

где  $r_0$  обозначает расстояние точки  $P$  от начала. Далее из равенств (2) следует

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = -ikl + k^2 x_l + \dots \quad (5)$$

Если мы перемножим равенства (4) и (5) и проинтегрируем по поверхности препятствия, то получим приближенное равенство

$$\iint \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = k^2 Q \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} + ikQ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}, \quad (6)$$

в котором  $Q$  обозначает объем препятствия. Мы использовали при этом очевидные соотношения

$$\iint l dS = 0, \quad \iint x_l dS = Q, \quad \iint y_l dS = 0, \quad \iint z_l dS = 0. \quad (7)$$

Члены, удержанные в правой части равенства (6), имеют один и тот же порядок, между тем как отброшенные члены малы по сравнению с удержанными.

Что же касается второго члена в равенстве (3), то имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} &= \left( l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} = \\ &= - \left( l \frac{\partial}{\partial x_1} + m \frac{\partial}{\partial y_1} + n \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Мы можем, в согласии с нашим прежним приближением, написать  $r_0$  вместо  $r$  и вынести за знак интеграла пространственные производные от выражения  $\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}$ . Результат будет тогда содержать интегралы

$$\iint l \chi dS, \quad \iint m \chi dS, \quad \iint n \chi dS. \quad (9)$$

Из равенств (2) и (5) и из общего предложения, установленного в § 290, следует, что функция  $\chi$  в непосредственной близости от препятствия приблизительно совпадает с потенциалом скоростей движения жидкости, которое получится в том случае, когда препятствие будет двигаться в жидкости со скоростью  $ik$ , параллельной оси  $x$ . И для этого движения жидкости интегралы (9) представляют компоненты „импульса“, и мы можем в согласии с § 121 написать

$$\iint l \chi dS = ik \mathbf{A}, \quad \iint m \chi dS = ik \mathbf{C}', \quad \iint n \chi dS = ik \mathbf{B}', \quad (10)$$

причем плотность взятой для сравнения жидкости предполагается равной единице. Отсюда следует

$$\iint \chi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS = -ik \left( \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{C}' \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{B}' \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}. \quad (11)$$

Окончательная приближенная формула будет, таким образом, иметь вид

$$x_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{ik}{4\pi} \left\{ (\mathbf{A} + \mathbf{Q}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{C}' \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{B}' \frac{\partial}{\partial z_1} \right\} \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \text{ (12)}$$

<sup>1)</sup> Если мы разделим на  $k$  и затем будем стремить  $k \rightarrow 0$ , то воспроизведем результат, полученный в § 121а для случая несжимаемой жидкости.

причем значок нуль при  $r$ , как ненужный более, отброшен. Если  $kr$  велико, то эта формула может быть представлена в виде

$$\chi_P = -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi} \{(\mathbf{A} + Q) \lambda_1 + \mathbf{C}' \mu_1 + \mathbf{B}' \nu_1\} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (13)$$

где  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  суть направляющие косинусы для  $r$ .

Для шара радиуса  $a$  имеем

$$\mathbf{A} = \frac{2}{3} \pi a^2, \quad Q = \frac{4}{3} \pi a^3, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{C}' = 0,$$

что приводит снова к результату (10) § 297.

Отраженные волны можно представлять себе полученными в результате совместного действия простого источника и диполя. Ось последнего вообще не совпадает с направлением падающих волн.

Более симметричая формула получается, если принять, что первоначальные волны идут из произвольно заданного направления ( $\lambda, \mu, \nu$ ), так что формула (1) должна быть заменена формулой

$$\varphi = e^{ik(\lambda x + \mu y + \nu z)} + \chi. \quad (14)$$

Повторяя рассуждения предшествующего исследования, получим без затруднений вместо формулы (13) формулу

$$\begin{aligned} \chi_P = & -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2 Q}{4\pi} (\lambda \lambda_1 + \mu \mu_1 + \nu \nu_1) \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi} (\mathbf{A} \lambda \lambda_1 - \mathbf{B} \mu \mu_1 + \\ & + \mathbf{C} \nu \nu_1 + \mathbf{A}' (\mu \nu_1 + \mu_1 \nu) + \mathbf{B}' (\nu \lambda_1 + \nu_1 \lambda) + \mathbf{C}' (\lambda \mu_1 + \lambda_1 \mu)) \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как в § 124, направления координатных осей могут быть выбраны таким образом, что будем иметь  $\mathbf{A}' = \mathbf{B}' = \mathbf{C}' = 0$ ; тогда формула приведется к следующей

$$\begin{aligned} \chi_P = & -\frac{k^2 Q}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{k^2}{4\pi} \{(\mathbf{A} + Q) \lambda \lambda_1 + (\mathbf{B} + Q) \mu \mu_1 + \\ & + (\mathbf{C} + Q) \nu \nu_1\} \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае эллипсоида с полуосами  $a, b, c$  на основании формул (4) § 121 будем иметь

$$\mathbf{A} + Q = \frac{2}{2 - a_0} Q, \quad \mathbf{B} + Q = \frac{2}{2 - \beta_0} Q, \quad \mathbf{C} + Q = \frac{2}{2 - \gamma_0} Q, \quad (17)$$

где  $a_0, \beta_0, \gamma_0$  определяются на основании формул (6) § 114. В случае круговой пластинки ( $a = b, c = 0$ ) имеем  $Q = 0, \mathbf{A} = \frac{8}{3} a^3, \mathbf{B} = 0, \mathbf{C} = 0$ ; уравнение (16) приводится при этом к виду

$$\chi_P = -\frac{2}{3} \frac{k^3 a^3}{\pi} \lambda \lambda_1 \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (18)$$

Если пластинка стоит наклонно к падающим волнам, то амплитуда отраженных волн будет меньше, именно в отношении косинуса угла наклона.

Объяснение обоих типов возмущений в (13) и (16) можно легко дать в одной и той же форме. Прежде всего, если препятствия налицо нет, то

в области, которую оно должно было бы занимать, будут происходить попарно то сгущения, то разрежения. При наличии препятствия его сопротивление этим сгущениям и разрежениям оказывает определенное воздействие на окружающую среду; волны, получившиеся благодаря этому обстоятельству на большом расстоянии, на самом деле будут таковы, как если бы они были возбуждены в покоящейся до того среде периодическим колебательным движением жидкости в объеме препятствия; при этом движение должно быть достаточно интенсивным для того, чтобы компенсировать указанные выше изменения плотности. Этот результат оказывается равносильным „простому“ источнику звука. На это колебательное движение накладывается вторая система волн, которая обозана своим возникновением *неподвижности препятствия*. Если бы препятствие могло свободно двигаться и имело бы, кроме того, такую же массу, как и вытесненный им воздух, то оно стало бы раскачиваться вперед и назад вместе со звуковыми колебаниями, и вторая система волн не возникла бы. Эта вторая система в действительности такова, как если бы она получилась благодаря колебательному движению препятствия вдоль прямой со скоростью, равной и прямоопротивоположной скорости частицы воздуха при невозмущенных волнах. Это действие препятствия равносильно диполю.

Если длина волны *мала* по сравнению с размерами препятствия, то задача дифракции в общем случае представляет большие аналитические трудности. Единственный случай, в котором задачу можно считать решенной до конца, есть случай плоского экрана, ограниченного с одной стороны; в этом случае ничто не зависит от длины волны. Мы исследуем этот случай в § 308.

Случай плоских волн, падающих на неподвижную сферу, кажется с первого взгляда многообещающим: полное выражение для возмущения, вызванного в этом случае падающими и отраженными волнами, дается формулами § 297; таким образом, мы имеем

$$\varphi + \varphi' = \sum (2n+1)(ikr)^n \left\{ \psi_n(kr) - \frac{k a \psi'_n(ka) + n \psi_n(ka)}{k a f'_n(ka) + n f_n(ka)} f_n(kr) \right\} P_n(\mu). \quad (19)$$

Для точек поверхности шара выражение это приводится к виду

$$\varphi + \varphi' = - \sum \frac{(2n+1) i^n P_n(\mu)}{(ka)^{n+1} \{ k a f'_n(ka) + n f_n(ka) \}}. \quad (20)$$

Однако, если длина волны мала по сравнению с окружностью  $2\pi a$  шара, то значение  $ka$  велико, и ряд в формуле (20), к сожалению, сходится очень медленно, так что нужно взять большое число его членов, чтобы получить достаточно хорошее приближение. Рэлей<sup>1)</sup> провел эти вычисления для случая  $ka = 10$ , который оказывается достаточным для того, чтобы показать начало образования звуковой тени за задней стороной шара (т. е. вблизи значения  $\mu = -1$ )<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Rayleigh, On the Acoustic Shadow of a Sphere, Phil. Trans. A, CCIII, 7 (1904) [Papers, V, 149].

<sup>2)</sup> Относящиеся сюда оптические и электрические задачи очень важны, так как они связаны с самыми разнообразными вопросами, как, например, с теорией радио и с влиянием кривизны земной поверхности на беспроводочную телеграфию. Задачи эти были подробно разобраны Дебюи, Л. Лоренцом, Макдональдом, Пуанкаре, Никольсоном и другими, причем обнаружились различия в мнениях относительно законности применяемых при этом математических методов. Полные указания по этим вопросам находятся в работе Лява, On the Transmission of Electric Waves over the Surface of the Earth, Phil. Trans. A, CCXV, 105 (1914). См. также Watson, Proc. Roy. Soc., XCIV, 83 (1918).

**§ 301.** Если, не ограничиваясь простыми гармоническими колебаниями, мы постараемся проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = c^2 \Delta \varphi \quad (1)$$

при помощи ряда сферических функций

$$\varphi = \sum R_n \varphi_n, \quad (2)$$

где  $\varphi_n$  — пространственная сферическая функция порядка  $n$ , то будем иметь на основании уравнения (4) § 292

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{2(n+1)}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} \right\}. \quad (3)$$

Если  $R_n$  — решение этого уравнения, то можно легко показать, что соответствующее уравнение для  $R_{n+1}$  удовлетворится решением вида

$$R_{n+1} = \frac{1}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r}; \quad (4)$$

поэтому уравнению (3) будет удовлетворять решение

$$R_n = \left( \frac{\partial}{r \partial r} \right)^n R_0 = \left( \frac{\partial}{r \partial r} \right)^n \frac{f(r - ct) + F(r + ct)}{r}. \quad (5)$$

В случае  $n = 1$  мы имеем решение

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(r - ct) + F(r + ct)}{r} \cos \theta. \quad (6)$$

Этот результат был применен Кирхгофом и в более полном виде Лявом к подробному разбору довольно интересного вопроса о том, как распространяется в окружающей среде фронт системы волн, получившихся благодаря движению шара.

В исследовании <sup>2)</sup> Кирхгофа движение шара задано заранее, причем скорость этого движения есть данная функция времени, и решение в этом случае оказывается сравнительно простым.

Ляв <sup>3)</sup> разбирает случай волн, которые возникают в результате мгновенного импульса, приложенного к шаровому маятнику. Уравнение движения маятника, как и в § 298, имеет вид

$$M \left( \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi \right) = - \iint p \cos \theta d\omega, \quad (7)$$

и мы полагаем

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(ct - r)}{r} \cos \theta, \quad (8)$$

<sup>2)</sup> Cp. Clebsch, см. выше стр. 138; Niven, Solutions of the Senate House Problems... for 1878, стр. 158.

<sup>3)</sup> Kirschhoff, см. выше, стр. 639.

<sup>4)</sup> Love, Some Illustrations of Modes of Decay of Vibratory Motions, Proc. Lond. Math. Soc. (2), II, 88 (1904).

причем член в формуле (6), который соответствует волнам, распространяющимся внутрь, отброшен. Это приводит к уравнению

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \sigma_0^2 \xi = \frac{2\beta c}{a^2} \left\{ f''(ct-a) + \frac{1}{a} f'(ct-a) \right\}, \quad (9)$$

где

$$\beta = \frac{\frac{2}{3} \pi \rho_0 a^3}{M}. \quad (10)$$

Из кинематического условия, которое должно быть выполнено на поверхности шара, имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{a} f''(ct-a) - \frac{2}{a^2} f'(ct-a) - \frac{2}{a^3} f(ct-a). \quad (11)$$

Чтобы решить совместную систему уравнений (9) и (11), положим

$$f(ct-r) = A e^{\lambda(ct-r+a)}, \quad \xi = B e^{\lambda ct}, \quad (12)$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 c^2 + \sigma_0^2) B &= \frac{2\beta c}{a^2} (\lambda a + 1) \lambda A, \\ \lambda c B &= -\frac{1}{a^3} (\lambda^2 a^3 + 2\lambda a + 2) A. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Если мы исключим отношение  $A/B$ , то получим биквадратное уравнение <sup>1)</sup> относительно  $\lambda$

$$(\lambda^2 c^2 + \sigma_0^2)(\lambda^2 a^2 + 2\lambda a + 2) + 2\beta c^2 \lambda^2 (\lambda a + 1) = 0. \quad (14)$$

Отмечая различные корни значками внизу, будем иметь

$$\xi = - \sum_{s=1}^4 \frac{\lambda_s^2 a^2 + 2\lambda_s a + 2}{c a^2 \lambda_s} A_s e^{\lambda_s ct}, \quad (15)$$

$$\varphi = - \sum_{s=1}^4 (\lambda_s r + 1) \frac{A_s}{r^s} e^{\lambda_s (ct-r+a)} \cos \theta. \quad (16)$$

Если мы будем исходить от произвольных начальных значений для  $\xi$  и  $\frac{d\xi}{dt}$  и если окружающая среда вначале находится в покое, то в этом решении следует считать  $t > 0$  и  $r < ct + a$ . Начальные условия дают два уравнения для четырех постоянных  $A_s$ . Полагая, например, что для  $t=0$  имеют место равенства

$$\xi = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = U_0, \quad (17)$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^4 \left( \lambda_s a + 2 + \frac{2}{\lambda_s a} \right) A_s &= 0, \\ \sum_{s=1}^4 (\lambda_s^2 a^2 + 2\lambda_s a + 2) A_s &= -U_0 a^2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Если положить  $\lambda = ik$ , то это уравнение совпадет с уравнением (26)  
§ 298.

Остальные условия получаются из рассмотрения разрывов сплошности на шаровой граничной поверхности фронта движущихся волн. Обозначим через  $\delta S$  элемент этой граничной поверхности и проведем через точки контура элемента  $\delta S$  нормали по направлению изнутри наружу, которые на расстоянии  $c \cdot \delta t$  пересекут поверхность шара, параллельную первой. Таким способом получается элемент объема величины  $\delta S \cdot c \cdot \delta t$ . За промежуток времени  $\delta t$  жидкость, содержащаяся в этом элементе объема, изменяет свою скорость в направлении нормали от значения 0 до значения  $-\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ , равного значению скорости в направлении внутренней нормали к граничной поверхности элемента, вследствие избытка давления  $c^2 \rho_0 s$ , где  $s$  обозначает коэффициент уплотнения на внутренней стороне поверхности. Отсюда получается уравнение

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \rho_0 \delta S \cdot c \cdot \delta t = c^2 \rho_0 s \cdot \delta S \cdot \delta t$$

или, так как  $c^2 s = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , уравнение 1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (19)$$

которое должно удовлетворяться для  $r = ct + a$ . Подставляя в это уравнение значение  $\varphi$  из формулы (16), находим

$$\sum (\lambda_s r + 2) A_s = 0.$$

Это уравнение вообще может удовлетворяться только в том случае, когда имеем

$$\sum \lambda_s A_s = 0, \quad \sum A_s = 0, \quad (20)$$

что, как это следует отметить, обеспечивает непрерывность  $\varphi$  и вместе с тем также непрерывность компоненты скорости, касательной к волновому фронту.

