$, где m есть целое число, были составлены Лоттелем с единичным интервалом ζ; они воспроизведены в сборнике таблиц Jahnke und Emde и в руководстве Watson'a. Таблицы с коротким интервалом (с интервалом 0,2) были даны Динником в Archiv d. Math. u. Phys. (3) XX (1912).

Если движение в начале координат не будет иметь бесконечной скорости, то в формуле (6) следует удержать только первый член.

Функции ψ_n, Ψ_n можно представить также в конечном виде, именно следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\psi_n(\zeta)&=\left(-\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n\frac{\sin\zeta}{\zeta},\\ \Psi_n(\zeta)&=\left(-\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n\frac{\cos\zeta}{\zeta}.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Тождество этих выражений с разложениями (7) легко можно показать, если разложить $\sin\zeta$, $\cos\zeta$ в ряды и выполнить диференцирования. В качестве частных случаев имеем

$$\left.\begin{aligned}&\psi_0(\zeta)=\frac{\sin\zeta}{\zeta},\quad \psi_1(\zeta)=\frac{\sin\zeta}{\zeta^2}-\frac{\cos\zeta}{\zeta^2},\\ &\psi_2(\zeta)=\left(\frac{3}{\zeta^3}-\frac{1}{\zeta^2}\right)\sin\zeta-\frac{3\cos\zeta}{\zeta^4}.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Формулы (6) и (8) показывают, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2R_n}{d\zeta^2}+\frac{2(n+1)}{\zeta}\frac{dR_n}{d\zeta}+R_n=0,\tag{10}$$

т. е. уравнения, которое получится, если написать ζ вместо kr в уравнении (5), имеет вид

$$R_n=\left(\frac{d}{\zeta\,d\zeta}\right)^n\frac{Ae^{i\zeta}+Be^{-i\zeta}}{\zeta}.\tag{11}$$

Этот результат можно легко проверить; если R_n есть какое-либо решение уравнения (10), то мы видим, что соответствующее уравнение для R_{n+1} удовлетворится функцией вида

$$R_{n+1}=\frac{dR_n}{\zeta\,d\zeta},$$

и после повторного применения этого приема окажется, что уравнению (10) удовлетворит функция

$$R_n=\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n R_0,\tag{12}$$

где R_0 есть решение уравнения

$$\frac{d^2(\zeta R_0)}{d\zeta^2}+\zeta R_0=0,$$

а именно

$$R_0=\frac{Ae^{i\zeta}+Be^{-i\zeta}}{\zeta}.\tag{13}$$ [1])

---

[1]) Приведенный здесь анализ, часто применяемый в математической физике, впервые был дан Лапласом, Sur la diminution de la durée du jour par le refroidissement de la Terre, Conn. des Temps за 1823, стр. 245 (1820) (Méc. Céleste, 1[illegible] кн., IV гл.), и с тех пор в том или другом виде применялся различными авторами. Исторические данные можно найти у Glaisher'a, On Riccatis Equation and its transformation, Phil. Trans., 1881; там эта задача рассматривается как относящаяся к теории диференциальных уравнений.

Для каждой комбинации функций $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$, пригодной для представления *расходящихся* волн, удобно будет ввести особое обозначение. Мы положим

$$f_n(\zeta)=\left(-\frac{d}{\zeta\, d\zeta}\right)^n \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}=\Psi_n(\zeta)-i\psi_n(\zeta). \tag{14}$$

Как частные случаи приведем здесь

$$\left.\begin{aligned} &f_0(\zeta)=\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}, \qquad f_1(\zeta)=\left(\frac{i}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^3}\right)e^{-i\zeta}, \\ &f_2(\zeta)=\left(-\frac{1}{\zeta^2}+\frac{3i}{\zeta^4}+\frac{3}{\zeta^5}\right)e^{-i\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Общая формула имеет вид

$$f_n(\zeta)=\frac{i^n e^{-i\zeta}}{\zeta^{n+1}}\left\{1+\frac{n(n+1)}{2i\zeta}+\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{2\cdot 4\,(i\zeta)^2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n\,(i\zeta)^n}\right\}. \tag{16}$$

Эту формулу можно получить посредством „полной индукции" или из диференциального уравнения, которому должна удовлетворять функция $f_n(\zeta)$ [1]).

Если мы приравняем друг другу отдельно действительную и мнимую части, то на основании формулы (14) получим для $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$ выражения через $\cos\zeta$ и $\sin\zeta$; коэфициентами в этих выражениях будут рациональные функции от ζ.

Все функции $\psi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$, $f_n(\zeta)$ удовлетворяют рекуррентным формулам вида

$$\psi_n'(\zeta)=-\zeta\psi_{n+1}(\zeta), \tag{17}$$

$$\zeta\psi_n'(\zeta)+(2n+1)\psi_n(\zeta)=\psi_{n-1}(\zeta). \tag{18}$$

Формулы эти часто оказываются полезными для понижения порядка функций.

Мы имеем также соотношение

$$\left\{\psi_n'(\zeta)\Psi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)\Psi_n'(\zeta)\right\}\zeta^{2n+2}=1 \tag{19}$$

или эквивалентное ему соотношение

$$\left\{\psi_{n-1}(\zeta)\Psi_n(\zeta)-\psi_n(\zeta)\Psi_{n-1}(\zeta)\right\}\zeta^{2n+1}=1. \tag{20}$$

Из формул (17) и (18) видно, что левая часть равенства (19) не меняет своего значения, если написать $n-1$ вместо n, и потому для доказательства будет достаточно исследовать случай $n=0$. Формулу (19) можно также вывести из формулы (4) § 290, если рас-

---

[1]) Ср. Stokes, см. ниже, стр. 636. Обозначения там применяются другие.

смотреть область, заключенную между двумя концентрическими шаровыми поверхностями [1]). Если подставить в названную формулу

$$\varphi = \Psi_n(kr)\, r^n S_n, \quad \varphi' = \psi_n(kr)\, r^n S_n, \tag{21}$$

то оказывается, что выражение

$$\left\{\psi_n'(kr)\Psi_n(kr) - \psi_n(kr)\Psi_n'(kr)\right\} r^{2n+2} \iint S_n^2\, d\tilde{\omega}, \tag{22}$$

где интегрирование распространено на все телесные элементарные углы $\delta\tilde{\omega}$ с вершинами в начале координат, не зависит от r. Полагая r бесконечно малым, мы опять придем к формуле (19).

§ 293. Простое применение предшествующих вычислений мы встречаем при исследовании колебаний воздуха, заключенного в шаровой оболочке.