Четыре условия (18), (20) могут теперь быть записаны следующим образом:

$$\sum \lambda_s^2 A_s = -U_0 a, \quad \sum \lambda_s A_s = 0, \quad \sum A_s = 0, \quad \sum \frac{A_s}{\lambda_s} = 0; \quad (21)$$

отсюда следует

$$A_1 = -\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} \cdot U_0 a, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots \quad (22)$$

Движение воздуха определяется, таким образом, уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_1^4 \frac{A_s}{r} e^{\lambda_s(ct - r + a)} \cos \theta \quad [r < ct + a] \\ \varphi &= 0 \quad [r > ct + a]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

1) Теория разрывов сплошности на поверхности фронта волн была систематически изучена Кристоффелем, Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten, Ann. d. Matemat., VIII, 81 (1876) и Ляном, Wave-Motions with Discontinuities at Wave-Fronts, Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 37 (1903).

В практически встречающихся случаях  $\beta$  есть очень малая дробь, и корни уравнения (14) в первом приближении равны

$$\lambda_1 = \frac{i\sigma_0}{c}, \quad \lambda_2 = -\frac{i\sigma_0}{c}, \quad \lambda_3 = \frac{-1+i}{a}, \quad \lambda_4 = \frac{-1-i}{a}. \quad (24)$$

Если путь, пройденный звуковой волной в течение одного периода колебаний, превосходит во много раз окружность шара, то  $\lambda_3, \lambda_4$  оказываются большими по сравнению с  $\lambda_1, \lambda_2$ . Отсюда для  $r < ct + a$  находим подстановкой в выражения (22) и (23)

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{U_0 a^3}{2r} \cos \sigma_0 \left( t - \frac{r-a}{c} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2} U_0 a^3}{2r} e^{-\frac{(ct+a-r)}{a}} \cdot \cos \left( \frac{ct+a-r}{a} - \frac{1}{4} \pi \right) \right\} \cos \theta. \quad (25)$$

Первая часть этого выражения такова, как если бы шар в течение неограниченного времени испытывал простые гармонические колебания с периодом  $\frac{2\pi}{\sigma_0}$  и амплитудой  $\frac{U_0}{\sigma_0}$ . Вторая часть становится незаметной на расстояниях нескольких диаметров шара от внутренней граничной поверхности движущейся волны; однако, вблизи от этой поверхности вторая часть оказывается сравнимой с первой частью. Чтобы исследовать затухание колебаний, нужно перейти ко второму приближению; но эта часть задачи была разобрана уже в §§ 295, 298. Здесь достаточно заметить, что наиболее важная часть возмущения внутри движущейся волны дается выражением вида

$$\varphi = \frac{C}{r} e^{-m(ct-r)} \cos \sigma_0 \left( t - \frac{r}{c} + \epsilon \right) \cos \theta. \quad (26)$$

Множитель  $e^{-mc t}$  дает затухание в произвольной точке, получающееся вследствие того, что первоначальная энергия маятника расходуется на возбуждение волны. Что же касается множителя  $e^{m\epsilon}$ , то следует заметить, что внутри пространства, занятого волнами, амплитуда в какой-либо точке  $Q$  (если мы будем пренебречь тем изменением, которое обусловлено расхождением радиусов) оказывается больше, чем амплитуда в точке  $P$ , лежащей на том же радиусе-векторе ближе к центру, и именно — в отношении  $e^{m\cdot PQ}$ ; причина этого заключается в том, что амплитуда в точке  $Q$  представляет возмущение, которое началось ранее на промежуток времени  $\frac{PQ}{c}$ , в течение которого амплитуда колебаний убывала по закону  $e^{-mc t}$ <sup>1)</sup>.

### Звуковые волны в двух измерениях.

**§ 302.** Если  $\varphi$  не зависит от  $z$ , то имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta_1 \varphi, \quad (1)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Ср. Lamb, On a Peculiarity of the Wave-System due to the Free Vibrations of a Nucleus in an Extended Medium, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXXII, 208 (1900).

В случае симметрии относительно начала отсюда получается

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (3)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Общее решение (этого уравнения) мы получили в § 196 в виде

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f \left( t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du + \int_0^\infty F \left( t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du, \quad (4)$$

и далее было показано, что решение

$$2\pi\varphi = \int_0^\infty f \left( t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du \quad (5)$$

представляет систему расходящихся волн, которая возбуждается источником  $f(t)$ , находящимся в начале координат.

Мы теперь можем дать другой вывод этих результатов. Из формулы (13) § 285 получается следующее: если точечный источник  $f(t) dz$  находится в точке  $(0, 0, z)$ , то его действие в точке, лежащей в плоскости  $xy$  на расстоянии  $r$  от начала, может быть представлено выражением

$$\frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 + z^2}} f \left( t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} \right) dz.$$

Интегрируя это выражение по  $z$  между пределами  $-\infty$  и  $+\infty$ , мы получим действие системы точечных источников, распределенных вдоль оси  $z$  с равномерной линейной плотностью  $f(t)$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f \left( t - \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} \right) \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f \left( t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du. \end{aligned} \quad (6)$$

Тот же метод, конечно, может быть применен и для получения второго члена в формуле (4).

Уравнения движения звука в одном, двух или трех измерениях в случае симметрии содержатся в формуле

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (7)$$

Сложная и несколько неудобная форма, в которой получено решение для случая  $m=2$ , находится в резком контрасте с аналитической простотой и внешним формальным видом решений для случаев  $m=1$ ,  $m=3$ ; но это обстоятельство не должно вводить нас в заблуждение относительно истин-

ных физических соотношений. Чтобы иметь возможность сравнивать между собой эти три случая, рассмотрим действие (A) плоского источника, (B) линейного источника и (C) точечного источника, причем мощность источника в каждом из этих случаев пусть будет равна

$$f(t) = \frac{\tau}{t^2 + \tau^2}. \quad (8)$$

Это дает удобное представление для того источника, который имеет более или менее преходящий характер, так как мы можем, уменьшая  $\tau$ , сделать произвольно малым тот промежуток времени, в течение которого действие источника оказывается заметным, тогда как интеграл по времени остается неизменным.

Результаты (для всех трех случаев) можно выразить в более удобной форме, введя коэффициент уплотнения  $s$ .

(A). В случае  $m=1$  находим для  $x>0$

$$s = \frac{\tau}{2c} \cdot \frac{1}{\left(t - \frac{x}{c}\right)^2 + \tau^2}. \quad (9)$$

(B). Для  $m=2$  аналитическое представление оказывается подобным данному в § 197. Результат для главной части волны может быть представлен в виде

$$s = \frac{1}{4\sqrt{2}c^2\tau^2} \sqrt{\frac{ct}{r}} \sin\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{2}\eta\right) \cos^{3/2}\eta, \quad (10)$$

где  $\eta$  определяется из уравнения

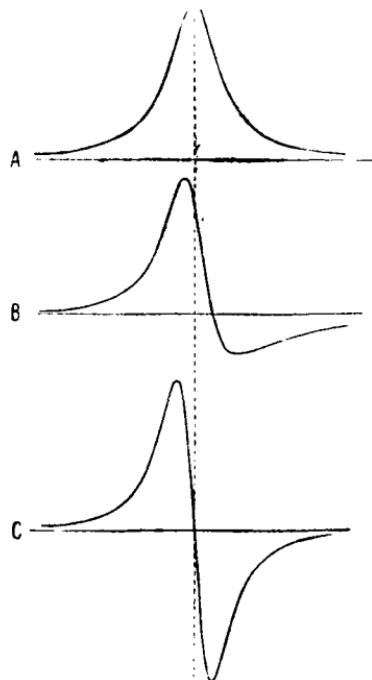
$$t = \frac{r}{c} + \tau \operatorname{tg} \eta.$$

(C). В случае трех измерений мы имеем

$$s = \frac{\tau}{2\pi c^2} \cdot \frac{\frac{r}{c} - t}{r \left\{ \left(t - \frac{r}{c}\right)^2 + \tau^2 \right\}^2}. \quad (11)$$

Эти три случая представлены на фиг. 77, причем в качестве ординат взяты значения  $s$ , а в качестве абсцисс значения  $t$ . Масштаб для  $t$  во всех трех случаях взят один и тот же, но между вертикальными масштабами не имеется, конечно, никакого соответствия. В случае (A) мы имеем чистую волну сгущения; в случае (B) за начальным сгущением следует разрежение менее сильное, но зато с большей продолжительностью; в случае (C), наоборот, сгущение и разрежение будут антисимметричны. В случаях (B) и (C) для каждой произвольной точки необходимо иметь место одно и то же равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} s dt = 0; \quad (12)$$



Фиг. 77.

ср. § 288. Если бы источник по своей продолжительности был строго ограничен, то в случае трех измерений среда после прохождения волны

оставалась бы совершенно в покое, как и в случае одного измерения, хотя и по другой причине. В промежуточном случае двух измерений волна будет оставлять после себя хвост неограниченной длины, и следовательно, здесь имеет место только лишь асимптотическое приближение к положению покоя.

Оказывается, что с физической точки зрения случаи  $m=1$ ,  $m=2$ ,  $m=3$  образуют последовательность с правильным чередованием тех свойств, которые обусловлены возрастающей подвижностью среды.

Если мы не будем ограничиваться случаем симметрии, то общее решение уравнения (1) в полярных координатах будет иметь вид

$$\varphi = \sum (Q_s r^s \cos s\theta + R_s r^s \sin s\theta), \quad (13)$$

где  $Q_s$ ,  $R_s$  суть функции от  $r$  и  $t$ , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 Q_s}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 Q_s}{\partial r^2} + \frac{2s+1}{r} \frac{\partial Q_s}{\partial r} \right) \quad (14)$$

и аналогичному уравнению относительно  $R_s$ . Решение уравнения (14) есть

$$Q_s = \left( \frac{\partial}{r \partial r} \right)^s Q_0, \quad (15)$$

где

$$Q_0 = \int_0^\infty f \left( t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du + \int_0^\infty F \left( t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} u \right) du. \quad (16)$$

Доказательство аналогично приведенному в (5) § 301<sup>1</sup>.

**§ 303.** В случае простого гармонического колебания ( $e^{i\omega t}$ ) будем иметь в полярных координатах уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $k = \frac{\sigma}{c}$ . Решение этого уравнения, подчиненное условию быть конечным в начале координат, может быть представлено, как в § 191, в виде

$$\varphi = \sum (A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta) J_s(kr), \quad (2)$$

где  $s$  может принимать любые целые значения между 0 и  $\infty$ .

Отсюда мы сразу получаем предложение, что среднее значение ( $\bar{\varphi}$ ) функции  $\varphi$  в круге, описанном около начала координат радиусом  $r$ , равно

$$\bar{\varphi} = J_0(kr) \varphi_0, \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  обозначает значение  $\varphi$  в начале<sup>2</sup>). Эта теорема (при том ограничении, которое высказано выше) аналогична теореме (8) § 289 и доказывается подобным же способом.

<sup>1</sup>) Этот параграф с незначительными изменениями взят из одной работы автора, указанной на стр. 374.

<sup>2</sup>) H. Weber, Math. Ann. I (1868).

При поперечных колебаниях воздуха, заключенного в сосуде, имеющем форму круглого цилиндра, нормальные колебания выражаются различными членами ряда (2), причем допускаемые значения  $k$ , а следовательно, и  $\sigma$  определяются из уравнения

$$J_s'(ka) = 0, \quad (4)$$

где  $a$  обозначает радиус. Смысл этого результата может быть выяснен из § 191, где рассматривается точно такая же математическая задача. Фиг. 45 показывает для двух важнейших случаев форму линий равного давления; движение частиц происходит в направлениях, перпендикулярных к этим линиям <sup>1)</sup>.

Бесселевы функции  $J_s(z)$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{J_s(\zeta)}{\zeta^s} = - \frac{J_{s+1}(\zeta)}{\zeta^s}, \quad (5)$$

отвечающему формуле (17) § 292. Соотношение это легко получается из разложения в ряд функции  $J_s(\zeta)$ , данного в § 101. Из формулы (5) и из дифференциального уравнения для  $J_s(\zeta)$ , именно,

$$f''(\zeta) + \frac{1}{\zeta} f'(\zeta) + \left(1 - \frac{s^2}{\zeta^2}\right) f(\zeta) = 0, \quad (6)$$

можно получить различные рекуррентные формулы, например,

$$\zeta J'_s(\zeta) + s J_s(\zeta) = \zeta J_{s-1}(\zeta); \quad (7)$$

эта формула соответствует формуле (18) § 292.

Последовательным применением формулы (5) получаем

$$J_s(\zeta) = \zeta^s \left(-\frac{d}{d\zeta}\right)^s J_0(\zeta). \quad (8)$$

Методом полной индукции можно легко показать, что выражение в правой части равенства (8) действительно есть решение дифференциального уравнения (6), если  $J_0(\zeta)$  удовлетворяет тому же уравнению при  $s=0$ . Это подсказывает подходящий для наших целей выбор функций Бесселя „второго рода“. Мы полагаем

$$D_s(\zeta) = \zeta^s \left(-\frac{d}{d\zeta}\right)^s D_0(\zeta), \quad (9)$$

где  $D_0(\zeta)$  обозначает функцию <sup>2)</sup>, введенную в § 194, именно

$$D_0(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-i\zeta \operatorname{ch} u} du. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Эта задача исчерпывающим образом была разобрана Рэлем, Theory of Sound, § 339.

<sup>2)</sup> При помощи метода § 302 можно легко показать, что  $D_0(kr)$  представляет потенциал простых гармонических точечных источников, равномерно распределенных вдоль оси  $z$ . См. Rayleigh, On Point-, Line- and Plane-Sources of Sound, Proc. Lond. Math. Soc., XIX, 504 (1888) [Papers, III, 44; Theory of Sound, § 342].

Ясно без дальнейшего доказательства, что  $D_s(\zeta)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и той же системе рекуррентных формул, как и  $J_s(\zeta)$ . Важный частный случай формулы (9) представляет равенство

$$D_1(\zeta) = -D'_0(\zeta). \quad (11)$$

Полезны следующие приближенные формулы. Для малого  $\zeta$  имеют место на основании §§ 100, 194 равенства

$$\left. \begin{aligned} J_0(\zeta) &= 1 - \frac{\zeta^2}{4} + \dots, \\ D_0(\zeta) &= -\frac{2}{\pi} \left( \log \frac{1}{2} \zeta + \gamma + \frac{1}{2} i\pi + \dots \right); \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

отсюда и из формул (8) и (9) следует для  $s > 0$

$$\left. \begin{aligned} J_s(\zeta) &= \frac{\zeta^s}{2^s s!} + \dots, \\ D_s(\zeta) &= \frac{2^s (s-1)!}{\pi \zeta^{s-1}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

С другой стороны, для больших значений  $\zeta$  мы имеем

$$\left. \begin{aligned} J_s(\zeta) &= \left( \frac{2}{\pi \zeta} \right)^{1/s} \sin \left( \zeta + \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} s\pi \right) + \dots, \\ D_s(\zeta) &= \left( \frac{2}{\pi \zeta} \right)^{1/s} i^s e^{-i \left( \zeta + \frac{1}{4} \pi \right)} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

до тех пор пока порядок  $s$  функций не станет сравнимым с порядком  $\zeta$  или больше, чем  $\zeta$ .

Формулы эти могут быть применены для того, чтобы исследовать, как колебания цилиндра (например, фортепианной струны) сообщаются окружающему воздуху.

Пусть поперечные колебания цилиндра определяются функцией

$$U = ae^{i\omega t}; \quad (15)$$

тогда радиальная скорость на поверхности  $r=a$  будет дана формулой

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = ae^{i\omega t} \cos \theta. \quad (16)$$

Соответствующее значение  $\varphi$  будет равно

$$\varphi = AD_1(kr) \cos \theta e^{i\omega t} \quad (17)$$

при условии

$$-kD'_1(ka) A = a. \quad (18)$$

Если, как мы и будем предполагать, окружность поперечного сечения цилиндра очень мала по сравнению с длиной звуковой волны, то  $ka$  представляет очень малую дробь, и мы находим из формул (18)

$$A = \frac{1}{2} \pi ka^2 a.$$

На расстояниях  $r$ , больших по сравнению с  $k^{-1}$ , мы имеем таким же образом на основании формул (14)

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \frac{ik^{1/2} a^2}{r^{1/2}} a \cos \theta e^{i(\sigma t - kr + 1/4\pi)}. \quad (19)$$

Если бы скорость на границе  $r=a$  всюду была направлена по радиусам и амплитуда была бы равна  $a$ , то значение  $\varphi$  на некотором расстоянии было бы равно

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \frac{a}{k^{1/2} r^{1/2}} a e^{i(\sigma t - kr - 1/4\pi)}. \quad (20)$$

В действительности интенсивность, измеряемая квадратом амплитуды, оказывается меньше в отношении  $k^3 a^2$ , которое по предположению очень мало.

Это показывает, что боковое движение воздуха вблизи цилиндрической поверхности имеет своим следствием то, что амплитуды распространяющихся волн на некотором расстоянии уменьшаются; ср. § 294. Так, например, значительно большая часть звука фортепианной струны получается не непосредственно от проволоки, а от резонансного ящика, который приводится в вынужденные колебания вследствие изменения давления в местах укрепления струны.

Реакция воздуха, действующая на колеблющийся цилиндр, на основании уравнения (18) будет равна

$$-\int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta = -\rho_0 a \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cos \theta d\theta = -\pi \rho_0 a i \sigma A D_1(ka) e^{i\sigma t} = \\ = \pi \rho_0 a^2 \frac{D_1(ka)}{ka D'_1(ka)} \frac{dU}{dt}. \quad (21)$$

Если  $ka$  мало, то это выражение приближенно равно

$$-\pi \rho_0 a^2 \frac{dU}{dt}. \quad (22)$$

Наиболее важное действие воздуха проявляется в том, что масса цилиндра увеличивается на количество, равное массе вытесненного воздуха; ср. § 68<sup>1)</sup>.

**§ 304.** Исследуем теперь отражение системы плоских волн от твердого цилиндрического препятствия, ось которого параллельна фронту волн.

Примем потенциал падающих волн, как и в § 296, равным

$$\varphi = e^{ikx} \quad (1)$$

и найдем прежде всего разложение этого потенциала в ряд вида (2) § 303. Искомая формула имеет вид

$$e^{ikx} = J_0(kr) + 2iJ_1(kr) \cos \theta + \dots + 2i^s J_s(kr) \cos s\theta + \dots \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Более полное исследование выполнено Стоксом, см. выше стр. 636.

Этот результат можно получить прямо <sup>1)</sup>, если разложить в ряд  $e^{ikr \cos \theta}$ , воспользоваться формулой

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \cos n\theta + \frac{n}{1} \cos(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)\theta + \dots \right\} \quad (3)$$

и из результата отобрать коэффициенты при  $\cos s\theta$ .

Разложение (2) заключает в себе формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \cos s\theta d\theta = i^s J_s(kr); \quad (4)$$

эта формула хорошо известна в теории бесселевых функций <sup>2)</sup>.

Наоборот, считая эту формулу известной, получим на основании ее другой вывод формулы (2).

Отраженные волны, будучи представлены функцией

$$\varphi' = \sum B_s D_s(kr) \cos s\theta, \quad (5)$$

должны удовлетворять условию на поверхности

$$\frac{\partial}{\partial r} (\varphi + \varphi') = 0 \quad (r=a), \quad (6)$$

которое дает значение

$$B_s = -\frac{2i^s J_s(ka)}{D_s(ka)}, \quad (7)$$

за исключением случая  $s=0$ , когда множитель 2 должен быть опущен.

Если  $ka$  будет мало, то имеют место приближенные равенства

$$J'_0(ka) = -\frac{1}{2} ka, \quad D'_0(ka) = -\frac{2}{\pi ka} \quad (8)$$

и для  $s > 0$

$$J'_s(ka) = \frac{(ka)^{s-1}}{2^s (s-1)!}, \quad D'_s(ka) = -\frac{2^s s!}{\pi (ka)^{s+1}}. \quad (9)$$

Отсюда следует

$$B_0 = -\frac{1}{4} \pi k^3 a^3, \quad B_s = \frac{\pi i^s (ka)^{2s}}{2^{2s-1} s! (s-1)!} \quad (s>0). \quad (10)$$

Наиболее важными членами являются те, которые соответствуют значениям  $s=0$  и  $s=1$ . Если остальные члены отбросить, то будем иметь для отраженных волн

$$\varphi' = -\frac{1}{4} \pi k^3 a^3 \{ D_0(kr) - 2i D_1(kr) \cos \theta \}. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Н е и п е, Kugelfunctionen, I, 82. Можно также применить метод, использованный в (7) § 296.

<sup>2)</sup> У т о с о н, стр. 21. Случай  $s=0$  встречался нам уже в § 100; его можно истолковать, говоря, что он показывает, как можно получить потенциал  $J_0(kr)$  наложением плоских систем волн, которые движутся в направлениях, равномерно распределенных в плоскости  $xy$  вокруг начала; ср. (7), § 289.

Для больших значений  $ka$ , если ввести опять множитель с временем, эта функция примет вид

$$\varphi' = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \frac{k^{3/2} a^2}{r^{1/2}} \cdot (1 + 2 \cos \theta) e^{i(kt - kr - 1/4 \pi)}. \quad (12)^1$$

Скорость, с которой энергия (на единицу длины цилиндра) уносится отраженными волнами наружу, равна

$$-\int_0^{2\pi} p \frac{\partial \varphi'}{\partial r} r d\theta = -\rho_0 r \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} d\theta,$$

где значение  $r$  может быть взято ради удобства очень большим. Подставляя действительное значение  $\varphi'$  из формулы (12), найдем в качестве среднего значения

$$\frac{3}{8} \pi^2 \rho_0 \sigma (ka)^4. \quad (13)$$

Поток энергии в первоначальных волнах равен, как и в § 297,  $\frac{1}{2} \rho_0 k^3 c$ . Отношение величины (13) к этой величине будет равно (так как  $\sigma = k_c$ )

$$\frac{3}{8} \pi^2 (ka)^3 2a. \quad (14)$$

Так, например, проволока диаметром в 0,5 мм, при длине волны 1220 мм, отражает только  $6,63 \cdot 10^{-8}$  падающей энергии.

**§ 305.** Приближенные методы §§ 299, 300 могут быть также применены к соответствующим задачам двух измерений <sup>2).</sup>

Формула (5) § 290 должна быть теперь заменена формулой

$$\varphi_P = -\frac{1}{4} \int D_0(kr) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{1}{4} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr) ds, \quad (1)$$

которую можно получить аналогичным способом. В случае области, простирающейся до бесконечности, линейный интеграл можно брать только по внутренним границам, так как  $\varphi$  на большом расстоянии  $R$  от начала стремится к виду

$$D_0(kR) \quad \text{или} \quad \frac{e^{-ikR}}{R^{1/2}}.$$

Таким же способом находим соотношение

$$0 = -\frac{1}{4} \int D_0(kr') \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{1}{4} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr') ds. \quad (2)$$

где  $r'$  обозначает расстояние от точки  $P'$ , лежащей вне рассматриваемой области.

<sup>1)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 343.

<sup>2)</sup> Rayleigh, см. выше, стр. 647, 650.

Внутри области в плоскости  $xy$ , размеры которой малы по сравнению с длиной волны, величина  $kr$  будет малой, и формула (1) приводится к виду

$$\varphi_P = \frac{1}{2\pi} \int \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \int \varphi \frac{\partial}{\partial n} \ln r ds, \quad (3)$$

причем постоянный член здесь отброшен. Функция  $\varphi_P$ , определенная таким образом, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_1 \varphi = 0, \quad (4)$$

имеющему место в случае несжимаемой жидкости.

1. Рассмотрим прежде всего случай, когда волны падают нормально на плоскую пластинку; положим

$$\varphi = e^{ikx} + \chi, \quad (5)$$

где  $\chi$  обозначает потенциал отраженных волн. Если мы предположим, что пластинка занимает часть плоскости  $x = 0$ , лежащую между прямыми  $y = \pm b$ , то условие для  $\chi$  примет вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -ik \quad (x = 0, \quad b > y > -b). \quad (6)$$

Применяя теперь формулы (1) и (2) к области, лежащей вправо от оси  $y$ , и совмещая точку  $P'$  с зеркальным изображением точки  $P$  по отношению к границе этой области, получим после вычитания

$$\chi_P = \frac{1}{2} \int_{-b}^b \chi \frac{\partial}{\partial n} D_0(kr) dy, \quad (7)$$

где значения  $\chi$  и  $\frac{\partial D_0}{\partial n}$  должны быть взяты на положительной стороне пластиинки. Обозначая через  $x$  и  $y$  координаты точки  $P$ , мы будем иметь  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$ , и тогда на расстоянии  $r$  от начала, значительно превосходящем  $2b$ , будет иметь место формула

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b \chi dy \frac{\partial}{\partial x} D_0(kr); \quad (8)$$

ср. (4) § 299. Определенный интеграл равен половине „импульса“ пластиинки, отнесенного к единице длины; при этом предполагается, что пластиинка движется в несжимаемой жидкости с плотностью, равной единице, со скоростью  $ik$  и обращена широкой стороной вперед. Отсюда на основании формулы (11) § 71 получаем

$$\int_{-b}^b \chi dy = \frac{1}{2} ik\pi b^2 \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\chi_P = -\frac{1}{4} ik\pi b^2 \frac{\partial}{\partial x} D_0(kr) = \frac{1}{4} i\pi k^2 b^2 D_1(kr) \cos \theta. \quad (10)$$

Если значение  $kr$  велико, то эта формула на основании формул (14) § 303 приводится к виду

$$\chi_P = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\pi^{1/2} k^{3/2} b^2}{r^{1/2}} e^{-i(kr + 1/4\pi)} \cos \theta. \quad (11)$$

Отношение энергии, рассеянной в течение одной секунды, к потоку энергии первоначальных волн равно

$$\frac{1}{16} \pi^2 (kb)^3 2b; \quad (12)$$

это отношение в точности равно одной шестой соответствующего отношения в случае кругового цилиндра радиуса  $b$ .

2. В случае отверстия в плоском экране ( $x=0$ ), ограниченного параллельными прямыми ( $y=\pm b$ ), положим, как в (10) § 299, 2,

$$\varphi = e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi \quad \text{и} \quad \varphi = \chi' \quad (13)$$

соответственно для  $x \geq 0$ , и постараемся так определить  $\chi$  и  $\chi'$ , чтобы для всего отверстия имели место равенства

$$\chi = -1, \quad \chi' = +1, \quad (14)$$

в то время как на самом экране было бы

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Если мы приложим теперь формулы (1) и (2) к части плоскости, лежащей вправо от оси  $y$ , и если далее мы совместим точку  $P'$  с зеркальным изображением точки  $P$ , то получим в результате сложения

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b D_0(kr) \frac{\partial \chi}{\partial n} dy, \quad (16)$$

причем  $\delta n$  взято с положительной стороны (плоскости  $y=0$ ). Для расстояний  $r$  от начала, значительно превосходящих  $2b$ , из этой формулы получается

$$\chi_P = -\frac{1}{2} \int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy D_0(kr). \quad (17)$$

В непосредственной близости от отверстия движение, представленное функциями  $\chi$  и  $\chi'$ , одинаково с течением несжимаемой жидкости через то же самое отверстие, и поэтому приближенное значение определенного интеграла (17) может быть получено из сравнения с соответственными результатами § 66, 1. Оказывается, что соответствующее единице потока приращение  $\chi$  на пути от самого отверстия до точки, находящейся на расстоянии  $r$ , значительно превосходящем  $2b$ , будет равно

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{2r}{b}.$$

Мы можем все же принять, что значение  $r$  мало по сравнению с длиной волны, и тогда формулы (14) и (17) показывают, что в действительной задаче соответствующее приращение  $\chi$  на основании формул (12) § 303 будет равно

$$1 + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy \left( \ln \frac{1}{2} kr + \gamma + \frac{1}{2} i\pi \right). \quad (18)$$

Полагая это выражение равным

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy \ln \frac{2r}{b}, \quad (19)$$

находим

$$\int_{-b}^b \frac{\partial \chi}{\partial n} dy = - \frac{\pi}{\ln \frac{1}{4} kb + \gamma + \frac{1}{2} i\pi}. \quad (20)$$

Тогда, если значение  $kr$  велико, из формулы (17) следует

$$\begin{aligned} \chi_P &= - \frac{\frac{1}{2} \pi}{\ln \frac{1}{4} kb + \gamma + \frac{1}{2} i\pi} D_0(kr) = \\ &= - \frac{1}{\ln \frac{1}{4} kb + \gamma + \frac{1}{2} i\pi} \left( \frac{\pi}{2kr} \right)^{1/2} e^{-i(kr + 1/4\pi)} \end{aligned} \quad (21)$$

Значение функции  $\chi'$  в произвольной точке  $P$  с отрицательной стороны плоскости  $x = 0$  равно и по знаку прямо противоположно значению  $\chi$  в точке, представляющей зеркальное изображение точки  $P$  по отношению к этой плоскости.