1. Рассмотрим прежде всего свободные колебания в случае твердых границ. Так как движение в начале координат конечно, то имеем

$$\varphi = A\psi_n(kr)\, r^n S_n e^{i\sigma t} \tag{1}$$

с граничным условием

$$ka\psi_n'(ka) + n\psi_n(ka) = 0, \tag{2}$$

где a есть радиус. Этим уравнением определяются допустимые значения k и вместе с тем также $\sigma\,(=kc)$.

Из формул (8) § 292 следует, что это уравнение всегда приводится к виду

$$\operatorname{tg} ka = F(ka), \tag{3}$$

где $F(ka)$ есть рациональная алгебраическая функция. Корни вычисляются тогда без затруднений или при помощи рядов, или посредством способа, данного Фурье [2]).

В случае чисто радиальных колебаний ($n=0$) мы получаем

$$\varphi = A\frac{\sin kr}{kr}\, e^{i\sigma t} \tag{4}$$

с граничным условием, определяющим частоту нормальных колебаний,

$$\operatorname{tg} ka = ka. \tag{5}$$

Корни этого уравнения, встречающиеся в различных физических задачах, легче всего можно вычислить посредством ряда [3]). Шверд [4]) получил для первых корней следующие значения

$$\frac{ka}{\pi} = 1{,}4303,\ 2{,}4590,\ 3{,}4709,\ 4{,}4774,\ 5{,}4818,\ 6{,}4844. \tag{6}$$

Эти значения приближаются к виду $m + \frac{1}{2}$, где m — целое число, и представляют отношение $\frac{2a}{\lambda}$ диаметра шара к длине волны. Если мы возьмем обратные значения, то найдем

$$\frac{\lambda}{2a} = 0{,}6992,\ 0{,}4067,\ 0{,}2881,\ 0{,}2233,\ 0{,}1824,\ 0{,}1542. \tag{7}$$

---

[1]) Ср. Rayleigh, Theory of Sound, § 327.

[2]) Fourier, Théorie analytique de la Chaleur, Париж, 1822, § 286.

[3]) Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, Лозанна, 1748, II, 319; Rayleigh, Theory of Sound, § 207.

[4]) Приведено в книге Verdet, Leçons d'Optique Physique, Париж, 1869—1870, I, 266.

В случае второго и следующих корней уравнения (5) положение сферических узлов $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\right)$ определяется корнями низшего порядка. Так, например, при втором нормальном колебании имеется один сферический узел, радиус которого равен

$$\frac{r}{a}=\frac{1{,}4303}{2{,}4590}=0{,}5817.$$

В случае $n=1$, если мы направим ось x по оси сферической функции S_1 и положим $x=r\cos\theta$, будем иметь

$$\varphi=A\left(\frac{\sin kr}{k^2r^2}-\frac{\cos kr}{kr}\right)\cos\theta\cdot e^{i\sigma t}, \tag{8}$$

и уравнение (2) получит тогда вид

$$\operatorname{tg} ka=\frac{2ka}{2-k^2a^2}. \tag{9}$$

Корень, равный нулю, значения не имеет. Ближайший корень дает для отношения диаметра к длине волны значение

$$\frac{ka}{\pi}=0{,}6625,$$

а для корней более высокого порядка значение этого отношения приближается соответственно к целым числам 2, 3, 4, ... В случае наименьшего корня, если возьмем обратное значение, будем иметь

$$\frac{\lambda}{2a}=1{,}509.$$

При этом, самом медленном из всех нормальных колебаний, воздух движется до некоторой степени таким же образом, как в закрытой с обоих концов трубе. В случае корней более высокого порядка корни низшего порядка будут давать положения сферических узлов $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0\right)$. Относительно дальнейших подробностей этой задачи мы отсылаем читателя к исследованиям Рэлея [1]).

2. Чтобы определить движение воздуха, заключенного в замкнутый сосуд, если это движение вызвано колебанием граничной поверхности в направлении нормалей, например, по закону

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=S_n e^{i\sigma t}, \tag{10}$$

положим

$$\varphi=A\psi_n(kr)\,r^n S_n e^{i\sigma t}; \tag{11}$$

тогда из граничного условия получим

$$A\left\{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)\right\}a^{n-1}=1,$$

и, следовательно,

$$\varphi=\frac{\psi_n(kr)}{ka\psi_n'(ka)+n\psi_n(ka)}\,a\left(\frac{r}{a}\right)^n S_n e^{i\sigma t}. \tag{12}$$

Как и следовало ожидать, это выражение становится бесконечно большим, когда ka есть корень уравнения (2), т. е. всегда, когда период заданного на

---

[1]) Rayleigh, On the Vibrations of a Gas contained within a Rigid Spherical Envelope, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 93 (1872); Theory of Sound, § 331.

границе колебания совпадает с периодом свободного колебания, соответствующего сферической функции того же порядка n.

Если мы положим $ka=0$, то придем к случаю несжимаемой жидкости. Формула (12) приводится в этом случае, как и в § 91, к виду

$$\varphi=\frac{a}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n S_n e^{i\sigma t}. \tag{13}$$

Важно обратить внимание на то, что этот результат в качестве уже приближенного имеет место и в случае газа, когда ka мало, т. е. всегда, когда длина волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, соответствующая действительному периоду, велика по сравнению с окружностью сферы. Мы имеем здесь пример общего закона, установленного в § 290; ниже (§§ 299, 300) этот закон будет использован более широко.

3. Чтобы определить движение газа, который заключен в пространстве, ограниченном двумя концентрическими шаровыми поверхностями, мы можем воспользоваться формулой (6) § 292 во всем ее объеме. Интересен только тот случай, когда оба радиуса приблизительно равны; однако, этот случай может быть легче исследован непосредственно [1].

Уравнение $(\Delta+k^2)\varphi=0$ в полярных координатах r, θ, ω принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}\right]+k^2\varphi=0, \tag{14}$$

где $\mu=\cos\theta$. Если теперь $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$ при $r=a$ и $r=b$, причем a и b приблизительно равны, то мы можем совершенно пренебречь радиальным движением, так что уравнение приведется к виду

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}+k^2a^2\varphi=0. \tag{15}$$

Оказывается, точно так же как в § 199, что единственные решения, конечные на всей поверхности шара, относятся к типу

$$\varphi \text{ пропорционально } S_n, \tag{16}$$

где S_n — сферическая функция целого порядка n и соответственные значения k даны формулой

$$k^2a^2=n(n+1). \tag{17}$$

При самом медленном колебании ($n=1$) газ движется через экватор функции S_1 то в одну, то в другую сторону, причем в крайних фазах колебания газ сгущается на одном полюсе и разрежается на другом. Так как в этом случае $ka=\sqrt{2}$, то для соответствующей длины волны оказывается $\frac{\lambda}{2a}=2{,}221$.