Отношение энергии, прошедшей через отверстия, к потоку энергии первоначальных волн получается равным

$$\frac{\frac{1}{4} \pi^2}{kb \left\{ \left( \ln \frac{1}{4} kb + \gamma \right)^2 + \frac{1}{4} \pi^2 \right\}} 2b. \quad (22)$$

Если длина волны в 10, 100 или 1000 раз больше ширины отверстия, то множитель  $2b$  оказывается соответственно равным 1,240, 3,795, 17,20.

3. Задача в двух измерениях о дифракции плоских волн у цилиндрического препятствия с произвольной формой поперечного сечения может быть исследована методом § 300<sup>1</sup>), причем вместо формулы (5) § 290 должна быть взята приведенная выше формула (1). Так как при этом новые вопросы не затрагиваются, то достаточно будет привести важнейшие результаты. Мы будем считать, что волны исходят из направления  $(\lambda, \mu, 0)$  и будем поэтому писать

$$\varphi = e^{ik(\lambda x + \mu y)} + \chi, \quad (23)$$

где функция  $\chi$  должна представлять отраженные волны. Далее мы предположим, что оси  $x$  и  $y$  имеют специальные направления в плоскости поперечного сечения. Эти направления определяются тем, что кинетическая энергия несжимаемой жидкости с плотностью, равной единице, отнесенная к единице длины вдоль оси  $z$ , при движении цилиндра в жидкости со скоростью  $(u, v, 0)$  дается выражением вида

$$\frac{1}{2} (Au^2 + Bu^2), \quad (24)$$

где, следовательно, член с произведением  $uv$  должен отсутствовать. Размеры поперечного сечения предполагаются при этом малыми по сравнению с дли-

<sup>1)</sup> Ср. Rayleigh, см. выше, стр. 650.

ной волны; волны, отраженные в направлении  $(\lambda_1, \mu_1, 0)$ , определяются тогда формулой

$$\chi_P = -\frac{k^2 S}{(8\pi kr)^{1/2}} e^{-i(kr + \frac{1}{4}\pi)} - \frac{k^2}{(8\pi kr)^{1/2}} \{(\mathbf{A} + S)\lambda\lambda_1 + (\mathbf{B} + S)\mu\mu_1\} e^{-i(kr + \frac{1}{4}\pi)}, \quad (25)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения.

Для эллиптического поперечного сечения, полуоси которого  $a$  и  $b$  лежат в направлении осей  $x$  и  $y$ , имеем [см. (11) § 77]

$$S = \pi ab, \quad \mathbf{A} = \pi b^2, \quad \mathbf{B} = \pi a^2. \quad (26)$$

В случае кругового цилиндра ( $a = b$ ) или плоской пластинки ( $a = 0$ ) мы приходим к уже ранее полученным результатам.

**§ 306.** Мы можем также исследовать те возмущения, которые производятся в последовательности плоских волн тонким экраном, прорезанным рядом параллельных, равных и равноотстоящих друг от друга щелей. Как и выше, метод исследования является приближенным и основывается на предположении, что длина волны велика по сравнению с расстоянием между центрами соседних отверстий.

Предварительно определим течение несжимаемой жидкости сквозь твердую решетку вышеупомянутого вида. Это можно сделать при помощи метода Шварца (§ 73), но для нашей цели достаточно будет только привести результаты и их проверить. Возьмем ось  $x$  перпендикулярно к плоскости решетки, ось  $y$  в плоскости решетки перпендикулярно к направлению длины отверстий и напишем

$$\operatorname{ch} w = \mu \operatorname{ch} z, \quad (1)$$

где

$$w = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy \quad (2)$$

и  $\mu$  предполагается больше, чем единица. Определенное таким способом  $w$  будет циклической функцией; но мы можем избежать всякую неопределенность, если ограничимся сначала той половиной плоскости  $xy$ , для которой  $x > 0$ , а затем зафиксируем значение  $w$  в какой-либо точке. Будем предполагать, что в начале координат  $\psi = 0$ , в то время как значение  $\varphi$  равно действительному положительному значению  $\operatorname{arcch} \mu$ .

Формула (1) дает

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi \cos \psi &= \mu \operatorname{ch} x \cos y, \\ \operatorname{sh} \varphi \sin \psi &= \mu \operatorname{sh} x \sin y. \end{aligned} \quad (3)$$

Геометрическое место точек, для которых  $\varphi = 0$ , состоит из тех частей оси  $y$ , для которых

$$1 > \mu \cos y > -1;$$

эти части представляют отверстия, так что в масштабе наших формул половина ширины отверстия равна  $\operatorname{arc} \sin \frac{1}{\mu}$ . Для других частей области  $x > 0$  значения  $\varphi$  будут положительными. Далее линии

$$\psi = 0, \quad \psi = \pm \pi, \quad \psi = \pm 2\pi, \dots$$

состоят от частей из прямых

$$y = 0, \quad y = \pm \pi, \quad y = \pm 2\pi, \dots$$

части же из тех отрезков оси  $y$ , для которых

$$|\mu \cos y| > 1;$$

эти отрезки соответствуют частям экрана между отверстиями.

Кривые  $\varphi = \text{const.}$ ,  $\psi = \text{const.}$  для одного специального случая изображены на фиг. 78, причем значение  $\mu$  для упрощения вычислений принято равным

$$\mu = \operatorname{ch} \frac{1}{5} \pi = 1,2040;$$

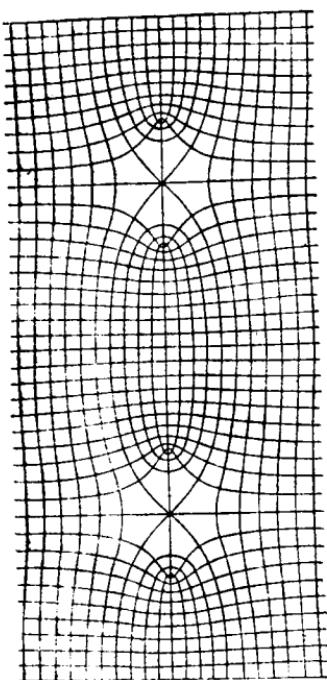
отсюда получается

$$\arcsin \frac{1}{\mu} = 0,312 \pi, \quad \arccos \frac{1}{\mu} = 0,188 \pi$$

Последние числа дают значения относительной ширины отверстий и лежащих между ними частей экрана.

Формулы (3) и фиг. 78<sup>1)</sup> допускают различные интерпретации в электростатике и других смежных математических областях. В рассматриваемом здесь случае мы должны принять, что значения  $\varphi$  в двух точках, лежащих симметрично по отношению к обеим сторонам оси  $y$ , равны, в то время как значения  $\varphi$  в этих точках хотя и равны друг другу, но противоположны по знаку.

Из формул (3) или из рассмотрения фиг. 78 получается, что функция  $\varphi$  в формулах (3) есть четная периодическая функция от  $y$  с периодом  $\pi$ . Поэтому она может быть разложена по теореме Фурье в ряд по косинусам кратных от  $2y$ , причем коэффициенты суть функции от  $x$ , общий вид которых определяется подстановкой в уравнение



Фиг. 78.

$$\Delta_1 \varphi = 0. \quad (4)$$

Если мы примем во внимание условие, которое должно удовлетворяться при больших значениях  $x$ , то найдем для положительных значений  $x$

$$\varphi = \ln \mu + x + \sum_{s=1}^{\infty} C_s e^{-2sx} \cos 2sy. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Взяты из работы автора, указанной на стр. 675. Формула, равносильная с формулой (1), была дана Лармором, Mathematical Tripos ч. II, 1895.

<sup>2)</sup> Точные значения коэффициентов  $C_s$  для наших целей не требуются. Можно показать, что в обозначениях гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{(-1)^{s-1}}{s} F\left(s, -s, 1, \frac{1}{\mu^2}\right) = \\ &= \frac{(-1)^{s-1}}{s} \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) F\left(1+s, 1-s, 1, -\frac{1}{\mu^2}\right). \end{aligned}$$

См. названную работу.

Если мы введем более общую линейную единицу и обозначим ширину каждого отверстия через  $a$ , а ширину полосы экрана между отверстиями через  $b$ , то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi \cos \psi &= \mu \operatorname{ch} \frac{\pi x}{a+b} \cos \frac{\pi y}{a+b}, \\ \operatorname{sh} \varphi \sin \psi &= \mu \operatorname{sh} \frac{\pi x}{a+b} \sin \frac{\pi y}{a+b}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\mu = \sec \frac{\pi b}{2(a+b)} = \operatorname{cosec} \frac{\pi a}{2(a+b)}. \quad (7)$$

Вместо разложения (5) получается теперь разложение

$$\varphi = \ln \mu + \frac{\pi x}{a+b} + \sum_{s=1}^{\infty} C_s e^{-i k_s x} \cos \frac{2 s \pi y}{a+b}, \quad (8)$$

где

$$k_s = \frac{2 s \pi}{a+b}. \quad (9)$$

Обратимся теперь к акустической задаче. Соответственно последовательности падающих волн с потенциалом  $e^{ikx}$  положим <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= e^{ikx} + e^{-ikx} + \chi && \text{при } x > 0 \\ \Phi &= \chi' && \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Как и в §§ 299,2 и 305,2 для отверстий должны иметь место условия

$$\chi = -1, \quad \chi' = +1, \quad (11)$$

а для остальной части плоскости  $x=0$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \chi'}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Так как функция  $\chi$  должна удовлетворять уравнению

$$(A_1 + k^2) \chi = 0 \quad (13)$$

и должна к тому же быть периодической относительно  $y$  с периодом  $a+b$ , то она должна разлагаться в ряд Фурье вида

$$\chi = B_0 e^{-i k x} + \sum_{s=1}^{\infty} B_s e^{-i k_s x} \cos \frac{2 s \pi y}{a+b}, \quad (14)$$

где

$$k_s^2 = \frac{4 s^2 \pi^2}{(a+b)^2} - k^2. \quad (15)$$

Так как по предположению величина  $a+b$  мала по сравнению с длиной волны  $\frac{2\pi}{k}$ , то величины  $k_s$  будут действительными и, кроме того, очень

мало будут уклоняться от значений  $k_s$ . Члены, содержащие  $e^{i k_s x}$ , исключены условием, что функция  $\chi$  должна быть конечной при  $x=\infty$ , так что волны, представленные при помощи функции  $\chi$ , должны сделаться в конце концов плоскими. То обстоятельство, что волны движутся от решетки наружу, оправдывает отбрасывание члена с  $e^{i k x}$ .

<sup>1)</sup> Буква  $\Phi$  употреблена здесь для обозначения акустического потенциала скоростей, тогда как  $\varphi$  использована здесь для другой цели.

Если бы  $k$  было равно нулю, то условия для определения  $\chi$  были бы такими же, как в случае несжимаемой жидкости, и мы имели бы

$$\chi = -1 + C\varphi, \quad (16)$$

где  $\varphi$  — функция, определяемая из формул (6) (способом, указанным выше), а  $C$  — некоторая постоянная; мы можем заранее предвидеть, что то же самое выражение будет в качестве приближенного пригодным и в рассматриваемом случае в непосредственной близости от решетки. Кроме того, для малых значений  $kh$  разложение (14) принимает вид

$$\chi = B_0(1 - ikx) + \sum_{s=1}^{\infty} B_s e^{-\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}, \quad (17)$$

причем подстановка  $\lambda_s$  вместо  $\lambda_s$  в показательную функцию соответствует ошибке порядка  $\frac{k^3(a+b)^2}{4\pi^2}$ . Подставляя из (8) в (16), найдем, что формулы (16) и (17) в действительности будут тождественны, есть принять

$$B_0 = -1 + C \ln \mu, \quad -ikB_0 = \frac{\pi C}{a+b} \quad (18)$$

и для  $s > 0$

$$B_s = CC_s. \quad (19)$$

Отсюда получается

$$B_0 = -\frac{1}{1 + ikl}, \quad (20)$$

где

$$l = \frac{a+b}{\pi} \ln \sec \frac{\pi b}{2(a+b)}. \quad (21)$$

Что же касается функции  $\chi'$ , то все условия оказываются выполненными, если мы предположим, что ее значение для каждой точки  $P'$  на отрицательной стороне решетки равно и прямо противоположно значению  $\chi$  в точке  $P$ , лежащей на положительной стороне и являющейся зеркальным изображением точки  $P'$ . Из этого следует

$$\chi' = -B_0 e^{ikx} - \sum_{s=1}^{\infty} B_s e^{\lambda_s x} \cos \frac{2s\pi y}{a+b}. \quad (22)$$

На расстоянии от решетки, равном нескольким длинам волн, можно пренебречь последними членами в формулах (14) и (22), а поэтому волны там оказываются почти плоскими. Принимая во внимание формулы (10), мы видим, что коэффициенты отраженных и прошедших через решетку волны суть  $1 + B_0$  и  $-B_0$  или соответственно

$$\frac{ikl}{1 + ikl} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 + ikl}, \quad (23)$$

если каждая из первоначальных волн принята в качестве единичной. В таком случае интенсивности этих волн представляются формулами

$$I = \frac{k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}, \quad I' = \frac{1}{1 + k^2 l^2}. \quad (24)$$

При достаточно больших длинах волны отражение имеет место лишь в очень малой степени даже тогда, когда отверстия составляют только очень

малую часть поверхности экрана. Соответствующие числовые значения могут быть записаны в виде

$$\frac{a}{a+b} = 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0,$$

$$\frac{l}{a+b} = \infty, 0,590, 0,374, 0,251, 0,169, 0,110, 0,067, 0,037, 0,016, 0,004, 0.$$

Если мы предположим, например, что длина волны в десять раз больше интервала  $a+b$  и что отверстия занимают десятую часть поверхности решетки, то найдем для интенсивностей отраженных и прошедших сквозь решетку волн значения

$$I = 0,121, \quad I' = 0,879.$$

Несмотря на то, что отверстия сравнительно узки, 88% звука проходит сквозь решетку.

**§ 307.** Подобный же метод может быть применен к случаю решетки, которая составлена из параллельных равноотстоящих друг от друга проволок.

В § 64 мы показали, что потенциал скоростей и функция тока для несжимаемой жидкости, которая протекает сквозь решетку, составленную из параллельных цилиндрических стержней радиуса  $b$ , приближенно определяются из формулы

$$w = z + \frac{\pi b^2}{a} \coth \frac{\pi z}{a}, \quad . \quad (1)$$

где  $a$  обозначает расстояние между осями двух последовательных стержней и предполагается, что  $b < \frac{1}{4}a$ .

Если действительная часть  $z$  будет положительной, то будем иметь

$$w = z + \frac{\pi b^2}{a} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n z}{a}} \right) \quad (2)$$

и отсюда получим

$$\varphi = x + \frac{\pi b^2}{a} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n x}{a}} \cos \frac{2\pi n y}{a} \right). \quad (3)$$

Аналогично находим для отрицательных  $x$

$$\varphi = x - \frac{\pi b^2}{a} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{2\pi n x}{a}} \cos \frac{2\pi n y}{a} \right). \quad (4)$$

В случае же акустической задачи потенциал скоростей будет принимать вид

$$\Phi = e^{ikx} + A e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \cos \frac{2\pi n y}{a} \quad (5)$$

или

$$\Phi = B e^{ikx} - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \cos \frac{2\pi n y}{a}, \quad (6)$$

сматря по тому, какое из двух неравенств  $x \geq 0$  имеет место; при этом  $\lambda_s$  обозначает положительную величину, определенную формулой

$$\lambda_s^2 = \frac{4s^2\pi^2}{a^2} - k^2. \quad (7)$$

Для значений  $x$ , малых по сравнению с длиной волны, мы можем пре-  
небречь разностью между  $\lambda_s$  и  $\frac{2s\pi}{a}$ , если длина волны велика по сравне-  
нию с  $a$ . При этих условиях формулы (5) и (6) приводятся соответственно  
к виду

$$\Phi = 1 + A + ik(1-A)x + \sum_{s=1}^{\infty} C_s e^{-\frac{2s\pi x}{a}} \cos \frac{2s\pi y}{a} \quad (8)$$

и

$$\Phi = B + ikBx - \sum_{s=1}^{\infty} C_s e^{\frac{2s\pi x}{a}} \cos \frac{2s\pi y}{a}. \quad (9)$$

Функция  $\Phi$  принимает, следовательно, вид

$$\Phi = a\varphi + \beta, \quad (10)$$

где  $\varphi$  определяется формулами (3) и (4), а  $a$  и  $\beta$  суть постоянные, причем имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} 1 + A &= a \frac{\pi b^2}{a} + \beta, & B &= -a \frac{\pi b^2}{a} + \beta, \\ ik(1-A) &= a, & ikB &= a, & C_s &= 2a \frac{\pi b^2}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Это дает

$$A = \frac{ikl}{1 + ikl}, \quad B = \frac{1}{1 + ikl}, \quad (12)$$

где

$$l = \frac{\pi b^2}{a}. \quad (13)$$

Интенсивности отраженных и прошедших через решетку волн будут равны поэтому

$$I = \frac{k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}, \quad I' = \frac{1}{1 + k^2 l^2}. \quad (14)$$

Если половина длины волны велика по сравнению с  $\frac{b^2}{a}$ , то имеет место свободное прохождение волн почти без отражения. Этим обстоятельством объясняется „чрезвычайно малое сопротивление, которое оказывают прохождению звука тонкие проволоки и волокна<sup>1)</sup>“.

**§ 308.** Дифракция плоских звуковых волн у края бесконечно простирающегося в одну сторону экрана и образование звуковой

<sup>1)</sup> Rayleigh, Theory of Sound, § 343. Исследования §§ 306, 307 взяты с соответствующими изменениями из одной работы автора, „On the Reflection and Transmission of Electric Waves by a Metallic Grating“, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXIX, 523 (1898).

тени были исследованы Зоммерфельдом<sup>1)</sup> и Кэрслу<sup>2)</sup>. Следует заметить, что в условия этой задачи не входят никакие другие особые линейные величины, кроме длин волн, и вместе с тем оказывается, что общий характер результата не зависит от длины волны. Случай нормального падения может быть исследован очень простым способом, который описывается ниже<sup>3)</sup>.

Мы будем предполагать, что экран занимает ту половину плоскости  $xz$ , для которой координата  $x$  положительна. Удобно ввести „параболические координаты“, которыми пользовались Ганкель и другие авторы. Положим

$$k(x+iy) = (\xi+i\eta)^2 \quad (1)$$

или

$$kx = \xi^2 - \eta^2, \quad ky = 2\xi\eta; \quad (2)$$

следовательно, будем иметь

$$kr = \xi^2 + \eta^2, \quad (3)$$

если через  $r$  обозначить расстояние от начала координат. Кривые

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = \text{const.}$$

образуют систему софокусных парабол, общий фокус которых лежит в начале.

Можно принять, что координата  $\eta$  (фиг. 79) всюду положительна, за исключением обеих сторон экрана, где она равна нулю. Координата  $\xi$  будет тогда на обеих сторонах оси  $x$  иметь противоположные знаки и на части этой оси, незанятой экраном, исчезать. Легко получаем следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{r}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \frac{\eta}{r}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\eta}{r}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Потенциал скоростей  $\varphi$  должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

причем фактор времени, как обычно, равен  $e^{ikct}$ .

Пусть первоначальные волны представлены функцией

$$\varphi = e^{iky_U}, \quad (6)$$

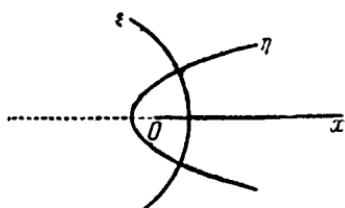
и мы будем искать решения вида

$$e^{iky_U} \quad \text{и} \quad e^{-iky_U}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraction, Math. Ann., XLVII, 317 (1895).

<sup>2)</sup> Carslaw, Some Multiform Solutions of the Partial Differential Equations of Physics . . . , Proc. Lond. Math. Soc., XXX, 121 (1899).

<sup>3)</sup> Метод заимствован из одной работы автора, „On Sommerfeld's Diffraction Problem, and on Reflection by a Parabolic Mirror“, Proc. Lond. Math. Soc. (2), IV, 190 (1906).



Фиг. 79.

Если возьмем решение первого вида, то для  $u$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Вследствие соотношений (4) отсюда получается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4i \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (9)$$

которое удовлетворяется решением вида

$$u = f(\xi + \eta) = f(\zeta), \quad (10)$$

если

$$\frac{d^2 f}{d \zeta^2} + 2i\zeta \frac{df}{d\zeta} = 0, \quad (11)$$

т. е., если

$$u = A + B \int_0^{\zeta+\eta} e^{-i\zeta s} d\zeta. \quad (12)$$

Если же значение  $\omega$  велико и положительно, то мы будем иметь приближенную формулу

$$\int_0^\omega e^{-i\zeta s} d\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-1/4 i\pi} + \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega s} + \dots \quad (13)$$

На большом расстоянии от начала со стороны положительных значений  $y$  имеет также место приближенное равенство

$$ue^{iky} = \left( A + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} Be^{-1/4 i\pi} \right) e^{iky} + \frac{i}{2(\zeta + \eta)} e^{-ikr}. \quad (14)$$

Последний член в этом равенстве представляет волны, расходящиеся от начала.

Подобным же способом можно получить и решение вида

$$u' = A' + B' \int_0^{\xi - \eta} e^{i\zeta s} d\zeta, \quad (15)$$

но так как это решение представляет волны, сходящиеся к началу, то оно не подходит для наших целей.

Если рассмотрим теперь второе из решений (7), то для  $v$  получим выражение вида

$$v = C + D \int_0^{\xi - \eta} e^{-i\zeta s} d\zeta \quad (16)$$

и другое выражение, которое мы на указанном выше основании отбрасываем.

Покажем теперь, что функция

$$\varphi = Ae^{iky} + Ce^{-iky} + Be^{iky} \int_0^{\zeta + \eta} e^{-i\zeta s} d\zeta + De^{-iky} \int_0^{\zeta - \eta} e^{-i\zeta s} d\zeta \quad (17)$$

при подходящем выборе постоянных удовлетворяет всем условиям задачи.

Прежде всего эта функция должна при  $y=0$  и при отрицательном  $x$ , абсолютное значение которого велико, приводиться к виду (6). Отсюда получаются, если положить  $\zeta=0$ ,  $\eta=\infty$  и принять во внимание уравнение (13), условия

$$A + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-1/4 i\pi} B = 1, \quad C - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-1/4 i\pi} D = 0. \quad (18)$$

Далее для  $y=0$  и  $x > 0$  должно быть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Применяя равенства (4) и полагая  $\eta=0$ , находим, что это условие удовлетворяется при

$$A = C, \quad B = D. \quad (19)$$

Окончательно для  $\varphi$  получаем выражение

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{2} \left( e^{iky} + e^{-iky} \right) + \\ & + \frac{e^{1/4 i\pi}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{iky} \int_0^{\xi+\eta} e^{-i\xi z} d\xi + e^{-iky} \int_0^{\xi-\eta} e^{-i\xi z} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Это выражение равносильно той форме, которую принимает результат Зоммерфельда в случае нормального падения волны<sup>1)</sup>.

Если значения  $\xi+\eta$  и  $\xi-\eta$  велики и положительны, то формула приводится к виду

$$\varphi = e^{iky} + e^{-iky}. \quad (21)$$

Эта формула относится к области, которая лежит вправо от экрана на большом расстоянии перед ним; второй член представляет всю отраженную часть волны.

Если значение  $\xi+\eta$  велико и положительно, а значение  $\xi-\eta$  велико по абсолютной величине и отрицательно, то будем иметь приближение

$$\varphi = e^{iky}. \quad (22)$$

Эта формула относится к области, которая целиком лежит на левой стороне оси  $y$ , где преобладают первоначальные волны. Когда же величины  $\xi+\eta$  и  $\xi-\eta$  обе велики и отрицательны, то будем иметь

$$\varphi = 0; \quad (23)$$

это равенство относится к области звуковой тени за экраном.

На каждой стороне плоскости  $y=0$  существует промежуточная область, в которой имеет место переход от состояния, представленного приближенно функцией (22), к состоянию, выраженному функциями (21) или (23) соответственно. Чтобы установить критерий приложимости нашего приближенного способа, выберем величину  $\omega$  таким образом, чтобы значение величины  $\omega \sqrt{\pi}$  можно было считать большим<sup>2)</sup>. Результаты (21) и (22) основываются на предположении, что как значение  $|\xi-\eta|$ , так и значение  $|\xi+\eta|$  велики. Границу соответствующей области, лежащей на стороне положительных значений  $y$ , мы получим, если положим

$$|\xi-\eta| = \omega.$$

<sup>1)</sup> Случай наклонного падения разобран в работах, указанных на стр. 675.

<sup>2)</sup> Значение  $\omega$  не должно быть очень большим. Если мы положим, например,  $\omega=6$ , то ошибка не будет превосходить 10%.

Это приводит, на основании равенств (2), к параболе

$$y = \frac{k}{2\omega} x^2 - \frac{\omega^2}{2k}, \quad (24)$$

параметр которой пропорционален длине волны. Соответствующая область на стороне отрицательных значений  $y$  ограничена параболой

$$y = -\frac{k}{2\omega} x^2 + \frac{\omega^2}{2k}. \quad (25)$$

Эти промежуточные области представляют собой то место, где происходят явления дифракции, важные по своей оптической аналогии; здесь эти явления не могут быть исследованы ближе. Нетрудно показать, что для точек, которые лежат вблизи от геометрической тени и расстояния которых от краев экрана велики по сравнению с длиной волны, результаты практически совпадают с теми, которые получены при помощи метода Френеля <sup>1)</sup>.

### Атмосферные волны.

**§ 309.** Теория волн, распространяющихся в атмосфере по вертикальному направлению, интересна как пример распространения волн в среде неодинаковой плотности <sup>2)</sup>.

Мы будем считать ось  $x$  направленную вертикально вверх; пусть  $\xi$  обозначает вертикальное смещение в момент  $t$  той плоскости частиц, невозмущенное положение которой есть  $x$ . Соответствующие значения давления и плотности обозначим через  $p$  и  $\varrho$ , а значения тех же величин в случае равновесия через  $p_0$  и  $\varrho_0$ . Последние две величины подчинены статическому условию

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = -g\varrho_0. \quad (1)$$

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} - g\varrho_0 = -\frac{\partial}{\partial x} (p - p_0), \quad (2)$$

а уравнение непрерывности

$$\varrho \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \varrho_0. \quad (3)$$

Если мы будем пренебрегать теплопроводностью и лучеиспусканiem, то значения  $p$  и  $\varrho$  в произвольной точке будут связаны адиабатическим соотношением

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^y, \quad (4)$$

где  $y$  есть отношение обеих удельных теплоемкостей. Отсюда следует в первом приближении

$$p - p_0 = -\gamma p_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> См. названную работу. Дифракция „единичной волны“ была исследована автором в Proc. Lond. Math. Soc. (2), VIII, 422 (1910).

<sup>2)</sup> Эта задача была исследована Пуассоном, см. выше, стр. 617 и Рэлем, On Vibrations of an Atmosphere, Phil. Mag. (4), XXIX, 173 (1890) (Papers, III, 335). Исследование, данное в тексте, появилось в Proc. Lond. Math. Soc. (2), VII, 122 (1908).

Подставляя значение  $p = p_0$  из (5) в (2), получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \gamma g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (6)$$

причем здесь положено

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad (7)$$

т. е.  $c$  обозначает скорость звука (обыкновенно переменную), соответствующую условиям среды в плоскости  $x=0$ . Если обозначить через  $H$  высоту „однородной атмосферы“, которая соответствует температуре в этой плоскости, то получится

$$c^2 = \gamma g H. \quad (8)$$

Предполагая вначале, что температура в состоянии равновесия всюду одинакова, так что  $H$  и  $c$  суть постоянные, получим

$$\rho_0 = C e^{-\frac{x}{H}}. \quad (9)$$

Удобно принять  $2H$  за единицу длины, а единицу времени выбрать так, чтобы было  $c = 1$ . При этом условии будем иметь

$$\rho_0 = C e^{-2x} \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (11)$$

Если положить

$$\xi = u e^x, \quad (12)$$

то из (11) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u. \quad (13)$$

В случае простых гармонических колебаний с фактором времени  $e^{i\omega t}$  для  $\sigma^2 > 1$  будем иметь

$$u = A e^{i\omega t + i\sqrt{\sigma^2 - 1} x} + B e^{i\omega t - i\sqrt{\sigma^2 - 1} x}; \quad (14)$$

первый и второй члены этого выражения представляют системы волн, движущихся соответственно вниз и вверх.

Если  $\sigma^2 < 1$ , то имеем

$$u = \{A e^{i\sqrt{1-\sigma^2} x} + B e^{-i\sqrt{1-\sigma^2} x}\} e^{i\omega t}. \quad (15)$$

Каждый член представляет такую стоячую волну, которая в конце концов установилась бы благодаря продолжительному действию источника простых гармонических колебаний; оба члена относятся к областям соответственно над и под источником.

Следовательно, возмущение, произведенное заданным и поддерживаемым в плоскости  $x=0$  колебанием

$$\xi = e^{i\sigma t}, \quad (16)$$

будет выражаться формулами

$$\xi = e^x e^{i(\sigma t \mp \sqrt{\sigma^2 - 1} x)}, \quad (\sigma^2 > 1) \quad (17)$$

или

$$\xi = e^{(1 \mp \sqrt{1 - \sigma^2}) x} e^{i\sigma t}, \quad (\sigma^2 < 1) \quad (18)$$

причем следует брать верхний или нижний знак, смотря по тому, какое из двух неравенств  $x \gtrless 0$  имеет место.