Для ближайшего следующего колебания ($n=2$) вид колебаний зависит от типа сферической функции S_2. Если эта функция есть зональная сферическая функция, то экватор будет узловой линией. Частота определяется из равенства $ka=\sqrt{6}$ или $\frac{\lambda}{2a}=1{,}283$.

---

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, § 233. Прямое решение принадлежит Chree, Mess. of Math., XV, 20 (1866); оно основывается на формуле (19) § 292.

§ 294. Рассмотрим теперь распространение волн в неограниченной среде от поверхности шара *наружу* [1]).

Если на поверхности ($r=a$) задана нормальная скорость

$$\dot{r}=S_n e^{i\sigma t}, \tag{1}$$

то соответствующее решение уравнения $(\Delta+k^2)\varphi=0$ в обозначениях § 292 будет иметь вид

$$\varphi=C_n f_n(kr)\, r^n S_n e^{i\sigma t}. \tag{2}$$

Условие

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=S_n e^{i\sigma t}, \tag{3}$$

которое должно быть выполнено на поверхности шара ($r=a$), дает

$$C_n=-\frac{1}{\left\{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)\right\}a^{n-1}}. \tag{4}$$

На расстояниях r, которые велики по сравнению с длиной волны $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, будем иметь приближенно

$$f_n(kr)=\frac{i^n e^{ikr}}{(kr)^{n+1}}, \tag{5}$$

так что формула (2) приобретет вид

$$\varphi=\frac{i^n C_n}{k^{n+1}}\,\frac{e^{ik(ct-r)}}{r}\,S_n \tag{6}$$

или в действительной форме

$$\varphi=\frac{|C_n|}{k^{n+1}}\,\frac{\cos k(ct-r+\varepsilon)}{r}\,S_n. \tag{7}$$

Поток энергии изнутри наружу, отнесенный к единице времени, равен

$$-\iint p\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,r^2\,d\tilde{\omega}, \tag{8}$$

где $\delta\tilde{\omega}$ обозначает элемент телесного угла и r следует считать очень большим. Так как

$$p=p_0+\varrho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{9}$$

то в качестве среднего значения для выражения (8) получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_0 c}{k^{2n}}\,|C_n^2|\iint S_n^2\,d\tilde{\omega}. \tag{10}$$

Этот результат можно было бы получить прямо из формулы (9) § 280, так как волны, которые распространяются в каком-нибудь определенном направлении, в конце концов будут плоскими.

---

[1]) Эта задача несколько другим способом была решена Стоксом: Stokes, On the Communication of Vibrations from a Vibrating Body to a surrounding Gas, Phil. Trans., 1868 [Papers, IV, 299].

Если $n>0$, то нормальная скорость в двух каких-либо областях поверхности шара $r=a$, разделенных узловой линией $S_n=0$, имеет противоположные фазы. Боковое движение воздуха вблизи от поверхности шара по направлению от тех мест, в которых воздух движется наружу, к тем местам, в которых он движется внутрь, в случае не слишком малой длины волны проявляет себя в том, что интенсивность возмущения в некотором удалении уменьшается по сравнению с той интенсивностью, которая должна была бы иметь место, если бы скорость повсюду была в одинаковых фазах; это действие будет тем более заметным, чем выше будет порядок n соответствующей сферической функции, так как в этом случае число частей, на которые поверхность шара разделяется узловыми линиями, будет больше. Кроме того, для той же сферической функции S_n и для определенной частоты $\frac{\sigma}{2\pi}$ влияние бокового движения будет очень быстро увеличиваться по мере возрастания скорости волны c, а, следовательно, по мере возрастания длины волны $\frac{2\pi}{k}$. Этим объясняется, почему колокол в воде звучит слабее, чем в воздухе [1]).

Чтобы иллюстрировать эти результаты, заметим следующее: если бы боковое движение воздуха было задержано большим количеством конусообразных перегородок, идущих по направлению радиусов неограниченно наружу, то выражение (10) нужно было бы заменить следующим

$$\frac{1}{2}\varrho_0 c\,|C_0|^2 \iint S_n^2\, d\tilde{\omega}. \tag{11}$$

Отношение I_n этой величины к выражению (10) равно абсолютному значению количества

$$\frac{(ka)^{2n}\left\{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)\right\}^2}{\left\{kaf_0'(ka)\right\}^2}. \tag{12}$$

Из данных в формулах (15) § 292 выражений для f_0, f_1, f_2 легко получаем

$$\left.\begin{aligned} I_0&=1,\\ I_1&=\frac{4+k^4a^4}{k^2a^2(1+k^2a^2)},\\ I_2&=\frac{81+9k^2a^2-2k^4a^4+k^6a^6}{k^4a^4(1+k^2a^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ka	I_0	I_1	I_2
4	1	0,95588	0,87523
2	1	1	1,8625
1	1	2,5	44,5
0,5	1	13	1064,2
0,25	1	60,294	19650

Приведенные примеры вместе с некоторыми другими были даны Стоксом.

[1]) Stokes, см. выше.

Отношение скоростей переноса энергии для двух различных газов, находящихся в одинаковых условиях, равно абсолютному значению отношения

$$\frac{(k'a)^{2n-1}\left\{k'af_n'(ka)+nf_n(k'a)\right\}^2}{(ka)^{2n-1}\left\{kaf_n'(ka)+nf_n(ka)\right\}^2}, \tag{14}$$

причем штрихи у k относятся ко второму газу. Это выражение при помощи соотношения

$$\frac{\varrho_0 c}{\varrho_0' c'}=\frac{c'}{c}=\frac{k}{k'}$$

легко можно вывести из выражений (10) и (4), так как частота в обоих случаях должна быть одинаковой [1]). При $n=2$ отношение (14) принимает вид

$$\frac{(ka)^7(81+9k'^2a^2-2k'^4a^4+k'^6a^6)}{(k'a)^7(81+9k^2a^2-2k^4a^4+k^6a^6)}. \tag{15}$$

Если мы предположим, например, что два рассматриваемых нами газа суть кислород и водород, и положим $ka=0{,}5$, $k'a=0{,}125$, то найдем, что скорости распространения энергии по направлению изнутри наружу находятся приблизительно в отношении 16 000 : 1 [2]).

§ 295. Случай $n=1$ предыдущего параграфа в особенности интересен с точки зрения теории маятника, так как он соответствует прямолинейному колебательному движению шара, рассматриваемого как твердое тело. Следует, однако, заметить, что отбрасывание членов второго порядка в уравнениях движения равносильно предположению, что амплитуда колебаний шара мала по сравнению с радиусом.

Для решения этой задачи едва ли необходимо обращаться к общей теории, так как движение жидкости будет таковым, как если бы оно было вызвано диполем (§ 289) в центре шара.