Далее для возмущения, которое производится периодической силой, сконцентрированной в бесконечно тонком слое в плоскости  $x=0$ , находим формулы

$$\xi = -\frac{i}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^x e^{i(\sigma t \mp \sqrt{\sigma^2 - 1} x)} \quad (\sigma^2 > 1) \quad (19)$$

или

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sigma^2}} e^{(1 \mp \sqrt{1 - \sigma^2}) x} e^{i\sigma t} \quad (\sigma^2 < 1), \quad (20)$$

если только плотность в плоскости  $x=0$  примем за единицу плотности. Чтобы проверить это, заметим, что формула (5) в выбранных нами единицах имеет вид

$$p - p_0 = -e^{-2x} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (21)$$

Формулы (19) и (20) дают, таким образом, для разности давлений на обеих сторонах плоскости  $x=0$  значение  $e^{i\sigma t}$ . Можно заметить, что определяемые из формул (19) и (20) амплитуды бесконечно возрастают, когда  $\sigma$  приближается к критическому значению, равному единице. В общих единицах критическое значение  $\sigma$  равно  $\frac{c}{2H}$ , а соответствующий период есть  $\frac{4\pi H}{c}$ . Для воздуха при обыкновенной температуре период равен примерно (в очень грубом приближении) 5 минутам.

Из формулы (14) получается, если возвратиться к общим единицам, что для прогрессивной последовательности волн с длиною  $\frac{2\pi}{k}$

$$\xi = ae^{\frac{1}{2}\frac{x}{H}} \cos(\sigma t - kx), \quad (22)$$

причем

$$\sigma^2 = k^2 c^2 + \frac{1}{4} \frac{c^4}{H^2}. \quad (23)$$

Скорость волн оказывается при этом равной

$$V = \frac{\sigma}{k} = c \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 H^2}}. \quad (24)$$

Эта величина изменяется вместе с частотой, но остается приблизительно постоянной, пока длина волны мала по сравнению с  $4\pi H$ , причем она отличается от  $c$  только на малую величину второго порядка. Наибольшее влияние от изменения плотности испытывает амплитуда, которая возрастает по закону, выраженному показательным множителем в формуле (22), если волны при движении вверх входят в более разреженный воздух. Это возрастание можно было бы предвидеть и без вычислений; в самом деле, если изменение плотности в пределах одной волны мало, то не происходит никакого заметного отражения, и энергия на единицу длины, пропорциональная величине  $a^2 \rho_0$  (где  $a$  обозначает амплитуду), остается при этом неизменной при движении волны. Так как значение  $\rho_0$  пропорционально  $e^{-\frac{x}{H}}$ , то отсюда следует, что амплитуда  $a$  должна быть пропорциональна  $e^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}}$ .

Легко проверить, что средняя энергия на единицу объема для каждой из последовательности волн (22) равна

$$\frac{1}{2} \rho \sigma^2 a^2, \quad (25)$$

а скорость распространения энергии равна кинематической групповой скорости

$$U = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 H^2}}}. \quad (26)$$

Атмосфера предполагалась неограниченной вверх и вниз; однако, легко установить эффект твердой горизонтальной стенки. Например, в случае атмосферы, слой которой в плоскости  $x = -h$  находится в покое, если в плоскости  $x = 0$  поддерживается заданное колебание

$$\xi = a \cos \sigma t \quad \left( \sigma > \frac{c}{2H} \right),$$

будем иметь

$$\xi = ae^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}} \cos(\sigma t - kx) \quad (x > c),$$

и

$$\xi = ae^{\frac{1}{2} \frac{x}{H}} \frac{\sin k(x+h)}{\sin kh} \cos \sigma t \quad (x < c),$$

где связь между  $k$  и  $\sigma$  такая же, как и в формуле (23).

Чтобы определить свободное движение, соответствующее произвольным начальным условиям, будем исходить из типичного решения<sup>1)</sup>

$$u = \left\{ A(k) \cos \sqrt{k^2 + 1} t + B(k) \frac{\sin \sqrt{k^2 + 1} t}{\sqrt{k^2 + 1}} \right\} e^{ikx} \quad (27)$$

уравнения (13). Это решение дает

$$u = A(k), \quad \frac{du}{dt} = B(k) \quad (t \rightarrow 0). \quad (28)$$

Обобщая формулу (27) на основании теоремы Фурье, получим

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos \sqrt{k^2 + 1} t e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \frac{\sin \sqrt{k^2 + 1} t}{\sqrt{k^2 + 1}} e^{ikx} dk, \quad (29)$$

где

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(a) e^{-ika} da, \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) e^{-ika} da. \quad (30)$$

Выражение (29) удовлетворяет уравнению (13) и дает

$$u = f(x), \quad \frac{du}{dt} = F(x) \quad (t=0). \quad (31)$$

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда начальные перемещения равны нулю, а начальное количество движения сосредоточено в непосредственной близости от плоскости  $x=0$ . Тогда имеем  $f(x)=0$ , в то время как функция  $F(x)$  заметно изменяется только для бесконечно малых значений  $x$ , где она становится бесконечно большой, но так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a) da = 1. \quad (32)$$

Если мы примем плотность на плоскости  $x=0$  за единицу плотности, то сообщенное количество движения окажется благодаря этому равным единице (на единицу площади). Отсюда получается  $A(k)=0$ ,  $B(k)=\frac{1}{2\pi}$  и

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\sin \sqrt{k^2 + 1} t}{\sqrt{k^2 + 1}} dk. \quad (33)$$

Значение этого интеграла может быть определено. Вводя новую переменную, получаем

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t \operatorname{ch} \omega + x \operatorname{sh} \omega) d\omega.$$

Если  $t^2 > x^2$ , то положим

$$t = \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{ch} \beta, \quad x = \pm \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{sh} \beta, \quad \omega + \beta = \omega'$$

<sup>1)</sup> Этот метод подобен тому, который применил Пуанкаре в случае „телеграфного уравнения“; см. его Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Париж, 1895, гл. VIII.

и на основании формулы Мелера [§ 194 (7)] получим

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\sqrt{t^2 - x^2} \operatorname{ch} \omega') d\omega' = \frac{1}{2} J_0(\sqrt{t^2 - x^2}). \quad (34)$$

Если же  $t^2 < x^2$ , то полагаем

$$t = \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{sh} \beta, \quad x = \pm \sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{ch} \beta, \quad \omega \pm \beta = \omega'$$

и получаем

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\sqrt{x^2 - t^2} \operatorname{sh} \omega') d\omega' = 0. \quad (35)$$

Возмущение достигает положения  $x$  только по истечении промежутка времени  $t = \pm x$ ; соответствующее перемещение определяется формулой

$$\xi = \frac{1}{2} e^x J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) \quad (36)$$

или в общих единицах формулой

$$\xi = \frac{1}{2 \sqrt{\rho_0 c_0}} J_0\left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{2H}\right), \quad (37)$$

где  $\rho_0$  обозначает плотность в положении  $x$  и  $\rho'_0$  — плотность в том месте ( $x=0$ ), где был приложен единичный импульс. Структура этой формулы согласуется с хорошо известным законом взаимности<sup>1)</sup>.

Можно заметить, что перемещение  $\xi$  в произвольной точке после прохода волны не остается постоянным, как это было бы в случае однородной среды, а колеблется по знаку, непрерывно убывая по амплитуде. Более того, в этих колебаниях знака имеется тенденция к определенной периодичности, а именно, период стремится к пределу  $2\pi$ , или, в общих единицах, к  $\frac{4\pi H}{c}$ .

Следует еще заметить, что можно проверить сохранение количества движения в этом случае. Рассмотрим статический момент ( $\sum mx$ ) по отношению к плоскости  $x=0$  для массы воздуха, заключенной между верхней и нижней границами системы волн. По сравнению с состоянием равновесия момент этот увеличился на

$$\int_{-t}^t \rho_0 \xi dx = \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{-x} J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) dx = \int_0^t \operatorname{ch} x J_0(\sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (38)$$

Можно показать, что этот определенный интеграл равен  $t^2$ ).

<sup>1)</sup> См. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XIX, 144.

<sup>2)</sup> Непосредственным умножением рядов получаем

$$\operatorname{ch}(t \cos \theta) J_0(t \sin \theta) = 1 + \frac{t^2}{2!} P_2(\cos \theta) + \frac{t^4}{4!} P_4(\cos \theta) + \dots,$$

отсюда на основании (8) § 87 следует

$$\int_0^{1/2 \pi} \operatorname{ch}(t \cos \theta) J_0(t \sin \theta) \sin \theta d\theta = 1.$$

Это разложение принадлежит Гобсону, Proc. Lond. Math. Soc. (1), XXV, 66 (1893).

Дифференцированием убеждаемся в том, что общее количество движения равно единице.

**§ 310.** Теперь мы предположим, что температура не всюду одинакова, но убывает по направлению вверх с постоянным градиентом. Это определяет верхнюю границу атмосферы, причем оказывается удобным поместить начало на этой границе и положительные значения  $x$  отсчитывать вниз. Если в соответствии с этим обозначим через  $\theta_0$  абсолютную температуру в состоянии равновесия, то можем написать

$$\theta_0 = \beta x, \quad (1)$$

где  $\beta$  — постоянный температурный градиент. Так как  $p_0$ ,  $\varrho_0$ ,  $\theta_0$  связаны соотношением

$$p_0 = R\varrho_0\theta_0, \quad (2)$$

то имеем

$$\frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dx} = \frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{dx} = \frac{1}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dx} = \frac{g\varrho_0}{p_0} = \frac{\beta}{\theta_0} = \frac{m}{x},$$

где

$$m = \frac{g}{R\beta} - 1. \quad (3)$$

Отсюда следует:

$$\varrho_0 \text{ пропорционально } x^m, \quad p_0 \text{ пропорционально } x^{m+1}. \quad (4)$$

В случае атмосферы, находящейся в „конвективном равновесии“<sup>1)</sup>, когда величина  $p_0$  пропорциональна  $\varrho_0^\gamma$ , будем иметь  $m\gamma = m + 1$  или

$$m = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \beta = \frac{(\gamma - 1) g}{\gamma R}. \quad (5)$$

Если  $\beta = \frac{g}{e}$ , то оказывается  $m = 0$  и плотность постоянна. Это условие, так же как и всякое другое, при котором  $m$  оказывается меньше, чем значение, полученное из формулы (5), означало бы неустойчивость, если бы мы отбросили ограничение, наложенное на вертикальное движение.

Изменяя знак у  $x$  в уравнении (6) § 309, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \gamma g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (6)$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = \gamma R \beta x. \quad (7)$$

Положим теперь

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{c} = \sqrt{\frac{4x}{\gamma R \beta}} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{4} \gamma R \beta \tau^2, \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Thomson W., Manch. Memoirs (3), II, 125 (1862) (Papers, III, 255)

так что  $\tau$  обозначает промежуток времени, необходимый для того, чтобы точка, двигаясь со скоростью, все время равной скорости звука в соответствующем месте, прошла расстояние от верхнего края атмосферы до положения  $x$ . Если заменим в уравнении (6) независимую переменную  $x$  через  $\tau$ , то получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \quad (9)$$

где  $m$  имеет значение, данное формулой (3).

В случае простого гармонического колебания ( $e^{i\sigma t}$ ) имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{2m+1}{\tau} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \sigma^2 \xi = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения есть

$$\xi = \tau^{-m} \{ A J_m(\sigma \tau) + B J_{-m}(\sigma \tau) \}. \quad (11)$$

Из (5) § 309 получается, что

$$p - p_0 \text{ пропорционально } p_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ пропорционально } \tau^{2m+1} \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad (12)$$

и для того, чтобы эта величина могла стремиться к предельному значению 0 для  $x \rightarrow 0$ , должно быть  $B = 0$ .

Решение, которое соответствует колебанию

$$\xi = e^{i\sigma t}, \quad (13)$$

присоединяющему в плоскости  $\tau = \tau_1$ , имеет вид

$$\xi = \left( \frac{\tau_1}{\tau} \right)^m \frac{J_m(\sigma \tau)}{J_m(\sigma \tau_1)} e^{i\sigma t}. \quad (14)$$

Для больших значений  $\sigma \tau$  будем иметь

$$\xi \text{ пропорционально } \frac{1}{\tau^{m+1/2}} \sin \left( \sigma \tau + \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} m \pi \right) e^{i\sigma t}. \quad (15)$$

Выражение (14) представляет, таким образом, стоячую волну, которая получается в результате наложения двух последовательностей волн одинаковой амплитуды, движущихся одна вверх, а другая вниз. Если  $\Delta x$ ,  $\Delta \tau$  представляют изменения  $x$  и  $\tau$ , соответствующие длине волны ( $\lambda$ ), то имеем  $\Delta(\sigma \tau) = 2\pi$  и, следовательно, в пределе, когда  $x$  будет большим,

$$\lambda = \Delta x = \frac{1}{2} \gamma R \beta \tau \Delta \tau = \pi \gamma R \beta \frac{\tau}{\sigma} = \frac{2\pi c}{\sigma}, \quad (16)$$

как и следовало ожидать.

Выражение (14) обращается в бесконечность при

$$J_m(\sigma \tau_1) = 0. \quad (17)$$

Это уравнение определяет периоды  $\frac{2\pi}{\sigma}$  свободных колебаний слоя воздуха, лежащего над определенной горизонтальной плоскостью, для которой  $\tau = \tau_1$ <sup>1)</sup>.

**§ 311.** Переходя к рассмотрению возмущений, распространяющихся в горизонтальном направлении, выберем оси  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости, а ось  $z$  вертикально с положительным направлением вниз. Тогда уравнения малых колебаний в переменных Эйлера будут иметь вид

$$\varrho_0 \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho_0 \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho_0 \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} + g\varrho, \quad (1)$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho_0 \chi = 0, \quad (2)$$

где

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3)$$

Мы будем предполагать по большей части, что отклонения давления и плотности от их равновесных значений связаны между собой адиабатическим соотношением

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\varrho}{Dt}, \quad (4)$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = \gamma R \theta_0, \quad (5)$$

т. е.  $c$  обозначает скорость звука, соответствующую температурному равновесию на уровне  $z$ .

Полагая

$$p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho' \quad (6)$$

и продолжая пренебречь малыми величинами второго порядка, будем иметь

$$\varrho_0 \frac{du}{dt} = - \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \varrho_0 \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad \varrho_0 \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + g\varrho' \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + w \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} = - \varrho_0 \chi. \quad (8)$$

Точно так же из (4) и (2) получим

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + g\varrho_0 w = - \gamma p_0 \chi. \quad (9)$$

1) Исследование влияния произвольных начальных условий имеется в работе автора, указанной на стр. 678 в подстрочном примечании.

Исключая  $p'$  и  $\varrho'$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \chi + gw), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (c^2 \chi + gw), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} (c^2 \chi + gw) - \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \chi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда, если обозначить через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  компоненты вихря, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= - \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \frac{\partial \chi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0.$$

До сих пор уравнения были общими; они показывают, что безвихревое движение невозможно, если только не выполнено одно из двух условий. Мы должны иметь либо

$$c = \text{const.}, \quad \gamma = 1, \quad (12)$$

что представляет случай постоянного температурного равновесия с изотермическим расширением, либо

$$\frac{dc^2}{dz} = (\gamma - 1) g, \quad (13)$$

или

$$\frac{d\theta_0}{dz} = \frac{(\gamma - 1) g}{\gamma R}, \quad (14)$$

что представляет случай конвективного равновесия. Эти заключения находятся в согласии с § 17. В каждом из этих частных случаев имеем

$$u = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (15)$$

при условии, что для  $\varphi$  имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -(c^2 \chi + gw) = c^2 \Delta \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (16)$$

Таким образом, возможны, как мы и могли ожидать, стационарные вихревые движения, так как каждое из двух имеющихся в виду физических состояний в известном смысле представляет одно из средних состояний равновесия <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> За подробностями по этому вопросу можно отослать к работе Lamb, On Atmospheric Oscillations, Proc. Roy. Soc. A, LXXXIV, 551 (1890), из которой взяты в большей части §§ 311, 311a и 312.

**§ 311а.** Переходим теперь к различным предположениям относительно вертикального распределения температуры. В случае *изотермической* атмосферы, где  $c$  будет постоянной, соответствующее решение имеет вид

$$u = e^{-(y-1) \frac{gz}{c^2}} f(ct - x), \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (1)$$

или в более общем виде

$$u = e^{-\frac{(y-1) gz}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x}}, \quad v = e^{-\frac{(y-1) gz}{c^2} \frac{\partial P}{\partial y}}, \quad w = 0, \quad (2)$$

если  $P$  есть функция горизонтальных координат  $x$  и  $y$  и времени, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \Delta_1 P, \quad (3)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Эти уравнения представляют системы волн, распространяющихся в горизонтальном направлении с постоянной скоростью  $c$  или  $\sqrt{ygH}$ , где  $H$  есть высота „однородной атмосферы“. Так как в принятом допущении  $\rho_0$  изменяется по закону  $e^{z/H}$  или  $e^{yz/c^2}$ , то из (4) и (2) § 311 следует, что  $\frac{DP}{Dt}$  будет изменяться по закону  $e^{yz/c^2}$ . Условие неизменяемости давления в верхних областях, где  $z \rightarrow -\infty$ , будет, таким образом, выполняться. Скорость с высотой увеличивается, но *количество движения*, отнесенное к единице объема, уменьшается. Расширение предполагалось при этом адиабатическим. Если же оно будет изотермическим, то мы должны положить  $y=1$ ; тогда скорость частиц не будет зависеть от высоты.

В случае конвективного равновесия начало возьмем на верхней границе атмосферы и положим в согласии с (5) § 310

$$c^2 = (y-1) gz = \frac{gz}{m}. \quad (4)$$

Чтобы исследовать распространение волн в горизонтальном направлении, предположим, что  $\varphi$  в (16) § 311 изменяется по закону  $e^{i(\sigma t - kz)}$  или, более обще, с учетом зависимости от горизонтальных координат, оно удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + k^2) \varphi = 0, \quad (5)$$

предполагая множитель от времени в виде  $e^{i\omega t}$ . В том и другом случае уравнение (16) принимает вид

$$z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + m \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left( \frac{m\omega^2}{gk} - kz \right) k\varphi = 0. \quad (6)$$

Оно упростится, если положить

$$\varphi = e^{-kz} \psi, \quad (7)$$

тогда получим

$$z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (m - 2kz) \frac{\partial \psi}{\partial z} - m \left(1 - \frac{\sigma^2}{gk}\right) k \psi = 0. \quad (8)$$

Если обозначить

$$m \left(1 - \frac{\sigma^2}{gk}\right) = 2a, \quad (9)$$

то решение, конечное при  $z \rightarrow 0$ , имеет вид

$$\psi_1 = A \left\{ 1 + \frac{a}{1 \cdot m} (2kz) + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2m(m+1)} (2kz)^2 + \dots \right\}, \quad (10)$$

или в применяемых обозначениях <sup>1)</sup>

$$\psi_1 = A {}_1F_1(a; m; 2kz). \quad (11)$$

Второе же решение будет иметь вид

$$\psi_2 = B \psi_1 \int_0^z \frac{e^{2kz} dz}{z^m \psi_1^2}. \quad (12)$$

Для последнего решения  $\frac{\partial \psi_2}{\partial z}$  при  $z \rightarrow 0$  изменяется, как  $z^{-m}$ , тогда как  $\rho_0$  изменяется по закону  $z^m$ . Теперь из (2) и (4) § 311 имеем

$$\frac{DP}{Dt} = -\rho_0 c^2 \chi = \rho_0 (\ddot{\varphi} + gw) \quad (13)$$

и, следовательно,  $\frac{DP}{Dt}$  при  $z \rightarrow 0$  не будет исчезать, если только не положить  $B = 0$ .

Условие  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$  при  $z = h$ , где  $h$  — высота атмосферы, теперь будет давать

$$\begin{aligned} \frac{2a}{m} \left\{ 1 + \frac{a+1}{1(m+1)} (2kh) + \frac{(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2(m+1)(m+2)} (2kh)^2 + \dots \right\} &= \\ &= 1 + \frac{a}{1 \cdot m} (2kh) + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2m(m+1)} (2kh)^2 + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\frac{2a}{m} {}_1F_1(a+1; m+1; 2kh) = {}_1F_1(a; m; 2kh). \quad (15)$$

Это соотношение определяет  $a$  через длину волны  $\frac{2\pi}{k}$ . Соответствующее же значение  $\sigma$ , а вместе с ним и значение скорости волны будет определяться из (9).

<sup>1)</sup> См., например, *Vargnes, Camb. Trans.*, XX, 253 (1906), где имеются ссылки и на другие работы.

Главный интерес представляют волны, которые являются длинными по сравнению с  $h$ . Если  $kh$  будет мало, то в качестве первого приближения для корней (14) получим  $\frac{2a}{m} = 1$ , а в качестве второго приближения

$$\frac{2a}{m} = \frac{1 + kh}{1 + \frac{m+2}{m+1} kh} = 1 - \frac{kh}{m+1}, \quad (16)$$

откуда следует

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{kh}{m+1}. \quad (17)$$

Теперь, если мы через  $H_1$  обозначим „приведенную высоту“ атмосферы, т. е. высоту, до которой она простиралась бы, если бы она имела постоянную плотность, равную плотности низшего слоя, то будем иметь

$$H_1 = h^{-m} \int_0^h z^m dz = \frac{h}{m+1}, \quad (18)$$

и тогда скорость распространения длинных волн будет стремиться к значению

$$V = \frac{\sigma}{k} = V\sqrt{gH_1}. \quad (19)$$

Полученную формулу можно сравнить с формулой (7) § 278, которая относится к изотермическому случаю. При  $15^\circ\text{C}$  значение  $H_1$  приблизительно равно  $8292\text{ м}$ , отсюда для скорости будем иметь  $V = 283\text{ м/сек.}$

Из формул (7) и (10), рассматривая зависимость  $\varphi$  от  $z$ , приближенно получим

$$\psi = A \left\{ 1 + \frac{k^2}{m+1} \left( \frac{1}{2} z^2 - hz \right) \right\}. \quad (20)$$

Ради простоты примем, что второй множитель имеет вид  $e^{i(\omega t - kx)}$ . В таком случае получим

$$u = ikA, \quad v = 0, \quad w = \frac{k^2 A}{m+1} (h - z), \quad (21)$$

при этом тот же множитель подразумевается. Так как отношение  $w/u$  будет порядка  $kh$ , то колебания будут главным образом горизонтальными. Кроме того, горизонтальная амплитуда будет почти постоянной от края до дна. Эти характерные свойства, как вскоре окажется, обусловлены принятыми допущениями при рассмотрении колебаний, а именно допущением о конвективном равновесии и допущением об изотермической атмосфере с изотермическим расширением.

Далее мы заметим, не выписывая подразумеваемый множитель, что формула (20) приближенно дает

$$c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + gw = \frac{gk^2 h}{m+1} \quad (22)$$

и не содержит высоты.

Остальные решения уравнения (14), уместные тогда, когда  $kh$  является малым, включают в себя и такие, которые будут отличаться от малых значений  $akh$ . Соответствующие этим решениям колебания приближаются к типу волн, распространяющихся вертикально, таких как в § 310, но с постепенным изменением фаз в горизонтальном направлении.

**§ 312.** В более общем случае, когда вертикальное распределение температуры является произвольным, мы снова обратимся к уравнениям (10) § 311. Из них с помощью диференцирования получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \chi + \left( \frac{dc^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial \chi}{\partial z} + g \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (1)$$

так как

$$\Delta w = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2)$$

тождественно. Тогда из (11) § 311 получим

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} = c^2 \Delta \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \left( \frac{d \cdot c^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2 \partial z} - g \left( \frac{d \cdot c^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right) \Delta_1 \chi. \quad (3)$$

Если мы допустим, что  $\chi$  изменяется по закону  $e^{i(\sigma t - kx)}$ , или более общо, что  $\chi$  удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + k^2) \chi = 0, \quad (4)$$

имея в качестве множителя  $e^{i\sigma t}$ , где  $k$  является постоянной (которая может быть, если это необходимо, определена из условий на боковых границах), то мы найдем следующее дифференциальное уравнение для  $\chi$ :

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \left( \frac{dc^2}{dz} + \gamma g \right) \frac{\partial \chi}{\partial z} + \\ + \left[ \sigma^2 - k^2 c^2 - \frac{gk^2}{\sigma^2} \left\{ \frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1) g \right\} \right] \chi = 0. \quad (5)$$

Кроме того из первых двух уравнений (10) § 311 получим

$$\sigma^2 \frac{\partial w}{\partial z} + gk^2 w = (\sigma^2 - k^2 c^2) \chi, \quad (6)$$

а из третьего уравнения

$$g \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma^2 w = -c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - (\gamma - 1) g \chi. \quad (7)$$

Исключая из (6) и (7)  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , мы и получим необходимое для нас соотношение

$$(\sigma^4 - g^2 k^2) w = -\sigma^2 c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - g(\gamma \sigma^2 - k^2 c^2) \chi. \quad (8) ^1)$$

Дальнейшие рассуждения мы попытаемся провести здесь только для случая, когда равновесный температурный градиент постоянен, т. е.

$$\theta_0 = \beta z_1, \quad (9)$$

если начало взято на уровне нулевой температуры. При этом, как и в § 310, значения  $\varrho_0$  и  $p$  будут соответственно изменяться по законам  $z^m$  и  $z^{m+1}$ , где

$$m = \frac{g}{R\beta} - 1, \quad (10)$$

и, следовательно,

$$c^2 = \gamma R \beta z = \frac{\gamma g z}{m+1}. \quad (11)$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{dc^2}{dz} - (\gamma - 1)g = -\frac{\gamma g}{m+1} \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right), \quad (12)$$

где  $\beta_1$ , как в (5) § 310, означает температурный градиент при конвективном равновесии.

Уравнение (5) в таком случае приводится к виду

$$z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + (m+2) \frac{\partial \chi}{\partial z} + \left\{ \frac{m+1}{\gamma} \frac{\sigma^2}{gk} + \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{gk}{\sigma^2} - kz \right\} k \chi = 0 \quad (13)$$

или, если мы положим

$$\chi = e^{-kz} \psi, \quad (14)$$

к виду

$$z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (m+2-2kz) \frac{\partial \psi}{\partial z} + 2ak\psi = 0, \quad (15)$$

где

$$2a = \frac{m+1}{\gamma} \frac{\sigma^2}{gk} + \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{gk}{\sigma^2} - (m+2). \quad (16)$$

Решение уравнения (15), конечное при  $z \rightarrow 0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \frac{a}{1(m+2)} (2kz) + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2(m+2)(m+3)} (2kz)^2 - \dots = \\ &= {}_1F_1(-a; m+2; 2kz). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя из (14) и (17) в уравнение (8), получим

$$\begin{aligned} (\sigma^4 - g^2 k^2) w &= \\ &= -\frac{\gamma g^2 k}{m+1} \left[ \frac{\sigma^2}{gk} \left\{ z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi \right\} - \left( 1 + \frac{\sigma^2}{gk} \right) kz\psi \right] e^{kz}. \end{aligned} \quad (18)$$

<sup>1)</sup> Полное же исключение  $w$  из (6) и (7) снова привело бы нас к (5).

Мы можем заранее предвидеть, что для длинных волн ( $kh \rightarrow 0$ ) скорость волны будет сравнимой с величиной  $\sqrt{gh}$ . Поэтому величина

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{\sigma^2}{k^2} \frac{kh}{gh}$$

может предполагаться заранее малой.

„Конвективный“ случай  $\beta = \beta_1$  был уже рассмотрен, и мы можем ожидать, что если отношение  $\beta/\beta_1$  только немногим меньше единицы, то результаты не будут сильно различаться. Но если это отношение заметно отличается от единицы, то в выражении (16) для  $2a$  средний член будет превосходить остальные и поэтому  $a$  может быть большим, хотя  $akh$  будет конечным. В таком случае мы приближенно будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - \frac{2akz}{1(m+2)} + \frac{(2a+kz)^2}{1 \cdot 2(m+2)(m+3)} - \dots = \\ &= {}_0F_1(m+2; -2akz), \end{aligned} \quad (19)$$

и вместе с этим

$$\begin{aligned} z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi &= (m+1) \left\{ 1 - \frac{2akz}{1(m+1)} + \frac{(2akz)^2}{1 \cdot 2(m+1)(m+2)} - \dots \right\} = \\ &= (m+1) {}_0F_1(m+1; -2akz). \end{aligned} \quad (20)$$

Эти ряды могут быть представлены через функции Бесселя. Если мы положим

$$\eta^2 = 8akz, \quad \omega^2 = 8akh, \quad (21)$$

то получим

$$\psi = 2^{m+1} \Pi(m+1) \eta^{-m-1} J_{m+1}(\eta), \quad (22)$$

$$z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1)\psi = 2^m \Pi(m+1) \eta^{-m} J_m(\eta). \quad (23)$$

Так как из (16) приближенно имеем

$$\frac{gk}{\sigma^2} = \frac{2a}{\frac{\beta_1}{\beta} - 1}, \quad (24)$$

то условие  $w = 0$  для  $\eta = \omega$  приводится к виду

$$\left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) J_m(\omega) = \frac{1}{2} \omega J_{m+1}(\omega). \quad (25)$$

Это соотношение определяет  $\omega$ , а вместе с этим и  $a$ . Для скорости волны мы будем иметь

$$V^2 = \frac{\sigma^2}{k^2} = \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{4gh}{\omega^2} = \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) \frac{4(m+1)gH_1}{\omega^2}, \quad (26)$$

где, как и в § 311a,  $H_1$  — высота однородной атмосферы, имеющей температуру низшего слоя. Эта формула делает  $V$  мнимой, если  $\beta < \beta_1$ ; в этом случае атмосфера будет неустойчивой.