Мы предположим, что центр шара колеблется вдоль оси x со скоростью $U=ae^{i\sigma t}$, и положим

$$\varphi=C\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r}=C\frac{d}{dr}\frac{e^{-ikr}}{r}\cdot\cos\theta, \tag{16}$$

причем $x=r\cos\theta$. Условие, что $-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=U\cos\theta$, для $r=a$ дает

$$C\frac{d^2}{da^2}\frac{e^{-ika}}{a}=-a, \tag{17}$$

откуда следует

$$C=\frac{(2-k^2a^2-2ika)\,aa^3e^{ika}}{4+k^4a^4}. \tag{18}$$

---

[1]) При этом предполагается также, что отношение γ удельных теплоемкостей для обоих газов одинаково.

[2]) Распределение энергии в пространстве вокруг колеблющегося шара было исследовано Дж. Е. Джоном (J. E. Jones), Proc. Lond. Math. Soc. (2), XX, 347 (1921). В области, непосредственно прилегающей к шару, энергия состоит главным образом из кинетической части, так как жидкость движется почти так, как если бы она была несжимаемой; ср. § 290. Эта область тем больше, чем ниже частота и чем выше порядок соответствующей сферической функции. Если мы рассмотрим всю систему волн, то найдем, что кинетическая энергия на конечную величину превышает потенциальную.

Результирующая давлений, действующих на шар, будет равна

$$X = -\int_0^\pi p \cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta, \tag{19}$$

где p обозначает давление на наружную поверхность, именно,

$$p = p_0 + \varrho_0 \varphi = p_0 + i\sigma\varrho_0 C \frac{d}{da} \frac{e^{-ika}}{a} \cdot \cos\theta. \tag{20}$$

Если выполним интегрирование и подставим значение для C из формулы (18), то получим

$$X = -\frac{4}{3} \pi\varrho_0 a^3 \cdot \frac{2 + k^2a^2 - ik^3a^3}{4 + k^4a^4} i\sigma a e^{i\sigma t}. \tag{21}$$

Это можно написать в виде

$$X = -\frac{1}{3} \pi\varrho_0 a^3 \frac{2 + k^2a^2}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{4}{3} \pi\varrho_0 a^3 \cdot \frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \sigma U. \tag{22}$$ [1]

Если изменим знак у X, то получим внешнюю силу, которая должна быть приложена, чтобы поддерживать рассматриваемое простое гармоническое колебательное движение.

Первый член выражения (22) выглядит совершенно так, как если бы масса шара была увеличена на количество

$$\frac{2 + k^2a^2}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{4}{3} \pi\varrho a^3, \tag{23}$$

второй же член такой, как если бы на шар действовала сила трения, пропорциональная скорости с коэфициентом пропорциональности

$$\frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \frac{4}{3} \pi\varrho_0 a^3 \sigma. \tag{24}$$

В случае несжимаемой жидкости или в более общем случае, когда длина волны $\frac{2\pi}{k}$ велика по сравнению с окружностью большого круга шара, мы можем положить $ka = 0$. Приращение инерции будет равно тогда половине массы вытесненной жидкости, в то время как коэфициент трения будет равен нулю [2]), ср. § 92.

Коэфициент трения в каждом случае имеет высокий порядок относительно ka, так что колебания шара, окружность которого сравнительно мала по отношению к длине волны, лишь в малой степени будут подвержены влиянию этого „трения". Чтобы вычислить энергию, которая должна быть израсходована в единицу времени для возбуждения волн в окружающей среде, мы должны в формуле (22), которая должна теперь рассматриваться как уравнение между действительными величинами, умножить отвечающий трению член на U и взять среднее значение; таким способом мы находим для энергии выражение

$$\frac{2}{3} \pi\varrho_0 a^3 \cdot \frac{k^3a^3}{4 + k^4a^4} \cdot \sigma a^2. \tag{25}$$

---

[1]) Эта формула получена Рэлеем: Rayleigh, Theory of Sound, § 325. Другую трактовку задачи о колеблющемся шаре можно найти у Пуассона, Sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant. Mém. de l'Acad. des Sciences, XI, 521 (1832) и у Кирхгофа, Mechanik, Лекция XXIII.

[2]) Poisson, см. выше.

Другими словами: если ϱ_1 — средняя плотность шара, то энергия, расходуемая в течение одного периода, будет составлять от всей его энергии часть

$$2\pi\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\cdot\frac{k^3a^3}{4+k^4a^4}. \tag{26}$$

§ 296. Способ, рассмотренный в § 292, можно также применить к вычислению отражения волн сферическим препятствием. Рассмотрим, в частности, случай системы падающих плоских волн, движущихся в направлении отрицательной оси x и заданных функцией

$$\varphi = e^{ikx}, \tag{1}$$

причем множитель, зависящий от времени, опущен.

Так как эта функция удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)\varphi = 0$, не имеет особых точек на конечном расстоянии и симметрична по отношению к оси x, то она должна разлагаться в ряд, члены которого имеют вид

$$\psi_n(kr)\, r^n P_n(\cos\theta), \tag{2}$$

причем следует иметь в виду обозначения $x = r\cos\theta = r\mu$. Положим поэтому

$$e^{ikr\mu} = A_0\psi_0(kr) + A_1\psi_1(kr)\,krP_1(\mu) + \ldots + \\ + A_n\psi_n(kr)(kr)^n P_n(\mu) + \ldots \tag{3}$$

Если продиференцировать это выражение n раз по μ, то первые n членов исчезнут, так как $P_s(\mu)$ есть целая рациональная функция степени s. Разделяя результат на $(kr)^n$ и обращая внимание на то, что согласно (1) § 85 имеет место равенство

$$\frac{d^n}{d\mu^n}P_n(\mu) = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1), \tag{4}$$

получим

$$i^n e^{ikr\mu} = 1\cdot 3\ldots(2n-1)\,A_n\psi_n(kr) + \ldots \tag{5}$$

Полагая теперь $r = 0$, получим на основании (7) § 292

$$A_n = (2n+1)\,i^n; \tag{6}$$

отсюда получается

$$e^{ikx} = \sum_0^\infty (2n+1)\,\psi_n(kr)\,(ikr)^n P_n(\mu). \tag{7}$$ [1]

Это выражение представляет разложение по сферическим функциям потенциала скоростей источника, находящегося в бесконечности. Подобное же разложение для случая источника, лежащего на конечном расстоянии от

[1]) Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 253 (1873). См. также Heine, Kugelfunktionen, I, 82 (1878). Доказательство, приведенное выше, построено по образцу принадлежащего Гейне вывода формулы (13).

начала O, можно получить следующим способом. Обозначим через P' положение источника и через P точку, для которой отыскивается потенциал скоростей. Положим

$$OP = r,\ OP' = r',\ \varrho^2 = r^2 - 2rr'\mu + r'^2, \tag{8}$$

где $\mu = \cos POP'$. Если $r < r'$, то мы можем принять

$$f_0(k\varrho) = \sum_0^\infty A_n \psi_n(kr)(kr)^n P_n(\mu). \tag{9}$$

Если мы заставим изменяться только ϱ и μ, то будем иметь $\varrho\, d\varrho = -rr'\, d\mu$ и вместе с тем

$$-\frac{1}{k\varrho}\frac{d}{d(k\varrho)} = \frac{1}{kr \cdot kr'}\frac{d}{d\mu}. \tag{10}$$

Выполняя над формулою (9) эту операцию n раз, получим на основании формулы (14) § 292

$$f_n(k\varrho) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{(kr')^n}\psi_n(kr) A_n + \ldots \tag{11}$$

Если положить теперь $r = 0$, то получится

$$A_n = (2n+1)(kr')^n f_n(kr') \tag{12}$$

и вместе с тем

$$f_0(k\varrho) = \sum_0^\infty (2n+1)(kr)^n (kr')^n f_n(kr')\psi_n(kr) P_n(\mu). \tag{13}$$

Если $r > r'$, то мы должны только в формуле (13) поменять местами r и r', так как ϱ по отношению к этим переменным входит симметрично. Поэтому имеем:

$$f_0(k\varrho) = \sum_0^\infty (2n+1)(kr)^n (kr')^n \psi_n(kr') f_n(kr) P_n(\mu). \tag{14}$$ [1]

Мы можем воспользоваться формулой (7), чтобы показать, как можно получить типичное решение уравнения

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \tag{15}$$

конечное в начале, именно:

$$\varphi = \psi_n(kr) r^n S_n, \tag{16}$$

наложением плоских волн. Случай $n = 0$ был уже рассмотрен в § 289.

Вследствие свойств ортогональности сферических функций (§ 87) имеем

$$\iint e^{ikr\mu} S_n\, d\tilde{\omega} = (2n+1)(ikr)^n \psi_n(kr) \iint P_n(\mu) S_n\, d\tilde{\omega}, \tag{17}$$

где $\delta\tilde{\omega}$ обозначает элемент поверхности шара, описанной около начала координат единичным радиусом. Буква μ обозначает здесь косинус углового расстояния элемента $\delta\tilde{\omega}$ от точки Q, в которой произвольный радиус-

---

[1]) Формула (13) указанным здесь способом (за исключением обозначений была получена Гейне, I, 346. Равносильный результат получил Клебш (1863 в работе, приведенной на стр. 138.

вектор r пересекает поверхность шара. Теперь имеем на основании известной формулы Лапласа [1])

$$\iint P_n(\mu) S_n d\tilde{\omega} = \frac{4\pi}{2n+1} S'_n, \tag{18}$$

где S'_n обозначает значение S_n в точке Q. Отсюда следует

$$(ikr)^n \psi_n(kr) S'_n = \frac{1}{4\pi} \iint e^{ikr\mu} S_n d\tilde{\omega}. \tag{19}$$

Типичное решение оказывается, таким образом, представленным в виде ряда плоских волн, имеющих амплитуду, равную единице; нормали этих волн распределены вокруг начала с некоторою переменною плотностью, выражающеюся при помощи сферической функции S_n.

В результате получается, что движение в каждой свободной от источников области может быть разложено в ряды плоских волн, налагающихся друг на друга.

§ 297. Мы переходим теперь к специальной задаче воздушных волн, падающих на шаровое препятствие.

Рассмотрим одну из составляющих

$$\varphi = B_n \psi_n(kr) r^n S_n \tag{1}$$

падающей системы волн; пусть соответствующий элемент отраженных волн будет

$$\varphi' = B'_n f_n(kr) r^n S_n. \tag{2}$$

Если препятствие неподвижно, то условие

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = 0, \tag{3}$$

которое должно выполняться для $r = a$, дает

$$\frac{B'_n}{B_n} = -\frac{ka\psi'_n(ka) + n\psi_n(ka)}{ka f'_n(ka) + n f_n(ka)}. \tag{4}$$

Этот результат можно легко объяснить только в том случае, когда длина волны велика по сравнению с диаметром шара, т. е. когда ka мало. В этом случае для малых значений ζ на основании формул (7), (16) § 292 имеем приближенно

$$\psi_n(\zeta) = \frac{1}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}, \quad f_n(\zeta) = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{\zeta^{2n+1}}; \tag{5}$$

отсюда следует для $n > 0$

$$\frac{B'_n}{B_n} = \frac{n}{n+1} \frac{(ka)^{2n+1}}{\{1\ldots(2n-1)\}^2(2n+1)}. \tag{6}$$

Случай $n = 0$ составляет исключение; для него имеем приближенно

$$\frac{B'_0}{B_0} = -\frac{1}{3}(ka)^3. \tag{7}$$

---

[1]) Ferrers, Spherical Harmonics, стр. 89.

Если падающие волны будут плоскими и выражаются при помощи функции e^{ikx}, то будем иметь $S_n = P_n$ и на основании формулы (7) § 296

$$B_n = (2n+1)\, i^n k^n. \tag{8}$$

Отсюда следует

$$B_0' = -\frac{1}{3}(ka)^3, \quad B_1' = \frac{1}{2}\, ik\,(ka)^3. \tag{9}$$

Важнейшая составная часть отраженных волн на некотором расстоянии r, большом по сравнению с длиною волны, на основании формул (15) § 292 представляется в виде

$$\varphi' = B_0' j_0(kr) + B_1' j_1(kr)\cos\theta = -(ka)^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\frac{e^{-ikr}}{kr}. \tag{10}$$

Физическое значение обоих членов будет объяснено в конце § 300.

Количество энергии, которая уносится в единицу времени наружу вместе с отраженными волнами, как в § 294, определяется выражением

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\varrho_0 c}{k^{2n}}\,|B_n'|^2 \iint P_n^2\, d\tilde{\omega}. \tag{11}$$

Подходящим масштабом для сравнения может быть в этом случае поток энергии через единицу поверхности фронта волны падающей системы. При наших предположениях этот поток, согласно с § 280, равен $\frac{1}{2}\varrho_0 k^2 c$, и отношение количества (11) к этому потоку на основании формулы (5) § 87 будет равно

$$\sum \frac{4\pi}{(2n+1)\,k^{2n+2}}\,|B_n'^2|. \tag{12}$$

Члены низшего порядка при малом ka суть те, для которых $n=0$ и $n=1$. Подставляя из формул (9) и составляя сумму, получаем

$$\frac{7}{9}\,(ka)^4 \cdot \pi a^2. \tag{13}$$

Скорость, с которою энергия рассеивается, оказывается таким образом обратно пропорциональной четвертой степени длины волны [1]).