Для числового примера допустим, что температурный градиент имеет половину того значения, которое соответствует конвективному случаю. Принимая  $\gamma = 1,40$ , получим  $m = 6$ , а уравнение (25) примет вид

$$J_6(\omega) = \frac{1}{2} \omega f_7(\omega). \quad (27)$$

Наименьший корень этого уравнения приближенно равен  $\omega = 4,96$ ; тогда

$$V = 1,07 \sqrt{gH_1}. \quad (28)$$

В любом случае результат должен лежать между  $\sqrt{gH_1}$  и  $\sqrt{\gamma gH_1}$  или  $1,18 \sqrt{gH_1}$ . Если мы примем при  $15^\circ\text{C}$  значение  $H_1$  равным 8292 метрам, то формула (28) даст

$$V = 303 \text{ м/сек } 1).$$

Чтобы сравнить горизонтальные и вертикальные скорости в простейшем случае, допустим, что  $u$  изменяется как  $e^{i(\sigma t - kx)}$ , а  $v = 0$ . Возвращаясь к уравнениям (10) § 311, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 u - igkw &= ikc^2 \chi, \\ igku + \sigma^2 w &= -c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} - \gamma g \chi. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} (\sigma^4 - g^2 k^2) u &= -ik \left\{ g c^2 \frac{\partial \chi}{\partial z} + (\gamma g^2 - \sigma^2 c^2) \chi \right\} = \\ &= -\frac{i \gamma g^2 k}{m+1} \left\{ z \frac{\partial \chi}{\partial z} + (m+1) \chi - \frac{\sigma^2}{gk} kz \chi \right\} = \\ &= \frac{i \gamma g^2 k}{m+1} \left\{ z \frac{\partial \psi}{\partial z} + (m+1) \psi - \left( 1 + \frac{\sigma^2}{gk} \right) kz \psi \right\} e^{-kz}. \end{aligned} \quad (30)$$

Исключение  $u$  из (29) снова дало бы нам соотношение (13). Если мы сравним с формулой (18), то увидим, что для  $z = 0$  отношение вертикальной скорости к горизонтальной дает  $\frac{\sigma^2}{gk}$ , а так как  $w = 0$  для  $z = h$ , то мы заключаем, что вертикальная скорость всюду будет сравнительно малой.

<sup>1)</sup> Проф. Тэйлор вычислил скорость длинных волн при таких предположениях, которые очень близки к условиям действительной атмосферы. Принимая, что температура падает равномерно от  $283^\circ$  (по абсолютной шкале) на земле до  $220^\circ$  на высоте 3 км и далее остается постоянной, он нашел для  $V$  значение 307,2 м/сек, которое немногим отличается от скорости воздушных волн, вызванных огромным взрывом в Krakatoa в 1883 г. [Proc. Roy. Soc., CXXVI, 169, 728 (1929)].

Если мы выразим полученные результаты через функции Бесселя, опустив все общие множители и выписывая только важнейшие члены, то получим

$$u = \frac{J_m(\eta)}{\eta^m}, \quad (31)$$

$$w = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left( \frac{\beta_1}{\beta} - 1 \right) J_m(\eta) - \frac{1}{2} \eta J_{m+1}(\eta) \right\} \frac{1}{\eta^m}. \quad (32)$$

Теперь горизонтальная скорость изменяется с высотой; отношение этой скорости в крайних слоях к скорости у земли будет равно

$$\frac{\omega^m}{2^m \Pi(m) J_m(\omega)}. \quad (33)$$

В рассмотренном выше случае, где  $\beta = \frac{1}{2} \beta_1$ ,  $m = 6$ ,  $\omega = 4,96$ , это отношение выражается числом 2,55.

Для примера *внутренних* колебаний мы можем ввести возмущающий потенциал приливного типа, например

$$\Omega = gH e^{-kz+i(\sigma t-kx)}, \quad (34)$$

ср. § 181. Характерные черты получаемого при этом результата могут быть, однако, установлены на основании теории колебаний, изложенной вкратце в главе VIII. Если заданный период  $\frac{2\pi}{\sigma}$  отличается, но мало, от свободного

периода, соответствующего длине волны  $\frac{2\pi}{k}$ , то движение будет иметь в общем тот же характер, что и соответствующее свободное колебание, с таким распределением вертикальной скорости, о котором только что шла речь. Но в случае значительного расхождения заданного периода от свободного горизонтальная скорость может стать практически постоянной от края до дна.

**§ 313.** Общие уравнения малых колебаний газа около равновесного состояния в стационарном силовом поле ( $X, Y, Z$ ) могут быть получены с помощью небольшого обобщения метода § 311.

Для невозмущенного состояния будем иметь

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \varrho_0 X, \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = \varrho_0 Y, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = \varrho_0 Z. \quad (1)$$

Тогда, пользуясь предшествующими обозначениями, получим

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \varrho' X, \\ \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \varrho' Y, \\ \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} + \varrho' Z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} = -\varrho_0 \chi, \quad (3)$$

где

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Мы будем, как и раньше, предполагать, что *изменения давления и плотности связаны адиабатической зависимостью*

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\rho}{Dt}, \quad (4)$$

где

$$c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \gamma R \theta_0,$$

т. е.  $c$  есть скорость звука, которая соответствует температуре в точке  $(x, y, z)$  в состоянии равновесия.

В таком случае будем иметь

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0(Xu + Yv + Zw) = -\rho_0 c^2 \chi. \quad (5)$$

Исключая  $p'$  и  $\rho'$  из уравнений (2), (3) и (5), получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho_0 c^2 \chi + \rho_0 (Xu + Yv + Zw) \} - \\ - X \left\{ \frac{\partial (\rho_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_0 v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_0 w)}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

и два других уравнения.

Предположим теперь, что силы  $X, Y, Z$  имеют потенциал; в этом случае давление  $p_0$  в состоянии равновесия есть функция только  $\rho_0$ , т. е.

$$p_0 = f(\rho_0). \quad (7)$$

Тогда получим

$$X = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} f'(\rho_0), \quad Y = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} f'(\rho_0), \quad Z = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} f'(\rho_0), \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} (Xu + Yv + Zw) = X \left( \frac{x}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Уравнение (6) можно поэтому написать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \{ c^2 \chi + Xu + Yv + Zw \} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \{ c^2 - f'(\rho_0) \} \chi. \quad (10)$$

Этому уравнению будет эквивалентно уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (c^2 \chi + Xu + Yv + Zw) - \left\{ \frac{\partial c^2}{\partial x} - (\gamma - 1) X \right\} \chi. \quad (11)$$

Возмущенное движение, таким образом, не будет свободно от вихрей. Если же, однако, распределение температуры в невозмущенном состоянии было таково, что газ находился в конвективном равно-

весии, так что величина  $p_0$  пропорциональна  $\varrho_0^2$ , то будет иметь место равенство

$$f'(\varrho_0) = \frac{\gamma p_0}{\varrho_0} = c^2,$$

и второе слагаемое в формуле (10) будет исчезать. Три уравнения (10) удовлетворятся тогда решениями вида

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (12)$$

если

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (13)$$

То же самое заключение будет иметь место и тогда, когда температура в состоянии равновесия повсюду одинакова, если только предположить, что *расширения* происходят изотермически. Скорость волны  $c$  в этом случае будет постоянной.

Эти же самые результаты можно было бы, разумеется, получить легче, если сначала принять некоторые специальные гипотезы. Если мы предположим, что давление и плотность остаются связанными той же зависимостью, как и в состоянии равновесия, а именно, соотношением (7), то будем иметь вместо уравнения (5)

$$p' = \varrho f'(\varrho_0) = c^2 \varrho'. \quad (14)$$

Поэтому уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{p'}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x}. \quad (15)$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p'}{\varrho_0} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{\varrho_0} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p'}{\varrho_0} \right). \quad (16)$$

Эти уравнения имеют свободное от вихрей решение (11) вместе с зависимостью

$$p' = \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (17)$$

Исключая  $p'$  и  $\varrho'$  из (5), (11) и (16), получим уравнение (12).

Рассмотренные до сих пор движения были „свободны“ в том смысле, что кроме сил стационарного поля не действовали никакие другие силы. В случае наличия малой возмущающей силы с потенциалом  $\Omega$  нужно к правой части уравнения (10) прибавить еще член  $-\varrho_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t}$ . Уравнение (12) будет тогда заменено уравнением

$$p' = \varrho_0 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega \right), \quad (18)$$

и мы получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (19)$$

**§ 314.** Теория таких задач, как большие колебания земной атмосферы, еще очень несовершена. Особенное затруднение в этом случае представляет то, что приходится принимать во внимание физические условия в верхних слоях атмосферы.

Результаты §§ 311а, 312 показывают, что при более медленных нормальных колебаниях движение воздуха происходит главным образом в горизонтальном направлении. Мы рассмотрим теперь случай атмосферы с постоянной температурой, которая окружает невращающийся шар и подчиняется закону изотермического расширения; тогда уравнение (13) § 313 в полярных координатах  $r, \theta, \varphi$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} - g \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1)$$

причем потенциал скоростей мы обозначаем теперь через  $\Phi$ . Если в согласии с результатом § 311а (при  $\gamma = 1$ ) мы будем пренебрегать радиальным движением и положим  $r = a$  (= радиусу шара), то в случае простых гармонических колебаний получим

$$\frac{c^2}{a^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right\} + \sigma^2 \Phi = 0. \quad (2)$$

Как и в случае задачи § 199, функция  $\Phi$ , соответствующая какому-то нормальному колебанию, будет изменяться как поверхностная сферическая функция целого порядка  $n$ ; из этого следует

$$\frac{\sigma^2 a^2}{c^2} = n(n+1). \quad (3)$$

Интерпретация этого результата получается таким же способом, как и в названных выше параграфах. Коэффициент сгущения ( $s = c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ) соответствует величине  $\frac{c}{h}$  этого параграфа, а  $c^2$  занимает место  $gh$ . Так как теперь имеет место равенство  $c^2 = gH$ , где  $H$  обозначает высоту однородной атмосферы, то оказывается, что свободные колебания подчиняются тем же законам, как и колебания жидкого океана постоянной глубины  $H$ , покрывающего земной шар<sup>1)</sup>

В качестве числового примера положим

$$c = 2,80 \times 10^4 \text{ см/сек}, 2\pi a = 4 \times 10^6 \text{ см}.$$

В случаях  $n=1, n=2$  это дает, на основании формулы (3), при температуре  $0^\circ\text{C}$  периоды свободных колебаний 28,1 и 16,2 часа. При температуре  $15^\circ\text{C}$  периоды делаются равными 27,4 и 15,8 часа.

**§ 315.** Гипотеза конвективного равновесия с адиабатическим расширением так же хорошо пригодна для вычислений. В математиче-

<sup>1)</sup> Рэлей, см. прим., стр. 678.

ском отношении преимущество этой гипотезы заключается в том, что она позволяет на верхней границе установить определенные условия.

Уравнение (1) предыдущего параграфа будет сохранять все еще свою силу, если только иметь в виду, что величина  $c^2$  теперь изменяется вместе с глубиной места относительно верхней границы атмосферы. Принимая, что потенциал скоростей изменяется, как сферическая функция порядка  $n$ , для свободных колебаний будем иметь

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \Phi \right\} - g \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sigma^2 \Phi = 0. \quad (1)$$

Глубина  $h$  атмосферы считается малой в сравнении с радиусом земли. Отсюда, если положим  $r = a - z$ , где  $a$  относится к внешней границе, и напишем в согласии с (5) § 310

$$c^2 = \frac{gz}{m}, \quad (2)$$

то найдем

$$z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + m \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left\{ \frac{m\sigma^2}{g} - \frac{n(n+1)z}{a^2} \right\} \Phi = 0, \quad (3)$$

так как величиной  $\frac{c^2}{a}$  по сравнению с  $g$  можно пренебречь. Если мы положим

$$k^2 = n(n+1) \frac{1}{a^2}, \quad (4)$$

то полученное уравнение будет тождественно совпадать с уравнением (6) § 311а. В таком случае будем иметь

$$\sigma^2 = n(n+1) \frac{gH_1}{a^2}. \quad (5)$$

Свободные колебания соответствуют, таким образом, колебаниям жидкого океана, глубина которого равна приведенной глубине  $H_1$  атмосферы.

**§ 316.** Аналогия все еще будет продолжать сохраняться и тогда, когда мы перейдем к случаю вращающегося земного шара. Если мы временно предположим, что ось  $z$  совпадает с осью вращения, в то время как оси  $x$  и  $y$  врашаются с угловой скоростью  $\omega$  земного шара, то уравнения (2) § 313 заменятся следующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \right) &= - \frac{\partial p'}{\partial x} + \varrho' X - \varrho_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \varrho_0 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \right) &= - \frac{\partial p'}{\partial y} + \varrho' Y - \varrho_0 \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \varrho_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= - \frac{\partial p'}{\partial z} + \varrho' Z - \varrho_0 \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем мы предполагаем, что центробежная сила включена в  $(X, Y, Z)$ . Буквы  $u, v, w$  обозначают здесь относительные скорости, т. е. скорости по отношению к вращающемуся земному шару. Для общ-

ности в уравнения введены члены, которые должны представлять влияние возмущающих сил с потенциалом  $\Omega$ . Уравнение непрерывности остается по форме неизменным.

Если мы будем поступать так же, как в указанных выше параграфах, то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$P = c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + Xu + Yv + Zw - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (8)$$

Если мы теперь изменим значение наших символов и будем понимать под  $u$  скорость вдоль меридиана, под  $v$  — скорость вдоль параллельного круга и под  $w$  — скорость в вертикальном направлении, то будем иметь по аналогии с (5) § 213

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} \cos \theta &= \frac{\partial P}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} \cos \theta + 2\omega \frac{\partial w}{\partial t} \sin \theta &= \frac{\partial P}{r \sin \theta \partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} \sin \theta &= \frac{\partial P}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\theta, \varphi$  обозначают географическую широту и долготу.

В применении к приливным движениям мы можем так же, как в случае задачи, относящейся к океану (§ 213), ввести различные упрощения. В частности, пренебрегая вертикальным ускорением, мы можем приближенно считать на основании последнего уравнения, что  $P$  может рассматриваться как величина, независимая от  $r$ , и что вместе с тем горизонтальные скорости  $u, v$  для всех частиц одной и той же вертикали практически будут одинаковыми<sup>1)</sup>. Если положить теперь  $r = a - z$ , то будем иметь в полярных координатах

$$P = \frac{c^2}{a \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} - c^2 \frac{\partial w}{\partial z} - gw - \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (10)$$

<sup>1)</sup> При более общем подходе к строению атмосферы приближенное допущение  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$  может быть заменено через

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial c^2}{\partial r} + (\gamma - 1) g \right\} x,$$

и тогда сходство с приливами в океанах становится менее точным.