Приведем в качестве примера маленький шарик с диаметром 0,025 *мм*, который будет рассеивать только $1{,}43 \cdot 10^{-17}$ падающей энергии, если длина волны равна 1,22 *м*. Отсюда становится понятным, почему туман, оптически совершенно непроницаемый, свободно пропускает обыкновенные звуки.

§ 298. Рассмотрим теперь случай плоских волн, падающих на *движущийся* шар.

Уравнение движения этих волн имеет вид

$$M\ddot{\xi} = -\iint p\cos\theta a^2\, d\tilde{\omega} + X, \tag{1}$$

где X обозначает внешнюю силу, если она имеется.

---

[1]) Рассматриваемая здесь задача другим методом была исследована Рэлеем, Proc. Lond. Math. Soc. (1), IV, 253 (1872); см. также Theory of Sound, §§ 296, 334, 335. Формулу (13) Рэлей дал в работе „On the Transmission of Light through an Atmosphere Containing Small Particles in Suspension", Phil. Mag. (5), XLVII, 375 (1899) [Papers, IV, 397].

Если множитель, зависящий от времени, есть e^{ikct}, то имеем

$$p = p_0 + \varrho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\varphi + \varphi') = p_0 + ikc\varrho_0(\varphi + \varphi'). \tag{2}$$

Далее, кинематическое граничное условие имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + \varphi') = \dot{\xi}\cos\theta = ikc\xi\cos\theta. \tag{3}$$

1. Допустим прежде всего, что шар совершенно свободен и движется под действием воздушных волн, так что $X = 0$. Полагая $M = \frac{4}{3}\pi\varrho_1 a^3$ и подставляя значение p из формулы (2) в уравнение (1), находим

$$kc\varrho_1\xi = i\{B_1\psi_1(ka) + B_1' f_1(ka)\}\varrho_0, \tag{4}$$

так как интегралы по поверхности шара от произведения сферических функций различного порядка исчезают. Далее, на основании формулы (3) будем иметь

$$-ikc\xi = B_1\{ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka)\} + B_1'\{kaf_1'(ka) + f_1(ka)\}, \tag{5}$$

в то время как равенство (4) будет сохраняться для $n > 1$. Если исключить ξ из равенств (4) и (5), то получим

$$\frac{B_1'}{B_1} = -\frac{\{ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka)\}\varrho_1 - \psi_1(ka)\varrho_0}{\{kaf_1'(ka) + f_1(ka)\}\varrho_1 - f_1(ka)\varrho_0}. \tag{6}$$

Если величина ka мала, то приближенные значения $\psi_1(ka)$ и $f_1(ka)$ дают

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{6\varrho_1 - 3\varrho_1} k^3a^3. \tag{7}$$

Рассеянные волны типа $n = 1$ при этой степени приближения, как и следовало ожидать, исчезают, когда $\varrho_1 = \varrho_0$. Шар в этом случае просто переносится воздухом вперед и назад.

Если через ξ_0 обозначить смещение воздуха в начале координат в случае отсутствия сферы, то при наших настоящих предположениях имеет место формула

$$ikc\xi_0 = -ike^{ikct}. \tag{8}$$

Отсюда получаем, если подставим из формулы (7) в формулу (5) и обратим внимание на то, что $B_1 = 3ik$,

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{3\varrho_0}{2\varrho_1 + \varrho_0}. \tag{9}$$

Как и следовало ожидать, это отношение меньше или больше единицы в зависимости от того $\varrho_1 \gtrless \varrho_0$.

2. В качестве иллюстрации теории *резонанса* мы можем рассмотреть случай, когда шар притягивается к неподвижной точке силой, пропорциональной расстоянию. Обозначая через $\frac{2\pi}{\sigma_0}$ период свободных колебаний шара в том случае, когда влиянием воздуха мы пренебрегаем, положим в уравнении (1)

$$X = -M\sigma_0^2\xi. \tag{10}$$

Тогда вместо формулы (4) будем иметь

$$(\sigma_0^2 - k^2c^2)\varrho_1\xi = -ikc\varrho_0\{B_1\psi_1(ka) + B_1' f_1(ka)\}; \tag{11}$$

отсюда и из формулы (5) следует

$$\frac{\sigma_0^2-k^2c^2}{k^2c^2}\varrho_1=-\frac{B_1\psi_1(ka)+B_1'f_1(ka)}{B_1\{ka\psi_1'(ka)+\psi_1(ka)\}+B_1'\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}}\varrho_0. \quad (12)$$

Если нет внешних источников, то $B_1=0$ и

$$\frac{\sigma_0^2-k^2c^2}{k^2c^2}\varrho_1=-\frac{f_1(ka)}{ka\,f_1'(ka)+f_1(ka)}\varrho_0. \quad (13)$$

Это есть уравнение, определяющее k, а вместе с этим определяющее характер „свободного" движения шара, вызванного окружающей средой. Если привести это уравнение на основании условия (15) § 292 к алгебраическому виду, то оно окажется биквадратным[1]) относительно k и будет иметь вид

$$(k^2c^2-\sigma_0^2)(k^2a^2-2ika-2)+2\beta k^2c^2(ika+1)=0, \quad (14)$$

где $\beta=\frac{1}{2}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$. С нашей настоящей точки зрения имеют значение только два меньших корня. Они приближенно определяются из формулы

$$k^2c^2=\frac{\sigma_0^2}{1+\beta}. \quad (15)$$

Мы видим, что главное влияние присутствия жидкости состоит в том, что масса шара увеличивается на количество, равное половине массы вытесненной жидкости; ср. §§ 92, 295. Чтобы определить, с какой скоростью затухают колебания, мы должны пойти дальше в нашем приближении. Оказывается, в согласии с результатами § 295, что „свободные" колебания выражаются формулой

$$\xi=Ce^{-\nu t}\cos(\sigma' t+\varepsilon), \quad (16)$$

где

$$\sigma'=\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\beta}},\quad \nu=\frac{\beta}{4(1+\beta)}\frac{\sigma'^4a^3}{c^3}, \quad (17)$$

если мы удержим только важнейшие члены.

Для *вынужденных* колебаний, при которых значение k дано заранее имеем по формуле (12)

$$\frac{B_1'}{B_1}=-\frac{\{ka\psi_1'(ka)+\psi_1(ka)\}(\sigma_0^2-k^2c^2)+2\beta k^2c^2\psi_1(ka)}{\{kaf_1'(ka)+f_1(ka)\}(\sigma_0^2-k^2c^2)+2\beta k^2c^2f_1(ka)}. \quad (18)$$

Если ka мало, то приближенные значения для $\psi_1(ka)$ и $f_1(ka)$ будут давать

$$\frac{B_1'}{B_1}=\frac{\sigma_0^2-(1-2\beta)k^2c^2}{\sigma_0^2-(1+\beta)k^2c^2}\cdot\frac{1}{6}k^3a^3; \quad (19)$$

приближение, однако, оказывается совершенно неприемлемым, когда значение ka почти равно $\frac{\sigma_0}{(1+\beta)^{1/2}}$, т. е. когда частота падающих волн почти в точности совпадает с частотой свободных колебаний.

---

[1]) Равносильный результат получим, если положим в равенстве (21) § 295

$$ae^{i\sigma t}=i\sigma\xi,\quad X=M(\sigma_0^2-\sigma^2)\xi.$$

Чтобы точнее исследовать случай приближенного синхронизма, положим в точной формуле (18)

$$f_1(ka) = \Psi_1(ka) - i\psi_1(ka); \tag{20}$$

тогда получим

$$\frac{B_1'}{B_1} = -\frac{g_1(ka)}{G_1(ka) - ig_1(ka)}, \tag{21}$$

где

$$\left.\begin{aligned} g_1(ka) &= \{ ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka) \} \left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2a^2\right) + 2\beta k^2 a^2 \psi_1(ka), \\ G_1(ka) &= \{ ka\Psi_1'(ka) + \Psi_1(ka) \} \left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2a^2\right) + 2\beta k^2 a^2 \Psi_1(ka). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Абсолютное значение правой части уравнения (21) никогда не может быть больше единицы, но может достигать этого значения; амплитуда рассеянных волн имеет, таким образом, максимум для

$$G_1(ka) = 0; \tag{23}$$

в этом случае

$$B_1' = -iB_1. \tag{24}$$

В случае системы плоских волн, представленных формулой (1) § 296, будем иметь

$$B_1' = 3k; \tag{25}$$

действительная часть потенциала скоростей рассеянных волн будет иметь на некотором расстоянии вид

$$\varphi' = -3\,\frac{\sin k(ct - r)}{kr}\cos\theta, \tag{26}$$

соответствующий потенциалу падающих волн

$$\varphi = \cos k(ct + x). \tag{27}$$

Следует заметить, что этот результат не зависит от значения величины ka.

Если ka мало, то выражение для $\Psi_1(ka)$ мы возьмем из формулы (7) § 292. Уравнение (23) принимает в этом случае вид

$$-\left(2 + \frac{1}{4}k^4a^4 + \ldots\right)\left(\frac{\sigma_0^2 a^2}{c^2} - k^2a^2\right) + 2\beta k^2a^2\left(1 + \frac{1}{2}k^2a^2 + \ldots\right) = 0, \tag{28}$$

и легко можно убедиться, что это уравнение при малых значениях $\frac{\sigma_0 a}{c}$ удовлетворится действительным значением ka, именно

$$ka = \frac{\sigma_0 a}{(1+\beta)^{1/2} c}; \tag{29}$$

это значение оказывается лишь немного меньше, чем то, которое соответствует свободным колебаниям. Далее, принимая во внимание условие (3), находим приближенно

$$\xi = \frac{6}{k^3a^3c}\sin kct. \tag{30}$$

Амплитуда колебаний частицы воздуха в первоначальной волне в тех же единицах масштаба будет равна $\frac{1}{c}$. Амплитуда же колебаний шара будет превышать это значение в отношении $\frac{6}{k^3a^3}$. Кроме этого из выраже-

ния (10) получается, что рассеяние энергии в отраженных волнах имеет своим максимальным значением $6\pi\varrho_0 c$ или, если выразить это значение через поток энергии в первоначальных волнах,

$$\frac{3\lambda^2}{\pi}. \tag{31}$$

Отношение этой величины к величине рассеяния, имеющего место в случае неподвижного шара, равно $\frac{108}{7}(ka)^{-6}$.

С другой стороны, нужно заметить, что длина волны максимального рассеяния может быть определена очень точно. Без труда можно показать, что рассеяние убывает на половину своего максимального значения, когда длина волны падающих волн отличается от критического значения на долю этого значения, выражающуюся дробью

$$\frac{\beta k^2 a^2}{4(1+\beta)}.$$

При всех акустических приложениях эта дробь оказывается очень малой. На практике массивные тела обычно приводятся в сильное колебательное движение не *непосредственно* воздушными волнами, но посредством резонансных ящиков и звучащих планок.

Присутствие множителя 3 в выражении (31) требует некоторого разъяснения. Вследствие того, что шар имеет три степени свободы, результат оказывается независимым от направления падающих волн. Если бы движение шара было ограничено условием, что он должен совершать колебания вдоль определенной прямой, то степень рассеяния зависела бы от направления падения, и среднее значение для всех направлений было бы равно $\frac{\lambda^2}{\pi}$ [1]).

§ 299. Диффракция плоских звуковых волн у края пластинки или у отверстия в плоском экране может быть исследована приближенными методами, предполагая, что размеры препятствия или отверстия малы по сравнению с длиною волны [2]). Это условие, очевидно, прямо противоположно условию, имеющему место в оптике, и соответственно этому результаты здесь имеют существенно отличный характер. В частности, при таком предположении мы не встречаемся ни с чем, что могло бы быть названо звуковою тенью или звуковым лучом.

1. Рассмотрим прежде всего следующий случай: система плоских волн, движущаяся в направлении отрицательной оси x, падает на плоскую пластинку, расположенную в плоскости $x=0$. При отсутствии пластинки движение всюду было бы представлено функцией

$$\varphi = e^{ikx}. \tag{1}$$

---

[1]) Исследования этого параграфа взяты из работы Ламба, A Problem in Resonance, illustrative of the Theory of Selective Absorption of Light, Proc. Lond. Math. Soc., XXXII, 11 (1900). Заключительное замечание взято из работы Рэлея, Some General Theorems concerning Forced Vibrations and Resonance, Phil. Mag. (6), III, 97 (1902) (Papers, V, 8).

[2]) Rayleigh, On the Passage of Waves through Apertures in Plane Screens, and Allied Problems, Phil. Mag. (5), XLIII, 259 (1897) (Papers, IV, 283).

Это дает скорость $-ik$ в направлении нормали к поверхности пластинки; полное же решение будет иметь тогда вид

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \tag{2}$$

где функция χ представляет движение, которое возникло бы в окружающем воздухе вследствие колебаний пластинки, перпендикулярных к ее плоскости и происходящих со скоростью ik. Если мы приложим формулу (18) § 290, то получим

$$\chi_P = \frac{1}{2\pi}\iint \chi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) dS; \tag{3}$$

интеграция при этом распространяется только на положительную сторону пластинки. Если x, y, z суть координаты точки P относительно начала, лежащего на поверхности пластинки, то имеем $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$, и если расстояние точки P от каждой точки пластинки велико по сравнению с линейными размерами пластинки, то имеет место равенство

$$\chi_P = -\frac{1}{2\pi}\iint \chi\, dS\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right), \tag{4}$$

где r теперь должно обозначать расстояние от начала. Отраженные волны оказываются, следовательно, такими, как если бы они были вызваны диполем соответствующей мощности.

При указанных основных условиях функция χ в непосредственной близости от пластинки изменяется почти в точности так, как если бы жидкость была несжимаема (§ 290). В последнем случае, если плотность жидкости и скорость пластинки в направлении, перпендикулярном к ее плоскости, положить равными *единице*, то выражение $2\iint \chi\, dS$ сделалось бы равным „коэфициенту инерции" пластинки [§ 121 (3)]. Обозначая этот коэфициент, зависящий только от величины и формы пластинки, через M, будем иметь в нашем случае

$$\iint \chi\, dS = \frac{1}{2}\, ikM \tag{5}$$

и вместе с тем приближенно

$$\chi_P = -\frac{ikM}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) = -\frac{k^2 M}{4\pi}\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta, \tag{6}$$

где θ обозначает угол, который OP составляет с Ox.

Для *круговой* пластинки радиуса a имеем согласно §§ 102, 108

$$M = \frac{8}{3}a^3, \tag{7}$$

и, следовательно,

$$\chi_P = -\frac{8}{3}\frac{\pi a^3}{\lambda^2}\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\theta. \tag{8}$$

2. Если плоские волны падают непосредственно на экран, расположенный в плоскости $x=0$, то в случае сплошного экрана мы имели бы

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} \text{ или } = 0, \tag{9}$$

соответственно для $x \gtrless 0$; член e^{-ikx} представляет отраженные волны. Если же имеется отверстие, то мы примем для двух ее сторон

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi \text{ и } \varphi = \chi'. \tag{10}$$

Непрерывность давления и скорости требует, чтобы у отверстия имели место равенства

$$2+\chi=\chi', \qquad \frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{\partial\chi'}{\partial x}, \tag{11}$$

в то время как на остальной части плоскости $x=0$ было бы

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\chi'}{\partial x}=0. \tag{12}$$

Эти условия будут выполнены, если мы положим χ и χ' равными потенциалам таких распределений простых источников по поверхности отверстия, которые на этой поверхности дают

$$\chi=-1, \qquad \chi'=+1. \tag{13}$$

Теперь на основании формулы (17) § 290 будем иметь

$$\chi_P=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS, \tag{14}$$

так как $r'=r$ для $x=0$. В рассматриваемом случае вследствие соотношений (12) интеграцию можно ограничить поверхностью отверстия. В таком случае на расстояниях r, значения которых велики по сравнению с размерами отверстия, формула (14) приводится к виду

$$\chi_P=-\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{15}$$

Если бы k было равно нулю, то в согласии с формулой (13) задача определения χ была бы тождественна с задачей определения течения несжимаемой жидкости через отверстие; для точек в непосредственной близости к пластинке течение в нашей задаче будет иметь в существенном те же самые свойства. Мы можем поэтому написать

$$\iint\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS=C, \tag{16}$$

где C обозначает пропускную способность отверстия [1]).

Вместе с тем уравнение (15) приближенно приобретает вид

$$\chi_P=-C\frac{e^{-ikr}}{\pi r}. \tag{17}$$

Отсюда получается значение χ' на основании очевидного соотношения

$$\chi'(-x,\ y,\ z)=-\chi(x,\ y,\ z). \tag{18}$$

Оказывается, что волны, прошедшие сквозь отверстие, таковы, как если бы они возбуждались *простым* источником соответствующей мощности.

Значение C для эллиптического отверстия было уже дано в формуле (8) § 113. В случае же кругового отверстия имеем

$$C=2a \tag{19}$$

и

$$\chi_P=-\frac{2a}{\pi}\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{20}$$

---

[1]) Ср. §§ 102, 3; 108, 1 и 113.

Сравнение с формулой (8) показывает, что при принимаемых выше условиях на одном и том же расстоянии амплитуда волн, отраженных пластинкой, оказывается намного меньше, чем амплитуда волн, прошедших через отверстие такой же величины и формы. Легко видеть, что отношение полной энергии, которая проходит в течение одной секунды через круговое отверстие, к потоку энергии в первоначальных волнах равно

$$\frac{8a^2}{\pi^2} \text{ или } 0{,}816\, a^2. \tag{21}$$

Отношение амплитуды отраженных волн к амплитуде первоначальных волн в какой-либо удаленной точке не зависит от длины волны, пока длина волны велика по сравнению с наибольшей шириной отверстия.

§ 300. Подобные же вычисления можно выполнить и в том случае, когда звуковые волны отражаются от препятствия произвольной формы, если имеет место прежнее основное условие, что размеры препятствия малы по сравнению с длиной волны [1]).

Пусть начало координат взято на самом препятствии или вблизи от него; положим

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \tag{1}$$

где первый член представляет падающие волны, а второй член — отраженные волны. На поверхности препятствия, которое мы считаем твердым и неподвижным, должны иметь место условия

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} e^{ikx} = -ikle^{ikx} \tag{2}$$

в предположении, что l, m, n суть направляющие косинусы нормали, направленной наружу.

Формула (5) § 290 дает

$$\chi_P = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial \chi}{\partial n}\, dS + \frac{1}{4\pi}\iint \chi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) dS, \tag{3}$$

причем интегрирования распространяются на поверхность препятствия. Найдем теперь приближенное значение для выражения в правой части в том случае, когда расстояния r велики по сравнению с размерами препятствия. Обозначим координаты произвольной точки поверхности через x, y, z, а координаты точки P через x_1, y_1, z_1.

Если мы рассмотрим первый член в правой части равенства (3), то сможем написать

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + x\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + y\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + z\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)_0 + \ldots,$$

где значок нуль указывает, что в выражениях, при которых он поставлен, x, y, z нужно положить равными нулю. Равенство это можно также написать в виде

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \left(1 - x\frac{\partial}{\partial x_1} - y\frac{\partial}{\partial y_1} - z\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots\right)\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}, \tag{4}$$

---

[1]) Rayleigh, On the Incidence of Aerial and Electric Waves upon Small Obstacles in the Form of Ellipsoids or Elliptic Cylinders ..., Phil. Mag. (5), XLIV, 28 (1897) [Papers, IV, 305].